ЛЕКЦИИ ПО СЛУЧАЙНИ ПРОЦЕСИ

Марусия Божкова

11 юни 2001 г.

Съдържание

Лекция 1

Понятие за стохастичен процес

В тази лекция си поставяме следните цели:

- да дадем понятие за стохастичен процес;
- да формулираме теоремата на Колмогоров;
- да дадем понятие за стационарност в тесен и широк смисъл;
- да дефинираме Гаусов процес.

1 Понятие за стохастичен процес

1.1 Спомени

Нека е зададено вероятностно пространство $\nu = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, където $\Omega \neq \emptyset$ е пространството от елементарни събития, $\mathcal{F}$ е σ алгебрата на сл. събития и $\mathbf{P}$ е вероятностната мярка.

Нека $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ и е такава, че за всеки интервал $(-\infty, x)$ множеството $A_x = \{\omega : \xi(\omega) < x\}$ е елемент на σ алгебрата $\mathcal{F}$, тогава ξ се нарича случайна величина.

Функцията $F_\xi(x) = \mathbf{P}(A_x) = \mathbf{P}(\xi < x)$ се нарича функция на разпределение (ф. р.) на ξ, а ако съществува $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$ се нарича плътност на разпределението на сл. в. ξ.

1.2 Определение за стохастичен процес

По-нататък с T ще се означава някое от множествата $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^n$.

Определение 1.1. *Стохастичен процес $\{\xi_t, t \in T\}$ ще наричаме съвкупност от случайни величини дефинирани в пространството ν.*

При фиксирано $\omega \in \Omega$, $\xi_t(\omega) : T \to \mathbf{R}$ е реална функция дефинирана в T, която се нарича траектория на процеса.

При всяко фиксирано $t \in T, \xi_t$ е сл. в. определена в пространството ν.

Определение 1.2. *При произволно фиксирано n, и произволен набор $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, съвместната функция на разпределение на сл.в. $(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n})$*

$$F_{\xi_{t_1},\ldots,\xi_{t_n}}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{P}(\xi_{t_1} < x_1, \ldots, \xi_{t_n} < x_n),$$

където $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ се нарича крайномерно разпределение на случайния процес ξ_t.

Когато $T = \mathbf{N}$ или $\mathbf{Z}$ процесът се нарича временен ред.

Пример 1.1. *1. Нека $T = \mathbf{Z}$ и $\xi_i : \mathbf{E}\xi_i = 0, \mathbf{Var}\xi_i < \infty$ и ξ_i са независими в съвкупност. Тогава семейството $\{\xi_i\}, i \in T$ образува случаен процес, който се нарича бял шум.*

2. Нека $T = \mathbf{N}$ и $\{\xi_i\}, i \in T$ образуват бял шум. Тогава $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ образуват сл. процес който се нарича случайно лутане.

3. Нека $T = \mathbf{R}$ и крайномерните разпределения са многомерни нормални разпределения. Тогава сл. процес се нарича Гаусов.

1.3 Теорема на Колмогоров

Теорема 1.1. *Нека $\{F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n), n \geq 1, t_k \in T\}$ е семейство от функции на разпределение,които удовлетворяват условията за съгласуваност:*

1. $F_{t_1,\ldots,t_n,t_{n+1},\ldots,t_{n+m}}(x_1, \ldots, x_n, \infty, \ldots, \infty) = F_{t_1,\ldots,t_n,}(x_1, \ldots, x_n)$,

2. $F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{t_{k_1},\ldots,t_{k_n}}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n})$,

където $(k_1, \ldots, k_n)$ е произволна пермутация на (1,...,n).

Тогава съществува вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и дефиниран на него стохастичен процес, който има за крайномерни разпределения функциите $F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n), n \geq 1$

Определение 1.3. *Казваме, че два процеса $\xi_t, \eta_t, t \in T$ дефинирани на вероятностното пространство ν са стохастически еквивалентни, ако за всяко $t \in T$*

$$\mathbf{P}(\omega : \xi_t(\omega) \neq \eta_t(\omega)) = 0.$$

Определение 1.4. *Ако $m(t) = \mathbf{E}\xi_t < \infty, \forall t \in T$, то автоковариационна матрица на процеса ξ_t наричаме матрицата $A = (A(t_i, t_j))$ с елементи $A(t_i, t_j) = Cov(\xi_{t_i}, \xi_{t_j}), t_i \neq t_j$.*

$(Cov(\xi_{t_i}, \xi_{t_j}) = \mathbf{E}[(\xi_{t_i} - \mathbf{E}\xi_{t_i})(\xi_{t_j} - \mathbf{E}\xi_{t_j})])$.

В случая, когато $t_i = t_j$, то $A(t_i, t_i) = \mathbf{Var}\xi_{t_i}$

Един стохастичен процес може да бъде зададен чрез крайномерните си разпределения или чрез автоковариационната си матрица.

Лема 1.1. *Ако $\{\xi_t, t \in T\}$ е стохастичен процес с ковариационна функция $A(t,s)$, тя е положително определена, т.е. за всеки $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R} \Rightarrow \langle Ax, x\rangle \geq 0$*

Определение 1.5. *Казваме, че процесът $\xi_t, t \in T$ е слабо стационарен, или стационарен в широк смисъл ако са изпълнени:*

1) $m(t) = const$;

2) Ковариационната функция $A(t,s) = R(|t-s|)$ зависи само от разликата $|t-s|$.

Определение 1.6. *Казваме, че процесът $\xi_t, t \in T$ е силно стационарен, или стационарен в тесен смисъл, ако за всяко $h > 0$ и произволни $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ е изпълнено:*

$$\mathbf{P}(\xi_{t_1+h} < x_1, \ldots, \xi_{t_n+h} < x_n) = \mathbf{P}(\xi_{t_1} < x_1, \ldots, \xi_{t_n} < x_n).$$

2 Гаусови процеси

Определят се напълно чрез математическото очакване и ковариационната матрица.

Теорема 1.2. *За всяка функция $m(t)$ и неотрицателно определена функция $A(t,s), t, s \in \mathbf{R}$, съществува единствен (по отношение на крайномерните разпределения) Гаусов процес $\{\xi_t,\ t \in \mathbf{R}\}$ с математическо очакване $m(t) = \mathbf{E}\xi_t$ и ковариация $Cov(\xi_s, \xi_t) = A(s,t)$.*

2.1 Винеров процес $\{w_t, t \in \mathbf{R}^+\}$

Определение 1.7. *Стохастичен процес $\{w_t, t \in \mathbf{R}^+\}$, за който:*

1) $w_0 = 0$;

2) $w_t - w_s \in N(0, |t-s|\sigma^2)$;

3) w_t е процес с независими нараствания, т.е. за произволни $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ сл. величини

$$w_{t_n} - w_{t_{n-1}}, w_{t_{n-1}} - w_{t_{n-2}}, \ldots, w_{t_2} - w_{t_1}$$

са независими в съвкупност;

4) Траекториите на процеса са непрекъснати по t за всяко ω.

Ако $\sigma = 1$ процесът се нарича стандартен Винеров процес.

Теорема 1.3. *Нека $\{w_t, t \in \mathbf{R}^+\}$ е винеров процес. Тогава съвместната му плътност има вида:*

$$f_{w_1,\ldots,w_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t_1}\sqrt{t_2-t_1}\ldots\sqrt{t_n-t_{n-1}}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right)$$

за всеки $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbf{R}^+$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$

Тук е означено $w_i = w_{t_i}$.

Следователно Винеровия процес е Гаусов.

Доказателство: Да разгледаме $\eta_k = w_k - w_{k-1}, k = 1, 2, \ldots, n$. Нека $\sigma = 1 \Rightarrow \eta_k \in N(0, |t_k - t_{k-1}|)$. Освен това η_k са независими сл.в. и накрая $w_{t_k} = \eta_1 + \ldots + \eta_k$. Тогава $f_{w_1,\ldots,w_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{\eta_1,\ldots,\eta_n}(x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1})$ като Якобианът на смяната е единица. Следователно

$$f_{\eta_1,\ldots,\eta_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{\eta_i}(y_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})^2}} e^{-\frac{y_i^2}{2(t_i - t_{i-1})}}.$$

Полагаме $y_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, \ldots, n$ и получаваме

$$f_{w_1,\ldots,w_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t_1}\sqrt{t_2 - t_1} \ldots \sqrt{t_n - t_{n-1}}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right)$$

□

Определение 1.8. *Казваме, че $\{\xi_t, t \in T\}$ е Марковски стохастичен процес, ако за $\forall s, t \in T : s < t$ условното математическо очакване*

$$\mathbf{E}(\xi_t | \xi_\tau, \tau \leq s) = \mathbf{E}(\xi_t | \xi_s),$$

т.е. при фиксирано настояще бъдещето не зависи от миналото.

2.2 Брауново движение

Движението на частици в течност (или газ). Дължи се на непрекъснатите удари на молекулите на течността (газа).

Нека с X_t означим x координатата на брауновата частица в момента t и нека $X_0 = 0$. $\{X_t, t \geq 0\}$ е стохастичен процес, като:

1) Траекториите му са непрекъснати;

2) Процесът е еднороден, т.е. разпределението на $X_{t+h} - X_t$ е еднакво с това на X_h.

Това означава, че разпределението на нарастването (на отместването) на частицата не зависи от момента t и може да се приеме, ако средата е хомогенна и законите за движение не се менят с времето.

3) X_t е с независими нараствания, т.е. ударите на частиците с молекулите на средата за различни интервали от време са независими.

От тези свойства заключаваме, че X_t е Винеров процес.

Теорема 1.4. *Нека $\{\xi_t, t \in \mathbf{R}^+\}$ удовлетворява следните условия:*

1) $\xi_0 = 0, \mathbf{E}\xi_t = 0, \forall t \in \mathbf{R}^+$;

2) ξ_t е с независими нараствания;

3) $\xi_{t+h} - \xi_t$ *е еднакво разпределена с* ξ_h *за всяко* $h > 0, t \in \mathbf{R}^+$ *(пишем* $\xi_{t+h} - \xi_t \stackrel{d}{=} \xi_h$*);*

4) ξ_t *има непрекъснати траектории;*

Тогава $\{\xi_t, t \geq 0\}$ *е Винеров процес.*

Доказателство: Нека с $f(x,t)$ да означим плътността на ξ_t и с $\Phi_h(x)$ - плътността на нарастването $\xi_{t+h} - \xi_t$. По формулата за пълната вероятност е налице следното съотношение:

$$f(x, t+h) = \int_{\mathbf{R}} f(x-\Delta, t)\Phi_h(\Delta)d\Delta,$$

което отразява факта, че за да има частицата абциса x в момента $t+h$ тя трябва да е била в точка с абциса $x-\Delta$ в момента t и за време h да е изменила абцисата си с Δ, където $\Delta \in \mathbf{R}$.

По формулата на Тейлор имаме:

$$f(x, t+h) \approx f(x,t) + h\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + o(h), \tag{1.1}$$

$$f(x-\Delta, t) \approx f(x,t) - \Delta\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + \frac{\Delta^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + o(\Delta^2),$$

Следователно

$$f(x,t+h) = \int_{\mathbf{R}}\left(f(x,t) - \Delta\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + \frac{\Delta^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + o(\Delta^2)\right)\Phi_h(\Delta)d\Delta$$

$$\approx f(x,t)\int_{\mathbf{R}}\Phi_h(\Delta)d\Delta - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\int_{\mathbf{R}}\Delta\Phi_h(\Delta)d\Delta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\int_{\mathbf{R}}\frac{\Delta^2}{2}\Phi_h(\Delta)d\Delta.$$

Като знаем, че $\int_{\mathbf{R}}\Phi_h(\Delta)d\Delta = 1$, защото $\Phi_h(\Delta)$ е плътност и $\int_{\mathbf{R}}\Delta\Phi_h(\Delta)d\Delta = \mathbf{E}(\xi_{t+h} - \xi_t) = \mathbf{E}\xi_{t+h} - \mathbf{E}\xi_t = 0 - 0 = 0$, получаваме:

$$f(x,t+h) \approx f(x,t) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\int_{\mathbf{R}}\frac{\Delta^2}{2}\Phi_h(\Delta)d\Delta. \tag{1.2}$$

Като приравним десните страни на (1.1) и (1.2), разделим на h и оставим $h \to 0$ получаваме (уравнение на дифузия):

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t),$$

където

$$D = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\mathbf{R}}\frac{\Delta^2}{2}\Phi_h(\Delta)d\Delta,$$

което се нарича коефициент на дифузия. $\square$

Задачата на Коши за уравнението на дифузията е:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t), \\ f(x,0) = \delta(x). \end{cases}$$

Тук функцията $\delta(x)$ се определя чрез $\delta(x) = 1$, при $x = 0$ и $\delta(x) = 0$, при $x \neq 0$.

Решението се дава с формулата на Поасон:

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{\mathbf{R}} f(x-y,0) e^{-\frac{y^2}{4Dt}} dy$$

или

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

Лекция 2

Експоненциално разпределение. Поасонов процес

В тази лекция си поставяме следните цели:

- да разгледаме свойствата на експоненциалното разпределение;
- да дефинираме Поасонов процес;
- да изучим някои свойства на Поасонов процес;

1 Допускания при математическото моделиране и ролята на експоненциалното разпределение.

При математическото моделиране на реални явления винаги е необходимо да се правят определени опростяващи предположения така, че моделът да може да се изследва математически. От друга стана тези опростявания не трябва да са прекалено много. тъй като моделът няма да може да бъде приложен за реални явления. Накратко, ние правим "достатъчно" такива допускания от математическа гледна точка и така, че да не се отдалечаваме от истинския реален обект.

Едно такова опростяване е допускането, че някои сл. в. са Exp разпределени (лесно се работи и често е добра апроксимация на актуалното разпределение.) Свойството, което го прави лесно да се работи с него е, че то не се променя с времето. Това означава, че ако времето на живот на някакъв елемент е Exp разпределено този елемент, независимо, че е работил определено време, той е толкова "добър", както и ако не е работил изобщо. (По отношение на времето което му остава докато окончателно откаже да работи.)

Ще формулираме строго това свойство и ще покажем, че Exp разпределение е единственото с това свойство.

2 Експоненциално разпределение

2.1 Определение

Непрекъснатата сл. в. $X \in Exp(\lambda), \lambda > 0$ ако има плътност:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \text{или ф.р. } F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Математическото очакване е $\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x) = 1/\lambda$.

Пораждащата функция на моментите е

$$\varphi(t) = \mathbf{E}e^{tX} = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda$$

и

$$\mathbf{E}X^2 = \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t)|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow \mathbf{Var}X = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2.2 Свойства на Exp разпределение

Казваме, че сл. в. X има разпределение без последействие (memoryless) ако

$$\mathbf{P}(X > s + t | X > t) = \mathbf{P}(X > s), \quad \forall s, t \geq 0,$$

или еквивалентно

$$\frac{\mathbf{P}(X > s + t, X > t)}{\mathbf{P}(X > t)} = \mathbf{P}(X > s).$$

Ако $X \in Exp(\lambda)$ то $\dfrac{\mathbf{P}(X > s + t, X > t)}{\mathbf{P}(X > t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbf{P}(X > s)$, следователно Exp разпределение е без последействие.

Пример 2.1. *Да допуснем, че времето, което човек прекарва в банката е $Exp(1/10)$, т.е. средно 10 min.*

a) Колко е вероятността, даден клиент да прекара повече от 15 min?

b) Колко е вероятността едни клиент да прекара поне още 15 min, ако се знае, че вече е престоял в банката 10 min?

Решение. *Нека X е сл. в. равна на времето на престой на случайно взет човек в банката. Тогава $X \in Exp(1/10)$.*

a) $\mathbf{P}(X > 15) = e^{-15\lambda} = e^{-15/10} \sim 0.220$.

b) $\mathbf{P}(X > 25 | X > 10) = e^{-15\lambda} = e^{-15/10} \sim 0.220$.

Пример 2.2. *В пощенски офис има две гишета за обслужване на клиентите. Г-н Иванов, влизайки в пощата вижда, че г-н Петров е на едното гише, а г-н Димов на другото. Да допуснем, че г-н Иванов ще бъде обслужен веднага след като бъде обслужен Петров или Димов. Ако времето за обслужване на един клиент е Exp разпределена сл. в. с параметър λ, колко е вероятността за това Иванов да напусне пощата последен от тримата? (Отг. 1/2).*

Оказва се, че Exp разпределение е единственото с това свойство. Нека $F(x)$ е ф.р. на сл. в.X без последействие и да означим $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbf{P}(X > x)$. Тогава $\bar{F}(s+t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t)$ за всеки $s, t \geq 0$, т.е. $\bar{F}$ е решение на функционалното уравнение $g(s+t) = g(s)g(t)$, което има единствено непрекъснато решение $e^{-\lambda t}$ с $\lambda = -\log g(1)$.

Свойството без последействие се илюстрира от т. нар. функция на загубите (failure rate function), $r(t)$, която се определя като $r(t) = \dfrac{f(t)}{\bar{F}(t)}$.

Нека X е сл. в. равна на времето на работа на една система. Интересуваме се от вероятността системата да откаже в интервала $(t, t+dt)$ ако работи в момента t, т. е.

$$\mathbf{P}(X \in (t, t+dt) | X > t) = \frac{\mathbf{P}(X \in (t, t+dt), X > t)}{\mathbf{P}(X > t)}$$

$$= \frac{\mathbf{P}(t < X < t+dt)}{\mathbf{P}(X > t)} = \frac{f(t)dt}{\bar{F}(t)} = r(t)dt,$$

т.е. $r(t)$ е условната вероятност за излизане от строя на системата преживяла време t.

Ако $X \in Exp(\lambda)$ то оставащото време на работа на тази система е еднакво разпределено с времето за работа на нова система. Тогава степента на отказ трябва да е постоянна. Действително $r(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$, т.е. функцията на загубите при Exp разпределение е постоянна. По тази причина λ може да се интерпретира още като степен на разпределението (тя е обратно пропорционална на средното).

Функцията $r(t)$ определя по единствен начин ф.р. $F(t)$, защото

$$r(t)dt = \frac{f(t)dt}{1 - F(t)} \Rightarrow \ \log \bar{F}(t) = -\int_0^t r(t)dt + k_1$$

или

$$\bar{F}(t) = ke^{-\int_0^t r(t)dt}.$$

При $t = 0$ се определя $k = 1$, така $\bar{F}(t) = e^{-\int_0^t r(t)dt}$.

Пример 2.3. *Хиперекспоненциално разпределени сл. в.: Нека $X_i \in Exp(\lambda_i), i = 1, \ldots, n$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$, при $i \neq j$ и сл. в. N е независима от $X_1, \ldots, X_n$, $\mathbf{P}(N = j) = p_j, j = 1, \ldots, n$ и $\sum_{j=1}^n p_j = 1$.*

Сл. в. X_N се нарича хиперекспоненциална и за нейното разпределение, по формулата за пълната вероятност имаме:

$$\bar{F}_{X_N}(t) = \mathbf{P}(X_N > t) =$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(X_N > t | N = j)\mathbf{P}(N = j) = \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(X_j > t)p_j = \sum_{j=1}^n e^{-\lambda_j t} p_j.$$

Къде възникват хиперекспоненциални сл.в.?

Да допуснем, че в една кутия има n типа батерии, където батериите от тип j имат време на живот λ_j. Нека относителният дял на батериите от тип j в кутията е $100p_j\%$. Ако изберем по случаен начин батерия от тази кутия, то нейното време на живот ще е хиперекспоненциално.

Като вземем в предвид, че $f_{X_N}(t) = -\bar{F}'_{X_N}(t)$ получаваме $f_{X_N}(t) = \sum_{j=1}^n p_j\lambda_j e^{-\lambda_j t}$. Нека $\lambda_i = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Определяме

$$r(t) = \frac{\sum_{j=1}^n p_j\lambda_j e^{-\lambda_j t}}{\sum_{j=1}^n e^{-\lambda_j t}p_j}.\frac{e^{-\lambda_i}}{\varepsilon^{-\lambda_i}}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^n p_j\lambda_j e^{-(\lambda_j-\lambda_i)t}}{\sum_{j=1}^n e^{-(\lambda_j-\lambda_i)t}p_j} = \frac{p_i\lambda_i + \sum_{j\neq i} p_j\lambda_j e^{-(\lambda_j-\lambda_i)t}}{p_i + \sum_{j\neq i} e^{-(\lambda_j-\lambda_i)t}p_j}.$$

Поради това, че $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall j \neq i$ то $(\lambda_j - \lambda_i) > 0, \forall j \neq i$. Следователно $\lim_{t\to\infty} r(t) = \frac{p_i\lambda_i}{p_i} = \lambda_i$, т.е. времето на живот на случайно избрана батерия клони към степента на загуба на Exp разпределение с най-малка степен на загуба. Интуитивно наистина е така, колкото по-дълго е работила батерията, толкова сме по-склонни да смятаме, че нейната степен на загуба е най-малка.

2.3 Други свойства на Exp разпределение

1. Ако сл. в. $X_1, \dots, X_n \in Exp(\lambda)$ и са независими то сл.в. $X = \sum_{i=1}^n X_i \in \Gamma(n, \lambda)$, т.е. $f_X(t) = \frac{\lambda e^{\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Доказателство: По индукция относно n :

$$f_{X_1+\dots+X_n}(t) = \int_0^t f_{X_1+\dots+X_{n-1}}(u) f_{X_n}(t-u)du = \int_0^n \frac{\lambda e^{-\lambda u}(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!}\lambda e^{-\lambda(t-u)}du$$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!}d(\lambda u) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

□

2. Ако $X_1 \in Exp(\lambda_1), X_2 \in Exp(\lambda_2)$ и са независими сл.в., каква е вероятността $\mathbf{P}(X_1 < X_2)$?

$$\mathbf{P}(X_1 < X_2) = \int_0^\infty \mathbf{P}(X_1 < X_2 | X_1 = x)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx =$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{P}(x < X_2)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx = \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}dx$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}d(\lambda_1+\lambda_2)x = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

3. Ако $X_1, \dots, X_2$ са независими експоненциално разпределени сл.в. ($X_i \in Exp(\mu_i), i = 1, \dots, n$), то $X = \min\{X_1, \dots, X_n\} \in Exp(\sum \mu_i)$.

$$\mathbf{P}(\min\{X_1,\ldots,X_n\} > x) = \mathbf{P}(X_1 > x, X_2 > x, \ldots, X_n > x)$$
$$= \mathbf{P}(X_1 > x)\mathbf{P}(X_2 > x)\ldots\mathbf{P}(X_n > x) = e^{-\mu_1 x}\ldots e^{-\mu_n x} = e^{-(\mu_1+\ldots+\mu_n)x}.$$

4. Сума на независими експоненциално разпределени сл.в. Нека $X_i \in Exp(\lambda_i)$, $i = 1,\ldots,n$ са независими и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тогава сл. в. $X = X_1 + \ldots + X_n$ се нарича хипоекспоненциална. За нейното разпределение имаме:

а) При $n = 2$

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_0^t f_{X_1}(s)f_{X_2}(t-s)ds = \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 s}\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-s)}ds =$$
$$= \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\int_0^t \varepsilon^{-(\lambda_1-\lambda_2)s}ds$$
$$= \frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1-\lambda_2}(1-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)t}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}.$$

б) По аналогичен начин се получава

$$f_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \sum_{i=1}^n C_{i,n}\lambda_i e^{-\lambda_i t},$$

където $C_{i,n} = \prod_{j\neq i}\frac{\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_i}$.

5. Сума на случаен брой експоненциално разпределени сл.в.

Нека $X_i \in Exp(\lambda_i), i = 1,\ldots,n$ са независими ел.в. и нека N е независима от тях сл.в. такава, че: $\mathbf{P}(N = n) = p_n, n = 1,2,\ldots,m$ и $\sum_{n=1}^m p_n = 1$. Разглеждаме сл.в.

$$Y = \sum_{n=1}^N X_i,$$

която се нарича сл.в. на Cox. За плътността на Y имаме:

$$f_Y(x) = \sum_{n=1}^m f_Y(x|N=n)\mathbf{P}(N=n) = \sum_{n=1}^m p_n f_{X_1+\ldots+X_n}(x)$$
$$= \sum_{n=1}^m p_n\sum_{i=1}^n C_{i,n}\lambda_i e^{-\lambda x}.$$

като е използвано и свойство 4.

3 Поасонов процес

3.1 Броящ процес

Определение 2.1. *Процесът* $\{N(t), t \geq 0\}$ *се нарича броящ процес, ако* $N(t)$ *е общият брой на сбъдванията (появяванията) на определено събитие в интервала* $[0, t]$.

Пример 2.4. *а)* $N(t)$ = *броя на купувачите влезли в един магазин от отварянето му до даден момент* t. *Събитието, което се сбъдва е влизането на купувач в магазина.*

$N(t)$ =*броя на купувачите, намиращи се в магазина в момента* t *не е броящ процес.*

б) Ако считаме, че явлението се сбъдва, когато се роди дете то $N(t)$ *е броящ процес.*

в) Броя на головете вкарани от един футболист от началото на кариерата му до даден момент t *също е броящ процес и т.н.*

От определението следва, че броящият процес удовлетворява следните условия:

(i) $N(t) \geq 0$;

(ii) $N(t)$ е целочислена величина за всяко t;

(iii) Ако $t > s \Rightarrow N(t) \geq N(s)$;

(iv) Ако $s < t \Rightarrow N(t) - N(s)$ е броят на сбъдванията на събитието в интервала (s, t).

Определение 2.2. *Броящият процес е с независими нараствания, ако броя на събитията сбъднали се в непресичащи се интервали от време са независими сл.в.*

- В пример а) логично е да се допусне, че процеса е с независими нараствания.

- В пример б) не е логично тъй като, колкото е по-голямо $N(t)$ толкова е по-голям броя на хората в населеното място и следователно броят на ражданията ще е по-голям, т.е. има зависимост между нарастванията.

- В пример в) може да се предполага независимост на нарастванията.

Определение 2.3. *Броящият процес е със стационарни нараствания, ако ф.р. на* $N(t_2+s) - N(t_1+s)$ *-броя на събитията сбъднали се в интервала* (t_1+s, t_2+s) *не зависи от* s *(положението на интервала върху оста на времето) за всеки* $t_2 > t_1 \geq 0$ *и* $s \geq 0$.

- В пример а) логично е да се допусне, че процеса е със стационарни нараствания, ако предположим, че няма пиков час.

- В пример б) логично е, ако допуснем, че човешката популация е константа.

- В пример в) не е логично, тъй като е по-вероятно играчът да вкарва повече голове на възраст 25-30 г., отколкото на 35-40 г.

