1. Задача на математическото оптимиране. Съществуване на решение.

1.1. Задача на математическото оптимиране

Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е реалнозначна функция, дефинирана в $\mathbb{R}^n$ и нека X е подмножество на $\mathbb{R}^n$. Интересуваме се от следната задача: да се намери точка $x_0 \in X$, за която неравенството $f(x_0) \leqslant f(x)$ е в сила за всеки избор на $x \in X$.

Такава точка $x_0 \in X$ се нарича решение на *задачата за минимум*

$$(P) \qquad \begin{array}{l} f(x) \to \min \\ x \in X. \end{array}$$

Функцията f се нарича *целева функция*, а множеството X – *множество от ограничения* или още *допустимо множество* на задачата.

Разбира се, може да се разгледа и *задачата за максимум*: да се намери точка $x_0 \in X$, за която неравенството $f(x_0) \geqslant f(x)$ е в сила за всеки избор на $x \in X$.

Класът от всички минимизационни и максимизационни задачи се нарича още клас на екстремалните задачи или клас на оптимизационните задачи, т.е. задачи за намиране на екстремум (оптимум).

Като вземем предвид равенството $\sup\{f(x) : x \in X\} = -\inf\{-f(x) : x \in X\}$, лесно се вижда, че всяка максимизационна задача се свежда до минимизационна и обратно. По-нататък в курса ще разглеждаме предимно минимизационни задачи.

Оптимизационни задачи, в които целевата функция f е линейна, а множеството X от ограничения на задачата се задава с линейни функции, бяха предмет на курса по Математическо оптимиране I. Курсът по Математическо оптимиране II е посветен на задачи, в които целевата функция е нелинейна и/или множеството от ограничения се задава с нелинейни функции.

Проблемите, които поставя една оптимизационна задача са следните:

- **съществуване на решение**

  Ще дадем достатъчно общ и често използван метод за установяване съществуването на решение. За съжаление този и подобните му методи не дават ефективни средства за намиране на решението, чието съществуване вече сме установили. Следователно, след като сме установили съществуването на решение, търсим

- **характеризация на решението**

  Това означава да се дадат необходими условия за да бъде една точка решение на съответна оптимизационна задача, което и ще направим за различни класове нелинейни задачи.

- **методи за намиране на решението**

  В края на курса ще разгледаме алгоритми за решаване на някои класове оптимизационни задачи.

1.2. Съществуване на решение на оптимизационна задача

Въпросът за съществуване на решение, както казахме, е един от основните въпроси в теорията на оптимизационните задачи. Задачата (P) има решение тогава (и само тогава), когато съществува точка $x_0 \in X$ такава, че

$$f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in X\}.$$

Условия, гарантиращи съществуване на решение се дават от известната

Теорема 1.1. (Вайерщрас) *Ако $X \neq \emptyset$ е компактно множество в $\mathbb{R}^n$ и функцията $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в X, то тя достига инфимума (и супремума) си в X.*

Доказателство. Нека означим $\alpha := \inf\{f(x) : x \in X\}$. Очевидно, $\alpha \geqslant -\infty$ и нека $\{x_k\} \subset X$ е редица от точки, за които $\lim\limits_k f(x_k) = \alpha$. Такава редица е прието да се нарича *минимизираща редица* за функцията f в множеството X.

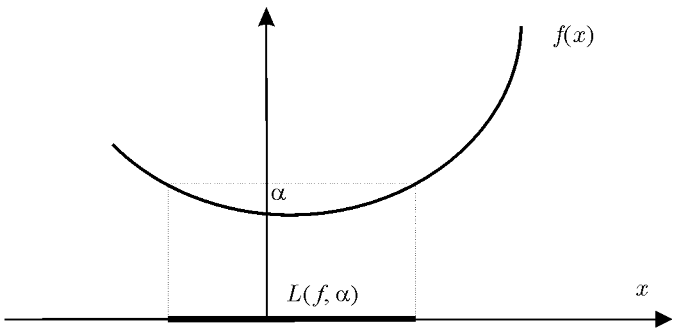
Редицата $\{x_k\}$ е ограничена, тъй като X е компакт. Следователно, от нея можем да изберем сходяща подредица $\{x_{k_i}\} \to x_0$. Очевидно нейната граница x_0 е в множеството X, тъй като X е затворено. От непрекъснатостта на функцията f в X следва, че $f(x_0) = \lim\limits_i f(x_{k_i}) = \alpha$. Следователно, $\alpha > -\infty$, т.е. f е ограничена отдолу в X и достига инфимума си върху X в точката x_0.

Доказателството на това, че f достига супремума си в X е аналогично. ∎

Очевидно, Теорема 1.1 остава в сила, ако заменим условието за компактност на X с условието "X е затворено и съществува ограничена минимизираща (максимизираща) редица за функцията f в множеството X".

Следствие 1.1. *Ако $X \neq \emptyset$ е затворено множество в $\mathbb{R}^n$, функцията $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в X и за всяка редица $\{x_k\} \subset X$, за която $\lim\limits_k \|x_k\| = +\infty$, имаме $\lim\limits_k f(x_k) = +\infty$, то f достига инфимума си в X.*

Доказателство. От направените предположения следва, че всяка минимизираща редица за функцията f в X е ограничена, а оттук и верността на твърдението. ∎



Фигура 1.1. Множество на Лебег на функцията f

Нека $f : X \to \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Множество от вида $L(f, \alpha) := \{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\}$ се нарича *множество на Лебег* за функцията f.

Теорема 1.2. *Ако функцията $f : X \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в затвореното множество $X \subset \mathbb{R}^n$, то за всяко $\alpha \in \mathbb{R}$, множеството ѝ на Лебег $L(f, \alpha)$ е затворено множество в $\mathbb{R}^n$.*

Доказателство. Нека α е произволно реално число. Да разгледаме $L(f, \alpha)$. Ако $L(f, \alpha) = \emptyset$, твърдението е тривиално. Нека $L(f, \alpha) \neq \emptyset$. Избираме произволна сходяща редица $\{x_k\} \subset L(f, \alpha)$, $x_k \to x_0$. Трябва да покажем, че нейната граница x_0 е в $L(f, \alpha)$. Тъй като X е затворено множество и $\{x_k\} \subset X$, то $x_0 \in X$. От непрекъснатостта на f в x_0 и от $f(x_k) \leqslant \alpha$ получаваме, че $f(x_0) \leqslant \alpha$, т.е. $x_0 \in L(f, \alpha)$. Следователно $L(f, \alpha)$ е затворено множество. ∎

Следствие 1.2. *Ако $X \neq \emptyset$ е затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$, функцията $f : X \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в X и за някое $x^* \in X$ множеството ѝ на Лебег $L(f, f(x^*))$ е ограничено, то f достига инфимума си в X.*

Доказателство. Всяка минимизираща редица от известно място нататък се съдържа в множеството $L(f, f(x^*))$ и следователно е ограничена. ∎

2. Лема на Фаркаш. Следствия.

В този въпрос ще припомним някои известни и ще докажем нови резултати за системи линейни уравнения и неравенства, които ще са ни необходими в по-нататъшните разглеждания.

Ако $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ са вектори от $\mathbb{R}^n$, скаларното им произведение ще означаваме с $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, или с $x^{\mathrm{T}} y$.

От линейната алгебра е известно, че ако a_i, $i = 1, \dots n$ са вектори от $\mathbb{R}^n$, то системата линейни уравнения

$$\langle a_i, x\rangle = b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

има решение при всеки избор на реалните числа b_i, $i = 1, \dots, n$, тогава и само тогава, когато векторите a_i, $i = 1, \dots n$ са линейно независими (детерминантата на матрицата, чиито вектор-редове са векторите a_i е различна от нула). Решението на горната система може де се намери чрез формулите на Крамер. Известно е също така, че всяко множество a_i, $i = 1, \dots, p < n$ от p линейно независими вектори в $\mathbb{R}^n$ може да се допълни до система от n линейно независими вектори в $\mathbb{R}^n$. В частност, ако за някой избор на числата $b_1, \dots, b_p$ системата

$$\langle a_i, x\rangle = b_i, \quad i = 1, \dots, p$$

няма решение, то от това следва, че векторите a_i, $i = 1, \dots, p$ са линейно зависими.

2.1. Лема на Фаркаш

При разглеждане на въпроса за двойнственост в линейното оптимиране доказахме един важен резултат, който е основна теорема в теорията на линейните неравенства – Лемата на Фаркаш.

Лема 2.1 (Лема на Фаркаш). *Нека A е $(m \times n)$ матрица, $a_0 \in \mathbb{R}^n$. Системата*

$$\text{(I)} \quad A^{\mathrm{T}}\lambda = a_0\,, \quad \lambda \geqslant 0$$

има решение, тогава и само тогава, когато системата

$$\text{(II)} \quad Ax \leqslant 0, \quad \langle a_0, x\rangle > 0$$

няма решение.

Казваме, че *неравенството $\langle a_0, x\rangle \leqslant 0$ е следствие от системата неравенства*

$$\langle a_i, x\rangle \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

ако за всяко решение $\overline{x}$ на системата е изпълнено, че $\langle a_0, \overline{x}\rangle \leqslant 0$.

