

Увод

Развитието на теорията и практиката на решаването на оптимизационни проблеми довежда до необходимостта от определянето на понятието производна на многозначно изображение, при подхода към което се възприема най-рано исторически възникналия похват, приписван на Ферма. При него графиката на производната на гладка функция се определя по пътя на построяването на допирателни към графиката на самата функция.

За целта се разработва апаратът на допирателните пространства към подмножества на баханови пространства, но такива пространства не съществуват, ако множеството не е гладко многообразие.

От друга страна от изпъкналия анализ е известно, че е възможно по естествен начин да се определят „допирателни конуси“ към изпъкнали множества, които се оказват полезни благодарение на това, че запазват много свойства на допирателните пространства.

Това обаче се явява недостатъчно, защото болшинството от многозначните изображения, с които се срещаме, имат неизпъкнали графики.

Когато множеството K не е нито гладко, нито изпъкнало, съществуват много начини за определяне на допирателни конуси, като всеки такъв начин в нищо не отстъпва на другите по своята „естественост“.

Тук се спираме на два варианта от многото възможни: контингентен конус $T_K(x_0)$ към множеството K в точката x_0 , въведен в началото на тридесетте години от Булиган, и допирателен конус $C_K(x_0)$ към множеството K в точката x_0 , въведен през 1975 година от Кларк.

Допирателният конус $C_K(x_0)$ се съдържа в контингентния конус $T_K(x_0)$. И двата конуса са затворени, а допирателният конус е и изпъкнал.

За неправо слабо затворено множество K в хилбертово пространство е известна следната връзка между T_K и C_K :

$$(1) \quad \liminf_{x \xrightarrow{K} x_0} T_K(x) \subset \liminf_{x \xrightarrow{K} x_0} (\overline{\text{co}} T_K(x)) \subset C_K(x_0)$$

като имаме равенство, когато пространството е крайномерно (вж. [4]).

В глава 1 тук се показва, че съотношението (1) е в сила и когато K е неправо слабо затворено множество в рефлексивно пространство.

В глава 2 се разглеждат някои свойства на конуса на Кларк към графиките на локално липшицови и монотонни изображения.

Дава се друг начин на доказателство, а и в случай на по-обща пространства на една теорема на Рокафелар [5], а именно, че ако X и Y са банахови пространства и $F : U \rightarrow Y$, $U \subset X$ и отворено, е липшицова функция и $(x_0, F(x_0)) \in \text{grh } F$, то конусът на Кларк $C_{\text{grh } F}(x_0, F(x_0))$ е линейно подпространство в $X \times Y$.

Привежда се доказателство на факта, че когато T е собствен монотонен оператор от банахово пространство X в спрегнатото му X^* , то за всяко $(x, p) \in \text{grh } T$ имаме $\langle u, v \rangle \geq 0$ за всяко $(u, v) \in C_{\text{grh } T}(x, p)$.

Въз основа на това се показва, че когато конусът на Кларк към точка от графиката на такъв оператор е максимално монотонно подмножество на $X \times X^*$, той е и линейно подпространство в $X \times X^*$.

Доказва се, че когато T е собствен монотонен оператор от банахово пространство X в X^* , то изображението от X в X^* , чиято графика е конусът на Кларк към $\text{grh } T$ в произволна точка от нея е еднозначно във всяка точка от вътрешността на дефиниционната си област.

В същата глава се показва, че конусът на Кларк към графиката на собствено монотонно изображение в произволна точка от нея не съдържа хипердопирателни в смисъл на Рокафелар.

Глава 3 разглежда някои локални свойства на монотонните оператори.

По идея на доказателството на една теорема на Борвейн и Фицпатрик, изложено в [7], се доказва, че ако X е банахово пространство и $T : X \rightarrow X^*$ е собствено монотонно изображение, такова че $D(T)$ е G_δ и гъсто в някое отворено подмножество A на X , то T е локално ограничено във всяка точка от $D(T) \cap A$.

Като приложение се доказва, че максимално монотонно изображение с такава дефиниционна област е максимално монотонно във всяко отворено подмножество на A .

Фицпатрик и Фелпс доказват, че ако T е субдиференциал на собствена полу-непрекъсната отдолу функция, то T е максимално монотонно локално изображение [1]. Като се използва този факт се доказва, че субдиференциалът на Кларк на lower C^2 функция в хилбертово пространство не притежава монотонно продължение в дефиниционната си област.

В глава 4 се разглеждат свойствата на субдиференциала от втори ред $\partial_C^2 f(x_0)$ (в смисъл на Кларк) на $C^{1,1}$ функция f , дефинирана в \mathbb{R}^n в точката x_0 (обобщена Хесианова матрица).

С цел пълнота на изложението е доказана отново аналитичната формулировка на опорната бифункция на множеството $\partial_C^2 f(x_0)$, означена чрез $f^{\circ\circ}(x_0, u, v)$ (вж. [9]) в термините на градиентното изображение ∇f , която се използва съществува, но се упоменава без доказателство в [2] и [6].

Като основен резултат са получени достатъчни условия от втори ред за локално решение на минимизационни задачи с $C^{1,1}$ данни.

Глава 1

Връзка между конусите на Булиган и Кларк в рефлексивни пространства

Нека K е непразно множество в банахово пространство X .

Ще означаваме с εB и εB_0 съответно затвореното и отвореното кълбо в X с център нулата и радиус $\varepsilon > 0$ и полагаме

$$B_K(x_0, \varepsilon) := K \cap (x_0 + \varepsilon B).$$

Символът $x \xrightarrow{K} x_0$ означава сходимост към x_0 в K .

Определение 1.1. Множество

$$(1.1) \quad T_K(x) := \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\alpha > 0} \bigcup_{0 < h \leq \alpha} \left(\frac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B \right)$$

се нарича *контингентен конус* към K в точката x .

С други думи $v \in T_K(x)$ тогава и само тогава, когато

$$(1.2) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists u \in (v + \varepsilon B), \exists h \in (0, \alpha] : x + hu \in K,$$

или, което е еквивалентно:

$$(1.3) \quad v \in T_K(x) \text{ тогава и само тогава, когато съществуват}$$

редица от строго положителни числа $\{h_n\}$ и редица от елементи $\{u_n\}$, такива че:
 $u_n \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = v, \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ и

$$\forall n \geq 0 \quad x + h_n u_n \in K.$$

Ако се използва функцията $d_K(\cdot)$ за разстояние от точка до множество K , което се дефинира с формулата:

$$d_K(x) := \inf\{\|x - y\|, y \in K\},$$

то контингентният конус може да се характеризира и така:

$$(1.4) \quad v \in T_K(x) \text{ тогава и само тогава, когато } \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{d_K(x + hv)}{h} = 0.$$

Лесно се вижда, че контингентният конус е затворен.

Ако $x \in \text{int}(K)$, то $T_K(x) = X$ и за $\forall x \in X$ имаме, че $T_X(x) = X$. Полагаме $T_\emptyset(x) := \emptyset$.

Определение 1.2. Нека U е метрично пространство, $u_0 \in U$, F е многозначно изображение, $F : U \rightarrow X$. Тогава:

$$(1.5) \quad \liminf_{u \rightarrow u_0} F(u) := \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\eta > 0} \bigcap_{u \in B(u_0, \eta)} (F(u) + \varepsilon B).$$

Определение 1.3. Множеството

$$(1.6) \quad C_K(x_0) := \liminf_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ x \xrightarrow{K} x_0}} \frac{1}{h}(K - x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\alpha, \beta > 0} \bigcap_{\substack{x \in B_K(x_0, \alpha) \\ h \in (0, \beta]}} \left(\frac{1}{h}(K - x) + \varepsilon B \right)$$

се нарича *допирателен конус* или *конус на Кларк* към множеството K в точката x_0 .

С други думи $v \in C_K(x_0)$ тогава и само тогава, когато

$$(1.7) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \exists \beta > 0 : \forall x \in B_K(x_0, \alpha), \forall h \in (0, \beta], \\ \exists u \in (v + \varepsilon B) : x + hu \in K,$$

или, което е еквивалентно:

$$(1.8) \quad v \in T_K(x), \text{ тогава и само тогава, когато за всяка редица от}$$

строго положителни числа $\{h_n\}$, такива че $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ и всяка редица от елементи $\{x_n\}$ на K , такива че $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ съществува редица от елементи $\{u_n\} \in X$, такива че $\{u_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$, за които $x_n + h_n u_n \in K$ за всяко $n \geq 0$.