3.2 Дефиниция на Поасонов процес

Един от най-важните броящи процеси е Поасоновият процес. Той се дефинира по следния начин:

Определение 2.4. *Процесът* $\{N(t), t \geq 0\}$ *се нарича Поасонов със степен* $\lambda > 0$, *ако*

(i) $N(0) = 0$;

(ii) има независими нараствания;

(iii) Броя на събитията във всеки интервал с дължина t *е Поасоново разпределена сл.в.* $(Po(\lambda t))$ *със средно* λt, *т.е. за* $\forall s, t \geq 0, \mathbf{P}(N(t+s) - N(t) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots$.

От (iii) следва, че Поасоновият процес има стационарни нараствания и освен това $\mathbf{E}N(t) = \lambda t$ (което обяснява, защо λ се нарича степен на процеса.)

За да определим дали един броящ процес е Поасонов трябва да проверим условията (i)-(iii).

(i) се проверява лесно;

(ii) обикновено следва от нашето елементарно познание за процеса;

(iii) не е ясно как да се провери. Затова една друга дефиниция на Поасонов процес се оказва по-полезна:

Определение 2.5. *Броящият процес* $\{N(t), t \geq 0\}$ *се нарича Поасонов със степен* $\lambda > 0$, *ако*

(i) $N(0) = 0$;

(ii) има стационарни и независими нараствания;

(iii) $\mathbf{P}(N(h) = 1) = \lambda h + o(h), h \to 0$;

(iv) $\mathbf{P}(N(h) > 2) = o(h), h \to 0$.

Теорема 2.1. *Определенията 2.4 и 2.5 са еквивалентни.*

Доказателство:

А. От Определение 2.4 $\Rightarrow$ Определение 2.5.

Нека $P_n(t) = \mathbf{P}(N(t) = n)$. Ще получим диференциално уравнение за $P_0(t)$ по следния начин:

$$P_0(t+h) = \mathbf{P}(N(t+h) = 0) = \mathbf{P}(N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0) =$$

(поради независимостта на нарастванията $N(t) = N(t) - N(0)$ и $N(t+h) - N(t)$)

$$= \mathbf{P}(N(t) = 0)\mathbf{P}(N(t+h) - N(t) = 0) = P_0(t)(1 - \lambda h + o(h)),$$

(защото от (ii-(iv) следва, че $\mathbf{P}(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$.)

Следователно

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = \lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}, h \to 0, \Rightarrow$$

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t).$$

Като се реши това уравнение с начално условие $P_0(0) = \mathbf{P}(N(0) = 0) = 1$ се получава, че

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{2.1}$$

При $n > 0$ имаме

$$P_n(t+h) = \mathbf{P}(N(t) = n, N(t+h)-N(t) = 0)+\mathbf{P}(N(t) = n-1, N(t+h)-N(t) = 1)+$$

$$+\sum_{n=2}^{n} \mathbf{P}(N(t) = n-k, N(t+h) - N(t) = k)$$

$$= \mathbf{P}(N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0) + \mathbf{P}(N(t) = n-1, N(t+h) - N(t) = 1) + o(h) =$$

$$P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + o(h) = P_n(t)(1 - \lambda h) + P_{n-1}(t)\lambda h + o(h)$$

$$\Rightarrow \frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}, h \to 0,$$

$$\Rightarrow P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t).$$

Умножаваме последното уравнение с $e^{\lambda t}$ и получаваме

$$e^{\lambda t}[P_n'(t) + \lambda P_n(t)] = e^{\lambda t}\lambda P_{n-1}(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_n(t)) = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t),$$

за всяко $n > 0$. Сега от (2.1) намираме

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}P_1(t)) = \lambda \Rightarrow P_1(t) = (\lambda t + c_1)e^{-\lambda t}$$

и тъй като $P_1(0) = 0$, то

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

По индукция относно n се намира, че $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$ за всяко $n \geq 2$.

Б. От Определение 2.4 $\Rightarrow$ 2.5. (Упражнение.?). $\square$

3.3 Разпределение на времето на чакане до първо появяване на събитие и времето между две последователни появявания на събитието в Поасонов процес.

Нека T_1 е момента на сбъдване на първото събитие и при $n > 1$, T_n е времето между $n-1$-то и n-то сбъдване на събитието. Редицата $\{T_n, n = 1, 2, \ldots\}$ се нарича редица на времената между сбъдванията на събитието.

Да намерим разпределенията на сл.в. T_n.

$$\mathbf{P}(T_1 > t) = \mathbf{P}(\text{не се е сбъднало нито веднъж събитието в интервала [0,t)}) =$$

$$= \mathbf{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \Rightarrow T_1 \in Exp(\lambda).$$

По-нататък $\mathbf{P}(T_2 > t) = \mathbf{E}[\mathbf{P}(T_2 > t|T_1)]$, но

$$\mathbf{P}(T_2 > t|T_1 = s) = \mathbf{P}(0 \text{ събития в интервала (s,s+t]}|T_1 = s)$$

$$= \mathbf{P}(0 \text{ събития в интервала (s,s+t]}) = e^{-\lambda t} \Rightarrow T_2 \in Exp(\lambda).$$

Предложение 2.1. *Сл. в. $T_n, n = 1, 2, \ldots$ са независими, еднакво разпределени с $Exp(\lambda)$ разпределение.*

Забележка 2.1. *Предположението за стационарност и независимост на нарастванията на Поасоновия процес е еквивалентно на твърдението, че във всеки момент от времето процесът започва отначало (стохастически еквивалентен).*

С други думи процесът, започвайки от произволен момент от време е независим от това, което се е случило до този момент (поради независимите нараствания) и има същото разпределение, както започвайки от началото(поради стационарността на нарастванията), т.е. процесът няма "памет" и следователно трябва да очакваме експоненциално разпределение на времето между последователните настъпвания на събитията.

Нека S_n е моментът на настъпване на $n-$то събитие, наречено още време на чакане до $n-$то сбъдване. Ясно е, че $S_n = T_1 + \ldots + T_n \Rightarrow S_n \in \Gamma(n, \lambda)$, т.е. $f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, t \geq 0$. По друг начин $F_{S_n}(t) = \mathbf{P}(S_n \leq t) = \mathbf{P}(N(t) \geq n) = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$. От тук след диференциране по t се получава отново плътността на сл. в. S_n.

Предложение 2.1 ни дава друг начин за дефиниране на Поасонов процес. Нека $T_n, n = 1, 2, \ldots$ са независими еднакво разпределени $Exp(\lambda)$ сл.в. Нека $S_0 = 0$ и $S_n = T_1 + \ldots + T_n, n = 1, 2, \ldots,$ Интерпретираме S_n като последователни моменти на настъпване на някакво събитие. Тогава броящият процес $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$ е Поасонов със степен λt.

3.4 Условни разпределения на времената за появяване

Да допуснем, че точно едно събитие се е сбъднало до момента t и искаме да намерим разпределението на времето на сбъдване на това събитие. От това, че Поасоновият процес има независими и стационарни нараствания е ясно, че във всеки подинтервал на $[0, t]$ с фиксирана дължина е равновероятно да се е сбъднало събитието. С други думи, моментът на появяване на събитието би трябвало да е равномерно разпределен в интервала $[0, t]$. Това лесно се проверява, т.е. за $s \le t$

$$\mathbf{P}(T_1 < s | N(t) = 1) = \frac{\mathbf{P}(T_1, N(t) = 1)}{\mathbf{P}(N(t) = 1)} =$$

$$\frac{\mathbf{P}(1 \text{ събитие в [0,s), 0 събития в [s,t]})}{\mathbf{P}(N(t) = 1)} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}(1 \text{ събитие в [0,s)})\mathbf{P}(0 \text{ събития в [s,t]})}{\mathbf{P}(N(t) = 1)} =$$

$$= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} . e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}.$$

За да обобщим тази формула ще имаме нужда от понятието наредена (порядкова) статистика.

Определение 2.6. *Нека $Y_1, \dots, Y_n$ са наблюдения на сл.в. Казва се че $Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$ са порядкови статистики съответстващи на $Y_1, \dots, Y_n$ ако $Y_{(k)}$ е $k-$та по големина стойност сред $Y_1, \dots, Y_n$.*

Пример 2.5. *Нека $Y_1 = 4, Y_2 = 5, Y_3 = 1 \Rightarrow Y_{(1)} = 1, Y_{(2)} = 4, Y_{(3)} = 5$*

Ако $Y_i, i = 1, \dots, n$ и са независими и еднакво разпределени сл.в. с вероятностна плътност $f()$, то съвместната плътност на наредените статистики $Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$ е $n! \prod_{i=1}^{n} f(y_i), y_1 < y_2 < \dots, < y_n$.

Това следва от:

(i) $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)})$ ще е равно на $(y_1, \dots, y_n)$, ако е една от $n!$ възможни пермутации на $(y_1, \dots, y_n)$.

(ii) Вероятността за това, че $(Y_1, \dots, Y_n) = (y_{i_1}, \dots, y_{i_n})$ е

$$\prod_{j=1}^{n} f(y_{n_j}) = \prod_{j=1}^{n} f(y_j),$$

когато $i_1, \dots, i_n$ е пермутация на $1, \dots, n$.

Ако $Y_i, i = 1, \dots, n$ са равномерно разпределени в интервала $(0, t)$ то съвместната плътност на порядковите статистики $Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$ е

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{n!}{t^n}, 0 < y_1 < \dots < y_n < t.$$

Теорема 2.2. *Ако $N(t) = n$ то моментите на пристигане $S_1, S_2, \dots, S_n$ имат същото разпределение, както наредените статистики съответни на n независими сл. в. равномерно разпределени в интервала $(0, t)$.*

Забележка 2.2. $\xi \in U(0, t) \iff$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & x \in (0, t), \\ 0, & x \bar{\in} (0, t). \end{cases}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x/t, & x \in (0, t), \\ 1, & x \ge t. \end{cases}$$

Доказателство: За да получим условната плътност на $S_1, S_2, \ldots, S_n$ при условие, че $N(t) = n$ да забележим, че за $0 < s_1 < \ldots < s_n < t$ събитието $\{S_1 = s_1, \ldots, S_n = s_n, N(t) = n\}$ е еквивалентно на събитието

$$\{T_1 = s_1, T_2 = s_2 - s_1, T_3 = s_3 - s_2, \ldots, T_n = s_n - s_{n-1}, T_{n+1} > t - s_n\}.$$

Като използуваме, че $T_i, i = 1, 2, \ldots, n$ са независими сл.в. и еднакво разпределени $Exp(\lambda)$ получаваме

$$f(s_1, s_2, \ldots, s_n | n) = \frac{f(s_1, s_2, \ldots, s_n, n)}{\mathbf{P}(N(t) = n)} =$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda s_1} \lambda e^{-\lambda(s_2 - s_1)} \ldots e^{-\lambda(s_n - s_{n-1})} e^{-\lambda(t - s_n)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!} = \frac{n!}{t^n}, 0 < s_1 < \ldots < s_n < t.$$

□

Забележка 2.3. *Полученият резултат може да се преформулира по следния начин: При условие, че n събития са се сбъднали в интервала $(0, t)$, моментите на сбъдване $S_1, S_2, \ldots S_n$ разгледани като ненаредени случайни величини са разпределени независимо и равномерно в интервала $(0, t)$.*

4 Обобщения на Поасоновия процес - сложен и нехомогенен Поасонов процес

4.1 Сложен поасонов процес

Определение 2.7. *Процесът $X(t), t \geq 0$ се нарича сложен Поасонов процес, ако*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, t \geq 0,$$

където $\{N(t), t \geq 0\}$ е Поасонов процес и $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ е редица от независими еднакво разпределени сл.в. независими от процеса $N(t)$.

При фиксирано t сл.в. $X(t)$ се нарича сложна Поасонова сл.в.

Пример 2.6. *(i) Нека $Y_n \equiv 1, n = 0, 1, 2, \ldots \Rightarrow X(t) \equiv N(t)$.*

(ii) Нека за някакво спортно събитие пристигат зрители с автобуси. Нека пристигането на автобус е събитието в един Поасонов процес $N(t)$, а броят на хората в автобусите $Y_1, Y_2, \ldots$ са н.е.р. сл. в. Тогава броят на хората пристигнали до даден момент е сложен Поасонов процес.

(iii) Нека купувачите напускат един супермаркет в съответствие с Поасонов процес $N(t)$. Ако Y_i са парите похарчени от $i-$тия купувач, то сумата която се е натрупала в касите на супермаркета образува сложен Поасонов процес.

Задача 2.1. *Да пресметнем* $\mathbf{E}X(t)$ *и* $\mathbf{Var}X(t)$.

Решение: За $\mathbf{E}X(t)$ имаме $\mathbf{E}X(t) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X(t)|N(t)))$, но

$$\mathbf{E}(X(t)|N(t)=n) = \mathbf{E}(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i|N(t)=n) = \mathbf{E}(\sum_{i=1}^{n} Y_i) = n\mathbf{E}Y_1.$$

Следователно $\mathbf{E}(X(t)|N(t)) = N(t)\mathbf{E}Y_1$, т.е.

$$\mathbf{E}X(t) = (\mathbf{E}N(t))(\mathbf{E}Y_1) == \lambda t\mathbf{E}Y_1.$$

За пресмятането на $\mathbf{Var}X(t)$ ще използуваме следната формула за условна дисперсия

$$\mathbf{Var}X(t) = \mathbf{E}(\mathbf{Var}(X(t)|N(t))) + \mathbf{Var}(\mathbf{E}(X(t)|N(t))).$$

$$\mathbf{Var}(X(t)|N(t)=n) = \mathbf{Var}(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i|N(t)=n) = \mathbf{Var}(\sum_{i=1}^{n} Y_i) = n\mathbf{Var}Y_1,$$

(последното равенство е изпълнено поради независимостта на Y_i).

Така $\mathbf{Var}(X(t)|N(t)) = N(t)\mathbf{Var}Y_1$. Следователно

$$\mathbf{Var}X(t) = \mathbf{E}(N(t)\mathbf{Var}Y_1) + \mathbf{Var}(N(t)\mathbf{E}Y_1) =$$
$$= \lambda t\mathbf{Var}Y_1 + (\mathbf{E}Y_1)^2\mathbf{Var}N(t) = \lambda t\mathbf{Var}Y_1 + (\mathbf{E}Y_1)^2\lambda t =$$
$$= \lambda t[\mathbf{Var}Y_1 + (\mathbf{E}Y_1)^2] = \lambda t\mathbf{E}(Y_1^2).$$

Използвано е, че $\mathbf{Var}N(t) = \lambda t$ тъй като $N(t) \in Po(\lambda t)$.

4.2 Нехомогенен Поасонов процес

Нехомогенен Поасонов процес е Поасонов процес, за който е нарушено условието за стационарност. Това се получава, ако допуснем, че степента на появяване на събитието в момент t е функция на времето.

Определение 2.8. *Поасоновият процес* $\{N(t), t \geq 0\}$ *се нарича нехомогенен с функция на интензивност* $\lambda(t), t \geq 0$, *ако:*

(i) $N(0) = 0$;

(ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ *е с независими нараствания;*

(iii) $\mathbf{P}(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h), h \to 0$;

(iv) $\mathbf{P}(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h), h \to 0$.

Ако положим $m(t) = \int_0^t \lambda(x)dx \Rightarrow$

$$\mathbf{P}(N(t+s) - N(t) = n) = e^{-(m(t+s)-m(t))}\frac{[m(t+s)-m(t)]^n}{n!}, n \geq 0. \tag{2.2}$$

или с други думи, броят на събитията сбъднали се в интервала $(t, t+s)$, $N(t+s) - N(t) \in Po(m(t+s) - m(t))$ и освен това $N(t) \in Po(m(t))$.

Забележка 2.4. *Ако* $\lambda(t) = \lambda$ *то* $m(t) = \lambda t$ *и тогава* $N(t+s) - N(t) \in Po(\lambda s)$.

Доказателство: (На (2.2). Ще го докажем само за $n = 0$. Нека t е фиксирано и нека $P_n(s) = \mathbf{P}(N(t+s) - N(t) = n)$. Тогава

$$P_0(s+h) = \mathbf{P}(N(t+s+h) - N(t) = 0) =$$

$$= \mathbf{P}(0 \text{ събития в интервала}(t, t+s), 0 \text{ събития в интервала}[t+s, t+s+h]) =$$

$$= \mathbf{P}(0 \text{ събития в интервала}(t, t+s))\mathbf{P}(0 \text{ събития в интервала}[t+s, t+s+h]) =$$

$$= P_0(s)(1 - \lambda(t+s)h + o(h)), h \to 0.$$

Следователно

$$\frac{P_0(t+s) - P_0(s)}{h} = -\lambda(t+s) + \frac{o(h)}{h}, h \to 0, \Rightarrow$$

$$P_0'(s) = -\lambda(t+s)P_0(s).$$

Като се реши последното диференциално уравнение се намира

$$P_0(s) = e^{-(m(t+s)-m(t))}.$$

$\square$

Важността на нехомогенния Поасонов процес идва от това, че повече не искаме стационарност на нарастванията. По този начин ние допускаме възможността събитието да бъде по-вероятно в едни моменти от време, отколкото в други.

Нека S_n е момента на $n-$то появяване на събитието в нехомогенен Поасонов процес. Тогава за неговата плътност имаме:

$$\mathbf{P}(t < S_n < t+h) = \mathbf{P}(N(t) = n-1,\ 1 \text{ събитие в}(t, t+h)) + o(h) =$$

$$\mathbf{P}(N(t) = n-1)\mathbf{P}(1 \text{ събитие в}(t, t+h)) + o(h)$$

$$= e^{-m(t)}\frac{(m(t))^{n-1}}{(n-1)!}[\lambda(t)h + o(h)] + o(h)$$

$$= \lambda(t)e^{-m(t)}\frac{(m(t))^{n-1}}{(n-1)!}h + o(h).$$

Следователно

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t)e^{-m(t)}\frac{(m(t))^{n-1}}{(n-1)!},\ m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds.$$

4.3 Разпределение на функции от Поасонов процес

Често се налага да знаем разпределението на някъква функция $f(N(t))$, както при фиксирано t така и при $t \to \infty$.

Теорема 2.3. *Нека $N(t), t \geq 0$ е Поасонов процес с параметър λ. Тогава при $t \to \infty$ ф.р. на сл.в. $\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}}$ клони към стандартно нормално разпределение, т.е.*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

Доказателство: Поради това, че $N(t) \in Po(\lambda t)$ тя има характеристична функция $\varphi_{N(t)}(z) = \mathbf{E}e^{iN(t)z} = e^{\lambda t(e^{iz}-1)}$. Следователно $\xi_t = \frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}}$ ще има характеристична функция

$$\varphi_{\xi_t}(z) = e^{-iz\sqrt{\lambda t}} \varphi_{N(t)}(\frac{z}{\sqrt{\lambda t}})$$

или

$$\log \varphi_{\xi_t}(z) = -iz\sqrt{\lambda t} + \lambda t(e^{iz/\sqrt{\lambda t}} - 1).$$

Като използуваме развитието на $e^{iz/\sqrt{\lambda t}}$ в ред на Тейлор намираме:

$$\log \varphi_{\xi_t}(z) = -iz\sqrt{\lambda t} + \lambda t(1 + \frac{iz}{\sqrt{\lambda t}} - \frac{z^2}{2\lambda t} + \ldots - 1)$$

или

$$\log \varphi_{\xi_t}(z) \to -\frac{z^2}{2},\ t \to \infty,$$

но тогава

$$\varphi_{\xi_t}(z) \to e^{-\frac{z^2}{2}},\ t \to \infty,$$

а $e^{-z^2/2}$ е характеристичната функция на стандартното нормално разпределение. Тогава по теоремата за непрекъснатост при характеристичните функции следва твърдението на теоремата. □

Забележка 2.5. *Интересно е, че при $\lambda \to \infty$ отново $\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \to N(0,1)$.*

Лекция 3

Винеров процес

В тази лекция си поставяме следните цели:

- да решим няколко задачи за Винеров процес;
- да дефинираме непрекъснатост и диференцируемост на сл. процес при различни видове сходимост;
- да дадем достатъчни условия за непрекъснатост и диференцируемост;
- да проверим тези условия за Винеров и Поасонов процес.

1 Няколко задачи

От първата лекция знаем, че Винеров процес е сл. процес, който удовлетворява следните условия:

1) $X(0) = 0$;

2) Процесът е стационарен и с независими нараствания;

3) $X(t) \in N(0, \sigma^2 t)$;

4) Траекториите са непрекъснати по t за всяко ω.

Доказахме, че плътността $f(t, x)$ на $X(t)$ удовлетворява уравнението на дифузията:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \\ \\ f(x, 0) = \delta(x) = \mathbf{P}(X(0) = 0) = 1. \end{cases}$$

При $\sigma = 1$ се получава стандартен Винеров процес.

Задача 3.1. *Нека $\{X(t), t \geq 0\}$ е Винеров процес. Докажете, че при $s_1 < s_2 < \ldots < s_m < s < t$ нарастването $X(t) - X(s)$ не зависи от $X(s_1), \ldots, X(s_m)$ и $X(s)$ и*

$$\mathbf{E}(X(t) - X(s)) = 0, \ \mathbf{Var}(X(t) - X(s)) = \sigma^2(t - s).$$

Решение: Имаме

$$\{X(s_1) = x_1, \ldots, X(s_m) = x_m, X(s) = x, X(t) = y\} =$$

$$\{X(s_1) = x_1, X(s_2) - X(s_1) = x_2 - x_1, \ldots, X(t) - X(s) = y - x\} \overset{\text{стац.}}{=}$$

$$\{X(s_1) = x_1, X(s_2 - s_1) = x_2 - x_1, \ldots, X(t - s) = y - x\}.$$

Тогава

$$\mathbf{P}(X(t) < y | X(s_1) = x_1, \ldots, X(s) = x) =$$

$$\mathbf{P}(X(t-s) < y - x | X(s_1) = x_1, \ldots, X(s) = x\} = \mathbf{P}(X(t-s) < y - x) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \int_{-\infty}^{y-x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2(t-s)}} du.$$

Следователно Винеровият процес е марковски, т.е. настоящето не зависи от миналото.

Задача 3.2. *Нека $X(t)$ е Винеров процес. Покажете, че нарастванията $X(t) - X(s)$ не зависят от миналото и имат математическо очакване 0 и, че $X(t) - X(s) \in N(0, \sigma^2(t-s))$.*

Задача 3.3. *При $s < t$ намерете $\mathbf{P}(X(s) < x | X(t) < y) =?$*

Решение: Без ограничение на общността можем да предположим, че $\sigma = 1$. Тогава

$$f_{X(s)|X(t)}(x|y) = \frac{f_{X(s)}(x) f_{X(t)-X(s)}(y-x)}{f_{X(t)}(y)} =$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{1}{2}[\frac{x^2}{s} + \frac{(y-x)^2}{t-s}]}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{t}}} = ke^{-\frac{x^2}{2s} - \frac{(y-x)^2}{2(t-s)}} =$$

$$Ce^{-x^2[\frac{1}{2s} + \frac{1}{2(t-s)} + \frac{xy}{t-s}]} = Ce^{-x^2[\frac{t+2sxy}{2s(t-s)}s]} = de^{-\frac{(x - y\frac{s}{t})^2}{2\frac{s}{t}(t-s)}}.$$

Така получихме нормално разпределение, следователно

$$\mathbf{E}(X(s)|X(t) = y) = \frac{s}{t}y, \ \mathbf{Var}(X(s)|X(t) = y) = \frac{s}{t}(t-s).$$

Задача 3.4. *В състезание между двама велосипедисти нека $Y(t)$ е времето в секунди, което състезателят A изпреварва състезателя B, когато е изминало време $t \in [0,1]$. Нека $Y(t), t \in [0,1]$ е Винеров процес с дисперсия σ^2.*

а) Ако състезателят A води със σ секунди по средата на състезанието $t = 1/2$, то намерете вероятността, че той е победител в края на състезанието.

б) Ако A побеждава със σ секунди пред B, каква е вероятността, той да е по-напред и в средата на състезанието (т.е. при $t = 1/2$), или $\mathbf{P}(Y(1/2) > 0|Y(1) = \sigma) =$?

Упътване $\Phi(\sqrt{2}) = 0.92, \Phi(1) = 0.84$.

Решение: а)

$$\mathbf{P}(Y(1) > 0|Y(1/2) = \sigma) = \mathbf{P}(Y(1) - Y(1/2) > -\sigma|Y(1/2) = \sigma) \overset{\text{незав.нар}}{=}$$

$$\mathbf{P}(Y(1) - Y(1/2) > -\sigma) \overset{\text{стац.}}{=} \mathbf{P}(Y(1/2) > -\sigma) =$$

Но $Y(1/2) \in N(0, \sigma^2/2) \Rightarrow \dfrac{Y(1/2)}{\sigma/\sqrt{2}} \in N(0,1)$ и продължавайки веригата от равенства, намираме

$$= \mathbf{P}(\frac{Y(1/2)}{\sigma\sqrt{2}} > -\sqrt{2}) = 1 - \mathbf{P}(\frac{Y(1/2)}{\sigma\sqrt{2}} < -\sqrt{2}) =$$

$$1 - \Phi(-\sqrt{2}) = \Phi(\sqrt{2}) = 0.92.$$

б) За упражнение.

2 Момент на първо достигане на ниво

Нека τ_a е първият момент, в които Винеров процес w_t пресича нивото a, т.е.

$$\tau_a = \inf\{t : w_t \geq a\}.$$

Ще намерим разпределението на τ_a. Имаме, че

$$\{\tau_a\} = \{\max_{0 \leq s \leq t} w_s > a\}$$

и ще решаваме тази задача чрез използуване на разпределението на w_t.