Като вземем горното предвид, лесно се вижда, че Лемата на Фаркаш може да бъде изказана и в следната, еквивалентна форма

Лема 2.2. *Неравенството $\langle a_0, x\rangle \leqslant 0$ е следствие от системата неравенства*

$$\langle a_i, x\rangle \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{2.1}$$

тогава и само тогава, когато съществуват числа $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, m$, такива че $a_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$.

Доказателство. Да означим с A матрицата, чиито вектор-редове са векторите $a_1, \dots, a_m$. Това, че неравенството $\langle a_0, x\rangle \leqslant 0$ е следствие от системата (2.1) означава, че системата (II) няма решение. От Лемата на Фаркаш следва, че системата (I) има решение λ. Това, че $A^{\mathrm{T}}\lambda = a_0$ и $\lambda \geqslant 0$ означава, че векторът a_0 се представя като положителна линейна комбинация с коефициенти λ_i, $i = 1, \dots, m$ на вектор-стълбовете на матрицата A^{T} (които, разбира се, са вектор-редовете $a_1, \dots, a_m$ на матрицата A), т.е. имаме че $a_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$ и $\lambda_i \geqslant 0$ за $i = 1, \dots, m$.

Обратно, ако съществуват неотрицателни числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, такива че $a_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, то това означава, че системата (I) има решение $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. От Лемата на Фаркаш следва, че системата (II) няма решение, което означава че за всяко решение $\overline{x}$ на системата неравенства $\langle a_i, x\rangle \leqslant 0$, $i = 1, \dots, m$ е изпълнено неравенството $\langle a_0, \overline{x}\rangle \leqslant 0$, т.е. неравенството $\langle a_0, x\rangle \leqslant 0$ е следствие от тази система, което и трябваше да се докаже. ■

2.2. Следствия от Лемата на Фаркаш

Следствие 2.1. *Ако равенството $\langle a_0, x\rangle = 0$ е следствие от системата равенства*

$$\langle a_i, x\rangle = 0, \quad i = 1, \dots, p, \tag{2.2}$$

то съществуват такива числа $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$, че $a_0 = \sum_{i=1}^{q} \mu_i a_i$.

Доказателство. От условието следва, че равенството $\langle a_0, x\rangle = 0$ е следствие от системата неравенства

$$\begin{aligned} \langle a_i, x\rangle &\leqslant 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ \langle -a_i, x\rangle &\leqslant 0, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

От Лема 2.2 имаме, че съществуват числа $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, 2p$, такива че $a_0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_{p+i}(-a_i) = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \lambda_{p+i}) a_i$. Като положим $\mu_i := \lambda_i - \lambda_{p+i}$, $i = 1, \dots, p$, получаваме $a_0 = \sum_{i=1}^{p} \mu_i a_i$. Да забележим, че за μ_i не можем да твърдим, че са неотрицателни. ■

Следствие 2.2. *Нека p и q, $0 \leqslant p < q$ са цели числа. Ако системата неравенства*

$$\begin{aligned} \langle a_i, x\rangle &\leqslant 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ \langle a_i, x\rangle &< 0, \quad i = p+1, \dots, q \end{aligned} \tag{2.3}$$

има решение и неравенството $\langle a_0, x\rangle \leqslant 0$ *е следствие от нея, то съществуват такива числа* $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, q$, *че* $a_0 = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i a_i$.

Да забележим, че ако $p = 0$, *то в системата* (2.3) *участват само строги неравенства.*

Доказателство. Ще докажем, че неравенството $\langle a_0, x\rangle \leqslant 0$ е следствие и от системата нестроги неравенства

$$\begin{aligned} &\langle a_i, x\rangle \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, p, \\ &\langle a_i, x\rangle \leqslant 0, \quad i = p+1, \ldots, q, \end{aligned} \tag{2.4}$$

след което ще приложим Лема 2.2.

Нека $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ е решение на системата (2.4) и нека $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ е решение на системата (2.3). Да разгледаме векторите $\overline{x} + t\overline{y}$, където t е положително число. От равенството $\langle a_i, \overline{x} + t\overline{y}\rangle = \langle a_i, \overline{x}\rangle + t\langle a_i, \overline{y}\rangle$ се вижда, че $\overline{x} + t\overline{y}$ е решение на системата (2.3). Следователно, съгласно условието на доказваното твърдение, $\overline{x} + t\overline{y}$ ще удовлетворява неравенството

$$0 \geqslant \langle a_0, \overline{x} + t\overline{y}\rangle = \langle a_0, \overline{x}\rangle + t\langle a_0, \overline{y}\rangle. \tag{2.5}$$

Тъй като t е произволно положително число, след граничен преход при $t \to 0^+$ в (2.5) получаваме, че $\langle a_0, \overline{x}\rangle \leqslant 0$. От Лема 2.2 имаме, че съществуват неотрицателни числа $\lambda_1, \ldots \lambda_q$, такива че $a_0 = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i a_i$. Твърдението е доказано. ∎

Следствие 2.3. *Ако системата неравенства* (2.3) *няма решение, то съществуват такива числа* $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, q$, *че*

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda_i a_i = 0 \ \text{и} \ \sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i > 0. \tag{2.6}$$

Доказателство. Нека s е такова цяло число, че системата от първите s неравенства в (2.3) има решение, а системата от първите $s+1$ неравенства в (2.3) няма решение. Това означава, че неравенството $\langle a_{s+1}, x\rangle \geqslant 0 \sim \langle -a_{s+1}, x\rangle \leqslant 0$ е следствие от първите s неравенства в (2.3). От Следствие 2.2 имаме, че съществуват числа $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots s$, за които

$$-a_{s+1} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_i.$$

Полагаме $\lambda_{s+1} := 1$ и $\lambda_i := 0$ за $s + 1 < i \leqslant q$ и получаваме $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i a_i = 0$. Тъй като нулевият вектор е решение на системата

$$\langle a_i, x\rangle \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, p,$$

то $s \geqslant p$ и следователно $\sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i > 0$. Твърдението е доказано. ∎

3. Необходими условия за оптималност при диференцируема целева функция и многостенно множество от ограничения.

Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е реална функция, дефинирана в $\mathbb{R}^n$, нека $a_i \in \mathbb{R}^n$ са вектори от $\mathbb{R}^n$, а $b_i \in \mathbb{R}$ са реални числа за $i = 1, \dots, m$.

Разглеждаме следната оптимизационна задача: да се намери минимумът на f в множеството $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x\rangle \leqslant b_i,\ i = 1, \dots, m\}$, т.е.

$$
\begin{aligned}
(P) \qquad & f(x) \to \min \\
& \langle a_i, x\rangle \leqslant b_i, \quad i = 1, \dots, m.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Множеството X се задава посредством линейни неравенства и следователно е многостенно множество. Неравенствата $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$, $i = 1, \dots, m$ наричаме ограничения на задачата (P).

Нека $x_0 \in X$. Ограничението $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$ се нарича *активно в точката* x_0, ако $\langle a_i, x\rangle = b_i$.

Да припомним дефиницията за производна на функция на n променливи:

Дефиниция 3.1. Нека X е отворено подмножество на $\mathbb{R}^n$ и $f : X \to \mathbb{R}$. Казваме, че функцията f е *диференцируема в точката* $x_0 \in X$, ако съществува вектор $f'(x_0) \in \mathbb{R}^n$, наричан *производна* или *градиент* на f в x_0, така че да е изпълнено

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle f'(x_0), x - x_0\rangle}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Ако функцията f е диференцируема в точката x_0, тя има единствен градиент в тази точка, който е равен на

$$f'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right),$$

където $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ е частната производна на f по променливата x_i в точката x_0, $i = 1, \dots, n$. Ако f има непрекъснати частни производни в околност на точката x_0, то f е диференцируема в x_0.

Теорема 3.1. *Нека f е диференцируема в точката x_0. За да бъде x_0 решение на задачата (P) е необходимо да съществуват такива неотрицателни числа λ_i, $i = 1, \dots, m$, че*

$$f'(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0, \tag{3.2}$$

$$\lambda_i(\langle a_i, x_0\rangle - b_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{3.3}$$

Доказателство. Нека x_0 е решение на задачата (3.1). Това ще рече, че $\langle a_i, x_0\rangle \leqslant b_i$ за $i = 1, \dots, m$ и $f(x) \geqslant f(x_0)$ за всяко x от множеството X.

Да означим $I(x_0) := \{i : \langle a_i, x_0\rangle = b_i\}$, т.е. $I(x_0)$ е (възможно и празното) множество от индексите на *активните* в точката x_0 ограничения.

Да разгледаме произволен вектор d, за който $\langle a_i, d\rangle \leqslant 0$ за всяко $i \in I(x_0)$. Ще докажем, че $\langle -f'(x_0), d\rangle \leqslant 0$ и ще приложим Лема 2.2 за векторите $-f'(x_0)$ и a_i, $i \in I(x_0)$.

Да разгледаме векторите $z_t := x_0 + td$, където $t > 0$. Ще се убедим най-напред, че $z_t \in X$, когато числото $t > 0$ е достатъчно близо до 0.