Конусът на Кларк може да се характеризира и по следния начин:

$$(1.9) \quad v \in C_K(x_0) \text{ тогава и само тогава, когато } \lim_{\substack{x \xrightarrow{K} x_0 \\ h \rightarrow 0^+}} \frac{d_K(x + hv)}{h} = 0.$$

Ако $x \in \text{int} K$, то $C_K(x) = X$ и за $\forall x \in X$ имаме $C_X(x) = X$. Полагаме $C_\emptyset(x) := \emptyset$. За дадените до тук дефиниции вж. [4, стр. 395–401].

Теорема 1.4 ([4]). Конусът на Кларк $C_K(x_0)$ към множеството K в точката x_0 е затворен и изпъкнал.

Да забележим, че $C_K(x_0) \subset T_K(x_0)$ и ако K е изпъкнало множество, то $C_K(x_0) = T_K(x_0)$.

Тези два конуса могат да се различават един от друг. Като пример ще разгледаме множество K в \mathbb{R}^2 , което е графика на изображението $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, дефинирано като

$$\pi(x) = 0, \text{ ако } x \leq 0, \quad \pi(x) = x, \text{ ако } x \geq 0.$$

Тогава

- ако $x < 0$, то $C_K(x, 0) = T_K(x, 0) = \mathbb{R} \times \{0\}$,
- ако $x = 0$, то $C_K(0, 0) = \{0, 0\}$, $T_K(0, 0) = (-\mathbb{R}_+ \times \{0\}) \cup \{u, u\}_{u \in \mathbb{R}_+}$,
- ако $x > 0$, то $C_K(x, x) = T_K(x, x) = \{u, u\}_{u \in \mathbb{R}_+}$.

Допирателният конус към K в точката $(0, 0)$ е изпъкнал, но тривиален, докато контингентният конус в тази точка е неизпъкнал, но доста голям.

Контингентният и допирателният конус са свързани по следния начин [4]:

Теорема 1.5 ([4]). Нека K е непразно слабо затворено множество в хилбертово пространство. Тогава

$$\liminf_{x \xrightarrow{K} x_0} T_K(x) \subset \liminf_{x \xrightarrow{K} x_0} (\overline{\text{co}} T_K(x)) \subset C_K(x_0).$$

Възможно е този резултат да бъде доказан и в случай на рефлексивно пространство, а именно:

Теорема 1.6. Нека K е непразно слабо затворено множество в рефлексивно пространство X . Тогава

$$\liminf_{x \xrightarrow{K} x_0} T_K(x) \subset \liminf_{x \xrightarrow{K} x_0} (\overline{\text{co}} T_K(x)) \subset C_K(x_0).$$

Доказателството се опира на следните лемии:

Нека $\|\cdot\|$ в X е еквивалентна диференцируема по Фреше норма (такава норма съществува (вж. например Троянски [11])).

Нека $K \subset X$ е слабо затворено множество.

Означаваме с $\pi_K(y)$ непразно подмножество от елементи $x \in K$, такива че $\|x - y\| = d_K(y)$.

Лема 1.7. За $\forall y \notin K, \forall x \in \pi_K(y), \forall v \in \overline{\text{co}} T_K(x)$ имаме, че

$$\langle \nabla \|x - y\|, v \rangle \leq 0,$$

където $\langle \cdot, \cdot \rangle$ са обичайните скоби за дуалност между X и X^* .

Доказателство. Нека $\forall y \notin K, x \in \pi_K(y), v \in T_K(x)$. От неравенството

$$\|y - x\| - d_K(x + hv) = d_K(y) - d_K(x + hv) \leq \|y - x - hv\|$$

имаме, че

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|y - x\| - \|y - x - hv\|}{h} \leq \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{d_K(x + hv)}{h}$$

и тъй като функцията $u \rightarrow \|u\|$ е диференцируема в точката $u \neq 0$,

Глава 2

Свойства на конуса на Кларк към графиките на локално липшицови и монотонни изображения

В статията си [5] Рокафелар доказва, че ако U е отворено подмножество на \mathbb{R}^n и $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ е липшицова функция, то за $x_0 \in U$, т. е. $(x_0, F(x_0)) \in M := \text{gph } F$, конусът на Кларк $C_M(x_0, F(x_0))$ е не само конус, но и линейно подпространство на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Възможно е и косвено доказателство на аналогичен резултат за произволни банахови пространства, което ще изложим по-долу.

Определение 2.1. Нека X и Y са банахови пространства. Тогава в пространството $X \times Y$ дефинираме норма $\| \cdot \|_{X \times Y}$ по следния начин:

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Теорема 2.2. Нека X и Y са банахови пространства, $U \subset X$ е отворено подмножество, а $F : U \rightarrow Y$ е локално липшицова функция. Тогава за всяко $(x_0, F(x_0)) \in M := \text{gph } F$ конусът на Кларк $C_M(x_0, F(x_0))$ е линейно подпространство на $X \times Y$.

Доказателство. Нека $x_0 \in U$ и функцията F е локално липшицова в точката x_0 с константа L , т. е. съществува $\delta > 0$, такава че за произволни $x, y \in U$, за които $\|x - x_0\| < \delta$ и $\|y - x_0\| < \delta$, е в сила неравенството $\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|$.

Да допуснем, че съществува вектор $(u_0, v_0) \in C_M(x_0, F(x_0))$, такъв че противоположният му $(-u_0, -v_0) \notin C_M(x_0, F(x_0))$. С други думи:

(2.1) за някои $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и произволни $\alpha > 0$, $\beta > 0$ съществуват точка $(x, F(x)) \in B_M((x_0, F(x_0)), \alpha)$ и число $h \in (0, \beta]$ със свойството, че за всички вектори $u \in B(u_0, \varepsilon_1)$ и $v \in B(v_0, \varepsilon_2)$ е изпълнено $(x - hu, F(x) - hv) \notin M$, т. е. $F(x - hu) \neq F(x) - hv$.

В частност

$$(2.2) \quad F(x - hu_0) \neq F(x) - hv \text{ за всяко } v \in B(v_0, \varepsilon_2).$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че

$$(2.3) \quad L\varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon_2}{2}.$$

От факта, че $(u_0, v_0) \in C_M(x_0, F(x_0))$ можем да заключим, че

$$(2.4) \quad \begin{aligned} &\text{за } \varepsilon_1 > 0 \text{ и } \varepsilon_2/2 > 0 \text{ съществуват числа } \alpha' > 0 \text{ и } \beta' > 0, \text{ такива} \\ &\text{че за произволни } (x', F(x')) \in B_M((x_0, F(x_0)), \alpha') \text{ и } h' \in (0, \beta'] \\ &\text{могат да се намерят вектори } u' \in B(u_0, \varepsilon_1) \text{ и } v' \in B(v_0, \varepsilon_2/2), \\ &\text{за които съответната точка } (x' + h'u', F(x') + h'v') \in M, \end{aligned}$$

т. е. $F(x' + h'u') = F(x') + h'v'$.

Нека $\delta^* > 0$ удовлетворява неравенствата $\delta^* \leq \delta$ и $(L+1)\delta^* \leq \alpha'$. Тогава за точките x' , за които $\|x' - x_0\| < \delta^*$, съответните точки $(x', F(x')) \in B_M((x_0, F(x_0)), \alpha')$. Нека сега α и β са избрани в (2.1) така, че да са изпълнени условията $\alpha + \beta(2\|u_0\| + \varepsilon_1) < \delta^*$ и $\beta \leq \beta'$. В такъв случай имаме оценката

$$\|x - hu_0 - x_0\| \leq \|x - x_0\| + h\|u_0\| \leq \alpha + \beta\|u_0\| < \delta^*.$$

Следователно $(x - hu_0, F(x - hu_0)) \in B_M((x_0, F(x_0)), \alpha')$. Тогава полагайки $x' = x - hu_0$ и $h' = h \leq \beta \leq \beta'$ в (2.4), получаваме, че съществуват $u' \in B(u_0, \varepsilon_1)$ и $v' \in B(v_0, \varepsilon_2/2)$, такива че $(x - hu_0 + hu', F(x - hu_0) + hv') \in M$, т. е.