По формулата за пълната вероятност имаме

$$\mathbf{P}(w_t \geq a) = \mathbf{P}(w_t \geq a|\tau_a \leq t).\mathbf{P}(\tau_a \leq t) + \mathbf{P}(w_t \geq a|\tau_a > t)\mathbf{P}(\tau_a > t).$$

Но

$$\mathbf{P}(w_t \geq a|\tau_a > t) = \frac{\mathbf{P}(w_t \geq a; \tau_a > t)}{\mathbf{P}(w_t \geq a)} = 0,$$

следователно

$$\mathbf{P}(w_t \geq a) = \mathbf{P}(w_t \geq a|\tau_a \leq t).\mathbf{P}(\tau_a \leq t) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(\tau_a \leq t),$$

като последното равенство следва от непрекъснатостта на траекториите на Винеровия процес. При условие $\tau_a \leq t$ и изходното състояние е $w_{\tau_a} = a$ в следващото си движение брауновата частица при $t \geq \tau_a$ равновероятно преминава наляво или надясно от изходната точка $w_{\tau_a} = a$. Следователно (поради това, че $w_t \in N(0, t\sigma^2)$),

$$\mathbf{P}(\tau_a \leq t) = 2\mathbf{P}(w_t \geq a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2t}} dx =$$

Като направим смяна на променливите в интеграла ($x = y\sqrt{y},\ dx = \sqrt{t}dy$), продължаваме веригата от равенства

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 2[1 - \Phi(a/\sqrt{t})].$$

Така

$$\mathbf{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} w_s \geq a) = \mathbf{P}(\tau_a < t) = 2[1 - \Phi(a/\sqrt{t})].$$

Забележка 3.1. *Равенството* $\mathbf{P}(\max_{0 \leq s \leq t} w_s \geq a) = 2\mathbf{P}(w_t \geq a)$ *се нарича принцип на отражението.*

Задача 3.5. *Намерете* $\mathbf{Cov}(w_t, w_s) =?,\ \forall s, t.$

Решение: $\mathbf{Cov}(w_t, w_s) = \mathbf{E}[(w_t - \mathbf{E}w_t)(w_s - \mathbf{E}w_s)] = \mathbf{E}(w_s w_t)$.

а) Нека $t > s \Rightarrow$

$$\mathbf{Cov}(w_t, w_s) = \mathbf{E}(w_t w_s) = \mathbf{E}[(w_t - w_s)(w_s - w_0) + w_s^2] = \mathbf{E}w_s^2 = s,$$

тъй като $\mathbf{Var}w_s = \mathbf{E}w_s^2 - (\mathbf{E}w_s)^2 = \mathbf{E}w_s^2$ и $\mathbf{Var}w_s = \sigma^2 s = 1.s = s$.

б) При $s > t$ аналогично получаваме $\mathbf{Cov}(w_t, w_s) = \mathbf{E}w_t = t, \Rightarrow$

$$\mathbf{Cov}(w_t, w_s) = \min(t, s).$$

Свойство на Винеровия процес: Винеровият процес е квадратично интегруем процес, т.е.

$$\mathbf{E}(w_t - w_s)^2 = \mathbf{E}(w_t^2 - 2w_t w_s + w_s^2) = t - 2\mathbf{E}(w_t w_s) + s = t + s - \min(t, s) < \infty.$$

Определение 3.1. *Винеров процес* $X(t)$ *с тренд* μ *наричаме процес за който:*

1) $X(0) = 0$, *п.с.;*

2) има стационарни и независими нараствания;

3) $X(t) \in N(\mu t, \sigma^2 t)$.

Ако w_t е стандартен Винеров процес, то $X(t) = \mu t + \sigma w_t$.

3 Свойства на траекториите на Винеровия процес

Лема 3.1. *(Мартингално свойство на Винеров процес)*

$$\mathbf{E}(w_t|w_u, 0 \le u \le s \le t) = w_s.$$

Доказателство:

$$\mathbf{E}(w_t - w_s + w_s|w_s) = \mathbf{E}(w_t - w_s|w_s) + \mathbf{E}(w_s|w_s) \overset{\text{нез.нар.}}{=} \mathbf{E}(w_t - w_s) + w_s = 0 + w_s = w_s,$$

което означава, че Винеровият процес е мартингал. □

Лема 3.2. *(Без доказателство) Траекториите на Винеровия процес са с неограничена вариация.*

Лема 3.3. *(Недиференцируемост) Нека $w_t, t \in \mathbf{R}^+$ е стандартен Винеров процес. Диференчното частно $\dfrac{w_{t+h} - w_t}{h}$ е разходящо при $h \to 0$ относно сходимост по разпределение.*

Доказателство: Очевидно $\dfrac{w_{t+h} - w_t}{h} \in N(0, \dfrac{1}{|h|})$. Тогава за произволно $k > 0$ е изпълнено:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{w_{t+h} - w_t}{h}\right| > k\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{k\sqrt{h}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \to 1, \quad h \to 0,$$

т.е. частното не е сходящо по разпределение. □

4 Непрекъснатост - дефиниции

За да продължим по-нататък със свойствата на Винеровия процес ще дадем няколко общи дефиниции за непрекъснатост, диференцируемост и интегруемост на сл. процеси. Нека отново напомним понятието за непрекъснатост на случаен процес поради неговата изключителна важност.

4.1 Непрекъснатост п.с.

Определение 3.2. *Сл. процес $\xi(t), t \in [a, b]$ се нарича непрекъснат (непрекъснат с вероятност 1), ако почти всички негови траектории са непрекъснати функции в $[a, b]$. (Това означава, че за отделни елементарни събития ω траекторията може да се окаже прекъсната, но множеството A от тези ω е измеримо, т.е. A принадлежи на сигма-алгебрата на сл. събития и $\mathbf{P}(A) = 0$.)*

Има различни критерии за непрекъснатост, но ние ще дадем, без доказателство, един от първите в това направление, доказан от Колмогоров в началото на 30-те години на миналия век, а именно:

Теорема 3.1. *Ако съществуват положителни числа p, r и C, такива, че за произволни $t_1, t_2 \in [a, b]$ е изпълнено неравенството*

$$\mathbf{E}[|\xi(t_2) - \xi_(t_1)|^p] \leq C|t_2 - t_1|^{1+r},$$

то процесът $\xi(t), t \in [a, b]$ е непрекъснат.

Пример 3.1. *Винеровият процес $w_t, t \geq 0$ е непрекъснат. Действително $\mathbf{E}[|w_t - w_s|^4] = 3|t - s|^2$.*

Сега ще се спрем по-подробно на понятието непрекъснатост. Да запишем неравенството на Марков за Винеровия процес

$$\mathbf{P}(|w_t - w_s| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}[|w_t - w_s|^2]}{\varepsilon^2} = \frac{|t - s|}{\varepsilon^2},$$

от което при s фиксирано и $t \to s$ следва, че $\mathbf{P}(|w_t - w_s| \geq \varepsilon) \to 0$ за всяко $\varepsilon > 0$ и всяко $s \geq 0$.

Тогава възниква такъв въпрос: Дали сл. процес $\xi(t),\ t \in [a, b]$ е непрекъснат, ако е известно, че при $\forall\varepsilon > 0$ и $s \in [a, b]$ имаме $\mathbf{P}(|\xi(t) - \xi(s)| \geq \varepsilon) \to 0$, при $t \to s$?

Отговорът е отрицателен, а такъв пример е Поасоновия процес $\pi_t, t \geq 0$ с параметър λ. Наистина $\mathbf{E}[|\pi_t - \pi_s|] = \lambda|t - s|$ и от неравенството на Чебишов следва, че

$$\mathbf{P}[|\pi_t - \pi_s| \geq \varepsilon] \leq \frac{\lambda|t - s|}{\varepsilon},$$

което при $t \to s$ клони към 0, а траекториите на Поасоновия процес са стъпаловидни функции с единични скокове (т.е. не са непрекъснати).

4.2 Стохастична непрекъснатост

Целта на направеното разсъждение беше да покажем, че може да се въведе по-слаба от дефинираната вече сходимост (непрекъснатост) с вероятност 1.

Определение 3.3. *Сл. процес $\xi(t), t \in T$ се нарича стохастично непрекъснат в т. $t_0 \in T$, ако за $\forall\varepsilon > 0$*

$$\mathbf{P}(|\xi(t) - \xi(t_0)| \geq \varepsilon) \to 0, \text{ при } t \to t_0. \tag{3.1}$$

Ако (3.1) е изпълнено за всички $t \in T$, то казваме, че процесът е стохастично непрекъснат в T. Тъй като с (3.1) се дефинира сходимост по вероятност, то вместо стохастична непрекъснатост казваме по-кратко $\mathbf{P}-$непрекъснатост.

Пример 3.2. *Поасоновият процес $\pi_t, t \geq 0$ е $\mathbf{P}-$непрекъснат.*

От връзката между сходимост почти сигурно и сходимост по вероятност, следва, че ако един процес е непрекъснат, то той е и $\mathbf{P}-$непрекъснат. Обратното не е вярно (Поасоновият процес!)

Ще отбележим специално, че $\mathbf{P}-$непрекъснатостта на процеса $\xi(t), t \in T$ е едно слабо изискване, но от друга страна тя е непосредствено свързана с такива важни негови свойства като *сепарабелност* и *измеримост*.

Ако сл. процес $\xi(t), t \in T$ е $\mathbf{P}-$непрекъснат, то при широки предположения съществува процес $\tilde{\xi}(t), t \in T$, който е сепарабелен, измерим и еквивалентен на дадения.

От дадените по-горе дефиниции е ясно, че $\mathbf{P}-$непрекъснатостта е свързана с локалното поведение на сл. процес в отделни моменти от времето, докато непрекъснатостта с вероятност 1 е една глобална характеристика.

4.3 Сепарабелност

Ще се спрем само накратко без доказателства, тъй като не се използува понататък.

Нека е даден един произволен процес $\xi(t), t \in T \subseteq \mathbf{R}$. Когато времето T е "непрекъснато", т.е. T е неизброимо, за редица интересни събития не може да се каже дали са измерими или не и съответно не може да се пресмята тяхната вероятност. Например $A = \{\omega : \sup_{t\in[a,b]} \xi_t(\omega) \leq C\}$ или $B_{t_0} = \{\omega : \xi_t(\omega)$ е непр. в $t_0\}$ и т.н.

Очевидно $A = \bigcap_{t\in[a,b]}\{\xi_t \leq C\}$, т.е. не е изброимо сечение на измерими множества $\{\xi_t \leq C\}$ и не може да се каже, че е измеримо в общия случай. Тези проблеми се решават с помощта на понятието сепарабелност и целта е като ограничим класа на разглежданите процеси до сепарабелните, посочените събития стават измерими.

Определение 3.4. *За процеса $\xi_t, t \in \mathbf{R}$ казваме, че е сепарабелен, ако съществува изброимо множество $S \subseteq \mathbf{R}$ и $\mathbf{P}-$ нулево множество N, така, че за произволен отворен интервал $\Delta \subseteq \mathbf{R}$ и произволно затворено множество $F \subseteq \mathbf{R}$*

$$\{\omega : \xi_t(\omega) \in F, t \in \Delta\}\Delta\{\omega : \xi_t(\omega) \in F, t \in \Delta \bigcap S\} \subseteq N,$$

където $A\Delta B = A\setminus B + B\setminus A$ означава симетричната разлика на множествата A и B.

Забележка 3.2. *Когато вероятностното пространство е пълно, то очевидно е, че от $A, N \in \mathcal{F}, \mathbf{P}(N) = 0$ и $A\Delta B \subseteq N$ следва, че B също е измеримо.*

Определение 3.5. *Вероятностното пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ се нарича пълно, ако от $B \subseteq A$ следва, че B е измеримо за произволно $\mathbf{P}-$нулево множество A. Казва се още, че сигма алгебрата $\mathcal{F}$ е пълна относно $\mathbf{P}$.*

4.4 Необходими и достатъчни условия за непрекъснатост

Нека сега отново да се върнем към непрекъснатостта на Гаусовите процеси. Нека $\xi(t), t \in [a,b]$ е Гаусов процес със средно $\mathbf{E}\xi(t) = a(t)$ и дисперсия $\mathbf{Var}\xi(t) = \sigma^2(t)$. За характеристичната функция $\phi_t(z)$ на $\xi(t)$ имаме

$$\phi_t(z) = \mathbf{E}(e^{-iz\xi(t)}) = \exp(iza(t) - \frac{1}{2}z^2\sigma^2(t)).$$

Нека даденият процес е непрекъснат. Тогава не е трудно да се покаже, че $\phi_t(z)$ е непрекъсната функция на t за всяко z. Следователно $\ln \phi_t(z)$ е непрекъсната и също функциите

$$\sigma^2(t) = \frac{\ln \phi_t(z) + \ln \phi_t(-z)}{-z^2},\ a(t) = \frac{\ln \phi_t(z) + \frac{z^2}{2}\sigma^2(t)}{iz}.$$

Необходимо условие Гаусовият процес да е непрекъснат е функциите $a(t)$ и $\sigma^2(t)$ да са непрекъснати.

Достатъчни условия за непрекъснатост. Нека $a(t) = \mathbf{E}\xi(t) = 0$ (ако $\mathbf{E}\xi(t) \neq 0$, ще разгледаме $\xi(t) - a(t)$.), а корелационната функция на процеса е $K(t,s)$. Тогава

$$\begin{cases} \mathbf{E}[(\xi(t) - \xi(s))^2] = K(t,t) - 2K(t,s) + K(s,s) \equiv \Delta K, \\ \mathbf{E}[(\xi(t) - \xi(s))^{2m}] = (2m-1)!!|\Delta K|. \end{cases} \tag{3.2}$$

От (3.2) и (3.1) следва, че ако корелационната функция $K(t,s)$ удовлетворява условията

$$|\Delta K| = |K(t,t) - 2K(t,s) + K(s,s)| \leq C|t-s|^r,$$

при някакви положителни C и r, то процесът ще е непрекъснат.

4.5 L_2-непрекъснатост

Определение 3.6. *Процесът $\xi(t), t \in [a,b]$ се нарича непрекъснат в L_2-смисъл (в средно-квадратичен смисъл) в т. $t_0 \in [a,b]$, ако*

$$\mathbf{E}[(\xi(t) - \xi(t_0))^2] \to 0, \quad t \to t_0. \tag{3.3}$$

Ако (3.3) е в сила за всяко $t \in [a,b]$, казваме, че процесът е L_2-непрекъснат в $[a,b]$.

От неравенството на Чебишов следва, че ако един процес е L_2-непрекъснат, то той е и $\mathbf{P}-$непрекъснат, обратното не е вярно.

Пример 3.3. *Винеровият процес* $w_t, t \geq 0$ *и Поасоновият процес* $\pi_t, t \geq 0$ *са* L_2-*непрекъснати. Твърденията следват от равенствата:*

$$\mathbf{E}[(w_t - w_s)^2] = |t - s|,$$

$$\mathbf{E}[(\pi_t - \pi_s)^2] = \lambda|t - s| + \lambda^2|t - s|^2.$$

Аналогично може да се въведе L_p-непрекъснатост, за произволно положително p.

Налице са следните връзки:

L_p- непрекъснатост $\Rightarrow$ $\mathbf{P}-$непрекъснатост,
непрекъснатост с вер. 1 $\Rightarrow$ $\mathbf{P}-$непрекъснатост.

5 Диференциране

Нека е даден сл. процес $\xi(t), t \in [a, b]$. Разглеждаме диференчното частно

$$\Delta_h(t) = \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h}, \quad t, t+h \in [a, b].$$

Фиксираме t и оставяме $h \to 0$. Интересуваме се дали $\Delta_h(t)$ има граница в някакъв смисъл. Ясно е, че на всеки от видовете сходимост може да се съпостави съответна производна. Диференцирането с вероятност 1, ще означава, че почти всички траектории на процеса са диференцируеми функции в т. t. При това за отделни елементарни събития ω може да се окаже, че $\xi(t, \omega)$ не е диференцируема в т. t, но множеството A от тези ω има $\mathbf{P}(A) = 0$. Тази дефиниция на диференцируемост не се отличава от дефиницията в класическия анализ за детерминирани функции.

В Теорията на вероятностите имаме възможност да дадем още две дефиниции на производна свързани с L_p- и $\mathbf{P}-$ сходимостите.

Определение 3.7. *Процесът* $\xi(t), t \in [a, b]$ *се нарича* L_2-*диференцируем в т.* $t \in [a, b]$, *ако съществува* $\lim_{h\to 0} \Delta_h(t)$ *в* L_2-*смисъл, т.е. съществува сл.в.* $\xi'(t)$ *такава, че*

$$\mathbf{E}[|\Delta_h(t) - \xi'(t)|^2] \to 0, \ h \to 0. \tag{3.4}$$

Ако (3.4) е изпълнено за всяко $t \in [a, b]$, казваме, че процесът е диференцируем в L_2-смисъл в $[a, b]$ и $\xi'(t)$ наричаме L_2-производна на $\xi(t)$.

Определение 3.8. *Ако съществува границата* $\lim_{h\to 0} \Delta_h(t)$ *по вероятност, т.е. съществува сл.в.* $\xi'(t)$ *такава, че за всяко* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h\to 0} \mathbf{P}(|\Delta_h(t) - \xi'(t)| > \varepsilon) = 0,$$

то казваме, че $\xi(t)$ *е* $\mathbf{P}-$*диференцируем в т.* t *и* $\xi'(t)$ *е неговата* $\mathbf{P}-$*производна.*

Забележка 3.3. *1. От неравенството на Чебишов следва, че ако $\xi(t)$ е L_2- диференцируем, то той е и $\mathbf{P}-$ диференцируем и двете производни съвпадат.*

2. Съществуването на L_2- ($\mathbf{P}-$) производни влече и съответната непрекъснатост.

Пример 3.4. *Нека $w_t, t \geq 0$ е Винеров процес. Тогава за всяко t*

$$\frac{w_{t+h} - w_t}{h} \in N(0, \frac{1}{|h|}),$$

т.е. дисперсията на това частно клони към безкрайност, при $h \to 0$ и от тук следва, че Винеровия процес не може да бъде диференцируем даже и по вероятност а от там и в L_2- смисъл.

Пример 3.5. *Нека $\pi_t, t \geq 0$ е Поасонов процес. Тогава с вероятност 1, $\frac{\pi_{t+h} - \pi_t}{h}$ $= 0$ за всички достатъчно малки h.*

Следователно $\frac{\pi_{t+h} - \pi_t}{h} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, при $h \to 0$, което показва, че Поасоновия процес е $\mathbf{P}-$диференцируем с $\mathbf{P}-$производна равна на 0. Да допуснем, че той е и L_2-диференцируем. Тогава и L_2-производната трябва да е равна на 0, но

$$\mathbf{E}\left\{\left(\frac{\pi_{t+h} - \pi_t}{h} - 0\right)^2\right\} = \frac{\lambda}{|h|} + \lambda^2 \nrightarrow 0, h \to 0.$$

Освен това, $\mathbf{E}(|\pi_{t+h} - \pi_t|^p) \approx \lambda|h|^{1-p}$ откъдето се вижда, че Поасоновият процес не е L_p- диференцируем за никое $p \geq 1$.

Разгледаните примери показват, че $\mathbf{P}-$производната не е достатъчно съдържателна и затова едва ли има смисъл да се разглежда. Нашата цел е да използваме онова понятие за диференцируемост, което би осигурило съдържателност на развиваната теория. В частност, бихме искали сл. процес да се възстановява еднозначно (с точност до константа) по своята производна. Оказва се, че такава еднозначност имаме при L_2-сходимостта, съответно при L_2-диференцирането.

Критерии за съществуване на L_2-производна:

Нека $\xi(t), t \geq 0$ е такъв, че $\mathbf{E}\xi(t) = 0, t \in [a, b]$. Тогава корелационната функцията $K(t, s)$ съвпада с ковариационната функция $C(t, s)$.

Определение 3.9. *Казваме, че $C(t, s), t, s \in [a, b]$ има обобщена втора смесена производна в т. (t_0, s_0) ако изразът*

$$\frac{1}{hh_1}\left(C(t_0 + h, s_0 + h) - C(t_0, s_0 + h_1) - C(t_0 + h, s_0) + C(t_0, s_0)\right)$$

има крайна граница при $h \to 0$ и $h_1 \to 0$. Тази производна ще означаваме със символа

$$\left.\frac{\partial^2 C(t, s)}{\partial t \partial s}\right|_{t=t_0, s=s_0}.$$

Теорема 3.2. *Сл. процес $\xi(t), t \in [a, b]$ е L_2-диференцируем в т. $t_0 \in [a, b]$ само тогава, когато ковариационната функция $C(t, s)$ има обобщена втора смесена производна в т. (t_0, t_0). (В точките (t, t) от диагонала на квадрата $[a, b] \times [a, b]$.)*

6 Браунов мост

Определение 3.10. *Нека* $\{w_t, t \in [0,1]\}$ *е стандартен Винеров процес. Тогава процесът* $w_t^o := w_t - tw_1$, *за* $t \in [0,1]$ *се нарича Браунов мост.*

Да намерим вероятностните характеристики на този процес.
1) $w_0^o = 0 = w_1^o$;
2) $\mathbf{E}w_t^o = \mathbf{E}(w_t - tw_1) = 0$;
3) $\mathbf{Cov}(w_t^0, w_s^o), 0 \le s < t \le 1, \Rightarrow$

$$\mathbf{Cov}(w_t^0, w_s^o) = \mathbf{E}(w_t^o.w_s^o) = \mathbf{E}[(w_t - tw_1)(w_s - sw_1)] =$$

$$\mathbf{E}[w_t w_s - tw_s w_1 - sw_t w_1 + stw_1^2] =$$

като използваме, че за Винеровия процес $\mathbf{Cov}(w_t, w_s) = \min(t,s), \forall s,t \ge 0$ получаваме по-нататък)

$$= \min[s,t] - t\min[s,1] - s\min[t,1] + st = \min[s,t] - ts = s - ts = s(1-t).$$

4) $\mathbf{E}(w_t^o)^2 = \mathbf{E}(w_t - tw_1)^2 = \mathbf{E}(w_t^2 - 2tw_1 w_t + t^2 w_1^2) =$
(и понеже $t \le 1$)
$= t - 2t^2 + t^2 = t - t^2 = t(1-t)$.
5) $\mathbf{E}(w_t^o - w_s^o)^2 = \mathbf{E}(w_t^o)^2 - 2\mathbf{E}w_t^o w_s^o + \mathbf{E}(w_s^o)^2 =$
(при $s < t$)
$= t(1-t) - 2s(1-t) + s(1-s) = (t-s)(1-t) - s(1-t-1+s) = (t-s)(1-t) + s(t-s) =$
$= (t-s)(1-(t-s)) = \mathbf{E}(w_{t-s}^o)^2$.
Следователно брауновият мост е с независими стационарни нараствания.

Определение 3.11. *Сл. процес* $w_t^o = w_t | w_1 = 0$, *където* w_t *е Винеров процес се нарича браунов мост.*

Предложение 3.1. *Определенията 3.10 и 3.11 са еквивалентни.*

Доказателство: Проверява се, че вероятностните характеристики съвпадат. $\square$

Лекция 4

Вериги на Марков - 1

В тази лекция си поставяме следните цели:

- да дадем дефиниция на марковска верига;
- да изведем уравненията на Чепмен-Колмогоров;
- да дадем класификация на състоянията на марковска верига;
- да разгледаме примери на марковски вериги.

1 Дефиниция

Нека стохастичният процес $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ взема стойности в крайно или изброимо множество, които ще предполагаме, че са неотрицателни цели числа $\{0, 1, 2, \ldots\}$ (ако изрично не е казано нещо друго). Ако $X_n = i$ ще казваме, че процесът е в състояние i в момента n. Предполагаме още, че ако процесът е в състояние i съществува фиксирана вероятност p_{ij}, че в следващият момент той ще бъде в състояние j и тези вероятности удовлетворяват равенствата:

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = p_{ij}, \tag{4.1}$$

за всеки набор $i_0, i_1, \ldots, i_n, j$ и всяко $n \geq 0$. Тогава процесът $\{X_n, n \geq 0\}$ се нарича Марковска верига.

За вероятностите за преход от състояние i в състояние j p_{ij} е в сила:

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1,$$

тъй като процесът в момента $n+1$ ще бъде в едно от възможните си състояния.

Матрицата

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0j} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i0} & p_{i1} & \dots & p_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

наричаме матрица от преходните вероятности p_{ij} за една стъпка.

Пример 4.1. *Прогноза за времето. Да допуснем, че шансът утре да вали зависи от това какво е било времето днес, но не зависи от това какво е било времето през предните дни. Да допуснем, че вероятността утре да вали, ако е валяло днес е α, а вероятността утре да вали, ако не е валяло днес е β. Да кажем, че един процес е в състояние 0, ако вали и в състояние 1 ако не вали. При направените предположения този процес е Марковска верига с две състояния $\{0, 1\}$ и матрицата от преходните вероятности за една стъпка е*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

Пример 4.2. *Случайно лутане. Една Марковска верига с множество от състоянията $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ се нарича случайно лутане, ако за фиксирано $p \in (0, 1)$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1 - p$ за $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.*

Такава Марковска верига се нарича случайно лутане, тъй като тя може да служи за модел на разходка на човек по права линия, който във всеки момент от време прави стъпка надясно с вероятност p или стъпка наляво с вероятност $1 - p$.

Пример 4.3. *Един хазартен модел. Един комарджия на всеки тур от играта или печели \$1 с вероятност p или губи \$1 с вероятност $1 - p$. Ако допуснем, че играчът приключва играта или, когато се разори, или когато спечели $\$N$, тогава неговата съдба (състояние) е Марковска верига с преходни вероятности*

$$p_{i,i+1} = p,\ p_{i,i-1} = 1 - p,\ p_{00} = 1,\ p_{NN} = 1.$$

В такъв случай състоянията 0 и N се наричат поглъщащи, защото попадайки в тях процесът остава в тези състояния завинаги.

Този модел се нарича, крайно случайно лутане с поглъщащи бариери (състоянията 0 и N.)

2 Уравнения на Чепмен-Колмогоров

Ще дефинираме преходни вероятности p_{ij}^n за преминаване от състояние i в състояние j за n стъпки по следния начин:

$$p_{ij}^n = \mathbf{P}(X_{n+m} = j | X_m = i),\ n \geq 0,\ m \geq 0,$$

като
$$p_{ij}^1 = p_{ij}.$$

Уравненията на Чепмен-Колмогоров ни дават метод за пресмятане на преходните вероятности за n стъпки. Те са:

$$p_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^m p_{kj}^n, \forall n, m \geq 0, \forall i, j. \tag{4.2}$$

Интуитивно е ясно, че процесът за $n + m$ стъпки ще премине от състояние i в състояние j, като следва траекториите които за m стъпки ще го доведат в някое състояние k, а след това от състояние k за n стъпки процесът ще попадне в състояние j. Сумирайки по всички възможни междинни състояния получаваме вероятността за преход от i в j за $n + m$ стъпки.