Наистина, ако $i \in I(x_0)$, то за всяко $t \geqslant 0$

$$\langle a_i, z_t\rangle = \langle a_i, x_0\rangle + t\langle a_i, d\rangle \leqslant b_i.$$

За индекси i извън множеството $I(x_0)$ е в сила строгите неравенства $\langle a_i, x_0\rangle < b_i$ и от съображения за непрекъснатост при достатъчно малки числа $t > 0$ ще са в сила и неравенствата $\langle a_i, z_t\rangle = \langle a_i, x_0 + td\rangle < b_i$.

Тъй като в точката x_0 функцията f достига минимума си в множеството X и тъй като за достатъчно малки $t > 0$ имаме, че $z_t \in X$, то в сила е неравенството

$$0 \leqslant f(z_t) - f(x_0) = f(x_0 + td) - f(x_0).$$

Тогава

$$0 \leqslant \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}.$$

След граничен преход при $t \to 0^+$ получаваме, че $\langle f'(x_0), d\rangle \geqslant 0$.

Следователно, от $\langle a_i, d\rangle \leqslant 0$ за $i \in I(x_0)$ получаваме $\langle -f'(x_0), d\rangle \leqslant 0$, което означава, че неравенството $\langle -f'(x_0), d\rangle \leqslant 0$ е следствие от системата $\langle a_i, d\rangle \leqslant 0$, $i \in I(x_0)$. От Лемата на Фаркаш имаме, че $-f'(x_0) = \sum\limits_{i\in I(x_0)} \lambda_i a_i$ за някои числа $\lambda_i \geqslant 0$, $i \in I(x_0)$. Полагаме $\lambda_i = 0$ за $i \notin I(x_0)$ и тогава $f'(x_0) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0$. Освен това е ясно, че $\lambda_i(\langle a_i, x_0\rangle - b_i) = 0$ за всяко $i = 1, \ldots, m$. ■

Следствие 3.1. (Теорема на Ферма) *Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката x_0. Ако точката x_0 е решение на задачата*

$$\begin{aligned} &f(x) \to \min \\ &x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

то $f'(x_0) = 0$.

Доказателство. Допустимото множество на задачата е $X = \mathbb{R}^n$. За всяко $d \in \mathbb{R}^n$ имаме, че за $t \geqslant 0$ точките $x_0 + td \in X$. Тъй като x_0 е точка на минимум за функцията f върху цялото пространство $\mathbb{R}^n$, то $f(x_0 + td) - f(x_0) \geqslant 0$ за всяко $d \in \mathbb{R}^n$ и всяко $t \geqslant 0$. Следователно, $\dfrac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} \geqslant 0$ за всяко $d \in \mathbb{R}^n$ и всяко $t > 0$. След граничен преход по $t \to 0^+$ получаваме, че $\langle f'(x_0), d\rangle \geqslant 0$ за всяко $d \in \mathbb{R}^n$. В частност за $d = -f'(x_0)$ ще имаме, че $-\|f'(x_0)\|^2 = \langle f'(x_0), -f'(x_0)\rangle \geqslant 0$, откъдето $\|f'(x_0)\| = 0$ и следователно $f'(x_0) = 0$. ■

Дефиниция 3.2. *Нека X е множество в $\mathbb{R}^n$ и $x_0 \in X$. Векторът $d \in \mathbb{R}^n$ се нарича допустима посока за X в точката x_0, ако съществува такова число $t_0 > 0$, че $x_0 + td \in X$ за всяко $0 \leqslant t \leqslant t_0$.*

С други думи, d е допустима посока за X в точката x_0, ако тръгвайки от x_0 по посока d, известно време оставаме в множеството X.

От доказателството на Теорема 3.1 се вижда, че множеството от допустимите за $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x\rangle \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ посоки в една точка $x_0 \in X$ се състои от решенията на системата неравенства

$$\langle a_i, d\rangle \leqslant 0, \quad i \in I(x_0).$$

Всъщност, в доказателството на Теорема 3.1 бе установено, че ако x_0 е решение на задачата (3.1), то $\langle f'(x_0), d\rangle \geqslant 0$ за всяка допустима в x_0 посока d. Това е математически израз на интуитивно очевидния факт, че тръгвайки от точката на минимума в допустима посока, стойностите на целевата функция могат само да нарастват.

4. Необходими условия за оптималност при диференцируема целева функция и множество от ограничения неравенства. Теорема на Джон.

Нека са дадени функциите $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$.

Разглеждаме следната задача на математическото оптимиране, в която множеството от ограничения X се задава само с функционални неравенства:

$$
\begin{aligned}
(N) \qquad & f(x) \to \min \\
& g_i(x) \leqslant 0, \qquad i = 1, \dots, m,
\end{aligned}
$$

т.е. $X := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \dots, m\}$. За $x \in X$ полагаме $I(x) := \{i : g_i(x) = 0\}$, т.е. $I(x)$ е множеството от активните в x ограничения.

За доказателството на основния резултат ще ни е необходима следната

Лема 4.1. *Нека функцията $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката x_0 и нека $\langle h'(x_0), d\rangle < 0$ за някое $d \in \mathbb{R}^n$. Тогава съществува такова число $t_0 > 0$, че за всяко $t \in (0, t_0)$ е изпълнено неравенството $h(x_0 + td) < h(x_0)$.*

Доказателство. Според дефиницията за диференцируемост на функция (вж. Дефиниция 3.1), функцията h е диференцируема в точката x_0, ако съществува такъв вектор $h'(x_0) \in \mathbb{R}^n$, че

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{h(x) - h(x_0) - \langle h'(x_0), x - x_0\rangle}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Полагаме $x := x_0 + td$, $t > 0$. Тогава

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \left(\frac{h(x_0 + td) - h(x_0)}{t\|d\|} - \langle h'(x_0), \frac{d}{\|d\|}\rangle \right) = 0.$$

Следователно

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{h(x_0 + td) - h(x_0)}{t\|d\|} = \langle h'(x_0), \frac{d}{\|d\|}\rangle < 0.$$

Оттук следва, че при достатъчно малки числа $t > 0$ е в сила неравенството $h(x_0 + td) < h(x_0)$. Лемата е доказана. ■

Теорема 4.1. (Джон) *Нека x_0 е решение на задачата (N). Да предположим, че функциите f и g_i, $i \in I(x_0)$ са диференцируеми в x_0, а функциите g_i, $i \notin I(x_0)$ са непрекъснати в x_0. Тогава съществуват неотрицателни числа $\lambda_0, \lambda_i, i \in I(x_0)$, не всички равни на нула и такива, че*

$$\lambda_0 f'(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i g_i'(x_0) = 0.$$

Доказателство. Ще покажем, че системата линейни неравенства

$$
\begin{aligned}
& \langle f'(x_0), d\rangle < 0, \\
& \langle g_i'(x_0), d\rangle < 0, \quad i \in I(x_0)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

(с неизвестно $d \in \mathbb{R}^n$) няма решение.

Да допуснем противното, т.е. че системата (4.1) има решение $\bar{d} \in \mathbb{R}^n$. От Лема 4.1 ще получим, че съществува число $t_0 > 0$ такова, че

$$\begin{aligned} &f(x_0 + t\bar{d}) < f(x_0), \\ &g_i(x_0 + t\bar{d}) < g_i(x_0) = 0 \text{ за } i \in I(x_0) \text{ и } t \in (0, t_0). \end{aligned} \tag{4.2}$$

От $g_i(x_0) < 0$ и непрекъснатостта на g_i, $i \notin I(x_0)$ в точката x_0 следва, че за достатъчно малки числа $t > 0$ е в сила неравенството $g_i(x_0 + t\bar{d}) < 0$ за $i \notin I(x_0)$. Това показва, че за достатъчно малко число $t > 0$ точката $x = x_0 + t\bar{d}$ е от допустимото множеството $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\}$. От друга страна, неравенството $f(x_0 + t\bar{d}) < f(x_0)$ показва, че x_0 не е решение на задачата (N). Допускането, че системата (4.1) има решение, ни доведе до противоречие. Следователно системата (4.1) няма решение.

Тъй като системата (4.1) няма решение, от Следствие 2.3 имаме, че съществуват неотрицателни числа $\lambda_0, \lambda_i, i \in I(x_0)$, не всичките равни на нула, за които е в сила равенството

$$\lambda_0 f'(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i g_i'(x_0) = 0. \tag{4.3}$$

Да забележим, че ако функциите $g_i, i \notin I(x_0)$ са диференцируеми в x_0, то условието (4.3) може да се запише и така

$$\begin{aligned} &\lambda_0 f'(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i'(x_0) = 0, \\ &\lambda_i g_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{4.4}$$

като за целта е достатъчно да положим $\lambda_i = 0$ за $i \notin I(x_0)$. ■

От доказателството на теоремата на Джон се вижда, че вектор d, които удовлетворява системата неравенства

$$\langle g_i'(x_0), d \rangle < 0, \quad i \in I(x_0)$$

определя допустима посока в точката x_0 за множеството X. Теоремата на Джон всъщност показва, че изменяйки се от точката на минимума x_0 по допустима посока d за множеството X, стойностите на функцията f не намаляват (т.е. $\langle f'(x_0), d \rangle \geqslant 0$).