$$F(x + h(u' - u_0)) = F(x - hu_0) + hv'.$$

Сега (2.2) ни позволява да заключим, че

$$F(x + h(u' - u_0)) - hv' \neq F(x) - hv \text{ при всеки избор на } v \in B(v_0, \varepsilon_2),$$

т. е.

$$(2.5) \quad F(x + h(u' - u_0)) - F(x) \neq h(v' - v) \text{ за произволно } v \in B(v_0, \varepsilon_2),$$

а следователно и за всяко v , такава че $\|v - v'\| \leq \varepsilon_2/2$, тъй като това условие влече

$$\|v - v_0\| \leq \|v - v'\| + \|v' - v_0\| \leq \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2} \leq \varepsilon_2.$$

Но сега, вземайки предвид неравенствата $\|x - x_0\| \leq \alpha < \delta^*$ и

$$\|x + h(u' - u_0) - x_0\| \leq \|x - x_0\| + h\|u' - u_0\| \leq \alpha + h\varepsilon_1 \leq \alpha + \beta\varepsilon_1 < \delta^* < \delta,$$

получаваме оценката

$$\|F(x + h(u' - u_0)) - F(x)\| \leq Lh\|u' - u_0\| \leq Lh\varepsilon_1 \leq h\frac{\varepsilon_2}{2},$$

където последното неравенство имаме благодарение на (2.3). Следователно съществува $v \in B(v', \varepsilon_2/2)$, такова че

$$F(x + h(u' - u_0)) - F(x) = h(v' - v).$$

Това заключение обаче противоречи на (2.5).

Окончателно получаваме, че ако $(u_0, v_0) \in C_M(x_0, F(x_0))$, то и $(-u_0, -v_0) \in C_M(x_0, F(x_0))$. Оттук и от изпъкналостта на конуса C_M следва твърдението на теоремата, а именно, че

$$\begin{aligned} &\text{ако векторите } (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in C_M(x_0, F(x_0)), \text{ то и векторът} \\ &(\lambda u_1 + \mu u_2, \lambda v_1 + \mu v_2) \in C_M(x_0, F(x_0)) \text{ за произволни } \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Теорема 2.3 ([4]). Нека X е банахово пространство и $T : X \rightarrow X^*$ е собствено монотонно изображение (т. е. такова, че $D(T) \neq \emptyset$). Тогава за всяка точка $(x_0, p_0) \in \text{grh } T$ конусът на Кларк $C_{\text{grh } T}(x_0, p_0) \subset X \times X^*$ е монотонно множество.

Доказателство. Нека (u^i, v^i) , $i = 1, 2$, са две точки от $C_{\text{grh } T}(x_0, p_0)$, а редицата от реални числа $\{h_n\}$ е такава, че $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+$. Тогава знаем, че съществуват редици $\{u_n^i\}$ и $\{v_n^i\}$ от елементи съответно на X и X^* , такива че $u_n^i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u^i$ и $v_n^i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v^i$, а също така

$$(x_0 + h_n u_n^i, p_0 + h_n v_n^i) \in \text{grh } T \quad \text{за } i = 1, 2 \text{ и } n \geq 0$$

и тъй като T има монотонна графика, то

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle (x_0 + h_n u_n^1) - (x_0 + h_n u_n^2), (p_0 + h_n v_n^1) - (p_0 + h_n v_n^2) \rangle \\ &= h_n^2 \langle u_n^1 - u_n^2, v_n^1 - v_n^2 \rangle. \end{aligned}$$

Делим на $h_n^2 \neq 0$ и след граничен преход при $n \rightarrow \infty$ получаваме

$$\langle u^1 - u^2, v^1 - v^2 \rangle \geq 0,$$

т. е. $C_{\text{grh } T}(x_0, p_0)$ е монотонно изображение.

Теорема 2.4. Нека $T : X \rightarrow X^*$ е собствен монотонен оператор в банахово пространство X . Тогава за всяко $(x, p) \in \text{grh } T$ и за всяко $(u, v) \in C_{\text{grh } T}(x, p)$ имаме, че

$$\langle u, v \rangle \geq 0,$$

където $\langle \cdot, \cdot \rangle$ са обичайните скобки на дуалност между X и X^* .

Доказателство. От $(u, v) \in C_{\text{grh } T}(x, p)$ следва, че за всяко $(x_n, p_n) \xrightarrow{\text{grh } T} (x, p)$ и за всяко $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+$ съществуват редици от елементи съответно на X и X^* , такива че

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u, \quad v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$$

и

$$(x_n + h_n u_n, p_n + h_n v_n) \in \text{grh } T \quad \text{за всяко } n \geq 0,$$

т. е. $x_n + h_n u_n = x'_n$, $p_n + h_n v_n = p'_n$, като $(x'_n, p'_n) \in \text{grh } T$ за всяко $n \geq 0$.

От монотонността на T за точките (x_n, p_n) , $(x'_n, p'_n) \in \text{grh } T$ имаме, че

$$\begin{aligned} \langle x'_n - x_n, p'_n - p_n \rangle &\geq 0 && \text{за всяко } n \geq 0, \\ \langle h_n u_n, h_n v_n \rangle &\geq 0 && \text{за всяко } n \geq 0. \end{aligned}$$

Като разделим на $h_n^2 > 0$ и извършим граничен преход по $n \rightarrow \infty$, окончателно получаваме търсеното неравенство

$$\langle u, v \rangle \geq 0.$$

Теорема 2.5. Нека X е банахово пространство и $T : X \rightarrow X^*$ е собствено изображение. Тогава, ако в точка (x, p) от $\text{grh } T$, $C_{\text{grh } T}(x, p)$ е максимално монотонно подмножество на $X \times X^*$, то е и линейно подпространство в $X \times X^*$.

Доказателство. Нека (x, p) е такава точка от $\text{grh } T$, в която съответният конус на Кларк към $\text{grh } T$ в нея удовлетворява условието на теоремата.

Нека $(u, v) \in C_{\text{grh } T}(x, p)$. Ще покажем, че $(-u, -v) \in C_{\text{grh } T}(x, p)$.

Нека $(u_1, v_1) \in C_{\text{grh } T}(x, p)$ е произволно. Тогава

$$\langle -u - u_1, -v - v_1 \rangle = \langle u + u_1, v + v_1 \rangle.$$

Но тъй като $C_{\text{grh } T}(x, p)$ е изпъкнал конус, то от $(u, v), (u_1, v_1) \in C_{\text{grh } T}(x, p)$ имаме и $(u + u_1, v + v_1) \in C_{\text{grh } T}(x, p)$ и от Теорема 2.4 следва, че

$$\langle u + u_1, v + v_1 \rangle \geq 0$$

за всяко $(u_1, v_1) \in C_{\text{grh } T}(x, p)$, т. е.

$$\langle -u - u_1, -v - v_1 \rangle \geq 0 \quad \text{за всяко } (u_1, v_1) \in C_{\text{grh } T}(x, p)$$

и от максималната монотонност на $C_{\text{grh } T}(x, p)$ имаме, че $(-u, -v) \in C_{\text{grh } T}(x, p)$.

От изпъкналостта на конуса на Кларк твърдението на теоремата следва непосредствено.

Теорема 2.6. Нека X е произволно банахово пространство, $T : X \rightarrow X^*$ е собствен монотонен оператор, чиято графика е изпъкнало множество, и $D(T)$ е гъсто в някое отворено подмножество A на X . Тогава T е еднозначен в $A \cap D(T)$.

Доказателство. Допускаме, че съществува $u_0 \in D(T) \cap A$, такава че T не е еднозначен в u_0 , т. е. съществуват поне $v_1, v_2 \in T(u_0)$, $v_1 \neq v_2$. Нека $u \neq u_0$, $u \in D(T) \cap A$, $v \in T(u)$. За всяко $1 > \lambda > 0$ образуваме

$$\begin{aligned} u_\lambda &= \lambda u_0 + (1 - \lambda)u, \\ v_\lambda^1 &= \lambda v_1 + (1 - \lambda)v, \\ v_\lambda^2 &= \lambda v_2 + (1 - \lambda)v. \end{aligned}$$

От изпъкналостта на графиката на T имаме, че (u_λ, v_λ^1) , (u_λ, v_λ^2) принадлежат на графиката на T за всяко λ , такава че $1 > \lambda > 0$.