Строгото доказателство е следното:

$$p_{ij}^{n+m} = \mathbf{P}(X_{n+m} = j | X_0 = i) =$$

по формулата за пълната вероятност

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_{n+m} = j, X_n = k | X_0 = i) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_{n+m} = j | X_n = k, X_0 = i) \mathbf{P}(X_n = k | X_0 = i) =$$

поради Марковското свойство

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_{n+m} = j | X_n = k) \mathbf{P}(X_n = k | X_0 = i) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{kj}^m p_{ik}^n.$$

Ако означим с $\mathbb{P}^{(n)}$ матрицата с елементи p_{ij}^n преходните вероятности за n стъпки, то уравненията (4.2) означават, че

$$\mathbb{P}^{(n+m)} = \mathbb{P}^{(n)} \mathbb{P}^{(m)},$$

като матриците са умножени по правилото ред по стълб. Тогава като използваме, че $\mathbb{P}^{(1)} = \mathbb{P}$, получаваме последователно:

$$\mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^{(1)} \mathbb{P}^{(1)} = \mathbb{P}\mathbb{P} = \mathbb{P}^2, \ \mathbb{P}^{(3)} = \mathbb{P}^{(2)} \mathbb{P}^{(1)} = \mathbb{P}^2 \mathbb{P} = \mathbb{P}^3,$$

и по индукция
$$\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n.$$

Пример 4.4. *Нека в Пример 4.1, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.4$. Каква е вероятността ако днес вали, след 4 дни пак да вали? Нека $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$. Пресмятаме последователно*

$$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix}, \ \mathbb{P}^4 = \mathbb{P}^2\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{pmatrix}.$$

Следователно $p_{00}^4 = 0.5749$.

До тук всички разглеждани вероятности бяха условни. Така p_{ij}^n е вероятността процесът да е в състояние j на $n-$та стъпка (или в момента от време n) при условие, че е бил в състояние i в момента 0. Ако са ни необходими безусловните вероятности за това процесът да е в състояние j в момента n, трябва да знаем разпределението на началното състояние на процеса. Нека считаме, че е зададено разпределението:

$$\alpha_i = \mathbf{P}(X_0 = i), \ i \geq 0, \quad (\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1).$$

Тогава безусловните вероятности на състоянието на процеса в момент n се получават по формулата за пълната вероятност:

$$\mathbf{P}(X_n = i) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = i | X_0 = k)\mathbf{P}(X_0 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ki}^n \alpha_k.$$

Пример 4.5. *Ако $\alpha_0 = 0.4$, $\alpha_1 = 0.6$ (началното разпределение) в Пример 4.4, то тогава вероятността, че ще вали след 4 дни от момента, когато сме започнали да следим времето е*

$$\mathbf{P}(X_4 = 0) = 0.4p_{00}^4 + 0.6p_{10}^4 = 0.4 \times 0.5749 + 0.6 \times 0.5668 = 0.57.$$

3 Класификация на състоянията

Определение 4.1. *Състоянието j се нарича достижимо от състоянието i, ако $p_{ij}^n > 0$ за някое $n \geq 0$.*

С други думи, състоянието j е достижимо отсъстоянието $i \iff$, започвайки от състояние i е възможно процесът да попадне в състояние j, тъй като, ако j не е достижимо от i, то

$$\mathbf{P}(\text{ да попадне в } j | \text{ започва от } i) =$$

$$= \mathbf{P}(\cup_{n=0}^{\infty}\{X_n = j | X_0 = i\}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = j | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^n = 0.$$

Определение 4.2. *Две състояния i и j се наричат съобщаващи се, ако са достижими едно от друго. (Пишем $i \leftrightarrow j$.)*

Забележка 4.1. *Всяко състояние е съобщаващо се със себе си, тъй като* $\mathbf{P}(X_0 = i | X_0 = i) = 1$.

Дефинираната релация има следните свойства:
(i) $i \leftrightarrow i, \ \forall i$;
(ii) $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$;
(iii) $i \leftrightarrow j$ и $j \leftrightarrow k, \Rightarrow i \leftrightarrow k$.

Свойствата (i)-(iii) следват от Определение 2. За да докажем напр. (iii), нека $i \leftrightarrow j$ и $j \leftrightarrow k$. Тогава съществуват числа $m \geq 0$ и $n \geq 0$ така, че $p_{ij}^n > 0$ и $p_{jk}^m > 0$. Следователно, от уравненията на Чепмен-Колмогоров получаваме

$$p_{ik}^{n+m} = \sum_{l=0}^{\infty} p_{il}^n p_{lj}^m \geq p_{ij}^n p_{jk}^m > 0 \Rightarrow k \text{ е достижимо от } i.$$

По аналогичен начин може да се докаже, че i е достижимо от k.

Релацията $\leftrightarrow$ е релация на еквивалентност и множеството от състоянията на процеса се разпада на непресичащи се класове на еквивалентност, като всеки две състояния от един и същи клас са съобщаващи се.

Определение 4.3. *Казваме, че една Марковска верига е неразложима, ако множеството от състоянията на веригата образува един клас съобщаващи се състояния, т.е. когато всеки две състояния са съобщаващи се.*

Пример 4.6. *Да разгледаме Марковска верига с три състояния 0,1,2 и матрица на преходните вероятности*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Лесно се вижда, че тази Марковска верига е неразложима. Например от $0 \to 2$ е възможен преход за две стъпки $0 \to 1 \to 2$, а преходът $2 \to 0$ е възможен чрез $2 \to 1 \to 0$.

Пример 4.7. *Да разгледаме марковска верига с 4 състояния 0,1,2,3 и матрица от преходните вероятности за една стъпка*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Множеството от състоянията се състои от следните класове $\{0,1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, като състоянието 3 е поглъщащо.

Определение 4.4. *Едно състояние на Марковска верига се нарича поглъщащо, ако никое друго състояние не може да бъде достигнато от него.*

За всяко състояние i означаваме с

$$f_i = \mathbf{P}(X_n = i,\ \text{за някое } n \geq 1 | X_0 = i)$$

вероятността процесът, започвайки от състояние i някога да се върне отново в това състояние.

Определение 4.5. *Казваме, че състоянието i е възвратно, ако $f_i = 1$ или преходно, ако $f_i < 1$.*

Да допуснем, че процесът започва от състояние i и то е възвратно. Това означава, че с вероятност 1, процесът евентуално ще се върне в състояние i, но тогава от дефиницията на Марковска верига следва, че процесът започва отначало, всеки път когато се върне в състоянието i. Тогава процесът евентуално ще попадне за втори път в състоянието i и т.н. С други думи, стигаме до заключението, че ако състоянието i е възвратно, то процесът започвайки от състояние i ще се връща в него безброй много пъти.

От друга страна, нека i е преходно състояние. Тогава всеки път, когато процесът попадне в състояние i ще имаме положителна вероятност $1 - f_i > 0$, че процесът никога няма да се върне в същото състояние. Следователно, започвайки от преходно състояние i, процесът ще попадне в него точно n пъти с вероятност $f_i^{n-1}(1-f_i),\ n \geq 1$. Така броят на връщанията в едно преходно състояние е сл. в. с геометрично разпределение и тя има крайно математическо очакване $= \dfrac{1}{1-f_i}$.

Изводът от направените разсъждения е следният: Състоянието i е възвратно $\Longleftrightarrow$, започвайки от него, средният брой връщания в това състояние е безкраен.

Нека означим

$$I_n = \begin{cases} 1, & \text{ако} X_n = i \\ 0, & \text{ако} X_n \neq i. \end{cases}$$

Тогава $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ ще представлява броя на връщанията на процеса (периодите от време) в състояние i.

Да разгледаме

$$\mathbf{E}[\sum_{n=0}^{\infty} I_n | X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}[I_n | X_0 = i] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = i | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^n.$$

Така стигаме до следното твърдение:

Предложение 4.1. *Състоянието i е възвратно, ако $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^n = \infty$ и е преходно, ако $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^n < \infty$.*

Това предложение е особено важно, защото то показва, че в преходно състояние може да се попада само краен брой пъти, което от своя страна води до заключението, че в крайна Марковска верига (с краен брой състояния) не всички състояния могат да бъдат преходни. За да го докажем нека да допуснем, че Марковска верига има краен брой състояния $0, 1, 2, \dots, M$ и да допуснем, че всичките са преходни. Тогава след време $T_0 < \infty$ в състоянието 0 няма да се попада, след време T_1 няма да се попада в състояние T_1 и т.н. Тогава след време $T = \max\{T_0, T_1, \dots, T_M\}$ няма да се попада в никое състояние. Но тъй като процесът все трябва да е в някое състояние, стигаме до противоречие, което показва, че не може всички състочния да са преходни, поне едно трябва да е възвратно.

Следствие 4.1. *Ако състоянието i е възвратно $i \leftrightarrow j$, то и състоянието j също е възвратно.*

Доказателство: Тъй като $i \leftrightarrow j \Rightarrow$, че съществуват $m, k \geq 0$ цели такива, че $p_{ij}^k > 0,\ p_{ji}^m > 0$. Тогава за всяко цяло $n \geq 0$

$$p_{jj}^{n+m+k} \geq p_{ji}^m p_{ii}^n p_{ij}^k, \tag{4.3}$$

тъй като в лявата страна е вероятността за преход от j в j за $n+m+k$ стъпки, а отдясно е вероятността за преход от j в j по траектории, такива, че за m стъпки процесът попада от j в i след това за n стъпки от i отива пак в i и за последните k стъпки от i отива в j.

Сумирайки в (4.3) по n получаваме

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{n+m+k} \geq p_{ji}^m p_{ij}^k \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n = \infty,$$

тъй като $p_{ji}^m p_{ij}^k > 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n = \infty$, ($i$ е възвратно.) Сега от Предложение 4.1 следва, че j също е възвратно. □

Забележка 4.2. *(i) Преходността също е общо свойство на всички състояния от един клас, т.е. $i \leftrightarrow j$ и i е преходно, то и j е преходно.*

(ii) Следствие 4.1 заедно с твърдението, че не всички състояния в крайна марковска верига са преходни ни дава, че ако една крайна Марковска верига е неразложима, то всичките и състояния са възвратни.

Пример 4.8. *Нека марковската верига има 4 състояния $0, 1, 2, 3$ и матрицата от преходните вероятности е*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 4.9. *Нека Марковска верига има 5 състояния* $0, 1, 2, 3, 4$ *и матрицата от преходните вероятности е*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Да се намерят възвратните състояния.

Решение. Състоянията на Марковската верига се разделят на три класа $\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4\}$. Състоянието 4 е преходно, тъй като веднъж излязъл от него процесът не се връща повече. Другите състояния са възвратни.

Пример 4.10. *Случайно лутане: Марковска верига със състояния:* $0, \pm1, \pm2, \ldots$ *и преходни вероятности:*

$$p_{i,i+1} = p, p_{i,i-1} = 1 - p, 0 < p) < 1, \; i = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$$

Ясно е, че всички състояния са съобщаващи се. Следователно те или всичките са възвратни или всички са преходни. Да разгледаме състоянието 0 и да видим $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^n$ *е крайна или безкрайна. Тъй като не е възможно след нечетен брой стъпки, излизайки от 0 процесът отново да се върне в 0, то* $p_{00}^{2n-1} = 0, \forall n \geq 1$. *След четен брой* $2n$ *стъпки процесът ще е отново в състояние 0, ако са направени точно* n *стъпки в ляво и точно* n *стъпки в дясно. Но поради това, че всяка стъпка не зависи от предните, то броя на стъпките в дясно е биномно разпределена сл.в. с параметри* $p, 2n$. *Тогава вероятността за точно* n *от* $2n$ *стъпки да са в дясно е* $\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$, *което е и вероятността за връщане в състоянието 0 за* $2n$ *стъпки. Така*

$$p_{00}^{2n} = \frac{(2n)!}{n!n!} [p(1-p)]^n, n = 1, 2, \ldots$$

Като използуваме формулата на Стирлинг $n! \sim n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}$, *намираме*

$$p_{00}^{2n} \sim \frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Тогава редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^n$ *ще е сходящ, тогава и само тогава, когато е сходящ реда* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}$.

Поради това, че $4p(1-p) \leq 1, \forall p \in (0, 1)$ *като равенство се достига само при* $p = 1/2$ *заключаваме, че* $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^n = \infty \iff p = 1/2$.

Така състоянията са възвратни при $p = 1/2$ *и преходни при* $p \neq 1/2$.

При $p = 1/2$ случайното лутане се нарича симетрично.

Да разгледаме симетрично случайно лутане в равнината (двумерно сл. лутане). На всяка стъпка можем да преминем в едно от 4-те възможни съседни сътояния(нагоре, надолу, наляво и надясно) с вероятности съответно по $1/4$, т.е.

$$p_{(ij)(i,j-1)} = p_{(ij)(i-1,j)} = p_{(ij)(i,j+1)} = p_{(ij)(i+1,j)} = 1/4.$$

Ще докажем, че това случайно лутане също е възвратно.

Тъй като веригата е неразложима (всички състояния са съобщаващи се), то достатъчно е отново да разгледаме състоянието (00). Вероятността за връщане в началото след нечетен брой стъпки отново е равна на 0. За да се върне процесът в състояние (00) след $2n$ стъпки трябва да са направени i прехода в ляво, i прехода в дясно $n-i$ прехода нагоре и $n-i$ прехода надолу, за някое $i, 0 \leq i \leq n$. Тогава за $p^{2n}(00)(00)$ получаваме

$$p^{2n}_{(00)(00)} \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{i!i!(n-i)!(n-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{n!}{i!(n-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{(2n)!}{n!n!}.$$

Но

$$\frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{(2n)^{2n+1/2} e^{-2n} \sqrt{2\pi}}{n^{2n+1} e^{-2n} 2\pi} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Следователно $p^{2n}_{(00)(00)} \sim \dfrac{1}{\pi n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p^{n}_{(00)(00)} = \infty$. Следователно състоянието (00) възвратно, а от там и всички състояния са възвратни.

Интересно е да се отбележи, че случайно лутане в пространство с три и повече измерения не може да бъде възвратно.

Лекция 5

Вериги на Марков - 2

В тази лекция си поставяме следните цели:

- да дефинираме гранични вероятности;
- да дефинираме обратими във времето марковски вериги;
- да разгледаме като пример един клас разклоняващи.

1 Гранични вероятности

Да се върнем към Пример 4.4, използвайки , че $\mathbb{P}^{(8)} = \mathbb{P}^{(4)}\mathbb{P}^{(4)} \Rightarrow$

$$\mathbb{P}^{(8)} = \begin{pmatrix} 0.572 & 0.428 \\ 0.57 & 0.430 \end{pmatrix}$$

Трябва да отбележим, че:

1) Матрицата $\mathbb{P}^{(8)}$ е почти идентична с $\mathbb{P}^{(4)}$ и

2) По редове стойностите на $\mathbb{P}^{(8)}$ също почти съвпадат или p_{ij}^n клони към някаква стойност при $n \to \infty$, която е една и съща за всички i. С други думи изглежда, че съществува гранична вероятност, че процесът ще бъде в състояние j след голям брой преходи и тази вероятност не зависи от началното състояние. За да направим горните евристични разсъждения по-строги е необходимо да отбележим още две допълнителни свойства на Марковските вериги.

Определение 5.1. *Състоянието i се нарича периодично с период $d > 1 \iff$, когато най-големият общ делител на числата n, за които $p_{ij}^n > 0$ е d.*

Например, започвайки от i е възможно процесът да се връща в i само в моментите $2, 4, 6, 8, \ldots, \Rightarrow i$ има период $d = 2$.

Определение 5.2. *Състояние с период 1 се нарича апериодично.*

Периодичността е общо свойство, на състоянията от един и същи клас на еквивалентност, т.е. ако i е с период d и $i \leftrightarrow j$ следва, че j е с период d.

Определение 5.3. *Марковската верига е периодична, ако е неразложима и има периодично състояние с период d.*

Определение 5.4. *Състояние i се нарича положително възвратно, ако е възвратно и започвайки от i, очакваното време, за което процесът ще се върне в i е крайно.*

Последното свойство също е общо за състоянията от един клас на еквивалентност, т.е. ако i е положително възвратно и $i \leftrightarrow j$ следва, че j е положително възвратно.

Определение 5.5. *Състояние, което не е положително възвратно се нарича нулево възвратно.*

Определение 5.6. *Марковската верига е положително възвратна, ако е неразложима и има поне едно положително възвратно състояние.*

Ще бъде показано, че в крайна Марковската верига всяко възвратно състояние е положително възвратно.

Определение 5.7. *Положително, възвратно, апериодично състояние се нарича ергодично.*

Теорема 5.1. *(без доказателство) За неразложима ергодична Марковска верига съществува:*

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n,$$

независеща от i. Ако означим

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^n, \quad j \geq 0,$$

то π_j е единственото неотрицателно решение на

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, \quad j \geq 0. \tag{5.1}$$

Забележка 5.1. *(i) Ако $\pi = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^n$ съществува и не зависи от i, не е трудно (евристично) да видим, че удовлетворява (5.1). Да*

Разглеждаме:

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)\mathbf{P}(X_n = i) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}\mathbf{P}(X_n = i). \tag{5.2}$$

При $n \to \infty$ в (5.2)

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}.$$

(ii) Може да се покаже, че π_j е също равно на отношението на времето, когато процесът е бил в състояние jкъм n, за големи n.

(iii) В неразложимия, положително възвратен и периодичен случай, отново съществува $\pi_j, j \geq 0$ и е единственото неотрицателно решение на (5.1).

Пример 5.1. *Да разгледаме отново Пример 4.1. От уравнението (5.1) за граничните вероятности π_0 и π_1 имаме:*

$$\pi_0 = \alpha\pi_0 + \beta\pi_1$$

$$\pi_1 = (1-\alpha)\pi_0 + (1-\beta)\pi_1$$

$$\pi_0 + \pi_1 = 1,$$

Следователно $\pi_0 = \dfrac{\beta}{1+\beta-\alpha}, \ \pi_1 = \dfrac{1-\alpha}{1+\beta-\alpha}$. *При* $\alpha = 0.7, \ \beta = 0.4 \Rightarrow \pi_0 = 4/7 = 0.571.$

Пример 5.2. *(Hardy - Weinberg Law. Марковска верига в генетиката.) Разглеждаме голяма популация от индивиди, всеки от който притежава двойка гени,*

от които са класифицирани от тип A и a. Нека в популацията имаме AA и aa или aA индивиди съответно с вероятност p_0, q_0, r_0 ($p_0+q_0+r_0 = 1$). Когато два индивида се кръстосат, всеки от тях дава случайно единият от гените си в новото поколение. Да допуснем, че кръстосването става случайно и всеки индивид равновероятно може да се кръстоса с всеки друг от популацията.

Искаме да определим вероятностите p, q, r за разпространение на типовете AA, aa, Aa в следващото поколение.

Нека отбележим, че случайният избор на родител и след това случайният избор на неговите гени е еквивалентно на случаен избор на ген от цялата популация на гените. Като вземем условната вероятност при двойката гени на родителя виждаме, че случайно подбран ген ще бъде тип A с вероятност

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|AA)p_0 + \mathbf{P}(A|aa).q_0 + \mathbf{P}(A|aA)r_0 = p_0 + \frac{r_0}{2}.$$

Аналогично

$$\mathbf{P}(a) = p_0 + \frac{r_0}{2}.$$

И така след случайно кръстосване, случайно избран индивид от следващо поколение ще бъде:

- от тип AA с вероятност $p = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(A) = (p_0 + \frac{r_0}{2})^2$;

- от тип aa с вероятност $q = (q_0 + \frac{r_0}{2})^2$ и
- от тип Aa с вероятност $r = 2\mathbf{P}(A).\mathbf{P}(a) = 2(p_0 + \frac{r_0}{2})(q_0 + \frac{r_0}{2})$.

Процентът на типовете AA, aa, Aa в следващото поколение е съответно p, q и r.

Нека сега разгледаме новото поколение. При него процентното съдържание на гените тип A ще бъде $p + \frac{r}{2}$ и това е частта от гените от тип A, които са останали непроменени от предишното поколение. Това следва или от аргумента, че (цялата) тоталната генна популация не се мени от поколение на поколение, или от следната проста сметка:

$$p+\frac{r}{2} = (p_0+\frac{r_0}{2})^2+(p_0+\frac{r_0}{2})(q_0+\frac{r_0}{2}) = (p_0+\frac{r_0}{2})[p_0+2\frac{r_0}{2}+q_0] = p_0+\frac{r_0}{2} = \mathbf{P}(A) \quad (5.3)$$

Следователно, съотношението на A и a в генната популация е същото, както в началната популация. От това следва, че при случайно кръстосване във всички следващи поколения след началното, процентното съотношение на индивидите с гени AA, aa и Aa ще остане фиксирано със стойности: p, q и r. Това се нарича закон на Hardy-Weinberg.

Да допуснем, че генната популация на двойките гени AA, aa, Aa се е стабилизирала около $\%$: p, q, r и да проследим генетичната история на един единствен индивид и неговите наследници (за простота допускаме, че всеки индивид има точно един наследник). Нека за даден индивид X_n означим генетичното състояние на неговия $n-$ти наследник (или неговия наследник в $n-$тото поколение). Матрицата на преходните вероятности на тази Марковска верига е:

$$\begin{pmatrix} p+\frac{r}{2} & 0 & q+\frac{r_0}{2} \\ 0 & q+\frac{r}{2} & p+\frac{r}{2} \\ \frac{p}{2}+\frac{r}{4} & \frac{q}{2}+\frac{r}{4} & \frac{p}{2}+\frac{q}{2}+\frac{r}{2} \end{pmatrix}$$

Интуитивно е ясно, че граничните вероятности на тази Марковска верига ще бъдат отново p, q, r за наследниците на индивидите от трите типа AA, aa, Aa. За да покажем това е достатъчно да проверим, че те удовлетворяват уравнение (5.1), т.е.

$$p = p(p+\frac{r}{2}) + r(\frac{p}{2}+\frac{r}{4}) = (p+\frac{r}{2})^2,$$

$$q = q(q+\frac{r}{2}) + r(\frac{q}{2}+\frac{r}{4}) = (q+\frac{r}{2})^2,$$

$$p+q+r = 1,$$

но това е изпълнено поради (5.3).

Забележка 5.2. $\pi_j, j \geq 0$ *се наричат още стационарни вероятности.*

Причината е, че ако допуснем, че началното състояние е избрано в съответствие с разпределение $\pi_j, j \geq 0$, то тогава вероятността да се намираме отново в това състояние за всяко n е π_j, т.е. ако $\mathbf{P}(X_0 = j) = \pi_j,\ j \geq 0$, то $\mathbf{P}(X_n = j) = \pi_j, \forall n, j \geq 0$.

Лесно се вижда, че това е така чрез индукция по n. Нека е изпълнено за $n-1$ и да проверим за n. Имаме от (5.1):

$$\mathbf{P}(X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = j | X_{n-1} = i)\mathbf{P}(X_{n-1} = i) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}\pi_i = \pi_j.$$

2 Средно време в преходните състояния

Разглеждаме крайна Марковска верига и нека състоянията са номерирани и $T = 1, 2....t$ е множеството от преходните състояния,

$$\mathbb{P}_T = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{t1} & p_{t2} & \dots & p_{tt} \end{pmatrix}$$

и да отбележим, че тъй като $\mathbb{P}$ се състои само от преходни вероятности за преминаване от преходно състояние в преходно състояние, то някой от сумите по редове са по-малки от 1.

Нека с s_{ij} означим очаквания брой периоди от време Марковската верига да бъде в преходно състояние j, при условие, че започва от преходно състояние i (или респективно брой връщания в j.)

Нека $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

При условие началния преход получаваме

$$s_{ij} = \delta_{i,j} + \sum_{k} p_{ik}s_{kj} = \delta_{i,j} + \sum_{k=1}^{t} p_{ik}s_{kj}, \tag{5.4}$$

където последното равенство следва от това, че не е възможен преход от възвратно в преходно състояние, откъдето $s_{kj} = 0$, когато k е възвратно състояние.

Нека $\mathbb{S}$ е матрицата от стойности s_{ij}, т.е.

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1t} \\ s_{i1} & s_{i2} & \dots & s_{it} \\ \dots & \dots & \dots & \dots. \\ s_{t1} & s_{t2} & \dots & s_{tt} \end{pmatrix}.$$

Тогава (5.4) може да се престави в следния матричен запис

$$\mathbb{S} = \mathbb{I} + \mathbb{P}_T\mathbb{S}, \tag{5.5}$$

където $\mathbb{I}$ е единичната матрица с размерност t и тъй като (5.5) е еквивалентно на $(\mathbb{I} - \mathbb{P}_T)\mathbb{S} = \mathbb{I}$, получаваме $\mathbb{S} = (\mathbb{I} - \mathbb{P}_T)^{-1}$, т.е. средните времена на престой в преходно състояние се получават лесно след обръщане на матрица $\mathbb{I} - \mathbb{P}_T$.

3 Разклоняващи се процеси

Клас Марковски вериги с широко приложение в биологията, социологията, инженерните науки.

Да разгледаме популация от индивиди, които ”произвеждат”индивиди от същия вид. Нека всеки индивид в края на своя живот произведе j нови индивиди с вероятност $p_j, j \geq 0$, независимо от броя произвеждани индивиди от останалите, съществуващи индивиди.

Началния брой означаваме с X_0 и наричаме размер на нулевото поколение. Цялото потомство на нулевото поколение образува първото поколение и броят на индивидите в него означаваме с X_1. Нека с X_n означим броя индивиди в $n-$то поколение $\Rightarrow$ $\{X_n\}$ е Марковска верига с множество на състоянията неотрицателни цели числа $(\mathbb{N} \cup \{0\})$. 0-та е възвратно състояние , тъй като $p_{00} = 1$. Ако $p_0 > 0$ всички състояния са преходни. Това следва от фактите, че $p_{i0} = p_0^i$, което показва, че започвайки с i индивида, съществува положителна вероятност $\geq p_0^i$, никое следващо поколение да не се състои от i индивида. Нещо повече, тъй като всяко крайно подмножество на преходните състояния $\{1, 2, ..., n\}$ ще бъде посетено краен брой пъти, това води до важното заключение, че ако $p_0 > 0$, то популацията или ще се изроди (т.е. няма да има повече индивиди) или нейния размер клони към безкрайност.

Нека $\mu = \sum_{j=0}^{\infty} jp_j$ е средният брой индивиди породени от един индивид и $\sigma^2 = \sum_{j=0}^{\infty}(j-\mu)^2 p_j$, е дисперсията на броя на индивидите.