Следствие 4.1. *Нека са изпълнени условията от теоремата на Джон, нека функциите g_i, $i = 1, \ldots, m$ са диференцируеми в точката x_0 и нека системата*

$$\langle g_i'(x_0), d \rangle < 0, \quad i \in I(x_0)$$

има решение (такъв е например случаят, когато векторите $g_i'(x_0)$, $i \in I(x_0)$ са линейно независими). Тогава съществуват такива неотрицателни числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, че

$$\begin{aligned} &f'(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i'(x_0) = 0, \\ &\lambda_i g_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Доказателство. От условието на твърдението и от доказателството на теоремата на Джон се вижда, че системата

$$\langle g_i'(x_0), d \rangle < 0, \quad i \in I(x_0)$$

има решение и че неравенството $\langle -f'(x_0), d \rangle \leqslant 0$ е следствие от нея. Съгласно Следствие 2.2 съществуват неотрицателни числа λ_i, $i \in I(x_0)$, за които $-f'(x_0) = \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i g_i'(x_0)$. Полагаме $\lambda_i = 0$ за $i \notin I(x_0)$ и получаваме (4.5). Твърдението е доказано. ■

5. Необходими условия за оптималност при диференцируема целева функция и множество от ограничения равенства. Теорема за множителите на Лагранж.

Ще разгледаме задача на математическото оптимиране, в която множеството от ограничения се задава само с функционални равенства.

Нека са дадени функциите $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, s$.

Разглеждаме следната задача на математическото оптимиране

$$(R) \qquad \begin{array}{l} f(x) \to \min \\ h_k(x) = 0, \qquad k = 1, \dots, s, \end{array}$$

в която множеството от ограничения на задачата $X := \{x \in \mathbb{R}^n : h_k(x) = 0,\ k = 1, \dots, s\}$ се задава само с функционални равенства.

Теорема 5.1. (за множителите на Лагранж) *Нека x_0 е решение на задачата (R). Да предположим, че функцията f е диференцируема в x_0, а функциите h_k, $k = 1 \dots, s$ имат непрекъснати частни производни в околност на x_0. Тогава съществуват числа $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_s$, не всички равни на нула, за които*

$$\mu_0 f'(x_0) + \sum_{k=1}^{s} \mu_k h'_k(x_0) = 0.$$

Доказателство. Да отбележим най-напред, че случаят, когато векторите $h'_k(x_0)$ са линейно зависими не е интересен, защото съществуването на числата $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_s$, наричани *множители на Лагранж* е тривиално: достатъчно е да вземем от линейната им зависимост ненулевия набор от числа $\mu_1, \dots, \mu_s$, за които $\sum_{k=1}^{s} \mu_k h'_k(x_0) = 0$ и да добавим към него числото $\mu_0 = 0$. Затова предполагаме, че $h'_k(x_0)$ са линейно независими вектори. По аналогични причини не е интересен и случаят, когато $f'(x_0) = 0$. Затова предполагаме също така, че $f'(x_0) \neq 0$.

Ще покажем, че равенството $\langle f'(x_0), d \rangle = 0$ е следствие от системата равенства $\langle h'_k(x_0), d \rangle = 0$, $k = 1, \dots, s$.

Нека $\overline{d}$ е такъв вектор, че $\langle h'_k(x_0), \overline{d} \rangle = 0$ за $k = 1, \dots, s$. Тъй като векторите $h'_k(x_0)$ са линейно независими, за всяко $k = 1, \dots, s$ може да се намери вектор $d_k \in \mathbb{R}^n$ такъв, че

$$\begin{array}{ll} \langle h'_i(x_0), d_k \rangle = 0 & \text{при } i \neq k, \\ \langle h'_i(x_0), d_k \rangle = 1 & \text{при } i = k. \end{array}$$

Квадратната матрица

$$\big(\langle h'_i(x_0), d_k \rangle \big)_{i,k=1}^{s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

е единичната матрица и следователно е неизродена.

Въвеждаме нови реални променливи $\varepsilon, t_1, t_2, \dots t_s$ и разглеждаме системата уравнения

$h_1(x_0 + \varepsilon\overline{d} + t_1 d_1 + t_2 d_2 + \dots + t_s d_s) = 0,$
$h_2(x_0 + \varepsilon\overline{d} + t_1 d_1 + t_2 d_2 + \dots + t_s d_s) = 0,$
$\dots$
$h_s(x_0 + \varepsilon\overline{d} + t_1 d_1 + t_2 d_2 + \dots + t_s d_s) = 0.$

Левите страни на тези уравнения са функции на $s+1$ променливи: $\varepsilon, t_1, \dots, t_s$. Якобианът на тази система $\left(\dfrac{\partial h_i}{\partial t_k}\right)_{i,k=1\div s}$ в точката $\varepsilon = t_1 = t_2 = \dots = t_s = 0$ е точно детерминантата на посочената матрица, за която видяхме, че е различна от нула. Можем да приложим теоремата за неявните функции. В този случай тя гласи, че съществува интервал $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ на нулата и съществуват s на брой непрекъснато диференцируеми в $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ функции на една променлива $t_1(\varepsilon), t_2(\varepsilon), \dots, t_s(\varepsilon)$, които удовлетворяват условията $t_k(0) = 0$, $k = 1, \dots, s$ и

$$h_k(x_0 + \varepsilon\overline{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i) = 0, \quad k = 1, \dots, s, \quad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0). \tag{5.1}$$

Полагаме $z(\varepsilon) := \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i$. Искаме да пресметнем производните на функциите $t_k(\varepsilon)$ в $\varepsilon = 0$. За целта диференцираме по ε тъждеството (5.1) и получаваме

$$0 = \langle h_k'(x_0 + \varepsilon\overline{d} + z(\varepsilon)), \overline{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i'(\varepsilon) d_i\rangle.$$

При $\varepsilon = 0$ имаме

$$0 = \langle h_k'(x_0), \overline{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i'(0) d_i\rangle = \langle h_k'(x_0), \overline{d}\rangle + t_k'(0). \tag{5.2}$$

Да припомним, че за $\overline{d}$ имаме че $\langle h_k'(x_0), \overline{d}\rangle = 0$ за $k = 1, \dots, s$. Тогава $t_k'(0) = 0$, $k = 1, \dots, s$.

Да разгледаме функцията на една променлива $f_1(\varepsilon) := f(x_0 + \varepsilon\overline{d} + z(\varepsilon))$. Тъй като от (5.1) имаме, че за $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ точките $x_0 + \varepsilon\overline{d} + z(\varepsilon) \in X$ (т. е. $x_0 + \varepsilon\overline{d} + z(\varepsilon)$ са допустими точки) и тъй като f има минимум в x_0, то $f_1(\varepsilon)$ има минимум в $\varepsilon = 0$. Следователно $f_1'(0) = 0$, където

$$f_1'(\varepsilon) = \langle f'(x_0 + \varepsilon\overline{d} + z(\varepsilon)), \overline{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i'(\varepsilon) d_i\rangle,$$

откъдето при $\varepsilon = 0$ имаме

$$f_1'(0) = \langle f'(x_0), \overline{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i'(0) d_i\rangle.$$

Като вземем предвид, че $t_i'(0) = 0$, $i = 1, \dots, s$ и $f_1'(0) = 0$, получаваме $\langle f'(x_0), \overline{d}\rangle = 0$.

Показахме, че имаме равенство, което е следствие от система равенства. Като приложим Следствие 2.1 получаваме, че

$$f'(x_0) = \sum_{k=1}^{s} \mu_k h_k'(x_0)$$

за някои числа $\mu_1, \dots, \mu_s$. Остава да положим $\mu_0 = -1$ и теоремата е доказана. ■

6. Необходими условия за оптималност при диференцируема целева функция и множество от ограничения равенства и неравенства.

Ще разгледаме задача на математическото оптимиране, в която множеството от ограничения се задава с функционални равенства и неравенства.

Нека са дадени функциите $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ и $h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, s$. Разглеждаме следната задача на математическото оптимиране

$$
\begin{array}{ll}
(RN) & f(x) \to \min \\
& g_i(x) \leqslant 0, \qquad i = 1, \dots, m, \\
& h_k(x) = 0, \qquad k = 1, \dots, s,
\end{array}
$$

чието множество от ограничения $X := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \dots, m,\ h_k(x) = 0,\ k = 1, \dots, s\}$ се задава с функционални равенства и неравенства.