От монотонността на T следва

$$0 \leq \langle u_\lambda - u_0, v_\lambda^2 - v_1 \rangle = (1 - \lambda) \langle u - u_0, v_\lambda^2 - v_1 \rangle,$$

т. е.

$$0 \leq \langle u - u_0, v_\lambda^2 - v_1 \rangle \text{ за всяко } \lambda \in (0, 1).$$

При граничен преход по $\lambda \rightarrow 1^-$ получаваме

$$0 \leq \langle u - u_0, v_2 - v_1 \rangle.$$

Аналогично получаваме, че

$$0 \leq \langle u - u_0, v_1 - v_2 \rangle.$$

Следователно

$$0 = \langle u_0 - u, v_1 - v_2 \rangle.$$

От вида на дефиниционната област на T е ясно, че горното равенство е в сила за точки u от гъсто множество в отвореното множество A . Оттук непосредствено следва, че $v_1 = v_2$, което е в противоречие с направеното допускане.

Като непосредствено следствие на теорема 2.3 и 2.6 имаме следното

Следствие 2.7. Нека X е банахово пространство и $T : X \rightarrow X^*$ е собствено монотонно изображение (т. е. $D(T) \neq \emptyset$). Тогава изображението от X в X^* , чиято графика е конусът на Кларк към $\text{grh } T$ в произволна нейна точка, е еднозначно изображение във всяка точка от вътрешността на дефиниционната си област.

Определение 2.8. Нека X е банахово пространство. Вектор $v \in X$ се нарича *хипердопирателна* към множеството $K \subset X$ в точката $x \in K$, ако за някое $\varepsilon > 0$ $y + hw \in K$ за произволни $y \in B_K(x, \varepsilon)$, $w \in B(v, \varepsilon)$ и $h \in (0, \varepsilon]$.

Очевидно всяка хипердопирателна към K в точката x се съдържа в $C_K(x)$.
Възможно е хипердопирателни въобще да не съществуват.

Теорема 2.9 (Рокафелар [5]). Нека съществува поне една хипердопирателна към K в x . Тогава множеството от всички хипердопирателни към K в x съвпада с $\text{int } C_K(x)$.

Теорема 2.10. Нека X е банахово пространство, $F : X \rightarrow X^*$ е монотонно изображение, такова че $D(F) \neq \emptyset$. Тогава не съществуват хипердопирателни към $\text{grh } F$ в произволна точка от $\text{grh } F$.

Доказателство. Допускаме противното. Нека $x_0 \in D(F)$ и в $(x_0, F(x_0))$ съществува поне една хипердопирателна към $\text{grh } F$ и нека тя е (u_0, v_0) . От теоремата на Рокафелар имаме $(u_0, v_0) \in \text{int } C_{\text{grh } F}(x_0, F(x_0))$.

Означаваме с $S_{\text{grh } F}(x_0, F(x_0))$ изображението от X в X^* , чиято графика е $C_{\text{grh } F}(x_0, F(x_0))$. Отгук $u_0 \in \text{int } D(S_{\text{grh } F}(x_0, F(x_0)))$ и съществува $\gamma > 0$, такова че $(u_0, v) \in S_{\text{grh } F}(x_0, F(x_0))$ за всяко $v \in B(v_0, \gamma)$.

Получаваме противоречие със Следствие 2.7, което твърди, че изображението от X в X^* , чиято графика е конусът на Кларк към $\text{grh } F$ в произволна нейна точка, е еднозначно изображение от X в X^* във всяка точка от вътрешността на дефиниционната си област.

Глава 3

Монотонни оператори. Локални свойства

Теорема 3.1. Нека X е банахово пространство и $T : X \rightarrow X^*$ е максимално монотонно изображение, такова че $\text{int } D(T) \neq \emptyset$. Тогава рестрикцията му до отворено множество в $\text{int } D(T)$ е максимално монотонно изображение.

Доказателство. Нека $A \subset D(T)$ е отворено множество. Разглеждаме рестрикцията $T|_A$ и допускаме, че тя не е максимално монотонна в A , т. е. съществува $y \in A$ и $(y, q) \notin \text{gph } T|_A$, такива че за всяко $(x, p) \in \text{gph } T|_A$ имаме $\langle x - y, p - q \rangle \geq 0$.

От максималната монотонност на T следва, че съществува $(x', p') \in \text{gph } T$, $x' \notin A$, такива че $\langle x' - y, p' - q \rangle < 0$. Точката $y \in A$ и понеже A е отворено, то съществува $\delta > 0$, такова че щом $\|x - y\| < \delta$, то $x \in A$.

Нека положим

$$(3.1) \quad x_0 := y + \lambda(x' - y), \quad \lambda \in (0, 1).$$

Тогава $\|x_0 - y\| = \lambda\|x' - y\|$ и за достатъчно малко λ имаме $\|x_0 - y\| < \delta$, т. е. $x_0 \in A$ и тъй като $A \subset D(T)$, то съществува $p_0 \in T(x_0)$ и $(x_0, p_0) \in \text{gph } T|_A$. За (y, q) имаме

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \langle y - x_0, q - p_0 \rangle &= \langle \lambda(y - x'), q - p_0 \rangle = \lambda \langle y - x', q - p' \rangle + \lambda \langle y - x', p' - p_0 \rangle \\ &< \lambda \langle y - x', p' - p_0 \rangle \end{aligned}$$

и от представянето (3.1) изразяваме y

$$y = \frac{(x_0 - \lambda x')}{(1 - \lambda)}.$$

Заместваме в (3.2) и получаваме

$$\begin{aligned} \langle y - x_0, q - p_0 \rangle &< \lambda \langle y - x', p' - p_0 \rangle < \lambda \langle (x_0 - \lambda x')/(1 - \lambda) - x', p' - p_0 \rangle \\ &< \frac{\lambda}{(1 - \lambda)} \langle x_0 - \lambda x' - x' + \lambda x', p' - p_0 \rangle < \frac{\lambda}{(1 - \lambda)} \langle x_0 - x', p' - p_0 \rangle < 0, \end{aligned}$$

тъй като $(x_0, p_0), (x', p') \in \text{gph } T$.

Получаваме противоречие, а следователно и верността на твърдението на теоремата.

В статията си [7] Борвейн и Фитцпатрик доказват, че ако X е банахово пространство, $T : X \rightarrow X^*$ е монотонен оператор и x е поглъщаща точка на $D(T)$, то T е локално ограничен в x . Като за произволно множество S в X точката x от S се нарича поглъщаща за S , ако $S_x = X$, където $S_x := \{y \in X : y = t(s - x), s \in S, t > 0\}$.

Тук доказваме следната

Теорема 3.2. Нека X е банахово пространство. Нека $T : X \rightarrow X^*$ е монотонен оператор, такъв че $D(T) := \{x \in X : T(x) \neq \emptyset\}$ е гъсто G_δ множество в отворено множество A . Тогава T е локално ограничено във всяка точка от $D(T) \cap A$.

Доказателство. Нека $D(T) \cap A$. Можем да приемем, че при трансляция точката x отива в 0 и $0 \in T(0)$. Запазваме същите означения за транслираните образи на $D(T)$ и A .

Образуваме множеството $\Pi = \{y \in X : y = tz, z \in D(T), t > 0\}$. Ясно е, че то е гъсто и G_δ множество в X .

Нека f е изпъкнала полунепрекъсната отдолу функция $f : X \rightarrow (-\infty, \infty)$, чийто домен $\text{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < \infty\}$ е такъв, че $\text{dom}(f) \supseteq D(T)$ и $f(0) = 0$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно реално число. Образуваме множеството

$$C := \{x \in X : f(x) \leq \varepsilon\}.$$

Тъй като f е изпъкнала и полунепрекъсната отдолу функция, то C е изпъкнало и затворено.

За всяко $x \in \Pi$ имаме, че съществува $r > 0$, такава че $rx \in D(T)$ и следователно $f(rx) < \infty$. Избираме $\lambda > 0$, такава че $\lambda f(rx) < \varepsilon$ и $\lambda < 1$. Тогава $\lambda rx \in C$, защото

$$f(\lambda rx) \leq \lambda f(rx) + (1 - \lambda)f(0) = \lambda f(rx) < \varepsilon.$$

Следователно, ако означим $C_n := nC$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$(*) \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \supseteq \Pi.$$

Тъй като Π е гъсто и G_δ в X , то Π може да се представи по следния начин

$$\Pi = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Pi_i,$$

където Π_i е гъсто и отворено множество за всяко $i \in \mathbb{N}$.