Нека $X_0 = 1$, можем да запишем, че

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i,$$

Z_i- е броя потомството на $i-$тия индивид в $n-1-$то поколение. С усредняване по X_{n-1} $\Rightarrow$

$$\mathbf{E}X_n = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_n|X_{n-1})) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i)|X_{n-1}) = \mathbf{E}(X_{n-1}\mu) = \mu\mathbf{E}X_{n-1} \qquad (5.6)$$

От (5.6) $\Rightarrow$ ($\mathbf{E}X_0 = 1$, ясно!)
$\mathbf{E}X_1 = \mu$
$\mathbf{E}X_2 = \mu\mathbf{E}X_1 = \mu^2$
. . .
$\mathbf{E}X_n = \mu\mathbf{E}X_{n-1} = \mu^n$

Аналогично за дисперсията като използуваме формулата за условна дисперсия, т.е.

$$\mathbf{Var}X_n = \mathbf{E}[\mathbf{Var}(X_n|X_{n-1})] + \mathbf{Var}[\mathbf{E}(X_n|X_{n-1})]$$

и факта, че при зададено X_{n-1} , X_n е сума от независими еднакво разпределени с $\{p_j, j \geq 0\}$ сл. в., то

$$\mathbf{Var}(X_n|X_{n-1}) = X_{n-1}\sigma^2$$

и от формулата за условната дисперсия и от (5.6) $\Rightarrow$

$$\mathbf{Var}X_n = \mathbf{E}(X_{n-1}\sigma^2) + \mathbf{Var}(X_{n-1}\mu) = \sigma^2\mu^{n-1} + \mu^2\mathbf{Var}X_{n-1},$$

и като вземем в предвид, че $\mathbf{Var}X_0 = 0$ по индукция, получаваме:

$$\mathbf{Var}X_n = \begin{cases} \sigma^2\mu^{n-1}\left(\frac{\mu^n-1}{\mu-1}\right), & \text{ако } \mu \neq 1 \\ n\sigma^2, \text{ ако } \mu = 1 \end{cases}$$

Нека означим $\pi_0 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 0|X_0 = 1)$ е вероятността процесът да се изроди (да попадне в поглъщащото състояние 0).

За първи път задачата за намиране на вероятността π_0 е възникнала и е формулирана от Галтон през 1889 г. във връзка с израждането на благородническите фамилии в Англия.

Да отбележим, че $\pi_0 = 1$, ако $\mu < 1$, защото

$$\mu^n = \mathbf{E}X_n = \sum_{j=1}^{\infty} j\mathbf{P}(X_n = j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n = j) = \mathbf{P}(X_n \geq 1),$$

и от $\mu^n \to 0, n \to \infty$ $(\mu < 1)$ следва веднага, че $\mathbf{P}(X_n \geq 1) \to 0$, или съответно $\mathbf{P}(X_n = 0) \to 1, n \to \infty$. Може да се докаже, че $\pi_0 = 1$ дори и при $\mu = 1$.

При $\mu > 1 \;\; \Rightarrow \pi_0 < 1$ и уравнението, от което можем да пресметнем π_0 получаваме като усредним по потомството на началната частица:

$$\pi_0 = \mathbf{P}(\text{популацията се изражда}) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(\text{популацията се изражда}|X_1 = j)p_j.$$

При условие, че $X_1 = j$, популацията ще се изроди $\iff$ всяка от $j-$те фамилии, започващи от всеки от индивидите на първото поколение, умира. Тъй като всяка фамилия еволюира независимо от останалите и вероятността за нейното израждане е също π_0, то

$$\mathbf{P}(\text{популацията се е изродила}|X_1 = j) = \pi_0^j \;\Rightarrow$$

π_0 удовлетворява уравнението

$$\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j p_j. \tag{5.7}$$

Когато $\mu > 1$ може да се покаже, че π_0 е най-малкото положително число, което е корен на уравнението (5.7).

Задача 5.1. *Ако $p_0 = 1/4, p_1 = 1/4, p_2 = 1/2$ да се определи π_0.*

Задача 5.2. *Ако в началният момент $X_0 = n$, и отново имаме същите стойности на вероятностите от Задача 5.1, на колко е равна вероятността за израждане на популацията?*

4 Обратими Марковски вериги(във времето)

Разглеждаме стационарна ергодична Марковска верига с преходни вероятности p_{ij} и стационарни вероятности π_j и да допуснем, че започвайки от даден момент проследяваме състоянията на тези Марковска верига обратно във времето, т.е. започвайки от n да разгледаме $X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots$. Оказва се, че тази редица е отново Марковска верига с преходни вероятности Q_{ij} дефинирани, чрез

$$Q_{ij} = \mathbf{P}(X_m = j | X_{m+1} = i) = \frac{\mathbf{P}(X_m = j, X_{m+1} = i)}{\mathbf{P}(X_{m+1} = i)}$$

$$= \frac{\mathbf{P}(X_m = j)\mathbf{P}(X_{m+1} = i | X_m = j)}{\mathbf{P}(X_{m+1} = i)} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}.$$

За да покажем, че обратният процес е наистина Марковска верига, трябва да установим, че

$$\mathbf{P}(X_m = j | X_{m+1} = i, X_{m+2}, X_{m+3}, \ldots) = \mathbf{P}(X_m = j | X_{m+1} = i).$$

Нека настоящият момент е $m+1$. Тъй като $X_0, X_1, X_2, \ldots$ е Марковска верига, условното разпределение на бъдещето $X_{m+2}, X_{m+3}, \ldots$ при зададено настояще X_{m+1} е независимо от миналото съответно от X_m. (Но независимостта е симетрична релация, т.е. ако A не зависи от B то и B не зависи от A). Това означава, че при зададено X_{m+1}, X_m не зависи от $X_{m+2}, X_{m+3}, \ldots$. Точно това, което беше необходимо да проверим.

Ако $Q_{ij} = p_{ij}$ за всички i и j, казваме че Марковската верига е обратима във времето. Това условие също може да се изрази и така

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \forall i, j. \tag{5.8}$$

Ако съществуват числа $\{x_i\}$, удовлетворяващи (5.8) и $\sum_i x_i = 1$, то Марковската верига е обратима и тези числа представляват граничното разпределение на веригата. Това е така, тъй като $x_i p_{ij} = x_j p_{ji}$ и сумирайки по i получаваме:

$$\sum_i x_i p_{ij} = x_j \sum_i p_{ji}, \quad \sum_i x_i = 1, \tag{5.9}$$

но граничните вероятности π_i са единственото решение на (5.9). Следователно $x_i = \pi_i, \forall i$.

Теорема 5.2. *Една ергодична Марковска верига,за която $p_{ij} = 0$ винаги когато $\mathbf{P}_{ji} = 0$ е обратима във времето, тогава и само тогава, когато, започвайки от състояние i, всяка траектория, водеща обратно в i има същата вероятност, както обратната, т.е.*

$$p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_k i} = p_{ii_k} p_{i_k i_{k-1}} \ldots p_{i_1 i}, \tag{5.10}$$

за всеки набор $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Доказателство: Необходимост: Вече е доказана.

Достатъчност: Фиксираме състоянията i и j и да запишем (5.10), така

$$p_{ii_1}p_{i_1i_2}\dots p_{i_kj}p_{ji} = p_{ij}p_{ji_k}p_{i_ki_{k-1}}\dots p_{i_1i},$$

сумирайки по всички състояния $i_1, i_2, \dots, i_k$, следва:

$$p_{ij}^{k+1}p_{ji} = p_{ij}p_{jk}^{k+1}.$$

При $k \to \infty$ получаваме:

$$\pi_j p_{ji} = \pi_i p_{ij},$$

с което теоремата е доказана. □

Лекция 6

Марковски вериги с непрекъснато време (МВНВ)

В тази лекция си поставяме следните цели:

- да дадем дефиниция на марковска верига с непрекъснато време;
- да изведем правите и обратни диференциални уравнения Колмогоров;
- да разгледаме като примери процесите на раждане и умиране;
- да решим някои задачи.

1 Дефиниция

С един пример на МВНВ ние вече се запознахме - това е Поасоновия процес. Тъй като с $N(t)$ означихме общия брой на заявките (или появяванията на дадено събитие) до момента t, това е също състоянието на процеса в момент t, то Поасоновият процес е МВНВ със състояния $0, 1, 2, \dots$, която винаги преминава от състояние n в състояние $n+1$, $n \geq 0$. Такъв процес се нарича още процес на чисто раждане, поради това, че състоянието му винаги нараства с единица. По-общо, един експоненциален модел, който може да премине (за един преход) само от състояние n в състояние $n-1$ или в състояние $n+1$ се нарича процес на раждане и умиране. За такъв модел преходите от състояние n в състояние $n+1$ се наричат "раждане", а от n в $n-1$ "смърт". Тези модели намират широко приложение в биологията, а също и при изучаване на опашките (в теорията на масовото обслужване), при които състоянието представлява броя на клиентите в опашката на обслужващата система. Ще получим т. нар. прави и обратни диференциални уравнения на Колмогоров, които описват вероятностните закони на системата.

Определение 6.1. *Нека* $\{X(t), t \geq 0\}$ *е стохастичен процес с непрекъснато време и със стойности в множеството от целите неотрицателни числа* $(\mathbb{Z}^+)$.

Казваме, че $X(t)$ е МВНВ, ако за всеки $s, t \geq 0$ и неотрицателни цели числа i, j и всяка целочислена функция $x(u) : [0, s) \to \mathbb{Z}^+$

$$\mathbf{P}(X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s) = \mathbf{P}(X(t+s) = j | X(s) = i).$$

С други думи, една МВНВ е стохастичен процес, притежаващ Марковското свойство, че условното разпределение на бъдещето $X(t+s)$ при дадено настояще $X(s)$ и минало $X(u),\ 0 \leq u < s$, зависи само от настоящето и е независимо от миналото.

Ако допълнително вероятността $\mathbf{P}(X(t+s) = j | X(s) = i)$ не зависи от s, то МВНВ е с хомогенни по времето преходни вероятности и се нарича хомогенна МВНВ.

По-нататък ще разгледаме само хомогенни МВНВ.

Да разгледаме МВНВ, която се намира в състояние i в момента 0 и да допуснем, че тя не напуска това състояние в следващите 10 мин. Каква е вероятността, че ще остане в същото състояние още 5 мин? Тъй като процесът е в състояние i 10 мин., то от Марковското свойство следва, че вероятността да остане в това състояние в интервала $[10, 15]$ е точно безусловната вероятност, че процесът ще стои в състояние i поне още 5 мин. Това означава, че ако означим с T_i дължината на интервала от време, в който процесът се намира в състояние i преди да премине в друго състояние, удовлетворява

$$\mathbf{P}(T_i > 15 | T_i > 10) = \mathbf{P}(T_i > 5)$$

или по общо

$$\mathbf{P}(T_i > s + t | T_i > s) = \mathbf{P}(T_i > t), \quad s, t \geq 0.$$

Това означава, че T_i е сл. величина, която е "без памет" (без последействие) и трябва да е експоненциално разпределена. Така естествено стигаме до следната еквивалентна дефиниция на МВНВ.

Определение 6.2. *Нека $\{X(t), t \geq 0\}$ е стохастичен процес с непрекъснато време и със стойности в множеството от целите неотрицателни числа $(\mathbb{Z}^+)$. Казваме, че $X(t)$ е МВНВ, ако:*

(i) времето на престой T_i в състояние i, преди да попадне в друго състояние е Exp разпределена сл. в. със средно $1/\nu_i$;

(ii) когато процесът напуска i и попада в състояние j с вероятност p_{ij}, то p_{ij} трябва да удовлетворява условията: $p_{ii} = 0, \forall i$ и $\sum_j p_{ij} = 1,\ \forall i$.

С други думи МВНВ е стохастичен процес, който преминава от едно състояние в друго в съответствие с преходните вероятности на една Марковска верига, но времето между преходите не е константа 1, а е *Exp* разпределена сл. величина с разпределение, зависещо от състоянието ($Exp(1/\nu_i)$), което процесът ще напусне при прехода. Нещо повече, времената на престой в дадено състояние i и следващото състояние j са независими сл. в.

2 Процеси на раждане и умиране

Разглеждаме система, чието състояние във всеки момент е броя хора в системата в този момент. Да допуснем, че всеки път, когато има n човека, тогава:

(i) нови хора пристигат в съответствие с Exp разпределение с параметър $1/\lambda_n$ ($Exp(1/\lambda_n)$);

(ii) някои от присъстващите напускат системата в съответствие с $Exp(1/\mu_n)$.

Това ще рече, че всеки път, когато в системата има n човека, времето до пристигане на нови хора е $Exp(1/\lambda_n)$ и е независимо от времето до следващото напускане на хора от системата, което пък е $Exp(1/\mu_n)$.

Такава система наричаме процес на раждане и умиране с параметри $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}-$ степени на раждане и $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}-$ степени на смъртност.

И така процесите на раждане и умиране (ПРУ) са МВНВ със състояния $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и преходи от n в $n-1$ или в $n+1$.

Връзките между степените на раждаемост и смъртност и преходните вероятности са следните:

$$\nu_0 = \lambda_0;$$

$$\nu_i = \lambda_i + \mu_i, \ i > 0;$$

$$p_{01} = 1;$$

$$p_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, \ i > 0;$$

$$p_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, \ i > 0.$$

Пример 6.1. *(Процес на Поасон) Разглеждаме ПРУ, за който* $\mu_n = 0, \ \forall n \geq 0$ *и* $\lambda_n = \lambda, \ \forall n \geq 0$. *Това е процес, при който няма смърт и времето между последователните раждания е сл. в. с* $Exp(1/\lambda)$ *разпределение. Следователно, това е точно Поасонов процес.*

Процес на раждане и умиране, за който $\mu_n = 0, \ \forall n \geq 0$ се нарича процес на чисто раждане.

Пример 6.2. *(Процес на раждане с линейна степен (скорост) на раждаемост.) Разглеждаме популация, чийто членове могат да имат поколение, но никога не умират. Ако всеки индивид се развива независимо от останалите и има* $Exp(1/\lambda)$ *разпределено време докато даде потомство, то ако* $X(t)$ *е размерът на популацията в момент* t, *тогава* $\{X(t), \ t \geq 0\}$ *е чист процес на раждане с* $\lambda_n = n\lambda, \ n \geq 0$. *Този процес се нарича често процес на Юл.*

Пример 6.3. *(Процес на раждане и умиране с линейна скорост и имиграция.) Процес, за който* $\mu_n = n\mu, \ n \geq 1 \ \lambda_n = n\lambda + \theta, \ n \geq 0$ *се нарича ПРУ с имиграция. Такъв процес естествено възниква при изучаване на биологичната репродуктивност и нарастването на популацията. Всеки индивид се предполага, че има поколение след време на живот с* $Exp(1/\lambda)$ *разпределение и има допълнителна* *експоненциална степен на нарастване θ на популацията, която се дължи на външен източник на имиграция. Така общата степен на раждаемост, когато имаме n индивда в системата е $n\lambda + \theta$. Смъртността се предполага, че е $Exp(1/\mu)$ за всеки индивид и следователно, $\mu_n = n\mu$.*

Нека $X(t)$ =*размерът на популацията в момент* t и $X(0) = i$ и да означим с $M(t) = \mathbf{E}X(t)$.

Ще получим диференциално уравнение за $M(t)$. Имаме

$$M(t+h) = \mathbf{E}X(t+h) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X(t+h)|X(t))).$$

Така при $X(t)$ дадено имаме:

$$X(t+h) = \begin{cases} X(t)+1, & \text{с вероятност} \quad [\theta + \lambda X(t)]h + o(h), \\ X(t)-1, & \text{с вероятност} \quad \mu X(t)h + o(h), \\ X(t), & \text{с вероятност} \quad 1 - [\theta + \lambda X(t) + \mu X(t)]h + o(h), \end{cases}$$

Тогава

$$\mathbf{E}(X(t+h)|X(t)) = X(t) + [\theta + X(t)\lambda - X(t)\mu]h + o(h).$$

Като вземем математическото очакване от двете страни на това равенство намираме:

$$M(t+h) = M(t) + (\lambda-\mu)M(t)h + \theta h + o(h) \Rightarrow$$
$$\frac{M(t+h)-M(t)}{h} = (\lambda-\mu)M(t) + \theta + \frac{o(h)}{h},$$

което при $h \to 0$ дава (при $\lambda \neq \mu$)

$$M'(t) = (\lambda-\mu)M(t) + \theta. \tag{6.1}$$

Това е линейно диференциално уравнение от 1 ред с постоянни коефициенти и следователно има общо решение на хомогенното уравнение $M(t) = Ce^{-(\lambda-\mu)t}$ и очевидно частно решение $M_0(t) = \frac{-\theta}{\lambda-\mu}$. Така общото решение на (6.1) е

$$M(t) = Ce^{-(\lambda-\mu)t} - \frac{\theta}{\lambda-\mu}.$$

Като вземем в предвид и началното условие $M(0) = i$ намираме, че

$$M(t) = \frac{\theta}{\lambda-\mu}[e^{-(\lambda-\mu)t} - 1] + ie^{-(\lambda-\mu)t}.$$

Когато $\lambda = \mu$ уравнението (6.1) става $M'(t) = \theta$ и със същото начално условие $M(0) = i$ намираме:

$$M(t) = \theta t + i.$$

3 Вероятността функция на преходите $P_{ij}(t)$

Нека $P_{ij}(t) = \mathbf{P}(X(t+s) = j|X(s) = i)$ е вероятността, че ако в момента s процесът е в състояние i след време t ще бъде в състояние j. Наричат се преходни вероятности на МВНВ.

Определение 6.3. *За всяка двойка състояния i, j нека да означим с*

$$q_{ij} = \nu_i p_{ij}.$$

Тъй като ν_i е скоростта, с която процесът извършва преход от i и p_{ij} е вероятността за преход от i в j, то q_{ij} е скоростта, с която процесът от състояние i преминава в състояние j. Числата q_{ij} се наричат моментни преходни скорости (т.е. от i без да престоява преминава в j.)

От $\nu_i = \sum_j \nu_i p_{ij} = \sum_j q_{ij}$ и $p_{ij} = \frac{q_{ij}}{\nu_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$, следва, че q_{ij} задават еднозначно параметрите на МВНВ.

Лема 6.1. *В сила са:*

а) $\lim_{h\to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = \nu_i$,

б) $\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = q_{ij}, \quad i \neq j$.

Доказателство: а) Първо да отбележим, че тъй като времето докато се извърши преход е експоненциално разпределено, то вероятността за 2 и повече прехода за време h е $o(h)$. Следователно, $1 - P_{ii}(h)-$ вероятността, че ако процесът е бил в момента 0 в състояние i да си остане в i след време h, е равна на вероятността, че ще имаме един преход в интервала с дължина $h+$*нещо малко в сравнение с* h. Следователно

$$1 - P_{ii}(h) = \nu_i h + o(h),$$

което доказва а).

б) Да забележим, че $P_{ij}(h)-$ вероятността, че процесът преминава от състояние i в състояние j за време h е равна на вероятността, че ще имаме един преход за това време умножена с вероятността за преход от i в j $+o(h)$. Следователно

$$P_{ij}(h) = h\nu_i p_{ij} + o(h),$$

от където следва б). $\square$

Лема 6.2. *За всяко $s \geq 0$ и всяко $t \geq 0$*

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s). \tag{6.2}$$

(Уравнения на Чепмен-Колмогоров.)

Доказателство: Изразяваме $P_{ij}(t+s)$ като сумираме по всички междинни състояния k, в които попада процесът за време t, т.е.

$$P_{ij}(t+s) = \mathbf{P}(X(t+s)=j|X(0)=i) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X(t+s)=j, X(t)=k|X(0)=i) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X(t+s)=j|X(t)=k, X(0)=i)\mathbf{P}(X(t)=k|X(0)=i) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(X(t+s)=j|X(t)=k)\mathbf{P}(X(t)=k|X(0)=i) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(s).$$

С това доказателството е завършено. □

От (6.2) следва, че

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - P_{ij}(t) =$$

$$= \sum_{k \neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - [1 - P_{ii}(h)]P_{ij}(t).$$

Следователно

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \sum_{k \neq i} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) - \frac{[1 - P_{ii}(h)]}{h} P_{ij}(t) \right\},$$

и ако предположим, че може да се смени реда на сумирането и граничния преход и използуваме Лема 6.1, ще получим, че

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - \nu_i P_{ij}(t).$$

И така, без да доказваме строго законността на смяната на граничния преход със сумирането (което при верига с краен брой състояния е очевидно) стигаме до следната теорема.

Теорема 6.1. *(Обратни уравнения на Колмогоров.) За* $\forall i, j$, *и* $t \geq 0$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - \nu_i P_{ij}(t).$$

Пример 6.4. *Обратните уравнения на Колмогоров за процес на чисто раждане имат вида*

$$P'_{ij}(t) = \lambda_i P_{i+1,j}(t) - \lambda_i P_{ij}(t). \tag{6.3}$$

Сега ще получим и т. нар. прави уравнения на Колмогоров. Отново от (6.2) имаме

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t)P_{kj}(h) - P_{ij}(t) =$$

$$= \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)P_{kj}(h) - [1 - P_{jj}(h)]P_{ij}(t).$$

Следователно

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \left\{ \sum_{k\neq i} P_{ik}(t)\frac{P_{kj}(h)}{h} - \frac{[1 - P_{jj}(h)]}{h} P_{ij}(t) \right\},$$

и ако предположим, че може да се смени реда на сумирането и граничния преход и използуваме Лема 6.1, ще получим, че

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - \nu_j P_{ij}(t).$$

Така стигаме до следната теорема.

Теорема 6.2. *(Прави уравнения на Колмогоров.) При подходящи условия за регулярност*

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - \nu_j P_{ij}(t).$$

Забележка 6.1. *Смяната на реда на сумирането и граничния преход не винаги е законна. Това е вярно за крайни суми и при известни условия за реда, ако той е безкраен. Тези условия са наречени по-горе условия за регулярност. Също такива условия считаме, че са налице и при теоремата за обратните уравнения на Колмогоров.*

Пример 6.5. *Да решим правите уравнения за чист процес на раждане. Имаме*

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - \lambda_j P_{ij}(t).$$

Тъй като $P_{ij} = 0$ за $i < j$ (няма "умиране"), то

$$P'_{ii}(t) = -\lambda_i P_{ii}(t) \tag{6.4}$$

и

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - \lambda_j P_{ij}(t), j \geq i+1. \tag{6.5}$$

Предложение 6.1. *За чист процес на раждане*

(i) $P_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t}, \quad i \geq 0,$

(ii) $P_{ij}(t) = \lambda_{j-1} e^{-\lambda_j t} \int_0^t e^{\lambda_j s} P_{i,j-1}(s) ds, \quad j \geq i+1.$

Доказателство: Може да се направи чрез непосредствена проверка в (6.4) и (6.5). □

4 Гранични вероятности

По аналогия на дискретните Марковски вериги и при МВНВ вероятността процесът да попадне в състояние j в момента t клони към гранична стойност, която не зависи от началното състояние, т.е. ако тази стойност е P_j, то

$$P_j = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t).$$

Ще получим система алгебрични уравнения за P_j. Да разгледаме системата прави диференциални уравнения на Колмогоров:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - \nu_j P_{ij}(t).$$

Ако направим граничен преход по $t \to \infty$ в това уравнение ще получим

$$\lim_{t \to \infty} P'_{ij}(t) = \lim_{t \to \infty} \left[\sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - \nu_j P_{ij}(t) \right] =$$

$$\sum_{k \neq j} q_{kj} P_k - \nu_j P_j. \tag{6.6}$$

От това, че $0 \leq P_{ij}(t) \leq 1$ следва, че ако съществува границата $\lim_{t \to \infty} P'_{ij}(t)$ то тя непременно е равна на 0. Тогава от (6.6) следва

$$0 = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k - \nu_j P_j$$

или

$$\nu_j P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k, \tag{6.7}$$

за всяко състояние j.

Тогава системата (6.7) и още уравнението

$$\sum_j P_j = 1, \tag{6.8}$$

може да се използва за намиране на граничните вероятности $\{P_j\}_{j \geq 0}$.

Забележка 6.2. *1. Предположихме, че граничните вероятности съществуват. Достатъчни условия за това са:*

а) Всички състояния на Марковската верига са съобщаващи се, т.е. започвайки от i има положителна вероятност да се попадне в j за всеки две състояния i, j и

б) Марковската верига е положително възвратна, т.е. започвайки от дадено състояние средното време за връщане в това състояние е крайно.

Ако а) и б) са изпълнени, то съществуват граничните вероятности P_j и удовлетворяват уравненията (6.7) и (6.8). P_j се разглеждат също и като частта от времето, през което МВНВ е била в състоянието j при достатъчно дълъг период $(0, t)$.

2. (6.7) и (6.8) имат следната интерпретация: Във всеки интервал $(0, t)$ броя на преходите в състояние j трябва да е равен на преходите от състояние j.

$$\nu_j P_j = \text{ скоростта, с която процесът напуска състоянието } j$$

q_{kj} е скоростта, с която от k влиза в j, P_k е частта от времето, през което се намира в състоянието k. Следователно, скоростта, с която се извършва преходът от k в j е $q_{kj}P_k$. Тогава

$$\sum_{k \neq j} q_{kj} P_k = \text{ скоростта, с която процесът влиза в състояние } j.$$

3. Когато $\{P_j\}$ съществуват МВНВ се нарича ергодична и P_j се наричат стационарни вероятности.

5 Пресмятане на преходните вероятности

Нека означим за $\forall i, j$

$$r_{ij} = \begin{cases} q_{ij}, & i \neq j, \\ -\nu_i, & i = j. \end{cases}$$

Тогава обратните

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - \nu_i P_{ij}(t) \tag{6.9}$$

и правите

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - \nu_j P_{ij}(t) \tag{6.10}$$

уравнения на Колмогоров имат съответно представянето:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k} r_{ik} P_{kj}(t) \tag{6.11}$$

и

$$P'_{ij}(t) = \sum_k r_{kj} P_{ik}(t) \tag{6.12}$$

Означаваме матриците $\mathbb{R} = (r_{ij})$, $\mathbb{P}(t) = (P_{ij}(t))$ и $\mathbb{P}'(t) = (P'_{ij}(t))$. Следователно от (6.11) намираме

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{R}\mathbb{P}(t), \tag{6.13}$$

а от (6.12) следва

$$\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)\mathbb{R}. \tag{6.14}$$

Тогава решението на (6.13) е $\mathbb{P}(t) = \mathbb{P}(0)e^{\mathbb{R}t}$ и тъй като $\mathbb{P}(0) = \mathbb{I}$ то следва, че $\mathbb{P}(t) = e^{\mathbb{R}t}$, където матрицата $e^{\mathbb{R}t}$ се дефинира чрез:

$$e^{\mathbb{R}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}^n \frac{t^n}{n!}, \tag{6.15}$$

а с $\mathbb{R}^n$ е означена $n-$ тата степен на матрицата $\mathbb{R}$.