Теорема 6.1. *Нека x_0 е решение на задачата (RN). Да предположим, че функциите f, g_i, $i = 1, \dots, m$ са диференцируеми в точката x_0 и че функциите h_k, $k = 1, \dots, s$ имат непрекъснати частни производни в околност на точката x_0. Тогава съществуват неотрицателни числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, и числа $\mu_1, \dots, \mu_s$, такива че*

$$
\lambda_0 f'(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i'(x_0) + \sum_{k=1}^{s} \mu_k h_k'(x_0) = 0, \tag{6.1}
$$

$$
\lambda_i g_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{6.2}
$$

$$
\text{не всички числа } \lambda_i,\ i = 1, \dots, m,\ \mu_k,\ k = 1, \dots, s \text{ са равни на нула.} \tag{6.3}
$$

Доказателство. Считаме, че векторите $h_k'(x_0)$ са линейно независими и че $f'(x_0) \neq 0$, тъй като в противен случай резултатът е тривиален. Нека означим $I(x_0) := \{i : g_i(x_0) = 0\}$.

Ще покажем, че системата

$$
\begin{array}{ll}
\langle h_k'(x_0), d \rangle = 0, & k = 1, \dots, s \\
\langle g_i'(x_0), d \rangle < 0, & i \in I(x_0), \\
\langle f'(x_0), d \rangle < 0 &
\end{array} \tag{6.4}
$$

няма решение.

Допускаме противното, т.е. че съществува вектор $\overline{d} \in \mathbb{R}^n$, който е решение на системата (6.4). Както видяхме в доказателството на теоремата за множителите на Лагранж, съществуват вектори $d_1, \dots, d_s \in \mathbb{R}^n$ и непрекъснато диференцируеми в интервал $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ функции $t_1(\varepsilon), \dots, t_s(\varepsilon)$, такива че

$$
h_k(x_0 + \varepsilon\overline{d} + z(\varepsilon)) = 0, \quad k = 1, \dots, s,
$$

където $z(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i$, $t_k(0) = 0$, $t_k'(0) = 0$, $k = 1, \dots, s$. От тези условия следва, че $\dfrac{\|z(\varepsilon)\|}{\varepsilon} \to 0$, когато $\varepsilon \to 0$. Тъй като $\overline{d}$ по допускане удовлетворява неравенството $\langle f'(x_0), \overline{d} \rangle < 0$, то поради диференцируемостта на f в x_0 имаме

$$
\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon(\overline{d} + \frac{z(\varepsilon)}{\varepsilon})) - f(x_0)}{\|\varepsilon(\overline{d} + \frac{z(\varepsilon)}{\varepsilon})\|} = \langle f'(x_0), \frac{\overline{d}}{\|\overline{d}\|} \rangle < 0.
$$

Следователно, за достатъчно малки числа $\varepsilon > 0$ е в сила неравенството $f(x_0 + \varepsilon\overline{d} + z(\varepsilon)) < f(x_0)$. По подобен начин можем да се убедим, че $g_i(x_0 + \varepsilon\overline{d} + z(\varepsilon)) < g_i(x_0) = 0$ за $i \in I(x_0)$. При $i \notin I(x_0)$ от съображения за непрекъснатост се вижда, че при малки $\varepsilon > 0$ е в сила неравенството $g_i(x_0 + \varepsilon\overline{d} + z(\varepsilon)) < 0$. Следователно, при малки $\varepsilon > 0$ точката $x_0 + \varepsilon\overline{d} + z(\varepsilon)$ е в допустимото множество X на задачата (RN) и освен това $f(x_0 + \varepsilon\overline{d} + z(\varepsilon)) < f(x_0)$. Получаваме противоречие с това, че x_0 е решение на задачата (RN).

Следователно системата (6.4) няма решение. Тя е еквивалентна на системата

$$\begin{array}{ll} \langle h'_k(x_0), y\rangle \leqslant 0, & k = 1, \dots, s \\ \langle -h'_k(x_0), y\rangle \leqslant 0, & k = 1, \dots, s \\ \langle g'_i(x_0), y\rangle < 0, & i \in I(x_0), \\ \langle f'(x_0), y\rangle < 0. & \end{array}$$

Съгласно Следствие 2.3 съществуват такива неотрицателни числа $\mu'_1, \dots, \mu'_s$, $\mu''_1, \dots, \mu''_s$ и числа λ_0, λ_i, $i \in I(x_0)$, не всички равни на нула, че

$$\lambda_0 f'(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i g'_i(x_0) + \sum_{k=1}^{s} (\mu'_k - \mu''_k) h'_k(x_0) = 0,$$

$$\lambda_0 + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i > 0.$$

Полагаме $\mu_k := \mu'_k - \mu''_k$, $k = 1, \dots, s$ и $\lambda_i = 0$ за $i \notin I(x_0)$. Тогава са в сила равенствата (6.1), (6.2) и условието (6.3). ■

7. Достатъчно условие за оптималност. Седлова точка на функцията на Лагранж.

Да разгледаме оптимизационната задача

$$
\begin{array}{lll}
(GP) & f(x) \to \min & \\
 & g_i(x) \leqslant 0, & i = 1, \ldots, m, \\
 & h_k(x) = 0, & k = 1, \ldots, s, \\
 & x \in X, &
\end{array}
$$

където X е подмножество на $\mathbb{R}^n$, а f, g_i и h_k са функции, дефинирани в X със стойности в $\mathbb{R}$.

Нека $\mathbb{R}^m_+$ е множеството от всички вектори в $\mathbb{R}^m$ с неотрицателни координати и нека $M := \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^s$. Елементите на M са вектори от вида $\nu = (\lambda, \mu)$, $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, $\mu \in \mathbb{R}^s$. За $x \in X$ и $\nu \in M$ дефинираме функцията

$$L(x, \nu) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{k=1}^{s} \mu_k h_k(x).$$

Дефиниция 7.1. Функцията $L(x, \nu) : X \times M \to \mathbb{R}$ се нарича *функция на Лагранж* за задачата (GP).

Дефиниция 7.2. Точката $(\overline{x}, \overline{\nu}) \in X \times M$ се нарича *седлова точка* за функцията на Лагранж $L(x, \nu)$ в областта $X \times M$, ако следните неравенства са изпълнени за всяко $x \in X$ и всяко $\nu \in M$:

$$L(\overline{x}, \nu) \leqslant L(\overline{x}, \overline{\nu}) \leqslant L(x, \overline{\nu}). \tag{7.1}$$

Дясното неравенство показва, че функцията $L(x, \overline{\nu})$ достига минимума си по $x \in X$ в точката $\overline{x}$, а лявото неравенство показва, че функцията $L(\overline{x}, \nu)$ достига максимума си по $\nu \in M$ в $\overline{\nu}$.

На Фигура е изобразена графика на функция $L(x, \nu)$, за която $(\overline{x}, \overline{\nu})$ е седлова точка.

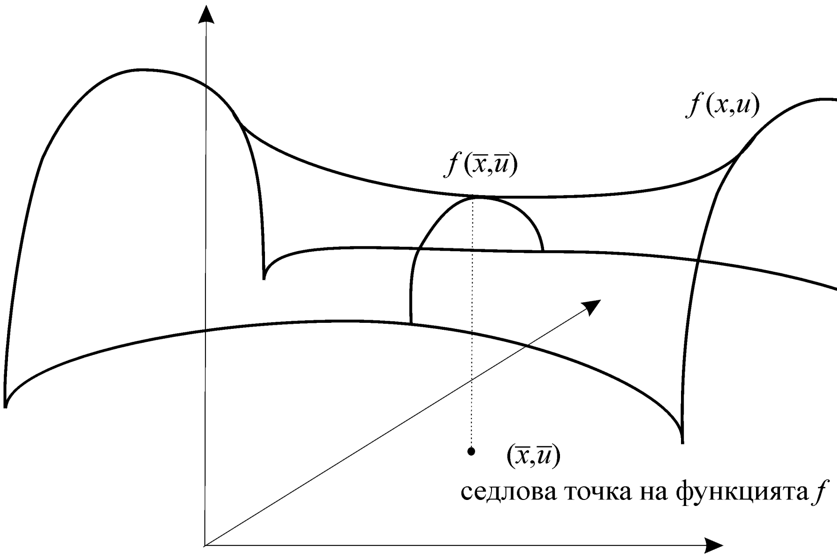
Теорема 7.1. *Достатъчно условие, за да бъде точката $\overline{x} \in X$ решение на задачата (GP) е да съществува точка $\overline{\nu} \in M$, за която $(\overline{x}, \overline{\nu})$ е седлова точка за $L(x, \nu)$ в областта $X \times M$.*

Доказателство. Нека $(\overline{x}, \overline{\nu})$ е седлова точка за $L(x, \nu)$ в областта $X \times M$. От първото неравенство в условието за седлова точка (7.1) имаме

$$f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\overline{x}) + \sum_{k=1}^{s} \mu_k h_k(\overline{x}) \leqslant f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} g_i(\overline{x}) + \sum_{k=1}^{s} \overline{\mu_k} h_k(\overline{x}) \text{ за всяко } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^s. \tag{7.2}$$

Ще покажем, че $g_i(\overline{x}) \leqslant 0$ и $h_k(\overline{x}) = 0$ за $i = 1, \ldots, m$ и $k = 1, \ldots, s$, откъдето ще следва, че точката $\overline{x}$ е допустима за задачата (GP).

Наистина, ако допуснем, че $g_i(\overline{x}) > 0$ за някое i, то като подберем достатъчно голямо число $\lambda_i > 0$, лявата страна на неравенството ще стане по-голяма от дясната, което е противоречие. Ако допуснем, че $h_k(\overline{x}) \neq 0$ за някое k, то при подходящ избор на μ_k отново ще бъде нарушено неравенството (7.2).