От (*) имаме, че

$$\begin{aligned}\emptyset &= \Pi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\Pi \setminus C_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \Pi_i \right) \setminus C_n \right) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} (\Pi_i \setminus C_n).\end{aligned}$$

Ако допуснем, че не съществува $n_0 \in \mathbb{N}$, такава че C_{n_0} да е с непразна вътрешност, то тогава $\Pi_i \setminus C_n$ ще са отворени и гъсти и от теоремата на Бер ще следва, че ще имат непразно сечение, което води до противоречие.

Следователно съществува $n_0 \geq 1$, такава че $\text{int } C_{n_0} \neq \emptyset$, а отгук и $\text{int } C \neq \emptyset$.

Лесно се вижда, че $0 \in \text{int } C$. Тогава съществува $\delta > 0$, такава че щом $\|x\| < \delta$, то $x \in C$.

Нека сега разгледаме функцията $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$, дефинирана като

$$f(x) := \sup\{\langle y^*, x - y \rangle : y^* \in T(y), \|y\| \leq 1\}.$$

Функцията f е неотрицателна, тъй като $0 \in T(0)$, и е изпъкнала и полунепрекъсната отдолу като супремум на непрекъснати линейни функционали.

Нека $x \in \Pi$. Можем да намерим $t > 0$, такава че $T(tx) \neq \emptyset$.

Взимаме произволно $u^*(t) \in T(tx)$. За всяко $y^* \in T(y)$

$$\langle y^*, tx - y \rangle \leq \langle u^*(t), tx - y \rangle,$$

тъй като T е монотонен. От това, че $0 \in T(0)$ имаме също, че $f(0) = 0$. Следователно

$$f(tx) \leq \sup\{\langle u^*(t), tx - y \rangle : \|y\| \leq 1\} < \infty.$$

От проведените по-горе разсъждения имаме, че съществува $\delta > 0$, такава че $f(x) \leq 1$, когато $\|x\| \leq 2\delta$, или, което е еквивалентно, ако $y^* \in T(y)$, $\|y\| \leq 1$, $\|x\| \leq 2\delta$, то

$$\langle y^*, x \rangle \leq \langle y^*, y \rangle + 1.$$

Следователно, ако $y^* \in T(y)$ и $\|y\| \leq \delta$, то

$$2\delta\|y^*\| = \sup\{\langle y^*, x \rangle : \|x\| \leq 2\delta\} \leq \|y^*\| \cdot \|y\| + 1 \leq \delta\|y^*\| + 1$$

и

$$\|y^*\| \leq 1/\delta,$$

с което локалната ограниченост на T е установена.

Теорема 3.3. Нека X е банахово пространство и $T : X \rightarrow X^*$ е максимално монотонно изображение с $D(T) = \Gamma$, такава че е гъсто G_δ подмножество на някое отворено множество A' в X . Тогава върху всяко отворено подмножество A на A' рестрикцията на T върху A е максимално монотонно изображение в смисъл, че за всяко $(y, q) \notin \text{grh } T$, където $y \in A$, съществува $(x_0, p_0) \in \text{grh } T|_A$, за което $\langle x_0 - y, p_0 - q \rangle < 0$.

Доказателство. Допускаме противното на твърдението на теоремата, т. е. съществува $(y, q) \notin \text{grh } T$, $y \in A$:

$$\langle x - y, p - q \rangle \geq 0 \text{ за всяко } (x, p) \in \text{grh } T|_A.$$

От максималната монотонност на T съществува $(x', p') \in \text{grh } T$:

$$\langle x' - y, p' - q \rangle = -\varepsilon < 0, \quad x' \notin A.$$

Полагаме $\Delta := \|x' - y\|$. От Теорема 3.2 следва, че T е локално ограничен в x' , т. е. съществуват $\delta > 0$ и константа $M > 0$, такива че щом $x'' \in B(x', \delta) \cap \Gamma$, то $\|p''\| \leq M$ за всяко $p'' \in T(x'')$.

Без ограничение на общността предполагаме, че $\delta < \Delta$ и $B(x', \delta) \subset A'$. Означаваме

$$\tilde{x} = x' + (\delta^*/\Delta)(y - x'),$$

където $\delta^* > 0$ е такава, че

$$\delta^* \leq \min\{\delta/2; \varepsilon/8(M + \|q\|)\}.$$

Разглеждаме отвореното множество

$$S = \{\tilde{x} + \nu'd, \|d\| = 1, \nu' < \nu = \min\{\delta^*; \varepsilon\delta^*/8M(\Delta + 2\delta^*)\}\}, \quad S \subset A'.$$

От гъстотата на Γ в A' следва, че $S \cap \Gamma \neq \emptyset$.

Нека $x^* \in S \cap \Gamma$ е произволно. Тогава съществуват d с $\|d\| = 1$ и $\nu' < \nu$, такива че

$$x^* = \tilde{x} + \nu'd.$$

Нека $p^* \in T(x^*)$. От монотонността на T

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x' - x^*, p' - p^* \rangle = \langle x' - (\tilde{x} + \nu'd), p' - p^* \rangle \\ &= \left\langle (\tilde{x} - y) \frac{\|x' - \tilde{x}\|}{\|\tilde{x} - y\|} - \nu'd, p' - p^* \right\rangle. \end{aligned}$$

Следователно

$$\langle \tilde{x} - y, p' - p^* \rangle \geq \nu' \langle d, p' - p^* \rangle \cdot \frac{\|\tilde{x} - y\|}{\|x' - \tilde{x}\|} \geq -2\nu M \frac{(\Delta + \delta^*)}{\delta^*}.$$

Отгук

$$\begin{aligned} \langle x^* - y, p' - p^* \rangle + \langle \tilde{x} - x^*, p' - p^* \rangle &\geq -2\nu M \frac{(\Delta + \delta^*)}{\delta^*}, \\ \langle x^* - y, p' - p^* \rangle &\geq -2\nu M \frac{(\Delta + \delta^*)}{\delta^*} - 2\nu M \geq -2\nu M \frac{(\Delta + 2\delta^*)}{\delta^*} \geq -\varepsilon/4. \end{aligned}$$

За всяко $x^* \in S \cap \Gamma$ и всяко $p^* \in T(x^*)$ имаме, че

$$\langle x^* - y, p^* - q \rangle \leq -\varepsilon/2,$$

тъй като

$$\begin{aligned} -\varepsilon &= \langle x' - y, p' - q \rangle = \langle x' - x^* + x^* - y, p' - p^* + p^* - q \rangle \\ &= \langle x' - x^*, p' - p^* \rangle + \langle x' - x^*, p^* - q \rangle + \langle x^* - y, p' - p^* \rangle + \langle x^* - y, p^* - q \rangle \\ &\geq 0 - (\delta^* + \nu)(M + \|q\|) - \varepsilon/4 + \langle x^* - y, p^* - q \rangle \\ &\geq -\varepsilon/4 - \varepsilon/4 + \langle x^* - y, p^* - q \rangle. \end{aligned}$$

Построяваме отворения конус с връх точката y

$$K = \{z \in X : z = t(x - y), x \in S, t > 0\}.$$

Множеството $K \cap A \neq \emptyset$ е отворено и следователно съществува $\tilde{y} \in \Gamma \cap K \cap A$. От Теорема 3.2 имаме, че T е локално ограничено в \tilde{y} , т. е. съществуват константа M' и $\delta' > 0$, такива че щом $y'' \in B_0(\tilde{y}, \delta') \cap \Gamma$, $\|p''\| \leq M'$ за всяко $p'' \in T(y'')$.

Без ограничение на общността вземаме δ' толкова малко, че $B_0(\tilde{y}, \delta') \subset K \cap A$. Тъй като Γ е гъсто в S , то съществува $x^* \in S \cap \Gamma$, такава че сечението на $B_0(\tilde{y}, \delta')$ и отсечката, свързваща y и x^* е различно от празното множество, т. е. съществува $1 > \lambda > 0$, такава че

$$(3.3) \quad y' = y + \lambda(x^* - y) \in B_0(\tilde{y}, \delta').$$

Следователно съществува $\delta'' > 0$, такава че

$$B_0(y', \delta'') \subset B_0(\tilde{y}, \delta').$$

Нека $C := \{y'' : \|y' - y''\| < \mu\}$, където $\mu < \delta''$ и

$$(3.4) \quad \mu \leq \frac{\lambda\varepsilon}{4} \left(2M + M' + \|q\| + \frac{\lambda}{1-\lambda}(M + M') \right).$$

Отгук $C \subset A$ и следователно съществува $y'' \in C : y'' \in D(T)$ и следователно

$$y'' = y + \lambda(x^* - y) + \mu'd$$

за някои μ' и d , такива че $\mu' < \mu$, $\|d\| = 1$.