От изчислителна гледна точка вместо да се използва (6.15) за пресмятане на $e^{\mathbb{R}t}$ е по-удачно да се използва матричния еквивалент на равенството

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n,$$

т.е.

$$e^{\mathbb{R}t} = \lim_{n\to\infty}(\mathbb{I} + \frac{\mathbb{R}t}{n})^n.$$

Следователно, ако $n = 2^k$, то можем да пресметнем $\mathbb{P}(t)$ чрез повдигане на матрицата $\mathbb{M} = \mathbb{I}+\mathbb{R}\frac{t}{n}$ на $n-$ та степен, което може да се извърши чрез k умножения

$$\mathbb{M}^2 = \mathbb{M}\mathbb{M},\ \mathbb{M}^4 = \mathbb{M}^2\mathbb{M}^2,\ \ldots$$

Да пресметнем граничните вероятности за процес на раждане и умиране:

От уравнението на баланса следва

Състояние	интервал на напускане=интервал на пристигане
0	$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$
1	$(\lambda_1 + \mu_1)p_1 = \mu_2 p_2 + \lambda_0 p_0$
2	$(\lambda_2 + \mu_2)p_2 = \mu_3 p_3 + \lambda_1 p_1$
.	.
.	.
.	.
$n, n \geq 1$	$(\lambda_n + \mu_n)p_n = \mu_{n+1}p_{n+1} + \lambda_{n-1}p_{n-1}$
.	.
.	.
.	.

Към всяко уравнение добавяме предходните и получаваме

$$\begin{aligned}
\lambda_0 p_0 &= \mu_1 p_1 \\
\lambda_1 p_1 &= \mu_2 p_2 \\
\lambda_2 p_2 &= \mu_3 p_3 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\lambda_n p_n &= \mu_{n+1} p_{n+1} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned}$$

Като решим системата чрез p_0 намираме

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$p_n = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_{n-1} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2 \mu_1} p_0$$

От $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow$

$$1 = p_0 + p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2 \mu_1},$$

следователно

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2 \mu_1}}. \tag{6.16}$$

Така за $n \geq 1$,

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2 \mu_1 (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2 \mu_1})}. \tag{6.17}$$

Също получаваме и необходимо условие за това , тези гранични вероятности да съществуват, а именно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots \mu_2 \mu_1} < \infty.$$

(Може да се докаже, че това условие е също и достатъчно.)

Задача 6.1. *Нека в един цех има M машини, които се обслужват от 1 човек. Нека времето, което работи всяка машина преди отказ е експоненциално разпределено със средно $1/\lambda$ и нека времето за ремонт е експоненциално разпределено със средно $1/\mu$. Ще отговорим на следните въпроси:*

а) Какъв е средният брой машини, които не са използува?

б) Каква част от времето всяка машина е в състояние работа?

Решение: Ако приемем, че системата е в състояние n, когато n от машините работят, то описахме един процес на раждане и умиране с параметри:

$$\mu_n = \mu,\ n \geq 1,$$

$$\lambda_n = \begin{cases} (M-n)\lambda, & n \leq M \\ 0, & n > M. \end{cases}$$

От (6.16) $\Rightarrow$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{M} [(M\lambda(M-1)\lambda \ldots (M-n+1)\lambda)/\mu^n]} =$$

$$= \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{M} [(\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{M!}{(M-n)!}},$$

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^k M!/(M-k)!}{1 + \sum_{n=1}^{M} (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{M!}{(M-n)!}}, \quad k = 1, \ldots, M.$$

а) Средният брой машини, които не работят е

$$\sum_{k=0}^{M} k p_k = \sum_{k=0}^{M} \frac{k(M!/(M-k)!)(\lambda/\mu)^k}{1 + \sum_{n=1}^{M} (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{M!}{(M-n)!}}. \tag{6.18}$$

б)

$$\mathbf{P}(\text{машина да работи}) =$$

$$\sum_{n=0}^{M} \mathbf{P}(\text{машина да работи}|\text{ n машини не работят}) p_n$$

$$= \sum_{n=0}^{M} \frac{M-n}{M} p_n = 1 - \sum_{n=0}^{M} \frac{n p_n}{M},$$

като последната сума е сметната в (6.18).

6 Задачи

Задача 6.2. *Намерете вероятността една сл. в. $X_1 \in Exp(\lambda_1)$ да е не по-малка от друга сл. в. $X_2 \in Exp(\lambda_2)$. Сл. в. X_1 и X_2 са независими.*

Решение:

$$\mathbf{P}(X_1 < X_2) = \int_0^\infty \mathbf{P}(X_1 < X_2 | X_1 = x)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx =$$

$$\int_0^\infty \mathbf{P}(X_2 > x)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx = \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx = \ldots = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Задача 6.3. *Лицето A продава хот-дог на щанд, който отваря в 8^{00}ч. От $8^{00} - 11^{00}$ч. клиентите пристигат с постоянно нарастваща интензивност, като започва от 8^{00}ч. с 5 клиенти в час и достига в 11^{00}ч. - 20 клиенти в час. От $11^{00} - 13^{00}$ч. интензивността остава постоянна, а после намалява в интервала $13^{00} - 17^{00}$ч., като в 17^{00}ч. е 12 клиенти за час. Лицето A затваря в 17^{00}ч.*

а) Ако предположим, че броя на клиентите в непресичащи се интервали от време е независим и клиентите не идват едновременно (т.е. $\mathbf{P}($да дойдат $\geq 2) = o(h)$, то какъв вероятностен модел да изберем за описания процес?

б) Каква е вероятността да няма клиенти в интервала $8^{30} - 9^{30}$ч., т.е. $\mathbf{P}(\xi(3/2) - \xi(1/2) = 0) =?$, като с $\xi(t)$ е означен броя на пристигналите до момента t клиенти.

в) Какъв е очакваният брой клиенти в този период, т.е. $\mathbf{E}(\xi(3/2) - \xi(1/2)) =?$

Решение: а) $\xi(0) = 0$

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5 + 5t, & 0 \leq t \leq 3, \\ 20, & 3 \leq t \leq 5, \\ 30 - 2t, & 5 \leq t \leq 9. \end{cases}$$

Така процесът $\xi(t)$ е нестационарен Поасонов процес.

б) $\mathbf{P}(\xi(3/2) - \xi(1/2) = 0) = \exp(-\int_{1/2}^{3/2}(5 + 5t)dt) = e^{-15}$.

в) $\mathbf{E}(\xi(3/2) - \xi(1/2)) = 15$, защото нарастването е Поасоново разпределена сл.в. $Po(15)$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-15}\frac{15^n}{n!} = \ldots = 15.$$

Задача 6.4. *(Пример за сложен Поасонов процес) Фалит на застрахователна компания - Модел на Крамер-Лундберг (Cramer-Lundberg).*

- Исковете към застрахователната компания настъпват в случайни моменти от време

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots \tau_n < \ldots, \text{ п.с.}$$

- Стойностите на исковете J_n са положителни н.е.р. сл.в. с ф.р. $F(x)$ и м.о. $\mathbf{E}J_n = \mu, \mathbf{Var}J_n = \sigma^2 < \infty$.
- Интервалите между исковете $T_1 = \tau_1$, $T_2 = \tau_2 - \tau_1, \ldots T_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ са независими еднакво разпределени $Exp(\lambda)$.

Следователно $N(t) = \max\{k : \tau_k \le t\} \in Po(\lambda t)$-броя на исковете настъпили до момента t е Поасонов процес.

Редиците от сл.в. $\{\tau_k\}$ и $\{J_k\}$ са независими. Тогава сумарният иск до момента t е

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} J_i, \ t \ge 0,$$

което е съставен Поасонов процес.

За ф.р. на $S(t)$ имаме

$$G_t(x) = \mathbf{P}(S(t) \le x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\sum_{i=0}^{n} J_i \le x | N(t) = n) \mathbf{P}(N(t) = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(\sum_{i=0}^{n} J_i \le x) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{*n}(x).$$

Тук $F^{*n}(x)$ е ф.р. на сумата $\sum_{i=1}^{n} J_i$ от n независими еднакво разпределени сл. в. с ф.р. $F(x)$.

Сега рискът на компанията се дефинира като

$$R(t) = u + ct - S(t), \quad t \ge 0,$$

като u е началният капитал на компанията, а c е размера на вноските постъпващи за единица време или c е интензивността на постъпване на вноските (premium income rare).

Считаме, че настъпва фалит, когато в даден момент t, $R(t) < 0$.

Да пресметнем вероятността за фалит при известен начален капитал ($u \ge 0$) и известна интензивност на постъпленията ($c > 0$).

Решение:

$$\psi(u) = \mathbf{P}(R(t) < 0 \text{ за някое } t) = \mathbf{P}(u + c\tau_n - S(\tau_n) < 0 \text{ за някое } n \ge 1) =$$

$$= \mathbf{P}(u + c\sum_{k=1}^{n} T_k - \sum_{k=1}^{n} J_k < 0, \text{ за някое } n \ge 1) =$$

$$\mathbf{P}(u + \sum_{k=0}^{n} (cT_k - J_k) < 0, \text{ за някое } n \ge 1)$$

$$= \mathbf{P}(\sup_{n\geq 1}(\sum_{k=1}^{n}(J_k - cT_k) > u)) = \frac{1}{1+\rho}\exp(-\rho u/\mu(1+\rho)),$$

където $\rho = c/(\lambda\mu) - 1$ - (risk premium rate).

Задача 6.5. *Напишете ДУ на Колмогоров за Поасонов процес.*

Решение: $p_n(t)$ удовлетворяват (Система обратни ДУ на Колмогоров)

$$\left| \begin{array}{l} p_0'(t) = -\lambda p_0(t), \\ p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n+1}(t). \end{array} \right.$$

$$q_{ij} = \begin{cases} -\lambda, & j = i, \\ \lambda, & j = i+1, \\ 0, & \text{в останалите случаи.} \end{cases}$$

$$P_{ij}(t+s) = \mathbf{P}(X(t+s) = j | X(s) = i)$$
$$= \mathbf{P}(X(t+s) - X(s) = j - i | X(s) = i, X(0) = 0)$$
$$\overset{\text{нез. на нар.}}{=} \mathbf{P}(X(t+s) - X(s) = j - i)$$
$$= \mathbf{P}(X(t) - X(0) = j - i)$$
$$= \mathbf{P}(X(t) = j - i) \overset{\text{П. проц.}}{=} \frac{(\lambda t)^{j-i} e^{-\lambda t}}{(j-i)!}.$$

Лекция 7

Интегриране на случайни процеси

В тази лекция си поставяме следните цели:

- да дефинираме интеграл от случаен процес относно неслучайна мярка;
- да дефинираме интеграл от неслучайна функция относно случайна мярка;
- да докажем някои свойства на тези интегали;
- да разгледаме някои примери;

1 Интеграл от случаен процес относно неслучайна мярка

В много теоритични и приложни задачи се налага да се разглеждат интеграли от вида

$$I(\omega) = I = \int_a^b \xi(t)dt, \tag{7.1}$$

където $\xi(t), t \in [a, b]$ е даден случаен процес.

Този интеграл може да се дефинира по няколко начина:

Определение 7.1. *(I начин - Тази дефиниция се нарича потраекторна.) Ако фиксираме ω ще получим една обикновена функция на t, $\xi(t, \omega)$ и за да бъде тя интегруема е достатъчно да има не повече от изброимо много прекъсвания в $[a, b]$. Това означава, че $I(\omega) = I$ при фиксирано ω е граница на интегрални суми от вида:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi(s_k, \omega)(t_{k+1} - t_k), \quad s_k \in (t_k, t_{k+1}),$$

при $n \to \infty$ *и* $\max_k |t_{k+1} - t_k| \to 0$.

И така, ако $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ е измерима функция и $\int_a^b \mathbf{E}(\xi^2(t))dt < \infty$, то по теоремата на Фубини

$$\mathbf{E}\left(\int_a^b \xi^2(t)dt\right) = \int_a^b \mathbf{E}(\xi^2(t))dt < \infty,$$

откъдето $\int_a^b \xi^2(t)dt$ съществува, а оттам и интеграла в (7.1) съществува с вероятност 1. При това $I = I(\omega)$ е сл. величина.

Определение 7.2. *(II начин - Можем да дефинираме I като средно квадратична граница на редица от сл. величини.) Нека $\xi(t) \in L_2[a, b]$ и нека $\xi(t)$ е елементарен процес, т.е. съществуват такива точки $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = b$, и сл. величини $\xi_0, \ldots, \xi_n$, така че $\xi(t, \omega) = \xi_k(\omega)$ при $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Тогава*

$$I = \int_a^b \xi(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \Delta t_k, \quad \Delta t_k = (t_{k+1} - t_k)$$

е дефиниран за всяко ω.

Ако $\xi(t), t \in [a, b]$ е произволен процес от $L_2[a, b]$, то съществува редица от елементарни процеси $\{\xi_n(t)\}, t \in [a, b]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, такава, че

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(t) = \xi(t), \ t \in [a, b], \ н.с..$$

Тъй като $|\xi(t) - \xi_n(t)| \le |\xi(t)|$, то по Теоремата на Лебег

$$\mathbf{E}\left\{\left(\int_a^b \xi(t)dt - \int_a^b \xi_n(t)dt\right)^2\right\} \le \mathbf{E}\left\{\int_a^b (\xi(t) - \xi_n(t))^2 dt\right\} \to 0,$$

при $n \to \infty$ и следователно

$$(L_2) \int_a^b \xi(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \xi_n(t)dt.$$

Определение 7.3. *(III начин - Като граница на риманови интегрални суми в термините на ковариационната функция $C(t, s)$ на процеса.) Разглеждаме*

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \xi(t_{nk})\Delta t_{nk}, \quad \Delta t_{nk} = t_{nk} - t_{n,k-1},$$

където

$$a = t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nn} = b.$$

Според критерия за непрекъснатост за съществуването на L_2- границата на I_n е НД изразът

$$\mathbf{E}(I_n I_m) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} C(t_{nk}, t_{mr})\Delta t_{nk}\Delta t_{mr}, \tag{7.2}$$

да има граница при $n \to \infty, m \to \infty$ *и* $\max_k \Delta t_{nk} \to 0,\ \max_r \Delta t_{mr} \to 0$.

Но това е еквивалентно на интегруемост по Риман на функцията $C(t,s)$ *в квадрата* $[a,b] \times [a,b]$.

Последната дефиниция на интеграла $\int_a^b \xi(t)dt$ е по-тясна от потраекторната, но има това предимство, че не е свързана с понятието измеримост.

Така дефинирахме интеграл от случаен процес потаекторно, а след това и като средно квадратична граница на сл. величини. Вторият интеграл ще означаваме с $(L_2)\int_a^b \xi(t)dt$. Възниква въпросът, дали това не е един и същи интеграл? Отговорът е положителен, както ще се убедим.

Нека за всяко ω траекториите $\xi(t,\omega)$ са интегруеми. Понеже L_2 интегралът е граница в L_2 смисъл на интегрални суми (7.2), и следователно е граница и по вероятност на същите суми. От друга страна, потраекторният интеграл е граница на същите суми за почти всяко ω, от където следва, че и той е граница по вероятност на тези суми. Следователно двата интеграла съвпадат, тъй като при сходимостта по вероятност границата е единствена с точност до събитие с вероятност 0.

Да предположим, че $\xi(t), t \in [a,b]$ е L_2-непрекъснат процес. Тогава неговата ковариационна функция $C(t,s)$ е непрекъсната в $[a,b] \times [a,b]$ и следователно е интегруема в този квадрат, а оттам и интегралът $\int_a^b \xi(t)dt$ съществува.

Задача 7.1. *Винеровият процес* $w_t, t \geq 0$ *и Поасоновият процес* $\pi_t, t \geq 0$ *са интегруеми, т.е. съществуват*

$$\xi(t) = \int_0^t w_s ds, \ \text{и}\ \eta(t) = \int_0^t \pi_s ds, \ \text{за всяко}\ t \geq 0.$$

Освен това $\xi(t)$ *и* $\eta(t)$ *са* L_2-*диференцируеми, при което* $\xi'(t) = w_t,\ \eta'(t) = \pi_t$.

По-общо: Нека процесът $x(t),\ t \in [a,b]$ *е* L_2-*интегруем. Тогава*

$$y(t) = \int_a^t x(s)ds, \quad t \in [a,b] \tag{7.3}$$

е сл. процес в пространството $L_2[a,b]$. *Ще покажем, че за* $y(t)$ *е изпълнено:*

1) $y(t)$ *е* L_2-*непрекъснат в* $[a,b]$;

2) ако $x(t)$ *е* L_2-*непрекъснат в* $[a,b]$, *то* $y(t)$ *е* L_2- *диференцируем в* $[a,b]$ *и* $y'(t) = x(t)$.

Решение: От (7.3) следва

$$\mathbf{E}[(y(t+h) - y(t))^2] = \int_t^{t+h} \int_t^{t+h} C(s,\tau) ds d\tau \to 0, \quad h \to 0,$$

което доказва 1).

Имаме

$$\Delta_h = \mathbf{E}\left\{\left(\frac{y(t+h)-y(t)}{h} - x(t)\right)^2\right\} = h^{-2}\mathbf{E}\left\{\left[\int_t^{t+h}(x(\tau)-x(t))d\tau\right]^2\right\} =$$

$$= \int_t^{t+h}\int_t^{t+h}\mathbf{E}\{(x(s)-x(t))(x(\tau)-x(t))\}dsd\tau/h^2 =$$

$$\leq \left[\int_t^{t+h}(\mathbf{E}\{(x(\tau)-x(t))^2\})^{1/2}d\tau\right]^2/h^2,$$

но

$$\int_t^{t+h}(\mathbf{E}\{(x(\tau)-x(t))^2\})^{1/2}d\tau = h^2\left(\mathbf{E}\{(x(\tau_0)-x(t))^2\}\right)^{1/2},\ \tau_0 \in (t, t+h),$$

следователно $\Delta_h \to 0$ при $h \to 0$ с което е доказано и 2).

Понякога представлява интерес да се намери разпределението на интеграла от случаен процес. В общия случай тази задача е трудна, даже и да знаем съвместното разпределение на произволен брой сл. величини. Все пак за един широк и важен клас сл. процеси разпределението на $\int_a^b \xi(t)dt$ може да се намери. Това са Гаусовите процеси.

Предложение 7.1. *Нека $\xi(t)$ е Гаусов процес и е известно, че той е L_2 непрекъснат. Тогава $I = \int_a^b \xi(t)dt$ съществува и има Гаусово разпределение.*

Доказателство: I е L_2-граница на интегрални суми от вида

$$I_n = \sum_{k=0}^{n}\xi(s_k)(t_{k+1}-t_k).$$

Очевидно

$$I_n = C_0 + C_1\xi(s_1) + \ldots + C_n\xi(s_n).$$

Тъй като даденият процес е Гаусов, тази линейна комбинация има Гаусово разпределение и за характеристичната функция $\phi_n(z)$ на I_n имаме $\phi_n(z) = \exp[iza_n + \sigma_n^2 z^2/2]$. Остава да се отбележи, че $I_n \to I, n \to \infty$, а това означава, че a_n и σ_n^2 имат граници и границата на характеристичните функции има същия вид, следователно I също има Гаусово разпределение. $\square$

Задача 7.2. *Ако $\xi(t) = \int_0^t w_s ds$, където $w_t, t \geq 0$ е Винеров процес има Гаусово разпределение с параметри 0 и $t^3/3$.*

Решение:

$$\int_0^t \mathbf{E}w_s^2 ds = \int_0^t s^2 ds = t^3/3.$$

Задача 7.3. *Отново за* $\xi(t) = \int_0^t w_s ds$*, да се докаже, че при* $\forall t$ *двумерната сл. в.* (w_t, ξ_t) *има Гаусово разпределение със средни стойности* $(0,0)$ *и ковариационна матрица равна на* $\begin{pmatrix} t & t^2/2 \\ t^2/2 & t^3/3 \end{pmatrix}$.

Упътване: $\begin{pmatrix} \mathbf{E}w_t^2 & \mathbf{E}w_t\xi(t) \\ & \\ \mathbf{E}w_t\xi(t) & t^3/3 = \mathbf{E}\xi^2(t) \end{pmatrix}$.

Често е важно не разпределението на интеграла, а някои негови числени характеристики.

Теорема 7.1. *Нека сл. процес* $\xi(t), t \in [a,b]$ *е* L_2-*непрекъснат и принадлежи на* $L_2[a,b]$*. Нека* $a(t)$ *и* $C(t,s)$ *са средната стойност и ковариационната функция на процеса. Ще покажем, че за интеграла* $I = \int_a^b \xi(t)dt$ *са в сила следните съотношения:*

$$\mathbf{E}(\int_a^b \xi(t)dt) = \int_a^b \mathbf{E}\xi(t)dt = \int_a^b a(t)dt; \tag{7.4}$$

$$\mathbf{Cov}(\int_a^b \xi(t)dt, \xi(s)) = \int_a^b C(t,s)dt; \tag{7.5}$$

$$\mathbf{Cov}(\int_a^b \xi(t)dt, \int_a^b \xi(s)ds) = \int_a^b \int_a^b C(t,s)dtds. \tag{7.6}$$

Доказателство: Имаме

$$\mathbf{E}\{\int_a^b \xi(t)dt\} = \mathbf{E}\{\lim_n \sum_{k=0}^n \xi(s_k)\Delta t_k\} = \lim_n \sum_{k=0}^n \mathbf{E}(\xi(s_k))\Delta t_k.$$

Но по условие $\xi(t)$ е L_2-непрекъснат, което означава, че $a(t)$ е непрекъсната в $[a,b]$ и следователно интегруема, като границата в последния израз на горното равенство е точно $\int_a^b a(t)dt$. С това е доказано (7.4).

Всъщност (7.4) е вариант на теоремата на Фубини, тъй като е обоснована смяната на интегрирането по мярката $\mathbf{P}$ и интегрирането по Лебеговата мярка dt.

$$\int_\Omega (\int_a^b \xi(t,\omega)dt)d\mathbf{P}(\omega) = \int_a^b (\int_\Omega \xi(t,\omega)d\mathbf{P}(\omega))dt.$$

Тогава (7.5) и (7.6) са ясни. □

По аналогичен начин се доказва и равенството

$$\mathbf{Cov}\left(\int_a^b f(t)\xi(t)dt, \int_a^b g(s)\eta(s)ds\right) = \int_a^b \int_a^b f(t)C_{\xi\eta}(t,s)g(s)dtds, \tag{7.7}$$

където $\xi(t)$ и $\eta(t)$ са произволни L_2-непрекъснати сл. процеси с ковариационна функция $C_{\xi\eta}(t,s)$, а f, g са неслучайни функции от $L_2[a,b]$.

До тук разглеждахме интеграли от случайни процеси, предполагайки, че те са дефинирани в краен затворен интервал. По аналогия с класическия анализ и тук има смисъл да говорим за несобствени интеграли от сл. процеси. Ясно е, че ако съществува несобствен интеграл $\int_0^\infty \int_0^\infty C(t,s)dtds$ от ковариационната функция, тогава процесът $\xi(t)$ ще бъде интегруем в $[0,\infty)$, т.е. съществува несобствен интеграл $\int_0^\infty \xi(t)dt$.

2 Основна теорема на стохастичното смятане (аналог на формулата на Лайбниц-Нютон)

Теорема 7.2. *Нека $x(t), t \in [a,b]$ е сл. процес с ковариационна функция $C(t,s)$. Нека съществуват $\dfrac{\partial C(t,s)}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2 C(t,s)}{\partial t \partial s}$ и са непрекъснати. Тогава $x(t)$ е L_2-диференцируем, неговата производна $x'(t)$ е L_2-интегруема и за всяко $t \in [a,b]$ с вероятност 1*

$$x(t) - x(a) = \int_a^t x'(s)ds.$$

Доказателство: Ще докажем, че за всяко $t \in [a,b]$

$$\delta_t = \mathbf{E}\left\{\left(x(t) - x(a) - \int_a^t x'(s)ds\right)^2\right\} = 0. \tag{7.8}$$

Знаем, че $\dfrac{\partial^2 C(t,s)}{\partial t \partial s}$ е ковариационната функция на $x'(t)$, а $\dfrac{\partial C(t,s)}{\partial t}$ е ковариационната функция на $x'(t)$ и $x(s)$. Тогава за величината δ_t от (7.8) намираме

$$\delta_t = \mathbf{E}\left\{(x(t)-x(a))^2 - 2(x(t)-x(a))\int_a^t x'(s)ds + \int_a^t x'(s)ds \int_a^t x'(\tau)d\tau\right\} =$$

$$C(t,t) - 2C(t,a) + C(a,a) - 2\int_a^t \left[\frac{\partial C(t,s)}{\partial s} - \frac{\partial C(a,s)}{\partial s}\right] ds + \int_a^t \int_a^t \frac{\partial^2 C(t,s)}{\partial s \partial \tau} dsd\tau.$$

От направените предположения следва, че при пресмятане на интегралите в дясната страна на последното равенство можем да приложим класическата формула на Лайбниц-Нютон. Тогава се получава, че $\delta_t = 0, \forall t \in [a,b]$. $\square$

3 Интеграл от неслучайна функция по случаен процес

Следващата ни цел е да построим стохастичен интеграл от вида

$$J(f) = \int_a^b f(t) d\eta(t), \tag{7.9}$$

където $f(t)$ е неслучайна функция, а $\eta(t)$ е сл. процес.

Забележка 7.1. *Няма смисъл да разглеждаме интеграла $J(f)$, когато $\eta(t)$ е L_2-диференцируем, тъй като вместо $J(f)$ можем да вземем $\int_a^b f(t)\eta'(t)dt$, а с неговото построяване вече се запознахме.*

Ще дефинираме (7.9) за процеси с некорелирани нараствания, а те както не е трудно да се види са недиференцируеми.

Нека е даден сл. процес $\eta(t), t \in [a,b], \eta \in L_2[a,b]$, чийто нараствания са некорелирани, т.е. за произволни $a \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq b$ имаме $\mathbf{E}[(\eta(t_2) - \eta(t_1))(\eta(t_4) - \eta(t_3))] = 0$.