Фигура 7.2. Пример за седлова точка на функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

От $\overline{\lambda}_i \geqslant 0$ и от $g_i(\overline{x}) \leqslant 0$ имаме, че частност, $\sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i g_i(\overline{x}) \leqslant 0$. Като вземем $\lambda_i = 0$ за всяко $i = 1, \dots m$ и $\mu_k = \overline{\mu_k}$ за $k = 1, \dots, s$ в лявата страна на (7.2) получаваме още, че $0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i g_i(\overline{x})$. Следователно, $\sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i g_i(\overline{x}) = 0$.

От второто неравенство в условието за седлова точка (7.1) имаме

$$f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} g_i(\overline{x}) + \sum_{k=1}^{s} \overline{\mu_k} h_k(\overline{x}) \leqslant f(x) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} g_i(x) + \sum_{k=1}^{s} \overline{\mu_k} h_k(x), \quad \text{за всяко } x \in X. \tag{7.3}$$

Като отчетем в (7.3), че $\sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i g_i(\overline{x}) = 0$ и че $\sum_{k=1}^{s} \overline{\mu}_k h_k(\overline{x}) = 0$, то добива вида

$$f(\overline{x}) \leqslant f(x) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda_i} g_i(x) + \sum_{k=1}^{s} \overline{\mu_k} h_k(x), \quad \text{за всяко } x \in X. \tag{7.4}$$

Ако $x \in X$ е допустима точка за задачата (GP), т.е. ако за нея са изпълнени и условията

$$\begin{aligned} &g_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ &h_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, s, \end{aligned}$$

то тогава от неравенството (7.4) следва, че $f(\overline{x}) \leqslant f(x)$, т.е., че $\overline{x}$ е решение на задачата (GP). ■

8. Изпъкнали множества. Свойства.

Дефиниция 8.1. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ се нарича *изпъкнало*, ако заедно с всеки две точки x_1 и x_2 принадлежащи на X, всички точки от вида $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, където $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, също принадлежат на X.

С други думи, едно множество е изпъкнало, ако заедно с всеки две точки от множеството, в него се съдържа и отсечката, която ги свързва.

Фигура 8.3.

Точка от вида $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, където $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ се нарича *изпъкнала комбинация* на двете точки x_1 и x_2 с тегла λ и $(1-\lambda)$.

8.1. Примери за изпъкнали множества

(1) Празното множество, множество, състоящо се от единствена точка $x \in \mathbb{R}^n$ и цялото пространство $\mathbb{R}^n$ са тривиални примери за изпъкнали множества.

(2) Всяка хипер-равнина в $\mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество. Да припомним, че хипер-равнина е множество, състоящо се от решенията на някакво линейно уравнение

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle = b\},$$

където $a \in \mathbb{R}^n$ е ненулев вектор и $b \in \mathbb{R}$.

(3) Всяка хипер-равнина H определя две затворени полупространства

$$\overline{H}_- := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \leqslant b\} \quad \text{и} \quad \overline{H}_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \geqslant b\}$$

и две отворени полупространства

$$H^0_- := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle < b\} \quad \text{и} \quad H^0_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle < b\}.$$

Всички тези полупространства са изпъкнали множества в $\mathbb{R}^n$.

(4) Всяко затворено кълбо с център $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и радиус $\alpha > 0$

$$B[x, \alpha] := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leqslant \alpha\}$$

и всяко отворено кълбо с център $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и радиус $\alpha > 0$

$$B(x, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \alpha\}$$

са изпъкнали множества в $\mathbb{R}^n$.

8.2. Основни свойства на изпъкналите множества

Твърдение 8.1. *Ако $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество и $\beta \in \mathbb{R}$ е произволно реално число, то множеството $\beta X := \{y \in \mathbb{R}^n : y = \beta x, x \in X\}$ е изпъкнало множество.*

Доказателство. Нека вземем произволни $y_1, y_2 \in \beta C$ и произволно $\lambda \in [0,1]$. Образуваме изпъкналата комбинация y на точките y_1 и y_2 с тегла λ и $1-\lambda$

$$y = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$$

и ще покажем че $y \in \beta C$. От $y_1 \in \beta X$ имаме, че $y_1 = \beta x_1$ за някое $x_1 \in X$. Аналогично, от $y_2 \in \beta X$ имаме, че $y_2 = \beta x_2$ за някое $x_2 \in X$. Заместваме в изпъкналата комбинация и получаваме

$$y = \lambda\beta x_1 + (1-\lambda)\beta x_2 = \beta[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \in \beta X,$$

тъй като точката $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$ понеже X е изпъкнало. ■

Твърдение 8.2. *Ако X и Y са изпъкнали множества в $\mathbb{R}^n$, то изпъкнали са и множествата $X + Y := \{z \in \mathbb{R}^n : z = x + y, x \in X, y \in Y\}$ и $X - Y := \{z \in \mathbb{R}^n : z = x - y, x \in X, y \in Y\}$.*

Доказателство. Ще докажем първо твърдението за сумата. Вземаме произволни $z_1, z_2 \in X + Y$ и произволно $\lambda \in [0,1]$. Образуваме изпъкналата комбинация z на точките z_1 и z_2 с тегла λ и $(1-\lambda)$

$$z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$$

и ще покажем, че $z \in X + Y$. Тъй като $z_1 \in X + Y$ то съществуват $x_1 \in X$ и $y_1 \in Y$, такива че $z_1 = x_1 + y_1$. Аналогично, тъй като $z_2 \in X + Y$ то съществуват $x_2 \in X$ и $y_2 \in Y$, такива че $z_2 = x_2 + y_2$. Заместваме в изпъкналата комбинация и получаваме

$$z = \lambda(x_1 + y_1) + (1-\lambda)(x_2 + y_2) = [\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] + [\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2] \in X + Y,$$

тъй като X и Y са изпъкнали множества.

За да покажем изпъкналост на разликата, да забележим, че $X - Y = X + (-Y)$ и че множеството $-Y$ е изпъкнало от Твърдение 8.1 за $\beta = -1$. Така свеждаме разликата на изпъкнали множества до сума на такива, за която вече показахме, че е изпъкнало множество. ■

Да напомним, че *границата* на произволно множество $X \subset \mathbb{R}^n$ се състои от всички точки, които са граници на редици на точки от X и се бележи с ∂X. Множеството $\overline{X} := X \cap \partial X$ е затворено множество и се нарича *затваряне* на X, а множеството X е затворено, тогава и само тогава, когато $X = \overline{X}$.

Твърдение 8.3. *Ако $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество, то $\overline{X}$ е изпъкнало множество.*

Доказателство. Нека вземем произволни $\overline{y}, \overline{x} \in \overline{X}$ и произволно $\lambda \in [0,1]$ и да образуваме $\overline{x} = \lambda\overline{y} + (1-\lambda)\overline{z}$. Тъй като $\overline{y} \in \overline{X}$, то съществува редица $\{y_k\} \in X$, такава, че $y_k \to \overline{y}$. Тъй като $\overline{z} \in \overline{X}$, то съществува редица $\{z_k\} \in X$, такава, че $z_k \to \overline{z}$. За всяко u точките $x_k := \lambda y_k + (1-\lambda)z_k \in X$, тъй като $y_k, z_k \in X$, което е изпъкнало множество. Тъй като $x_k \to \overline{x}$, то $\overline{x} \in \overline{X}$, следователно $\overline{X}$ е затворено множество. ■

Твърдение 8.4. *Нека Γ е произволно индексно множество. Нека за всяко $\gamma \in \Gamma$ множеството $X_\gamma \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество. Тогава е изпъкнало и множеството $X := \bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$.*

Доказателство. Ако X е празното множество, или е едноточково, то е изпъкнало. Нека сега в X има поне два елемента. Да вземем произволни x_1, $x_2 \in X$ и произволно $\lambda \in [0,1]$ и да образуваме изпъкналата им комбинация $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Тъй като $x_1 \in \bigcap_{\gamma\in\gamma} X_\gamma$, то за всяко $\gamma \in \Gamma$ имаме, че $x_1 \in X_\gamma$. Аналогично, за всяко $\gamma \in \Gamma$ имаме, че $x_2 \in X_\gamma$. Да фиксираме произволно $\gamma \in \Gamma$. Множеството X_γ е изпъкнало, точките x_1 и x_2 са в него и точката x е тяхна изпъкнала комбинация. Следователно $x \in X_\gamma$. Това разсъждение е вярно за всяко $\gamma \in \Gamma$, следователно $x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma = X$, което трябваше да се покаже. ■

Дефиниция 8.2. *Изпъкнала комбинация* на k точки $x_1, \ldots, x_k$ се нарича точка от вида

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \quad \text{където } \lambda_i \geqslant 0 \text{ за всяко } i = 1, \ldots, k \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\,.$$

В изпъкнала комбинация теглата на участващите в нея точки са неотрицателни и сумата им е равна на 1.