Нека $p'' \in T(y'')$. Тогава

$$\begin{aligned} \langle y'' - y, p'' - q \rangle &= \langle \lambda(x^* - y) + \mu'd, p'' - q \rangle \\ &= \langle \lambda(x^* - y) + \mu'd, p'' - p^* \rangle + \langle \lambda(x^* - y) + \mu'd, p^* - q \rangle \\ &= \lambda \langle x^* - y, p^* - q \rangle + \mu' \langle d, p^* - q \rangle \\ &\quad + \mu' \langle d, p'' - p^* \rangle + \lambda \langle x^* - y, p'' - p^* \rangle \\ &\leq -\lambda\varepsilon/2 + \mu'(M + \|q\|) + \mu'(M + M') + \lambda \langle x^* - y, p'' - p^* \rangle. \end{aligned}$$

От (3.3) изразяваме y по следния начин

$$y = (y' - \lambda x^*) / (1 - \lambda)$$

и го заместваме в дясната страна:

$$\begin{aligned} \langle y'' - y, p'' - q \rangle &\leq -\lambda\varepsilon/2 + \mu'(M + \|q\|) + \mu'(M + M') \\ &\quad + \lambda/(1 - \lambda) \langle x^* - \lambda x^* - y' + \lambda x^*, p'' - p^* \rangle \\ &\leq -\lambda\varepsilon/2 + \mu(M + \|q\|) + \mu(M + M') + \lambda/(1 - \lambda) \langle x^* - y', p'' - p^* \rangle \\ &\leq -\lambda\varepsilon/2 + \mu(M + \|q\|) + \mu(M + M') + \lambda/(1 - \lambda) \langle x^* - y'', p'' - p^* \rangle \\ &\quad + \lambda/(1 - \lambda) \langle y'' - y', p'' - p^* \rangle \\ &\leq -\lambda\varepsilon/2 + \mu(2M + M' + \|q\|) + (\lambda/(1 - \lambda))\mu(M + M') \\ &\leq -\lambda\varepsilon/2 + \mu(2M + M' + \|q\|) + (\lambda/(1 - \lambda))(M + M') \\ &\leq -\lambda\varepsilon/2 + \lambda\varepsilon/4 = -\lambda\varepsilon/4 < 0. \end{aligned}$$

Окончателно получаваме

$$\langle y'' - y, p'' - q \rangle < 0, \quad (y'', p'') \in \text{gph } T|_A,$$

което е в противоречие с направеното допускане, откъдето следва верността на твърдението на теоремата.

Нека E е банахово пространство и $T : E \rightarrow E^*$ е оператор.

Определение 3.4 ([1]). Монотонният оператор T е *локално максимално монотонен*, ако за всяко отворено изпъкнало подмножество U на E^* , такава че $U \cap R(T) \neq \emptyset$, операторът T^{-1} е максимален в U .

Определение 3.5 ([1]). Ако рестрикцията на монотонен оператор T върху всяко отворено изпъкнало множество U (такова че $U \cap D(T) \neq \emptyset$) е максимална в U , то T се нарича *максимално монотонен локално*.

Забележка. От доказателството на Теорема 3.3 е ясно, че ако T е монотонен оператор, такъв че $D(T)$ е гъсто G_δ подмножество на E , то T е максимално монотонен локално.

Предположение. Ако T е локално максимално монотонен оператор и S е субдиференциал на индикаторната функция δ_C на затвореното изпъкнало множество C с непразна вътрешност V , за която $D(T) \cap V \neq \emptyset$, тогава сумата $S + T$ е максимално монотонна.

Твърдение 3.6 ([1]). Нека предположението е в сила и T е локално максимално монотонен оператор в E . Тогава за всяко изпъкнало отворено множество U , такова че $U \cap D(T) \neq \emptyset$, рестрикцията на T върху U е максимално монотонна в U .

Следствие 3.7 ([1]). Ако T е субдиференциал на собствена изпъкнала полунепрекъсната отдолу функция, то T е максимално монотонен локално.

Определение 3.8. Функцията $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, където X е отворено в E , се нарича lower C^2 , ако за всяко $\tilde{x} \in X$ има околност, в която f може да се представи като максимум на C^2 функции:

$$f(x) = \max_{s \in S} g_s(x),$$

където S е компактно топологично пространство, всяка функция $g_s(\cdot)$ е двукратно диференцируема във въпросната околност и стойностите на $g_s(\cdot)$ и нейните първи и втори частни производни са непрекъснати по съвкупността от променливите (x, s) .

Лема 3.9. Ще докажем, че $\nabla^2 g_s(x)$, $s \in S$, са равномерно ограничени в околност на произволно $x_0 \in X$.

Доказателство. Фиксираме $x_0 \in X$ и $s_0 \in S$. Нека $\varepsilon > 0$ произволно. От непрекъснатостта на $\nabla^2 g_s(x)$ по съвкупността от променливите (x, s) имаме, че съществуват околност U_{s_0} на s_0 и $\delta(x_0, s_0) > 0$, такива че щом $\|x - x_0\| < \delta$ и $s \in U_{s_0}$, то

$$\|\nabla^2 g_s(x) - \nabla^2 g_{s_0}(x_0)\| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\|\nabla^2 g_s(x)\| \leq \|\nabla^2 g_{s_0}(x_0)\| + \varepsilon.$$

Същото може да се направи за всяко $s \in S$, но S е компакт и следователно е възможно от покритието му с U_s околности да се избере крайно подпокритие U_{s_1}, \dots, U_{s_k} .

Нека $\delta = \min_{1 \leq i \leq k} \delta(x_0, s_i)$ и $2\mu = \varepsilon + \max_{1 \leq i \leq k} \|\nabla^2 g_{s_i}(x_0)\|$. Тогава за всяко $s \in S$ и всяко x , такова че $\|x - x_0\| < \delta/2$, имаме $\|\nabla^2 g_s(x)\| \leq 2\mu$.

Нека E е хилбертово пространство. От направените разсъждения следва, че е възможно локално да се намери константа 2μ , такава че когато $2\mu I$ (където I е идентитетът в E) се добави към всичките тези билинейни оператори $\nabla^2 g_s$, да се получат само положително дефинитни оператори. Оттук съответните функции

$$g_s(x) + \mu\|x\|^2$$

са изпъкнали локално (доказателството е аналогично на изложеното в [12, стр. 103]). Същото важи и за функцията $f(x) + \mu\|x\|^2$, т. е. за всяко $x_0 \in X$ съществува $\mu > 0$, такава че функцията $f(x) + \mu\|x\|^2$ е изпъкнала в затворено изпъкнало множество C , такава че $x_0 \in \text{int } C$. Оттук следва, че функцията

$$h(x) = f(x) + \mu\|x\|^2 + \psi_C(x),$$

където ψ_C е индикаторната функция на C , е собствена, изпъкнала, полунепрекъснатата отдолу функция, като за всяко $x \in \text{int } C$

$$\partial h(x) = \partial f(x) + 2\mu x,$$

където ∂f е субдиференциалът на Кларк.

Теорема 3.10. Нека E е хилбертово пространство, X е отворено множество в E и $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ е lower C^2 функция. Нека $x \in X$, $(x, x^*) \notin \text{gph } \partial f$, където ∂f е субдиференциалът на f в смисъл на Кларк. Тогава съществува изпъкнало затворено множество C , такава че $C \subset X$, $x \in \text{int } C$ и съществуват $y \in D(\partial f) \cap \text{int } C = \text{int } C$ и $y^* \in \partial f(y)$, такива че

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle < 0,$$

т. е. ∂f няма монотонно продължение в X .