Първо ще покажем, че съществува ненамаляваща функция $F(t), t \in [a,b]$ такава, че $\eta(t) - \eta(s), t > s$ има дисперсия $F(t) - F(s)$. Нека $t_0 \in [a,b]$ е фиксирано число. Полагаме

$$F(t) = \begin{cases} \mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0))^2\}, & t_0 \leq t \leq b \\ -\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0))^2\}, & a \leq t \leq t_0 \end{cases} \tag{7.10}$$

Очевидно $F(t)$ зависи от t_0, но ако вземем друго фиксирно число $t_0' \in [a,b]$, то $F(t)$ ще се измени само с адитивна константа. Нека $t_0' < t_0 < t$ (аналогично се разглеждат случайте $t_0' > t_0 > t$). Тогава

$$\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0'))^2\} = \mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0) + \eta(t_0) - \eta(t_0'))^2\} =$$

$$\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0))^2\} + 2\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0))(\eta(t_0) - \eta(t_0'))\} + \mathbf{E}\{(\eta(t_0) - \eta(t_0'))^2\}.$$

Сега твърдението следва от факта. че:

$$\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0))(\eta(t_0) - \eta(t_0'))\} = 0;$$

$$\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t_0))^2\} = F(t);$$

и

$$\mathbf{E}\{(\eta(t_0) - \eta(t_0'))^2\} = const.$$

Ако отново използуваме свойството некорелираност (7.10) на нарастванията на процеса $\eta(t)$, то за всеки $t > s$

$$\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(s))^2\} = F(t) - F(s).$$

Следователно $F(t)$ е ненамаляваща функция. Освен това, може да се докаже, че съществува граница отдясно $F(t+0)$ и отляво $F(t-0)$ за всяко $t \in [a,b]$. По-нататък

$$\eta(t+0) - \eta(t) = \lim_{h \downarrow 0}(\eta(t+h) - \eta(t)),$$

$$\eta(t) - \eta(t-0) = \lim_{h \downarrow 0} \eta(t) - \eta(t-h),$$

откъдето

$$\mathbf{E}\{(\eta(t+0) - \eta(t))^2\} = F(t+0) - F(t),$$
$$\mathbf{E}\{(\eta(t) - \eta(t-0))^2\} = F(t) - F(t-0).$$

Нека в заключение да отбележим, че нарастването $\eta(t) - \eta(t_0)$ е L_2- непрекъснато в т. $t \iff F(t)$ е непрекъсната в тази точка. Ако $F(t)$ има прекъсване в т. t, то поне една от сл. величини $\eta(t+0) - \eta(t)$ и $\eta(t) - \eta(t-0)$ ще има нулева дисперсия. Да допуснем, че $\eta(t)$ е L_2- непрекъсната отдясно. Следователно $F(t)$ е непрекъсната отдясно. От $\eta(t) \in L_2[a,b]$ следва, че $F(t)$ е ограничена в $[a,b]$, при което е допустимо $a = -\infty, b = +\infty$. Но всяка ограничена и ненамаляваща функция, непрекъсната отдясно (каквато е $F(t)$) поражда в дефиниционната си област $[a,b]$ крайна мярка и то такава, че мярката на интервала (s,t) е $F(t) - F(s)$. Именно относно такива функции се строи интеграл на Стилтес $\int_a^b g(t)dF(t)$.

Нека $f(t), t \in [a,b]$ е неслучайна функция, за която $\int_a^b f^2(t)dF(t) < \infty$. Целта е да дефинираме стохастичния интеграл

$$J(f) = \int_a^b f(t)d\eta(t). \tag{7.11}$$

1) Нека $f(t)$ е елементарна функция, т.е.

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & a \le t \le t_1, \\ f_1, & t_1 \le t \le t_2, \\ . & \\ . & \\ f_n, & t_n \le t \le b \end{cases}$$

За такава функция е естествено да положим

$$J(f) = \sum_{k=0}^{n} f_k[\eta(t_{k+1} - \eta(t_k)], \tag{7.12}$$

където $t_0 = a, t_{n+1} = b$.

От (7.12) следва, че $J(f)$ зависи линейно от f:

$$J(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 J(f_1) + c_2 J(f_2). \tag{7.13}$$

Освен това

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{E}[J(f)] = 0, \\ \mathbf{E}[J^2(f)] = \sum_{k=0}^n f_k^2[F(t_{k+1}) - F(t_k)]. \end{array}\right\} \tag{7.14}$$

Или (7.14) може да се представи и като

$$\mathbf{E}[J^2(f)] = \mathbf{Var}[J(f)] = \int_a^b f^2(t)dF(t). \tag{7.15}$$

Нека $g(t), t \in [a,b]$ е друга елементарна функция от типа на f с $\int_a^b g^2(t)dF(t) < \infty$. Тогава

$$\mathbf{Cov}(J(f), J(g)) = \mathbf{E}(J(f), J(g)) = \int_a^b f(t)g(t)dF(t). \tag{7.16}$$

Наистина, нека f има постоянни стойности в интервалите определени от $a, t_1, t_2, \ldots, b$, а g има постоянни стойности в интервалите определени от $a, s_1, s_2, \ldots, b$.

Обединяваме точките от двете деления в обща растяща редица

$$a < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m < b.$$

Нека $f_0, f_1, \ldots, f_m$ са стойностите на f в $[a, \tau_1], (\tau_1, \tau_2], \ldots, (\tau_m, b]$ и $g_0, g_1, \ldots, g_m$ са съответните стойности на g. Тогава

$$J(f) = \sum_{i=0}^{m} f_i(\eta(\tau_{i+1}) - \eta(\tau_i)),$$
$$J(g) = \sum_{j=0}^{m} g_j(\eta(\tau_{j+1}) - \eta(\tau_j)),$$

откъдето

$$\mathbf{E}[J(f)J(g)] = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} f_i g_j \mathbf{E}\{(\eta(\tau_{i+1}) - \eta(\tau_i))(\eta(\tau_{j+1}) - \eta(\tau_j))\}.$$

Но

$$\mathbf{E}\{(\eta(\tau_{i+1}) - \eta(\tau_i))(\eta(\tau_{j+1}) - \eta(\tau_j))\} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ F(\tau_{i+1}) - F(\tau_i), & i = j. \end{cases}$$

Следователно

$$\mathbf{E}[J(f)J(g)] = \int_a^b f(t)g(t)dF(t).$$

Накратко до тук, ако f, g са елементарни, то с (7.12) дефинирахме стохастични интеграли $J(f)$ и $J(g)$, за които са изпълнени (7.13) и (7.14), а ковариацията се задава с (7.16).

Да продължим построяването на $J(f)$ за произволни функции, удовлетворяващи $\int_a^b f^2(t)dF(t) < \infty$. Съвкупността на тези функции ще означаваме с $L_2(dF)$.

Но всяка функция $f \in L_2(dF)$ може да се апроксимира с помощта на елементарни функции от същия клас, т.е. съществува редица от елементарни функции $f_n(t)$ такива, че

$$\int_a^b (f_n(t) - f(t))^2 dF(t) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тогава $J(f_n)$ се дефинират с (7.12), а

$$J(f) = \int_a^b f^2(t)d\eta(t)$$

ще бъде L_2- границата на $J(f_n)$

$$\mathbf{E}\{(J(f_n) - J(f))^2\} = \int_a^b (f_n(t) - f(t))^2 dF(t) \to 0, n \to \infty.$$

Свойствата на $J(f)$ се получават за произволно $f \in L_2(dF)$ чрез граничен преход от свойствата на $J(f_n)$.

И така построихме $J(f) = \int_a^b f(t) d\eta(t), f \in L_2(dF)$ при условие, че $\eta(t) \in L_2$-непрекъсн отдясно (Следователно $F(t)$ е непрекъсната отдясно). Аналогично може да се постъпи и когато $\eta(t)$ е L_2- непрекъсната отляво.

Ако $\eta(t)$ е L_2- непрекъсната, то тогава F е непрекъсната и редицата от елементарни функции може да се избере по който и да е от двата начина. Възможно е $F(t)$ да е абсолютно непрекъсната, т.е. да съществува $F'(t) = p(t)$. Тогава $J(f)$ се дефинира по същия начин с тази разлика, че искаме $\int_a^b f^2(t) p(t) dt < \infty$.

Лекция 8

Стохастични уравнения

В тази лекция си поставяме следните цели:

- Да дефинираме стохастичен интеграл по Винеров процес;
- Да покажем някои негови свойства;
- Да изведем формулата на Ито;
- Да дефинираме стохастично диференциално уравнение;
- Да разгледаме примери.

1 Стохастичен интеграл по Винеров процес

1.1 Предварителни бележки

Всяко уравнение, чийто коефициенти зависят от сл. в. или от сл. процеси, определени в дадено вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ се нарича стохастично.

При достатъчно общи предположения, решенията на такова уравнение са сл. процеси в същото вероятностно пространство.

Строгата математическа теория на стохастичните уравнения е започнала да се създава с работите на Бернщайн през 30-те години и особено в средата на 40-те години с работите на Ито и Гихман. Ще разгледаме основните въпроси свързани със стохастичните диференциални уравнения (СДУ) на базата на Винеровия процес.

Целта е най-напред да построим и да намерим основните свойства на интеграла

$$J_T(f) = \int_0^T f(t, \omega) dw_t, \tag{8.1}$$

където $f(t)$ случайна функция и w_t е Винеров процес.

До сега разглежданите методи не са приложими, тъй като траекториите на Винеровия процес в произволно малък интервал имат безкрайна вариация.

Лема 8.1. *Винеровият процес има неограничена вариация.*

Доказателство: Разглеждаме $[0,T]$ с точки на делене $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$. Вариацията в $[0,T]$ ще получим като граница на величините

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} |w_{t_{k+1}} - w_{t_k}|.$$

Тъй като Винеровия процес е с независими нараствания и Гаусово разпределение, то

$$\mathbf{E}V_n = c\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)^{1/2} \geq \frac{cT}{\max_k(t_{k+1}-t_k)} \to \infty, \max_k \Delta t_k \to 0,\ n\to\infty,$$

$$\mathbf{Var}V_n = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{Var}|w_{t_{k+1}} - w_{t_k}| = c_1\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k) = c_1T.$$

Следователно $V_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \infty,\ n\to\infty.$ $\square$

Възможността да се построи стохастичен интеграл (8.1) се дължи на следното свойство на Винеровия процес, (аналогично на ограничена вариация). Нека при $n\to\infty, \max_k \Delta t_k \to 0$. Тогава

$$\sum_{k=0}^{n-1}(w_{t_{k+1}} - w_{t_k})^2 \xrightarrow{L_2} T, \tag{8.2}$$

т.е. за всяко $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(w_{t_{k+1}} - w_{t_k})^2\right) - T\right| > \varepsilon\right\} \to 0,\ n\to\infty.$$

Наистина

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(w_{t_{k+1}} - w_{t_k})^2\right) = T,$$

$$\mathbf{Var}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(w_{t_{k+1}} - w_{t_k})^2\right) = c_2\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)^2 \leq c_2T\max_k \Delta t_k \to 0,\ n\to\infty.$$

Тогава (8.2) е следствие от неравенството на Чебишов.

Първата конструкция на (8.1) е дадена още през 30-те години от Пели, но за неслучайна функция f с интегруем квадрат. $(\int_0^T f^2(t)dt < \infty)$, т.е. $f \in L_2[0,T]$.

Нека първо f има непрекъсната производна f' и $f(0) = f(T) = 0$. Тогава полагаме

$$J_T(f) = \int_0^T f(t)dw_t = -\int_0^T f'(t)w_t dt.$$

Като вземем в предвид, че за Винеров процес $\mathbf{E}w_t = 0$ и $\mathbf{E}w_t w_s = \min\{t, s\}$ получаваме

$$\mathbf{E}J_T(f) = 0,$$

$$\mathbf{E}(J_T(f)J_T(g)) = \mathbf{E}\left(\int_0^T f'(t)w_t dt \int_0^T g'(s)w_s ds\right) =$$

$$\int_0^T \int_0^T f'(t)g'(s)\min(t,s)dtds = \int_0^T f(s)g(s)ds.$$

В частност $\mathbf{E}J_T^2(f) = \int_0^T f^2(t)dt$.

По-нататък се използува фактът, че произволна функция $f \in L_2[0,T]$ може да се апроксимира с функции от типа на разгледаната. По такъв начин стохастичния интеграл $J_T(f)$ е дефиниран за всяко $f \in L_2[0,T]$.

Но този метод може да се приложи, и ако f е случайна функция.

1.2 Стихастичен интеграл за елементарни функции

Нека $\{\mathcal{F}_t\}, t \geq 0$ е семейство от ненемаляващи σ-подалгебри на основната σ-алгебра $\mathcal{F}$, т.е. при $s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ и за всяко $t \geq 0, \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.

Определение 8.1. *Казваме, че процесът $\xi_t, t \geq 0$ е съгласуван с потока от $\sigma-$ алгебри $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ ако за всяко $t \geq 0 : \xi_t$ е $\mathcal{F}_t-$ измерим, т.е. $(\xi_t, \mathcal{F}_t), t \geq 0$.*

Да предположим, че $(w_t, \mathcal{F}_t), t \geq 0$ е Винеров процес. Това означава, че w_t е $\mathcal{F}_t$ измерима, но неговите нараствания, например $w_{t+h} - w_t$ не зависят от $\mathcal{F}_t$. Често в качеството на $\mathcal{F}_t$ се вземат $\sigma-$алгебрите $\mathcal{F}_t^w$, породени от самия Винеров процес в интервала $[0, t]$.

С $L_2([0,T] \times \Omega)$ означаваме съвкупността на всички (t, ω) измерими сл. функции $(f(t,\omega), \mathcal{F}_t), t \in [0,T]$, за които $\mathbf{E}(\int_0^T f^2(t,\omega)dt) < \infty$.

По аналогия с обикновената теория на интеграла първо определяме стохастичният интеграл $J_T(f)$ за някъкво множество от "елементарни функции", със свойства: 1) да бъде достатъчно "богато", за да може с функции от него да се апроксимира произволна функция от $L_2([0,T] \times \Omega)$; 2) Просто и нагледно да се описват свойствата на стохастичния интеграл.

Определение 8.2. *Функцията $e(t), t \in [0,T]$ от класа $L_2([0,T] \times \Omega)$ се нарича елементарна, ако съществуват точки $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ и сл. величини $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, където ξ_k е $\mathcal{F}_{t_k}$ измерима, такива че:*

$$e(t,\omega) = \xi_k(\omega),$$

при $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Определение 8.3. *Нека $e(t,\omega)$ е елементарна функция. Тогава стохастичният интеграл се дефинира с*

$$J_T(e) = \int_0^T e(t,\omega)dw_t = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k[w_{t_{k+1}} - w_{t_k}]. \tag{8.3}$$

2 Някои свойства на $J_T(e)$

Ако a_1, a_2 са константи, а $e_1(t,\omega), e_2(t,\omega)$ са елементарни функции от $L_2([0,T]\times\Omega)$, то:

1) $J_T(a_1e_1 + a_2e_2) = a_1J_T(e_1) + a_2J_t(e_2)$;

2) Ако $\int_s^t e(u,\omega)dw_u = \int_0^T e(u,\omega)\chi_{[s,t]}(u)dw_u$, където $\chi_{[s,t]}(u)$ е индикаторът на $[s,t]$, то

$$\int_0^t e(u,\omega)dw_u = \int_0^{t_1} e(u,\omega)dw_u + \int_{t_1}^t e(u,\omega)dw_u;$$

3) $\int_0^t e(u,\omega)dw_u$ е непрекъсната функция на горната си граница $t \in [0,T]$;

4) При $s < t$ с вероятност 1

$$\mathbf{E}\left\{\int_0^t e(u,\omega)dw_u|\mathcal{F}_s\right\} = \int_0^s e(u,\omega)dw_u;$$

в частност

4') $\mathbf{E}\left\{\int_0^t e(u,\omega)dw_u\right\} = 0$ за всяко $t \in [0,T]$;

5) $\mathbf{E}\left\{\int_0^t e_1(u,\omega)dw_u \int_0^t e_2(u,\omega)dw_u\right\} = \mathbf{E}\left\{\int_0^t e_1(u,\omega)e_2(u,\omega)du\right\}.$

Доказателство: 1) и 2) са очевидни; 3) следва от непрекъснатостта на Винеровия процес. За 4) е достатъчно да се отбележи, че при $t_k \geq s$ с вероятност 1

$$\mathbf{E}\{\xi_k(\omega)[w_{t_{k+1}} - w_{t_k}]|\mathcal{F}_s\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}(\xi_k[w_{t_{k+1}} - w_{t_k}]|\mathcal{F}_{t_k})|\mathcal{F}_s\} =$$
$$\mathbf{E}\{\xi_k(\omega)\mathbf{E}(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}|\mathcal{F}_{t_k})|\mathcal{F}_s\} = 0.$$

Аналогично се доказва 5). Без ограничение на общността, можем да смятаме, че $e_1(t,\omega), e_2(t,\omega)$ приемат постоянни стойности върху едни и същи интервали. После разсъждаваме, както при $J_T(f) = \int_0^T f(s)d\eta(s)$. $\square$

2.1 Стохастичен интеграл за произволна функция с интегруем квадрат

И така от $J_T(e)$ ще дефинираме стохастичен интеграл за произволна функция $f \in L_2([0,T]\times\Omega)$.

Лема 8.2. *За всяка функция $f \in L_2([0,T]\times\Omega)$ съществува редица от елементарни функции $f_n, n = 1, 2, \ldots$ от същия клас, така че*

$$\mathbf{E}\{\int_0^T [f_n(t,\omega) - f(t,\omega)]^2 dt\} \to 0, n \to \infty. \tag{8.4}$$

Доказателство: а) Нека $f(t,\omega) \in L_2([0,T]\times\Omega)$, $|f(t,\omega)| \leq C$ и $f(t,\omega)$ е непрекъсната по t с вероятност 1. Полагаме $f_n(t,\omega) = f(\frac{kT}{n})$ при $t \in [\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n})$ и получаваме редицата $f_n, n = 1, 2, \ldots$, където $f_n \in L_2([0,T]\times\Omega)$ и

$$\mathbf{E}\{\int_0^T [f_n(t) - f(t)]^2 dt\} \to 0,\ n \to \infty.$$

б) Нека $|f(t,\omega)| \leq C$. Тогава функциите

$$f_n(t,\omega) = n\int_{t_n}^t f(t,\omega)ds, \qquad t_n = \max[t - 1/n, 0]$$

са непрекъснати, принадлежат на $L_2([0,T]\times\Omega)$ и образуват редица, която с вероятност 1 клони към $f(t,\omega)$. Тъй като $|f(t,\omega)| \leq C$, то

$$\mathbf{E}\{\int_0^T [f_n(t) - f(t)]^2 dt\} \to 0,\ n \to \infty.$$

в) За произволна функция $f(t,\omega) \in L_2([0,T]\times\Omega)$. Тя се апроксимира в L_2 смисъл от ограничени функции

$$f(t,\omega) = f(t,\omega)\chi_{[-n,n]}(t).$$

□

И така нека $f \in L_2([0,T]\times\Omega)$. Съгласно доказаната Лема, съществува редица от елементарни функции $f_n, n = 1, 2, \ldots$, за които е изпълнено (8.4). Но тогава

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathbf{E}to\infty}} \mathbf{E}\{\int_0^T [f_n(t,\omega) - f_m(t,\omega)]^2 dt\} = 0$$

и от Свойство 5) следва, че

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mathbf{E}\{\int_0^T [f_n(t,\omega)dw_t - \int_0^T f_m(t,\omega)dw_t]\} =$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mathbf{E}\{\int_0^T [f_n(t,\omega) - f_m(t,\omega)]^2 dt\} = 0,$$

т.е. $J_T(f_n)$ е фундаментална в L_2-смисъл. Следователно съществува граница която означаваме с $J_T(f)$ или $\int_0^T f(t,\omega)dw_t$, т.е.

$$J_T(f) = \int_0^T f(t,\omega)dw_t = \text{l.i.m.} J_T(f_n).$$

По този начин се дефинира стохастичен интеграл $J_T(f)$ по Винеров процес за произволна функция от $L_2([0,T]\times\Omega)$. Дефиницията не зависи от избора на апроксимиращата редица, т.е. стойността на границата не зависи от апроксимиращата редица с точност до стохастична еквивалентност. Същите свойства 1)-5) са в сила и в общия случай.

Дефинираме семейството стохастични интеграли $J_t(f)$ при $t\in[0,T]$, като положим

$$J_t(f)=J_T(f\chi_{[0,t]})$$

т.е.

$$J_t(f)=\int_0^T f(s,\omega)\chi_{[0,t]}(s,\omega)dw_s=\int_0^t f(s,\omega)dw_s.$$

Дадената конструкция на стохастични интеграли $J_T(f), t\in[0,T]$ и техните основни свойства остават в сила и при $T=\infty$. Трябва само $f\in L_2([0,\infty)\times\Omega)$, т.е. $\mathbf{E}\{\int_0^\infty f^2(s,\omega)ds\}<\infty$.

Пример 8.1. *Нека $w_t, t\geq 0, w_0=0$ е Винеров процес. Ще покажем, че*

$$\int_0^T w_t dw_t=\frac{1}{2}(w_T^2-T).$$

Функцията w_t е измерима, $\mathcal{F}_t-$ съгласувана и за всяко $T<\infty$ имаме

$$\int_0^T \mathbf{E}w_t^2dt=\int_0^T tdt=T^2/2.$$

Нека $0=t_0<t_1<t_2,\ldots<t_n=T$. Полагаме $f(t,\omega)=w_{t_k}$ при $t\in[t_k,t_{k+1})$. Следователно

$$\int_0^T \mathbf{E}\{[f(t,\omega)-w_t]^2\}dt=$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathbf{E}\{[w_t-w_{t_k}]^2\}dt=1/2\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)^2\to 0,$$

$$\max(t_{k+1}-t_k)\to 0 \quad n\to\infty.$$

Следователно

$$\int_0^T w_t dw_t=\text{l.i.m.}_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}w_{t_k}[w_{t_{k+1}}-w_{t_k}].$$

Разглеждаме

$$w_T^2=\sum_{k=0}^{n-1}(w_{t_{k+1}}-w_{t_k})^2+2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j<k}(w_{t_{k+1}}-w_{t_k})(w_{t_{j+1}}-w_{t_j})= \tag{8.5}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(w_{t_{k+1}}-w_{t_k})^2+2\sum_{k=0}^{n-1}w_{t_k}(w_{t_{k+1}}-w_{t_k}).$$

Лявата страна на (8.5) не зависи от точките на делене на $[0,T]$. От (8.2) следва, че първата сума в (8.5) клони към T. Тогава от (8.2) и (8.5) следва

$$\int_0^T w_t dw_t = \frac{1}{2}(w_T^2 - T).$$

3 Свойства на стохастичните интеграли

Да означим $\eta_t = \int_0^t f(s,\omega)dw_s$.
1) За всяко $t \in [0,T]$ $\mathbf{E}|\eta_t| < \infty$;
Наистина

$$\mathbf{E}|\eta_t| \le \left(\mathbf{E}(\eta_t)^2\right)^{1/2} = \left(\mathbf{E}\{\int f^2(s,\omega)ds\}\right)^{1/2} < \infty,$$

тъй като $f \in L_2([0,T]\times\Omega)$.
2) При $t > s$ с вероятност 1 е изпълнено (поради свойство 4))

$$\mathbf{E}(\eta_t|\mathcal{F}_s) = \eta_s.$$

Знаем, че w_t е мартингал и от последното свойство 2) следва, че интеграла по Винеров процес е също мартингал. При това с вероятност 1

$$\mathbf{E}\{(\eta_t - \eta_s)^2|\mathcal{F}_s\} = \mathbf{E}\{\int_s^t f^2(u,\omega)du|\mathcal{F}_s\}.$$

4 Формула на Ито за смяна на променливите

Нека $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ е вероятностно пространство, $\mathcal{F}_t$ е поток от σ алгебри, $t \ge 0$ и $(w_t,\mathcal{F}_t)$ е Винеров процес.

Дадени са сл. функции $a(t,\omega)$ и $b(t,\omega)$, $t \ge 0$, които са съгласувани с потока $\mathcal{F}_t$ и удовлетворяват равенствата

$$\begin{cases} \mathbf{P}\{\int_0^\infty |a(s,\omega)|ds < \infty\} = 1 \\ \mathbf{P}\{\int_0^\infty b^2(s,\omega)ds < \infty\} = 1. \end{cases} \tag{8.6}$$

Определение 8.4. *Казваме, че сл. процес $\xi_t, t \ge 0$ допуска стохастичен диференциал с коефициенти на пренос $a(t,\omega)$ и дифузия $b^2(t,\omega)$, ако за всяко $t \ge 0$ с вероятност 1*

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t a(s,\omega)ds + \int_0^t b(s,\omega)dw_s, \tag{8.7}$$

където ξ_0 е сл. величина **независима** *от Винеровия процес.*

Вместо (8.7) за **удобство** *записваме*

$$d\xi_t = a(t,\omega)dt + b(t,\omega)dw_t, \quad \xi_t|_{t=0} = \xi_0.$$

Ако $g(t,x), t \geq 0, x \in \mathbf{R}$ е измерима функция и вместо аргумента x заместим процеса ξ_t, то ще получим нов случаен процес

$$\eta(t) = g(t, \xi_t), \ t \geq 0.$$

Основен въпрос, който ни интересува е при какви условия $\eta(t), t \geq 0$ допуска стохастичен диференциал?

Теорема 8.1. *(Формула на Ито в едномерния случай) Нека $g(t,x)$ има непрекъснати производни $g'_t = \frac{\partial g}{\partial t}$, $g'_x = \frac{\partial g}{\partial x}$ и $g''_{xx} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, а $\xi_t, t \geq 0$ се задава със (8.7). Тогава $\eta(t)$ допуска стохастичен диференциал*

$$d\eta(t) = A(t,\omega)dt + B(t,\omega)dw_t, \quad \eta(0) = g(0, \xi_0), \tag{8.8}$$

където

$$A(t,\omega) = g'_t(t,\xi_t) + a(t,\omega)g'_x(t,\xi_t) + \frac{1}{2}b^2(t,\omega)g''_{xx}(t,\xi_t),$$
$$B(t,\omega) = b(t,\omega)g'_x(t,\xi_t).$$

Ще отбележим 2 важни случая на формулата на Ито в многомерния случай.

I. Нека $g = g(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), t \geq 0, x_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \ldots, n$ е такава, че производните

$$g'_t = \frac{\partial g}{\partial t}, g'_k = \frac{\partial g}{\partial x_k}, g''_{kj} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j}, k, j = 1, \ldots, n$$

съществуват и са непрекъснати. Дадени са n случайни процеса $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$, където

$$d\xi_k(t) = a_k(t,\omega)dt + b_k(t,\omega)dw_t, k = 1, \ldots, n,$$

и функциите a_k и b_k са от типа (8.6). Тогава сл. процес $\eta(t) = g(t, \xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ има стохастичен диференциал

$$d\eta(t) = \left[g'_t + \sum_{k=1}^{n} a_k g'_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_k b_j g''_{kj} \right] dt + \left[\sum_{k=1}^{n} g'_k b_k \right] dw_t, \tag{8.9}$$

$$\eta(0) = g(0, \xi_1(0), \ldots, \xi_n(0)).$$

II. Нека $\xi(t), t \geq 0$, има диференциал

$$d\xi(t) = a(t,\omega)dt + b(t,\omega)dw(t),$$

където $a(t,\omega) = (a_1(t,\omega), \ldots, a_n(t,\omega))$, $b(t,\omega) = (b_{kj}(t,\omega)), k, j = 1, \ldots, n$, $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_n(t))$.