Множеството от всички изпъкнали комбинации на k точки $x_1, \ldots, x_k$ се нарича *изпъкнала обвивка* на точките $x_1, \ldots, x_k$ и се означава с

$$\mathrm{co}(x_1, \ldots, x_k) := \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \lambda_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, k, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}.$$

Множеството от всички изпъкнали комбинации на две точки е отсечката, която ги свързва, на три точки в общо положение е триъгълникът с върхове в тях, на четири – образуваната от тях пирамида, и т.н.

Твърдение 8.5. *Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнало, тогава и само тогава, когато съдържа всички изпъкнали комбинации на краен брой свои точки.*

Доказателство. Нека X е изпъкнало множество.

Правим индукция по броя k на точките в изпъкналата комбинация.

При $k = 2$ твърдението съвпада с определението за изпъкнало множество и следователно е вярно.

Нека твърдението е вярно за изпъкнали комбинации на не повече от $k-1$ точки от X.

Ще разгледаме изпъкнала комбинация x на k точки $x_1, \ldots, x_k \in X$. По дефиниция x се представя във вида

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \quad \text{където } x_i \in X, \quad \lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, k, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Ще покажем, че $x \in X$.

Предполагаме, че всичките $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, тъй като в противен случай x ще бъде изпъкнала комбинация на не повече от $k-1$ точки и за него е в сила индукционното предположение. Полагаме $\lambda := \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i = 1 - \lambda_k$. Очевидно $\lambda \in (0,1)$ и x можем да представим като

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i = \lambda \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i + \lambda_k x_k.$$

Тъй като $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$ то точката $y := \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$ е изпъкнала комбинация на $k-1$ точки от X и според индукционното предположение е елемент на X. От представянето

$$x = \lambda y + \lambda_k x_k = \lambda y + (1-\lambda) x_k$$

имаме, че x е изпъкнала комбинация на точките y и x_k от изпъкналото множество X. Следователно $x \in X$, което трябваше да се докаже.

Обратно, ако изпъкналите комбинации на произволен брой k точки от X се съдържат в X, то в X ще се съдържат и всички изпъкнали комбинации на $k = 2$ точки на X, което е точно дефиницията на изпъкнало множество. Следователно, X е изпъкнало. $\blacksquare$

9. Отделимост на изпъкнали множества.

Както ще видим по-нататък в курса, много от важните резултати в математическото оптимиране се доказват като се използват т.нар. теореми за отделимост на изпъкнали множества.

Дефиниция 9.1. *Нека X и Y са две множества в $\mathbb{R}^n$. Казваме, че X и Y са отделими, ако съществува хипер-равнина $H \subset \mathbb{R}^n$, такава че X се съдържа изцяло в едното, а Y се съдържа изцяло в другото затворено полупространство, определено от H.*

Казваме, че X и Y са силно отделими, ако съществува хипер-равнина $H \subset \mathbb{R}^n$, такава че X се съдържа изцяло в едното, а Y се съдържа изцяло в другото отворено полупространство, определено от H.

С други думи, множествата X и Y са отделими ако съществува ненулев вектор $a \in \mathbb{R}^n$ и число $b \in \mathbb{R}$ такива, че

$$\langle a, x\rangle \leqslant b \leqslant \langle a, y\rangle \quad \text{за всяко } x \in X \text{ и за всяко } y \in Y$$

като хипер-равнина, която ги отделя е $H = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle a, z\rangle = b\}$.

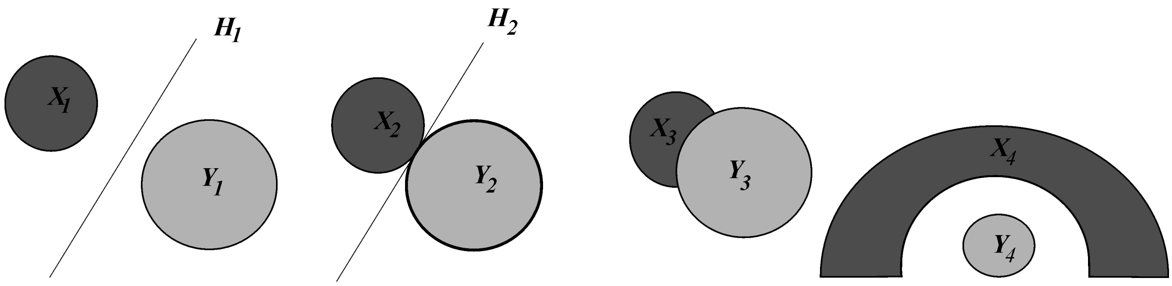
X и Y са силно отделими, ако съществува ненулев вектор $a \in \mathbb{R}^n$ и число $b \in \mathbb{R}$ такива, че

$$\langle a, x\rangle < b < \langle a, y\rangle \quad \text{за всяко } x \in X \text{ и за всяко } y \in Y$$

като хипер-равнина, която силно ги отделя е $H = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle a, z\rangle = b\}$.

9.1. Примери за отделими и неотделими множества в равнината

На фигура 9.4 са дадени примери за отделими и неотделими двойки множества в $\mathbb{R}^2$. Множествата X_1 и Y_1, които са непресичащи се затворени кълбета са силно отделими, а X_2 и Y_2, които са допиращи се затворени кълбета са отделими, но не силно.



Фигура 9.4.

(1) Ако $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$ са две едноточкови множества и $x \neq y$ то те могат силно да се отделят като се построи отсечката с краища x и y и през средата ѝ се прекара перпендикулярната на отсечката права. Тази права силно отделя X и Y.

(2) Ако X и Y са две множества в $\mathbb{R}^2$, които имат голяма обща част (цяло кълбо), те не могат да бъдат отделени с права. Като пример могат да се разгледат множествата X_3 и Y_3 на фигура 9.4, които са пресичащи се кълбета.

(3) Възможно е две множества в равнината да не се пресичат и пак да не могат да бъдат разделени с права. На фигура 9.4 множествата X_4 и Y_4 нямат обща част, но не могат да бъдат отделени с права.

Интуитивно е ясно, че ако множествата X и Y са изпъкнали и непресичащи се множества в $\mathbb{R}^n$, то би било възможно да се намери хипер-равнина, която ги отделя.

По-долу ще докажем, че тази интуитивна представа е вярна.

9.2. Теореми за отделимост на изпъкнали множества

Лема 9.1. *Нека X е непразно, затворено и изпъкнало множество в $\mathbb{R}^n$, което не съдържа нулевия вектор 0. Тогава съществува хипер-равнина, която силно разделя X и 0.*

Доказателство. Нека с $B[0, \alpha]$ означаваме затвореното кълбо с център 0 и радиус α, т.е. $B[0, \alpha] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant \alpha\}$. Нека вземем кълбо, чийто радиус α е толкова голям, че сечението $K = X \cap B[0, \alpha]$ да е непразно.

Множеството K е затворено, тъй като е сечение на затворени множества и е ограничено, тъй като се съдържа в кълбото с център 0 и радиус α. Следователно, K е компактно множество.

Да разгледаме върху K непрекъснатата функция $f(x) := \|x\|$. Според Теоремата на Вайерщрас тя достига своя минимум върху K в точка $x_0 \in K$. Да отбележим, че $f(x_0) = \|x_0\| > 0$ тъй като единствената точка, която има норма нула е нулевият вектор, но той не принадлежи на K.

Нека x е произволен елемент на X. Ако $x \in K = X \cap B[0, \alpha]$, то $\|x\| \geqslant \|x_0\|$, тъй като $x_0 \in K$ е точка на минимум на f върху K. Ако $x \in X \setminus K$, то $x \notin B[0, \alpha]$ и следователно $\|x\| > \alpha \geqslant \|x_0\|$.

Следователно имаме, че

$$\|x\| \geqslant \|x_0\|, \quad \text{за всяко } x \in X. \tag{9.1}$$

Нека вземем произволен елемент $x \in X$. За всяко $\lambda \in [0, 1]$ изпъкналата комбинация $\lambda x + (1 - \lambda)x_0 \in X$, тъй като $x, x_0 \in X$, а X е изпъкнало. От (9.1) следва, че

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)x_0\| \geqslant \|x_0\| \quad \text{за всяко } \lambda \in [0, 1].$$

Като повдигнем на квадрат двете страни на неравенството получаваме

$$\|x_0 + \lambda(x - x_0)\|^2 \geqslant \|x_0\|^2 \quad \text{за всяко } \lambda \in [0, 1].$$

Като използуваме в последното неравенство това, че за всеки вектор $z \in \mathbb{R}^n$ имаме, че $\|z\|^2 = \langle z, z\rangle$ стигаме до неравенството

$$\langle x_0 + \lambda(x - x_0), x_0 + \lambda(x - x_0)\rangle \geqslant \langle x_0, x_0\rangle \quad \text{за всяко } \lambda \in [0, 1],$$

или

$$\langle x_0, x_0\rangle + 2\lambda\langle x_0, x - x_0\rangle + \lambda^2\langle x - x_0, x - x_0\rangle \geqslant \langle x_0, x_0\rangle \quad \text{за всяко } \lambda \in [0, 1].$$

Като разделим на $\lambda > 0$ двете страни на неравенството получаваме

$$2\langle x_0, x - x_0\rangle + \lambda\langle x - x_0, x - x_0\rangle \geqslant 0 \quad \text{за всяко } \lambda \in (0, 1].$$

От последното неравенство след граничен преход по $\lambda \to 0^+$ получаваме неравенство

$$\langle x_0, x - x_0\rangle \geqslant 0,$$

което е в сила за всяко $x \in X$. Следователно

$$\langle x_0, x\rangle \geqslant \langle x_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2 > 0 \quad \text{за всяко } x \in X.$$

Като положим $b := \|x_0\|^2/2$ получаваме, че хипер-равнината $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x_0, x\rangle = b\}$ силно разделя X и нулевия вектор 0, тъй като

$$\langle x_0, x\rangle \geqslant \langle x_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2 > \|x_0\|^2/2 = b > 0 = \langle x_0, 0\rangle,$$

или

$$\langle x_0, x\rangle > b > \langle x_0, 0\rangle \quad \text{за всяко } x \in X.$$

С това лемата е доказана. ■

Лема 9.2. *Сумата и разликата на две затворени множества $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, поне едното от които е компактно, е затворено множество.*

Доказателство. Нека X и Y са затворени множества в $\mathbb{R}^n$ и нека множеството Y е компактно.