Доказателство. Имаме, че $x \in \text{int } C$ и $x^* \notin \partial f(x)$, т. е. $x^* + 2\mu x \notin \partial f(x) + 2\mu x$ или, което е еквивалентно,

$$x^* + 2\mu x \notin \partial h(x).$$

От следствие 4.7 имаме, че ∂h е максимално монотонно локално и тъй като $x \in \text{int } C$ и $x^* + 2\mu x \notin \partial h(x)$, то съществуват $y \in \text{int } C$ и $y^* \in \partial h(y)$, такива че $y^* \in \partial f(y) + 2\mu y$ (т. е. $y^* = y_1^* + 2\mu y$, $y_1^* \in \partial f(y)$), за които

$$(*) \quad \begin{aligned} \langle (x^* + 2\mu x) - y^*, x - y \rangle &< 0, \\ \langle x^* + 2\mu x - y_1^* - 2\mu y, x - y \rangle &< 0, \\ \langle x^* - y_1^*, x - y \rangle + 2\mu \langle x - y, x - y \rangle &< 0 \end{aligned}$$

и окончателно

$$\langle x^* - y_1^*, x - y \rangle < 0.$$

Забележка. Предходната теорема може да бъде доказана и като се използва Теорема 3.1. Тъй като ∂h е максимално монотонно [10, стр. 59], то съществува $y \in \text{int } C$, такава че за всяко $y^* \in \partial h(y)$

$$\langle (x^* + 2\mu x) - y^*, x - y \rangle < 0$$

и доказателството продължава по аналогичен начин след (*).

Глава 4

Субдиференциали от втори ред. Достатъчни условия от втори ред за локално решение на минимизационни задачи с $C^{1,1}$ данни

Нека U е непразно отворено подмножество в \mathbb{R}^n . Означаваме с $C^{1,1}(U)$ класът от всички реалнозначни функции f , които са диференцуеми в U и чиито градиент ∇f е локално липшицово изображение в U (т. е. удовлетворява условието на Липшиц в околност на всяка точка $x_0 \in U$). Следователно ∇f е диференцуемо почти навсякъде в U от теоремата на Радемахер, т. е. f е двукратно диференцуема почти навсякъде в U .

Определение 4.1. Нека $f \in C^{1,1}(U)$ и нека $x_0 \in U$. Субдиференциал от втори ред в смисъл на Кларк $\partial_C^2 f(x_0)$ на f в точката x_0 или обобщена Хесианова матрица на f в точката x_0 се нарича множеството матрици, дефинирано като изпъкналата обвивка на множеството:

$$\left\{ M \mid \exists x_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x_0 : f \text{ е двукратно диференцуема в } x_i \text{ и } \nabla^2 f(x_i) \rightarrow M \right\}.$$

По конструкция $\partial_C^2 f(x_0)$ е непразно компактно изпъкнало множество от симетрични матрици, което се свежда до $\nabla^2 f(x_0)$, когато f е двукратно непрекъснато диференцуема в x_0 .

Пример 4.2. Нека $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ е двукратно непрекъснато диференцуема в U функция ($g \in C^2(U)$) и разглеждаме функцията f , дефинирана в U като

$$f(x) = [g^+(x)]^2, \text{ където } g^+(x) = \max\{g(x), 0\}.$$

Ясно е, че $f \in C^{1,1}(U)$ и е лесно да се провери, че за всяко $x_0 \in U$,

$$\partial_C^2 f(x_0) = \begin{cases} 2g(x_0)\nabla^2 g(x_0) + 2\nabla g(x_0)\nabla g(x_0)^T, & \text{ако } g(x_0) > 0, \\ 0, & \text{ако } g(x_0) < 0, \\ \{2\alpha\nabla g(x_0)\nabla g(x_0)^T, \alpha \in [0, 1]\}, & \text{ако } g(x_0) = 0. \end{cases}$$

Свойствата на $\partial_C^2 f$ се извличат от тези на обобщените производни на изображения с векторни стойности ([8, 9]). Тук ще цитираме две основни свойства, които ще са ни необходими по-нататък:

Свойство 1. Многочначното изображение $x \rightarrow \partial_C^2 f(x)$ е локално ограничено, т. е. съществува околност V на x_0 и константа K , такива че

$$\sup\{\|M\| \mid M \in \partial_C^2 f(x), x \in V\} \leq K.$$

Свойство 2. $\partial_C^2 f$ е полунепрекъснато отгоре (или затворено) многочначно изображение в следния смисъл: ако $x_n \rightarrow x_0$ и ако $M_n \rightarrow M_0$ като $M_n \in \partial_C^2 f(x_n)$ за всяко n , тогава $M_0 \in \partial_C^2 f(x_0)$.

Функцията на две променливи, дефинирана като

$$(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \max\{\langle Mu, v \rangle \mid M \in \partial_C^2 f(x_0)\},$$

Ириà–Урути [9] нарича опорна бифункция на $\partial_C^2 f(x_0)$. Означаваме я с $f^{\circ\circ}(x_0, u, v)$. Тя е симетрична по u и v функция и играе ролята на обобщена производна от втори ред по посока на f в точката x_0 .

В [2, 6] е дадена без доказателство аналитичната формулировка на $f^{\circ\circ}(x_0, u, v)$ в термините на градиентното изображение ∇f , а именно

$$\max_{M \in \partial_C^2 f(x_0)} \langle Mu, v \rangle = f^{\circ\circ}(x_0, u, v) := \limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{\langle \nabla f(x + \lambda u), v \rangle - \langle \nabla f(x), v \rangle}{\lambda},$$

която тук ще бъде доказана.

Доказателството ѝ непосредствено следва от следните леми:

Лема 4.3. Функцията $\langle \nabla f(x), v \rangle$ при фиксирано $v \neq 0$ е локално липшицова.

Доказателство. Нека $x_0 \in U$. Тъй като ∇f е локално липшицово, то съществува околност $W \ni x_0$ и константа $L \geq 0$, такива че за всички $x, y \in W$ имаме

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Оттук следва

$$\|\langle \nabla f(x), v \rangle - \langle \nabla f(y), v \rangle\| \leq \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \cdot \|v\| \leq L\|v\| \cdot \|x - y\|$$

и следователно в W функцията $\langle \nabla f(\cdot), v \rangle$ е локално липшицова с константа $L\|v\|$.

Следствие 4.4. За всяко v функцията $\langle \nabla f(\cdot), v \rangle$ е диференцуема по всяка посока u и тъй като е диференцуема почти навсякъде в U , то в точките y на диференцируемост производната y по посока u има следния вид $\langle \nabla^2 f(\cdot)u, v \rangle$.

Лема 4.5. Нека $v \neq 0$, $u \neq 0$, $u, v \in \mathbb{R}^n$. Тогава

$$f^{\circ}(x, u, v) \leq \limsup \{ \langle \nabla^2 f(y)u, v \rangle : y \rightarrow x, y \notin N \},$$

където с N е означено множеството от точки в U , в които ∇f не е диференцуемо.

Доказателство. Означаваме

$$\alpha := \limsup \{ \langle \nabla^2 f(y)u, v \rangle : y \rightarrow x, y \notin N \}.$$

За всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такава, че условията $y \in x + \delta B$, където B е единичното кълбо в \mathbb{R}^n и $y \notin N$ водят до

$$\langle \nabla^2 f(y)u, v \rangle \leq \alpha + \varepsilon.$$

Избираме δ толкова малко, че множеството N да има нулева мярка в $x + \delta B$, и разглеждаме интервала

$$L_y = \{y + tu : 0 < t < \delta/2\|u\|\}.$$

Тъй като N има мярка нула в $x + \delta B$, от теоремата на Фубини следва, че за почти всяко $y \in x + (\delta/2)B$ интервалът L_y пресича множеството N в множество с нулева мярка.

Нека y е произволна точка в $x + (\delta/2)B$ с това свойство и нека $t \in (0, \delta/2\|u\|)$. Тогава

$$\langle \nabla f(y + tu), v \rangle - \langle \nabla f(y), v \rangle = \int_0^t \langle \nabla^2 f(y + su)u, v \rangle ds,$$

тъй като производната на $\langle \nabla^2 f(\cdot)u, v \rangle$ съществува почти навсякъде в L_y .