Ако $g(t,x), t \geq 0, x \in \mathbf{R}^n$ е гладка функция, то

$$dg(t,\xi(t)) = \left[g'_k(t,\xi(t)) + \sum_{k=1}^{n} g'_k a_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g''_{ij} (\sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{kj}) \right] dt + \sum_{i,j=1}^{n} g'_i b_{ij} dw_j(t). \tag{8.10}$$

Формулите (8.9) и (8.10) също се наричат формули на Ито.

Формулата (8.9) може да се запише в следната еквивалентна форма

$$d\eta(t) = g'_t dt + \sum_{k=1}^{n} g'_k d\xi_k(t) + (1/2)\sum_{k=1}^{n} g''_{kj} d\xi_k(t) d\xi_j(t). \tag{8.11}$$

Ако в (8.11) $d\xi_k(t)$ заместим с неговото равно, $k = 1, \dots, n$ и използваме таблицата за умножение на диференциали

$\times$	dw	dt
dw	dt	0
dt	0	0

то може да се получи (8.9).

Пример 8.2. *Нека в (8.11) $n = 2, g = x_1x_2$. Тогава*

$$d[\xi_1(t)\xi_2(t)] = \xi_1(t)d\xi_2(t) + \xi_2(t)d\xi_1(t) + b_1(t)b_2(t)dt,$$

а също

$$d[\xi_1(t)\xi_2(t)] = [\xi_1(t)a_2(t) + \xi_2(t)a_1(t) + b_1(t)b_2(t)]dt + [\xi_1(t)b_2(t) + \xi_2(t)b_1(t)]dw_t.$$

Частни случаи:

1) $\xi_1(t) = t, \xi_2(t) = w_t : d[tw_t] = w_t dt + t dw_t$.

2) $\xi_1(t) = \xi_2(t) = w_t : d[w_t^2] = dt + 2w_t dw_t$ (От където следва, че $\int_0^T w_t dw_t = (1/2)(w_t^2 - T)$).

Пример 8.3. *Нека $\xi(t) = \int_0^t b(s,\omega)dw_s, g(x) = x^4$. Тогава*

$$d[\eta(t)] = d[\xi^4(t)] = 6\int_0^t \xi^2(s)b^2(s,\omega)ds + 4\int_0^t \xi^3(s)b(s,\omega)dw_s.$$

Пример 8.4. *За $\forall m \geq 2$*

$$d[w_t^m] = m w_t^{m-1} dw_t + \frac{m(m-1)}{2} w_t^{m-2} dt.$$

Като следствие от тук могат да се изведат съотношенията:

$$\int_a^b w_t^n dw_t = \frac{1}{n+1}[w_b^{n+1} - w_a^{n+1}] - \frac{n}{2}\int_a^b w_t^{n-1} dt,$$

$$\int_a^b w_t^2 dw_t = \frac{1}{3}[w_b^3 - w_a^3] - \frac{1}{2}[w_b^2 - w_a^2] + \frac{1}{2}(b-a).$$

И изобщо, ако g не зависи от t и има две непрекъснати производни, то

$$\int_a^b g'(w_s)dw_s = g(w_b) - g(w_a) - (1/2)\int_a^b g''(w_s)ds.$$

5 Стохастични диференциални уравнения

Задача 8.1. *Дадена е функцията* $f(t) = f(t, \omega)$, *за която* $\mathbf{P}\{\int_0^\infty f(t)^2 dt < \infty\} = 1$. *Разглеждаме процеса*

$$z_t = \exp[\int_0^t f(s)dw_s - (1/2)\int_0^t f^2(s)ds].$$

По формулата на Ито имаме

$$\begin{aligned} dz_t &= z_t\left(f(t)dw_t - \frac{1}{2}f^2(t)dt\right) + \frac{1}{2}z_t\left[f(t)dw_t - \frac{1}{2}f^2(t)dt\right]^2 \\ &= z_t\left(f(t)dw_t - \frac{1}{2}f^2(t)dt\right) + \frac{1}{2}z_t f^2(t)dt. \end{aligned}$$

Следователно

$$dz_t = z_t f(t)dw_t. \tag{8.12}$$

Ясно е, че за всяко $t \geq 0, z_t > 0$ *с вероятност 1. Тогава можем да приложим формулата на Ито и към* z_t^{-1} :

$$d(z_t^{-1}) = f^2(t)z_t^{-1}dt - f(t)z_t^{-1}dw_t.$$

(8.12) е най-простото стохастично диференциално уравнение. Задаваме начално условие $z_0 = 1$ *и записваме (8.12) в интегрална форма*

$$y_t = 1 + \int_0^t y_s f(s)dw_s. \tag{8.13}$$

Ще покажем, че единственото непрекъснато решение на (8.13) се задава с равенството:

$$z_t = \exp\left[\int_0^t f(s)dw_s - (1/2)\int_0^t f^2(s)ds\right]. \tag{8.14}$$

От направените разсъждения следва, че z_t *от (8.14) удовлетворява (8.13). Нека* x_t *е някакво друго непрекъснато решение на същото уравнение. Тогава по формулата на Ито имаме*

$$d(x_t/z_t) = d(x_t z_t^{-1}) = z_t^{-2}[x_t dz_t - z_t dx_t] + z_t^{-3}x_t(dz_t)^2 - z_t^2 dx_t dz_t = 0$$

което означава, че $x_t = z_t$ *с вероятност 1 за всяко* $t \geq 0$.

Разгледаната задача показва, че някои стохастични диференциални уравнения могат да се решат само с помощта на формулата на Ито.

Теорема 8.2. *Нека* $f(t, \omega) = f(t)$ *е детерминирана функция с ограничена вариация в* $[0, t]$. *Тогава*

$$\int_0^t f(s)dw_s = f(t)w_t - \int_0^t w_s df(s).$$

6 Доказателство на формулата на Ито

Ще докажем следното:

Нека X_t сл. процес зададен чрез

$$dX_t = adt + bdw_t \tag{8.15}$$

(Процес на Ито)

и нека $g(t,x) \in C^2([0,\infty) \times \mathbf{R})$. Тогава процесът $Y_t = g(t, X_t)$ е отново процес на Ито и

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2, \tag{8.16}$$

където $(dX_t)^2 = dX_t dX_t$ се пресмята по правилата

$$dt.dt = dt.dw_t = dw_t.dt = 0, \quad dw_t.dw_t = dt. \tag{8.17}$$

Доказателство: Да заместим $dX_t = adt + bdw_t$ в (8.16) и да приложим (8.17). Получаваме

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + a_s \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) + (1/2) b_s^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) \right) + \tag{8.18}$$

$$\int_0^t b_s \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dB_s,$$

където $a_s = a(s,\omega), b_s = b(s,\omega)$ и това е отново процес на Ито.

Можем да предполагаме, че g и производните и са ограничени в $[0,t]$ и използуваме, че всяка непрекъсната функция можем да апроксимираме със стъпаловидни функции. Предполагаме, че $a(t,\omega)$ и $b(t,\omega)$ са елементарни функции. Тогава по формулата на Тейлор имаме:

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \sum_j \Delta g(t_j, X_{t_j}) =$$

$$g(0, X_0) + \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}\Delta t_j + \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}\Delta X_j + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(\Delta t_j)^2 +$$

$$\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}(\Delta t_j)(\Delta X_j) + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta X_j)^2 + \sum R_j,$$

където $\frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial x}$ са пресметнати в точката (t_j, X_{t_j}), $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $\Delta X_j = X_{t_{j+1}} - X_{t_j}$, $\Delta g(t_j, X_j) = g(t_{j+1}, X_{t_{j+1}}) - g(t_j, X_{t_j})$ и $R_j = o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2)$ за всички j.

Когато $\Delta t_j \to 0$, тогава

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial t}\Delta t_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j})\Delta t_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s) ds. \tag{8.19}$$

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial x}\Delta X_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_{t_j})\Delta X_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)dX_s. \tag{8.20}$$

Тъй като функциите a и b са елементарни, получаваме

$$\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta X_j)^2 = \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}a_j^2(\Delta t_j)^2 + \tag{8.21}$$

$$+2\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}a_j b_j(\Delta t_j)(\Delta w_j) + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}b_j^2(\Delta w_j)^2,$$

където $a_j = a(t_j, \omega)$ и $b_j = b(t_j, \omega)$.

Първите две събираеми в (8.21) клонят към 0, когато $\Delta t_j \to 0$.

Например

$$\mathbf{E}\left(\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}a_j b_j(\Delta t_j)(\Delta w_j)^2\right) =$$

$$= \sum_j \mathbf{E}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}a_j b_j\right)^2 (\Delta t_j)^3 \to 0,\ \ \Delta t_j \to 0.$$

Да покажем, че и третият клони в L_2 смисъл към 0, при $\Delta t_j \to 0$.

Да положим

$$\tilde{a}(t) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)b^2(t, \omega), \tilde{a}_j = \tilde{a}(t_j)$$

и да разгледаме

$$\mathbf{E}[(\sum_j \tilde{a}_j(\Delta w_j)^2 - \sum_j \tilde{a}_j\Delta t_j)^2] =$$

$$\sum_{i,j}\mathbf{E}[\tilde{a}_i\tilde{a}_j\left((\Delta w_i)^2 - \Delta t_i\right)\left((\Delta w_j)^2 - \Delta t_j\right)].$$

Ако $i < j$, то $\tilde{a}_i\tilde{a}_j\left((\Delta w_i)^2 - \Delta t_i\right)$ и $(\Delta w_j)^2 - \Delta t_j$ са независими и този член отпада, както аналогично и при $i > j$. Така остава само

$$\sum_j \mathbf{E}[\tilde{a}_j^2\left((\Delta w_j)^2 - \Delta t_j\right)^2] = \sum_j \mathbf{E}[\tilde{a}_j^2]\mathbf{E}[(\Delta w_j)^4 - 2(\Delta w_j)^2\Delta t_j + (\Delta t_j)^2] =$$

$$= \sum_j \mathbf{E}[\tilde{a}_j^2].(3(\Delta t_j)^2 - 2(\Delta t_j)^2 + (\Delta t_j)^2) = 2\sum_j \mathbf{E}[\tilde{a}_j^2](\Delta t_j)^2 \to 0,\ \text{при}\ \Delta t_j \to 0.$$

С други думи доказахме, че

$$\sum_j a_j(\Delta w_j)^2 \xrightarrow{L_2} \int_0^t a(s)ds, \Delta t_j \to 0,$$

което се означава по странния начин като $(dw_t)^2 = dt$. $\square$

Лекция 9

Стохастични диференциални уравнения

В тази лекция си поставяме следните цели:

- Да дефинираме стохастично диференциално уравнение;
- Да намерим решенията на някои СДУ;
- Да разгледаме примери.

1 Определение

Нека на в. п. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ е зададена сл. функция $f(t, x, \omega), x \in \mathbf{R}, t \geq 0, \omega \in \Omega$ Разглеждаме уравнението

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), \omega), \quad x(t) = x_0. \tag{9.1}$$

При определени условия то има единствено решение $x(t) = x(t, \omega), t \geq 0$, което е сл. процес непрекъснат и диференцируем. Следователно, уравнението (9.1) може да се използва за описване на движение, притежаващо скорост.

С въведеното понятие стохастичен интеграл и стохастичен диференциал можем да дефинираме един клас процеси, който е по-широк от процесите описвани с (9.1), и от винеровия процес. Този клас процеси е свързан с уравнения от вида

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s))ds + \int_0^t b(s, \xi(s))dw_s, \tag{9.2}$$

които се наричат стохастични диференциални уравнения. Функциите $a(t, x)$ и $b(t, x)$ са дефинирани за $t \in [0, T]$ и $x \in \mathbf{R}$, измерими са по (t, x) и се наричат коефициенти на уравнението, ξ_0 е сл.в. или константа (начално условие на (9.2)).

Очевидно (9.2) е обобщение на (9.1) и на Винеровия процес. С помощта на (9.2) могат да се описват непрекъснати движения, които нямат скорост. Ако една система се намира по въздействието на сл. смущения от типа на "бял шум", то като един стохастичен модел се използува именно уравнение от вида (9.2).

Определение 9.1. *Ако коефициентите a и b на уравнението не зависят от t то СДУ се нарича хомогенно (еднородно) иначе се нарича нехомогенно (нееднородно).*

Вместо (9.2) често се използува диференциалния запис

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + b(t, \xi(t))dw_t, \quad \xi(0) = \xi_0. \tag{9.3}$$

Какво е решение на (9.3) (респ. на (9.2))?

Освен $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ нека е зададен и потокът от σ алгебри $\{\mathcal{F}_t\}, t \in [0, T]$, с който е съгласуван Винеровия процес. Нека ξ_0 е $\mathcal{F}_0$ измерима. Тогава под решение на (9.2) ще разбираме сл. процес $\xi(t) = \xi(t, \omega), \ t \in [0, T]$, където

1) $\xi(t)$ е измерим по (t, ω);

2) За $\forall t \in [0, T], \ \xi(t, \omega)$ е $\mathcal{F}_t$ измерим;

3) с вероятност 1 за $\forall t \in [0, T], \ \xi(t)$ удовлетворява (9.2).

2 Примери

Пример 9.1. *Нека коефициентите a и b не зависят от x, т.е.*

$$a(t, x) = a(t), \quad b(t, x) = b(t).$$

Тогава уравнението се задава с

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dw_s, \tag{9.4}$$

и процесът $\xi(t)$ е процес с независими нараствания, които са Гаусово разпределени и имат параметри $\mathbf{E}\{\xi(t) - \xi(s)\} = \displaystyle\int_s^t a(u)du$ и $\mathbf{Var}\{\xi(t) - \xi(s)\} = \int_s^t b^2(u)du$.

Пример 9.2. *Нека коефициентите a и b зависят линейно от x, т.е.*

$$a(t, x) = a(t)x, \quad b(t, x) = b(t)x.$$

Тогава уравнението се задава с

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s)\xi(s)ds + \int_0^t b(s)\xi(s)dw_s, \xi(0) = \xi_0,$$

За да намерим $\xi(t)$ ще въведем нов процес $\zeta(t) = \log\xi(t)$, ако $\xi_0 > 0$ или $\zeta(t) = \log(-\xi(t))$, ако $\xi_0 < 0$. По формулата на Ито имаме

$$d\zeta(t) = \frac{1}{\xi(t)}a(t)\xi(t)dt - \frac{1}{2}\frac{1}{\xi(t)^2}b^2(t)\xi^2(t)dt + \frac{1}{\xi(t)}b(t)\xi(t)dw_t$$

Следователно

$$d\zeta(t) = (a(t) - (1/2)b^2(t))dt + b(t)dw_t, \quad \zeta(0) = \zeta_0 = \log\xi_0,$$

т.е. $\zeta(t)$ е от типа (9.4).

Следователно,

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \int_0^t (a(s) - (1/2)b^2(s))dt + \int_0^t b(s)dw_s,$$

откъдето намираме

$$\xi(t) = \xi_0 \exp\left\{\int_0^t (a(s) - (1/2)b^2(s))dt + \int_0^t b(s)dw_s\right\}.$$

Пример 9.3. *Нека коефициентите a и b зависят линейно от x, т.е.*

$$a(t,x) = a_1(t) + a_2(t)x, \quad b(t,x) = b_1(t) + b_2(t)x.$$

Търсим сл. процес с диференциал

$$d\xi(t) = [a_1(t) + a_2(t)\xi(t)]dt + [b_1(t) + b_2(t)\xi(t)]dw_t, \xi(0) = \xi_0, \tag{9.5}$$

За да намерим $\xi(t)$ ще въведем нов процес $\zeta(t) = \eta(t)\xi(t)$, където

$$\eta(t) = \exp\left\{-\int_0^t (a_2(s) - (1/2)b_2^2(s))ds + \int_0^t b_2(s)dw_s\right\}, \quad \eta(0) = 1.$$

Като приложим формулата на Ито получаваме:

$$\zeta(t) = \xi_0 + \int_0^t \eta(s)(a_1(s) - b_1(s)b_2(s))ds + \int_0^t b_1(s)\eta(s)dw_s.$$

Като заместим $\eta(s)$ с неговото равно получаваме

$$\xi(t) = \exp\left[\int_0^t (a_2(s) - \frac{b_2^2(s)}{2})ds + \int_0^t b_2(s)dw_s\right] \times$$

$$\times[\xi_0 + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s (a_2(u) - \frac{b_2^2(u)}{2})du - \int_0^s b_2(u)dw_u\right)(a_1(s) - b_1(s)b_2(s))ds$$

$$+ \int_0^t \exp\left(-\int_0^s (a_2(u) - \frac{b_2^2(u)}{2})du - \int_0^s b_2(u)dw_u\right)b_1(s)dw_s]$$

3 Съществуване и единственост на решението на СДУ

Примерите показват, че решенията на СДУ могат да се намерят явно. Естествен е въпросът дали произволно СДУ може да се преобразува с помощта на взаимно еднозначна функция в линейно? Доказва се, че при допълнителни предположения за гладкост на коефициентите $a(t,x), b(t,x)$ това може да се постигне, но се стига до ЧДУ, което не винаги може да се реши. По-често се прави така: коефициентите на даденото уравнение (9.2) се линеаризират и нататък се изследва полученото линейно СДУ. Във всички случай неговото решение може да се приеме като първо приближение на процеса $\xi(t)$, описващ сложната нелинейна система.

Теорема 9.1. *Да допуснем, че за някоя константа C и за всички $t \in [0,T]$ и $x \in \mathbf{R}$ са изпълнени условията:*

$$\begin{cases} |a(t,x)-a(t,y)|+|b(t,x)-b(t,y)| \leq C|x-y|, \\ \\ a^2(t,x)+b^2(t,x) \leq C^2(1+x^2) \end{cases} \tag{9.6}$$

Нека началното условие ξ_0 е $\mathcal{F}_0$ измерима сл.в. с $\mathbf{E}\{\xi_0^2\}<\infty$. Тогава

1) С вероятност 1 съществува непрекъснато решение $\xi(t)$ с $\xi(0)=\xi_0$;

2) $\sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}\{\xi^2(t)\}<\infty$;

3) Ако ξ_1 и ξ_2 са две решения на (9.2) удовлетворяващи 1) и 2) то

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,T]}|\xi_1(t)-\xi_2(t)|=0\}=1.$$

Доказателство: Първо ще покажем, че решението на (9.2) е единствено. Нека за $i=1,2$

$$\xi_i(t)=\xi_0+\int_0^t a(s,\xi_i(s))ds+\int_0^t b(s,\xi_i(s))dw_s.$$

Тогава

$$\mathbf{E}\{(\xi_1(t)-\xi_2(t))^2\}=\mathbf{E}\{(\int_0^t[a(s,\xi_1(s))-a(s,\xi_2(s))]ds+\int_0^t[b(s,\xi_1(s))-b(s,\xi_2(s))]dw_s)^2\}$$

$$\leq 2\mathbf{E}\{\int_0^t[(a(s,\xi_1(s))-a(s,\xi_2(s))]ds)^2\}+2\mathbf{E}\{\int_0^t[(b(s,\xi_1(s))-b(s,\xi_2(s))]dw_s)^2\}$$

$$\leq 2t\mathbf{E}\{\int_0^t[(a(s,\xi_1(s))-a(s,\xi_2(s))]ds)^2\}+2\mathbf{E}\{\int_0^t[b(s,\xi_1(s))-b(s,\xi_2(s))]ds)^2\}\leq$$

$$2tC^2\int_0^t\mathbf{E}\{(\xi_1(s)-\xi_2(s))^2\}ds+2C^2\int_0^t\mathbf{E}\{(\xi_1(s)-\xi_2())^2\}ds\leq$$

$$\leq C_1 \int_0^t \mathbf{E}\{(\xi_1(s) - \xi_2(s))^2\}ds,$$

където $C_1 = 2(T+1)C^2$.

Ще използуваме следното неравенство на Гронуол-Белман: Ако $c \geq 0, u(t) \geq 0, v(t) \geq 0$, то от неравенството

$$u(t) \leq c + \int_0^t u(s)v(s)ds$$

следва

$$u(t) \leq c \exp[\int_0^t v(s)ds].$$

Прилагаме това неравенство при $c = 0, u(t) = \mathbf{E}\{[\xi_1(t) - \xi_2(t)]^2\}$ и $v(t) = C_1$ и тогава се получава

$$\mathbf{E}\{(\xi_1(t) - \xi_2(t))^2\} = 0.$$

Следователно

$$\mathbf{P}\{\xi_1(t) = \xi_2(t)\} = 1$$

за всяко $t \in [0, T]$. Тогава за всяко изброимо подмножество $S \subset [0, T]$

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in S} |\xi_1(t) - \xi_2(t)| = 0\} = 1.$$

Тъй като $\xi_1(t), \xi_2(t)$ са непрекъснати, то ако S е множеството на сепарабелност в $[0, T]$,

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in[0,T]} |\xi_1(t) - \xi_2(t)| = 0\} = \mathbf{P}\{\sup_{t\in S} |\xi_1(t) - \xi_2(t)| = 0\} = 1,$$

следователно (9.2) има единствено решение.

Съществсуването на $\xi(t)$ ще докажем по метода на последователните приближения. Полагаме:

$$\begin{cases} \xi^0(t) \equiv \xi_0, \\ \xi^n(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi^{n-1}(s))ds + \int_0^t b(s, \xi^{n-1}(s))dw_s, \\ n = 1, 2, \dots . \end{cases} \tag{9.7}$$

От условието (9.6) наложени на коефициентите a и b и от свойствата на стохастичните интеграли, получаваме, че редицата $\xi^k(t), k = 0, 1, 2, \dots$ с вероятност 1 е равномерно сходяща по t в $[0, T]$. След граничен преход по $n \to \infty$ в (9.7) следва че съществува решение $\xi(t), t \in [0, T]$ на (9.2). $\square$

4 Някои важни формули

Нека
$$X_t = X_0 + \int_0^t a(\omega, s)ds + \int_0^t b(\omega, s)dw_s \tag{9.8}$$
или
$$dX_t = a(\omega, t)dt + b(\omega, t)dw_t \tag{9.9}$$
и
$$g(t, X_t) = Y(t).$$

Тогава
$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}|_{(t,X_t)}dt + \frac{\partial g}{\partial x}|_{(t,X_t)}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}|_{(t,X_t)}(dX_t)^2 \tag{9.10}$$

От
$$(dw_t)^2 = dt, \quad dw_t dt = dt dw_t = dt dt = 0, \tag{9.11}$$
следва
$$(dX_t)^2 = (a(\omega, t)dt + b(\omega, t)dw_t)^2 = b^2 dt.$$

Следователно
$$dY_t = g'_t dt + g'_x dX_t + \frac{1}{2}g''_{xx}b^2 dt =$$
$$= g'_t dt + g'_x(adt + bdw_t) + \frac{1}{2}g''_{xx}b^2 dt =$$
$$(g'_t + g'_x a + \frac{1}{2}g''_{xx}b^2)dt + g'_x b dw_t.$$

Колко е $d(X_t.Y_t)$, ако
$$dX_t = a_1 dt + b_1 dw_t$$
$$dY_t = a_2 dt + b_2 dw_t.$$

Разглеждаме
$$g(t, x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad \eta(t) = g(X_t, Y_t). \tag{9.12}$$
Тогава
$$d\eta(t) = (0 + a_1 T_t + a_2 X_t + \frac{1}{2}2b_1 b_2)dt$$
$$+(Y_t b_1 + X_t.b_2)dw_t$$
$$d\eta(t) = Y_t(a_1 dt + b_1 dw_t) + (a_2 dt + b_2 dw_t)X_t + b_1 b_2 dt =$$
$$Y_t dX_t + X_t dY_t + b_1 b_2 dt.$$

5 Задачи

Задача 9.1. *Представете като интеграл на Ито:*

а) $\int_0^t w_s^2 dw_s$.

Нека $g(t,x) = \frac{x^3}{3}$.

Тогава $g_t' = 0, g_x' = x^2, g_{xx}'' = 2x$.

За

$$y_t = g(t, w_t) = \frac{1}{3}w_t^3$$

получаваме

$$dy_t = d(\frac{1}{3}w_t^3) = (0.w_t + \frac{1}{2}.1.2w_t)dt + 1.w_t^2 dw_t$$

$$\int_0^t \quad d(\frac{1}{3}w_t^3) = w_t dt + w_t^2 dw_t$$

т.е.

$$\int_0^t w_s^2 dw_s = \frac{1}{3}w_t^3 - \int_0^t w_s ds$$

или

$$d(\frac{1}{3}w_t^3) = w_t dt + w_t^2 dw_t.$$

б) Нека $X_t = 2 + t + e^{w_t}$,

Да вземем $g(x,t) = 2 + t + e^x$ *и* $Y_t = g(w_t, t)$.

Тогава

$$dX_t = (1 + o + \frac{1}{2}.1.e^{w_t})dt + e^{w_t}.1.dw_t$$

$$dX_t = (1 + \frac{1}{2}e^{w_t})dt + e^{w_t}dw_t.$$

в) $X_t = w_1^2(t) + w_2^2(t)$, $g(x,t) = x^2 + t^2$

$$Y_t = g(w_1^2(t), w_2^2(t)) = w_1^2(t) + w_2^2(t)$$

$$dY_t = (2w_2(t) + 0.g_x' + \frac{1}{2}.1.2)dt + 2w_1(t).1dw_t$$

$$dY_t = (2w_2(t) + 1)dt + 2w_1(t)dw_t$$

$$dX_t = d(w_1(t))^2 + d(w_2(t))^2$$

Задача 9.2. *Нека C, α са константи.*

$$X_t = exp(Ct + \alpha w_t)$$

Докажете, че:

$$dX_t = (C + \frac{1}{2}\alpha^2)X_t dt + dX_t dw_t.$$

Избираме:

$$g(t, x) = e^{Ct+\alpha x}$$

Полагаме

$$X_t = g(t, w_t) = e^{Ct+\alpha w_t}.$$

Тогава

$$\frac{\partial g}{\partial t} = Ce^{Ct+\alpha w_t} = CX_t.$$

$$g'_x = \alpha X_t, \qquad g''_{xx} = \alpha^2 X_t.$$

И по формулата на Ито:

$$dX_t = (CX_t + 0 + \frac{1}{2}\alpha^2 X_t)dt + \alpha X_t.dw_t.$$