5.3 PROGRAMMATION PARAMÉTRIQUE

En utilisant les observations faites à la section 5.2, nous pouvons résoudre des problèmes de P.L. dont les données $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ ou $\mathbf{c}$ dépendent linéairement d'un paramètre t. Notre but est de déterminer comment la valeur optimum de la fonction objectif varie lorsque le paramètre t prend diverses valeurs. Examinons pour cela le problème suivant :

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z = \mathbf{cx} \\ \text{s.c.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} + t\mathbf{b}' \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \end{array}\right| \tag{5.6}$$

où $\mathbf{A}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$ sont fixés et t est un paramètre. Si t est fixé, le problème (5.6) est un problème de P.L. et nous noterons $z^*(t)$ la valeur maximum de z.

Propriété 5.3.1

L'ensemble des valeurs de t pour lesquelles le problème (5.6) a des solutions admissibles est un intervalle $[a, b]$ (avec des bornes finies ou infinies).

Preuve

$\{(\mathbf{x}, t) | \mathbf{Ax} - t\mathbf{b}' = \mathbf{b};\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ est un polyèdre de $\mathbb{R}^{n+1}$ (si $\mathbf{A}$ a n colonnes). Sa projection sur l'axe de t est donc un intervalle. □

Propriété 5.3.2

Si pour une valeur $t_0 \in [a, b]$, le problème (5.6) a une solution optimale finie, alors il en est de même pour tout $t \in [a, b]$.

Preuve

Le dual de (5.6) a alors aussi une solution optimale finie par le théorème de dualité. Or les contraintes du dual sont $\lambda\mathbf{A} \geqslant \mathbf{c}$, λ quelconque. Elles ne dépendent pas de la valeur de t. Ainsi le dual a toujours des solutions admissibles ; pour tout $t \in [a, b]$, le problème (5.6) et son dual auront des solutions admissibles. D'après le théorème de dualité, cela signifie que les deux problèmes auront des solutions optimales finies pour tout $t \in [a, b]$. □

Propriété 5.3.3

$z^*(t)$ est une fonction concave linéaire par morceaux de t.

Preuve

Soit I un intervalle de variation de t pour lequel $\mathbf{B}$ est une base optimale. Alors $z^*(t) = \mathbf{cx} = \mathbf{c}_{\boldsymbol{B}}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + t\mathbf{b}') + \mathbf{c}_{\boldsymbol{N}}\mathbf{x}_{\boldsymbol{N}}$ est une fonction linéaire de t sur l'intervalle I. II n'y a qu'un nombre fini d'intervalles I puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de bases. Pour montrer que $z^*(t)$ est concave, considérons deux valeurs t', t'' de t correspondant à des solutions optimales $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ de (5.6). Formons la combinaison convexe $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}''$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Alors pour $t = \lambda t' + (1-\lambda)t''$, $\mathbf{x}$ est une solution admissible de (5.6). D'où $z^*(t) \geqslant \mathbf{cx}$, c'est-à-dire $z^*(\lambda t' + (1-\lambda)t'') \geqslant \lambda\mathbf{cx}' + (1-\lambda)\mathbf{cx}'' = \lambda z^*(t') + (1-\lambda)z^*(t'')$. □

Nous décrirons directement sur un exemple une méthode de détermination de la fonction $z^*(t)$.

Exemple

Considérons le problème de P.L. avec paramètre t

$$\left.\begin{array}{lrcl}
\max z = 2x_1 + 3x_2 & & & \\
\text{s.c.} & x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 7 + t \\
 & 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 & = & 10 - t \\
 & -x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 & = & 3 + 2t \\
 & x_i & \geqslant & 0 \\
 & i & = & 1, \ldots, 5
\end{array}\right| \qquad (5.7)$$

Nous avons le tableau suivant si l'on choisit pour base la matrice $\mathbf{B} = (\mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4, \mathbf{a}^5)$:

		$-x_1$	$-x_2$
$z =$	0	-2	-3
$x_3 =$	$7+t$	1	-2
$x_4 =$	$10-t$	2	$\boxed{1}$
$x_5 =$	$3+2t$	-1	1

La base $\mathbf{B}$ ne donne pas une solution optimale. Il faut donc effectuer des opérations de pivotage. Pour obtenir un tableau associé à une base optimale, nous pouvons effectuer des opérations de pivotage en choisissant des pivots positifs dans les colonnes j telles que $z_j - c_j < 0$ jusqu'à ce que l'on ait des valeurs non négatives dans toutes les colonnes. Ici nous obtenons après un pivotage

		$-x_1$	$-x_4$
$z =$	$30-3t$	4	3
$x_3 =$	$27-t$	5	2
$x_2 =$	$10-t$	2	1
$x_5 =$	$3t-7$	$\boxed{-3}$	-1

Cette solution est admissible et optimale si t satisfait : $27-t \geqslant 0$, $10-t \geqslant 0$, $3t-7 \geqslant 0$, c'est-à-dire pour $t \in [7/3, 10]$.