Понеже $\|y + su - x\| < \delta$ за $0 < s < t$, следва че

$$\langle \nabla^2 f(y + su)u, v \rangle \leq \alpha + \varepsilon$$

и

$$\langle \nabla f(y + tu), v \rangle - \langle \nabla f(y), v \rangle \leq t(\alpha + \varepsilon)$$

за всяко $y \in x + (\delta/2)B$ с изключение на някакво множество с мярка нула и за всяко $t \in (0, \delta/2\|u\|)$. От непрекъснатостта на $\langle \nabla f(\cdot), v \rangle$ получаваме, че неравенството е изпълнено за всяко y в $x + (\delta/2)B$ и всяко $t \in (0, \delta/2\|u\|)$ и затова

$$f^{\circ}(x, u, v) \leq \alpha + \varepsilon,$$

което трябваше да се докаже.

Следствие 4.6.

$$f^{\circ\circ}(x, u, v) = \limsup \left\{ \langle \nabla^2 f(y)u, v \rangle, y \rightarrow x, y \notin N \right\}.$$

Следствие 4.7.

$$\limsup \left\{ \langle \nabla^2 f(y)u, v \rangle, y \rightarrow x, y \notin N \right\} = \max_{M \in \partial_C^2 f(x)} \langle Mu, v \rangle.$$

Доказателство. Ако $y \rightarrow x, y \notin N$ и $\nabla^2 f(y) \rightarrow M$, то $M \in \partial_C^2 f(x)$, откъдето $\langle \nabla^2 f(y)u, v \rangle \rightarrow \langle Mu, v \rangle$ и получаваме непосредствено верността на твърдението.

Ако разгледаме например функцията f от Пример 4.2, то

$$f^{\circ\circ}(x_0, u, v) = 2 [\langle \nabla g(x_0), u \rangle \langle \nabla g(x_0), v \rangle]^+,$$

когато $g(x_0) = 0$.

Като следствие от току-що доказаната връзка в [6] е доказана

Теорема 4.8 ([6]). Нека $f \in C^{1,1}(U)$ и нека $[a, b] \subset U$. Тогава съществува $c \in (a, b)$ и $M_c \in \partial_C^2 f(c)$, такива че

$$f(b) = f(a) + \langle \nabla f(a), b - a \rangle + \frac{1}{2} \langle M_c(b - a), b - a \rangle.$$

Пристъпваме към намиране на достатъчно условие от втори ред за това точката x_0 да е локално решение на минимизационната задача с $C^{1,1}$ данни (съответните необходими условия са доказани в [6]).

Разглеждаме следната задача:

$$(P) \quad \min f(x), \quad x \in U,$$

където U е отворено подмножество на \mathbb{R}^n и f е $C^{1,1}$ функция в U .

За тази задача достатъчното условие от втори ред точката x_0 да е локално решение, е

Теорема 4.9. Нека $x_0 \in U$ е такава, че $\nabla f(x_0) = 0$ и всички матрици от $\partial_C^2 f(x_0)$ са положително дефинитни. Тогава x_0 е точка на локален минимум за задачата (P).

Доказателство. Допускаме, че x_0 не е точка на локален минимум. Тогава съществува редица $\{x_k\} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0$, без ограничение на общността $x_k \in U$ за всяко $k \geq 1$, и такава че

$$f(x_k) < f(x_0), \quad \text{за всяко } k \geq 1.$$

Полагаме $d_k = \frac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|}$. От Теорема 4.8 следва, че

$$f(x_k) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x_k - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle A_k(x_k - x_0), x_k - x_0 \rangle,$$

където $k \geq 1$, $A_k \in \partial_C^2 f(\bar{x}_k)$ и $\bar{x}_k \in (x_0, x_k)$.

Отгук

$$\begin{aligned} 0 &> f(x_k) - f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), x_k - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle A_k(x_k - x_0), x_k - x_0 \rangle, \\ 0 &> \frac{1}{2} \langle A_k(x_k - x_0), x_k - x_0 \rangle, \\ (4.1) \quad 0 &> \langle A_k d_k, d_k \rangle \quad \text{за всички } k \geq 1. \end{aligned}$$

Тъй като $\|d_k\| = 1$ за всяко $k \geq 1$, то съществува множество индекси K , такова че $\{d_k\}_K$ клони към някакво d и $\|d\| = 1$.

От друга страна $\partial_C^2 f$ е локално ограничено (P_1), а значи и редицата $\{A_k\}_K$ е ограничена и следователно има сходяща подредица.

Нека A е границата на тази подредица. От полунепрекъснатостта на $\partial_C^2 f$ (P_2) матрицата $A \in \partial_C^2 f(x_0)$. Като извършим граничен преход в (4.1), получаваме, че

$$\langle Ad, d \rangle \leq 0,$$

а това е в противоречие с положителната определеност на A . Следователно x_0 е точка на локален минимум за задачата (P).

Разглеждаме задачата

$$(Q) \quad \begin{aligned} &\min f(x) \\ &g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ &h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, l, \end{aligned}$$

където $f, g_i, i = 1, \dots, m, h_j, j = 1, \dots, l$ са $C^{1,1}$ функции в \mathbb{R}^n .

Образуваме лагранжиана

$$L(x, \lambda, \mu) := f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^l \mu_j h_j(x),$$

където $\lambda_i, i = 1, \dots, m, \mu_j, j = 1, \dots, l$ са произволни реални числа. Ясно е, че като функция на x лагранжианът е $C^{1,1}$ в \mathbb{R}^n .

Теорема 4.10. Нека x_0 е допустима точка, такава че съществуват реални числа $\lambda_i \geq 0$ за $i \in I = \{i : g_i(x_0) = 0\}$, $\lambda_i = 0$ за $i \in \{1, \dots, m\} \setminus I$ и μ_j за $j = 1, \dots, l$, за които $\nabla_x L(x_0, \lambda, \mu) = 0$ и всички матрици в $\partial_{C^{1,1}}^2 L(x_0, \lambda, \mu)$ са положително дефинитни. Тогава x_0 е локално решение на задачата (Q).

Доказателство. От доказателството на теорема 4.9 се вижда, че точката x_0 е точка на локален минимум на функцията $L(x, \lambda, \mu)$, където λ, μ удовлетворяват

условието на теоремата. Следователно съществува околност на точката x_0 , за всяко x от която е изпълнено

$$f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^l \mu_j h_j(x) \geq f(x_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_0) + \sum_{j=1}^l \mu_j h_j(x_0).$$

Като отчетем факта, че x_0 е допустима точка, от горното неравенство получаваме, че за всяка допустима точка в упоменатата околност е изпълнено

$$f(x) \geq f(x_0),$$

което означава, че x_0 е локално решение на задачата (Q) при така направените предположения.

Библиография

- [1] S. P. Fitzpatrick, R. R. Phelps. Are locally maximal monotone operators “maximal monotone locally”? Сообщение, направлено на научна конференция, 29 юни 1992 год., Нюкясъл, Австралия.
- [2] J.-B. Hiriart-Urruty. A new set valued second order derivative for convex functions. In: Fermat days '85, *Mathematics for Optimization* (Toulouse, 1985), North-Holland Math. Stud., **129**, North-Holland, Amsterdam, New York, 1986, 157–182.
- [3] Ф. Кларк. *Оптимизация и негладкий анализ*. Москва, Наука, 1988.
- [4] Ж.-П. Обен, И. Экланд. *Прикладной нелинейный анализ*. Москва, Мир, 1988.
- [5] R. T. Rockafellar. Maximal monotone relations and the second derivatives of nonsmooth functions, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **2** (1985) No 3, 167–184.
- [6] J.-B. Hiriart-Urruty, J.-J. Strodiot, V. H. Nguyen. Generalized hessian matrix and second-order optimality conditions for problems with $C^{1,1}$ data, *Appl. Math. Optim.*, **11** (1984), 45–56.
- [7] J. M. Borwein, S. P. Fitzpatrick. Local boundedness of monotone operators under minimal hypotheses, *Austral. Math. Soc.*, **39** (1989), No 3, 439–441.
- [8] F. H. Clarke. On the inverse function theorem, *Pacif. J. Math*, **64** (1976), 97–102.
- [9] J.-B. Hiriart-Urruty. Characterizations of the plenary hull of the generalized Jacobian matrix, *Math. Programming Study*, **17** (1982), 1–12.
- [10] R. R. Phelps. *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Lecture Notes in Mathematics, **1364**, Springer, 1993.
- [11] S. Trojanski. On locally uniformly convex and differentiable norms in certain separable Banach Spaces, *Studia Math.*, **37** (1971), 173–180.
- [12] П. Кендеров, Г. Христов, А. Дончев, *Математическо оптимиране*, Университетско издателство, 1989.