Examinons ce qui se passe si $t > 10$; x_2 devient négatif, la solution n'est plus admissible, mais puisque $z_j - c_j$ reste non négatif pour toute colonne j, on peut appliquer l'algorithme dual du simplexe et choisir un pivot négatif dans la ligne de x_2 selon les règles définies dans l'algorithme dual. Ici tous les termes y_{ij} $(j > 0)$ de la ligne de x_2 sont positifs. Ceci signifie que le dual n'a pas de solution optimale finie et donc que pour tout $t > 10$ le problème (5.7) n'a pas de solution admissible.

Il reste à traiter le cas oú $t < 7/3$; dans ce cas c'est x_5 qui devient négatif. Nous pouvons donc appliquer l'algorithme dual et choisir un pivot négatif dans la ligne de x_5. Nous obtenons le tableau suivant.

$$
\begin{array}{ll|lrr|}
 & & & -x_5 & -x_4 \\
\cline{3-5}
z & = & \dfrac{62}{3}+t & 4/3 & 5/3 \\
\cline{3-5}
x_3 & = & \dfrac{46}{3}+4t & 5/3 & 1/3 \\
x_2 & = & \dfrac{16}{3}+t & 2/3 & 1/3 \\
x_1 & = & \dfrac{7}{3}-t & -1/3 & 1/3 \\
\cline{3-5}
\end{array}
$$

La solution est optimale et admissible si t satisfait :

$$\frac{46}{3} + 4t \geqslant 0,\ \ \frac{16}{3} + t \geqslant 0,\ \ \frac{7}{3} - t \geqslant 0,$$

c'est-à-dire si

$$t \in \left[-\frac{23}{6}, \frac{7}{3}\right].$$

Que se passe-t-il si $t < -23/6$? x_3 deviendra négatif ; nous devrions chercher un pivot négatif dans la ligne de x_3. Tous les termes y_{ij} $(j > 0)$ de cette ligne sont positifs. Le dual n'a pas d'optimum fini, donc le primal (5.7) n'a pas de solution admissible pour $t < -23/6$. Donc

$$[a, b] = \left[-\frac{23}{6}, 10\right].$$

La fonction $z^*(t)$ est représentée dans la figure 5.1.

A l'aide de l'algorithme primal du simplexe, on pourrait étudier de la même manière un problème de P.L. dont la fonction objectif ferait intervenir un paramètre.

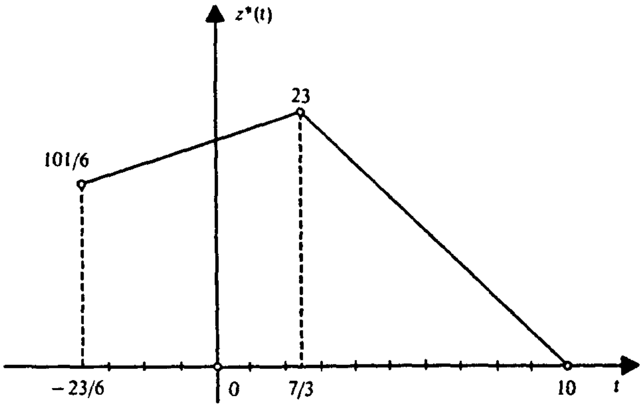

FIG. 5.1.

5.4 EXERCICES

5.4.1 Résoudre

$$\left.\begin{array}{ll} \max z = 2x_1 + 5x_2 & \\ \text{s.c.} & 6x_1 - 3x_2 \leqslant 7 \\ & 4x_1 + 5x_2 \geqslant 8 \\ & 0 \leqslant x_1 \leqslant 3 \\ & 0 \leqslant x_2 \leqslant 4 \end{array}\right|$$