Ще дадем доказателството за разликата, за сумата то се прави аналогично.

За да покажем че $X - Y$ е затворено множество ще вземем редица от елементи $z_k \in X - Y$, която е сходяща към някакъв елемент z и ще покажем, че $z \in X - Y$.

Тъй като $z_k \in X - Y$ то за всяко k съществуват $x_k \in X$ и $y_k \in Y$, такива че $z_k = x_k - y_k$. Редицата y_k е от елементи на компактното множество Y. Следователно, от нея можем да изберем сходяща подредица $y_{k_i} \to y$, чиято граница $y \in Y$. За подредицата $x_{k_i} = z_{k_i} + y_{k_i}$ имаме, че е сходяща към $z + y$. Тъй като $x_{k_i} \in X$ и X е затворено, то нейната граница $z + y \in X$, т.е. $z + y = x$ за някое $x \in X$. Следователно $z = x - y \in X - Y$, което трябваше да се покаже. ■

Ограничеността на едното от двете множества в горната лема е съществено, за да се получи затвореност на сумата и разликата. Ако и двете множества са неограничени, възможно е сумата или разликата им да не е затворено множество. Като пример могат да се разгледат затворените множества $X = \{(x_1, x_2) : x_2 \geqslant \frac{1}{x_1}, x_1 > 0\}$ и $Y = \{(x_1, x_2) : x_2 \leqslant -\frac{1}{x_1}, x_1 > 0\}$. Редицата от точки $X + Y \ni (\frac{2}{n}, 0) \to (0, 0)$, но $(0, 0) \notin X + Y$ и следователно $X + Y$ не е затворено.

От Лема 9.1 и Лема 9.2 следва

Теорема 9.1. (Теорема за силна отделимост) *Нека X и Y са две непресичащи се, затворени и изпъкнали множества в $\mathbb{R}^n$ и нека Y е компактно. Тогава съществува хипер-равнина, която силно ги отделя.*

Доказателство. Множеството $X-Y$ е изпъкнало според Твърдение 8.2. Тъй като Y е компактно, от Лема 9.2 следва, че $X-Y$ е затворено. Тъй като X и Y са непресичащи се множества, то $X-Y$ не съдържа нулевия вектор 0. Като приложим Лема 9.1 за множеството $X-Y$ и 0 получаваме, че съществува хипер-равнина $H = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z_0, z\rangle = b\}$, където $z_0 \in X-Y$ не е нулевият вектор и $b = \|z_0\|^2/2 > 0$, която силно разделя $X-Y$ и 0, т.е.

$$\langle z_0, z\rangle > b > 0, \quad \text{за всяко } z \in X-Y,$$

или

$$\langle z_0, x-y\rangle > b > 0, \quad \text{за всяко } x \in X \quad \text{и за всяко } y \in Y.$$

Следователно

$$\langle z_0, x\rangle > b + \langle z_0, y\rangle > \langle z_0, y\rangle, \quad \text{за всяко } x \in X \quad \text{и за всяко } y \in Y,$$

откъдето

$$\inf_{x\in X}\langle z_0, x\rangle \geqslant b + \sup_{y\in Y}\langle z_0, y\rangle > \sup_{y\in Y}\langle z_0, y\rangle.$$

Достатъчно е да изберем число β, такова че

$$\inf_{x\in X}\langle z_0, x\rangle > \beta > \sup_{y\in Y}\langle z_0, y\rangle,$$

за да получим хипер-равнинат $H' = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z_0, z\rangle = \beta\}$, която силно да разделя X и Y. ■

В доказаната Теорема за силна отделимост на изпъкнали множества съществено е предположението, че те са затворени. По-нататък ще разгледаме въпроса за отделимост на незатворени изпъкнали множества, като очакваме да получим по-слаб резултат аналогичен на Теорема 9.1.

Ако $X \subset \mathbb{R}^n$ е произволно множество и $\overline{x} \in X$, то хипер-равнината $H = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle a, z\rangle = b\}$ се нарича *опорна за* X *в* $\overline{x}$, ако $\overline{x} \in H$, т.е. $\langle a, \overline{x}\rangle = b$ и $\langle a, x\rangle \leqslant b$ за всяко $x \in X$ или $\langle a, x\rangle \geqslant b$ за всяко $x \in X$. Т.е. X лежи в едното от двете затворени полупространства, определени от H и се опира до H в x.

Да напомним, че *границата* на множество $X \subset \mathbb{R}^n$ се състои от всички точки, които са граници на редици на точки от X и се бележи с ∂X. Множеството, което се получава, когато множеството X се обедини с неговата граница ∂X е множеството $\overline{X} := X \cup \partial X$. $\overline{X}$ е затворено множество и се нарича *затваряне* на X, а X е затворено, тогава и само тогава, когато $X = \overline{X}$.

Ще докажем, че изпъкнало множество $X \subset \mathbb{R}^n$ има опорна хипер-равнина във всяка своя гранична точка.

Лема 9.3. *Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е непразно изпъкнало множество и нека $\overline{x} \in \partial X$. Тогава съществува опорна за X хипер-равнина в $\overline{x}$, т.е. съществува ненулев вектор $a \in \mathbb{R}^n$, за който*

$$\langle a, x\rangle \geqslant \langle a, \overline{x}\rangle \quad \text{за всяко } x \in \overline{X}.$$

Доказателство. От това, че $\overline{x} \in \partial X$ и от това, че $\partial X = \partial \overline{X}$ следва, че $\overline{x} \in \partial \overline{X}$. Следователно, съществува редица от точки $\{x_k\} \notin \overline{X}$, такава, че $x_k \to \overline{x}$. Тъй като $x_k \notin \overline{X}$, то можем да приложим Теоремата за силна отделимост за множеството $\overline{X}$, което е изпъкнало и затворено и едноточковото множество $\{x_k\}$, което е изпъкнало и компактно. Ще получим, че съществува ненулев вектор $a_k \in \mathbb{R}^n$, който силно отделя $\overline{x}$ и x_k, т.е.

$$\langle a_k, x\rangle > \langle a_k, x_k\rangle \text{ за всяко } x \in \overline{X}. \tag{9.2}$$

Очевидно векторът $\dfrac{a_k}{\|a_k\|}$ също отделя силно $\overline{X}$ и x_k. Редицата от вектори $\left\{\dfrac{a_k}{\|a_k\|}\right\}$ е ограничена редица и следователно от нея може да се избере сходяща подредица, чиято граница е ненулев вектор $a \in \mathbb{R}^n$, $\|a\| = 1$. Като фиксираме $x \in \overline{X}$ и в (9.2) направим граничен преход по $k \to \infty$ получаваме

$$\langle a, x\rangle \geqslant \langle a, \overline{x}\rangle.$$

Последното е вярно за всяко $x \in \overline{X}$, следователно

$$\langle a, x\rangle \geqslant \langle a, \overline{x}\rangle \text{ за всяко } x \in \overline{X}$$

което трябваше да се докаже. ∎

Следствие 9.1. *Ако $X \subset \mathbb{R}^n$ е непразно изпъкнало множество и $y \notin X$, то съществува ненулев вектор $a \in \mathbb{R}^n$, за който $\langle a, x\rangle \geqslant \langle a, y\rangle$, за всяко $x \in X$.*

Доказателство. Ако $y \notin \overline{X}$, то можем да приложим Теорема 9.1, а ако $y \in \overline{X}$ прилагаме Лема 9.3. ∎

Теорема 9.2. (Теорема за отделимост) *Нека X и Y са две непресичащи се изпъкнали множества в $\mathbb{R}^n$. Тогава съществува хипер-равнина, която ги отделя.*

Доказателство. Множеството $X - Y$ е изпъкнало множество като разлика на изпъкнали множества. То не съдържа 0, тъй като $X \cap Y = \emptyset$. От Следствие 9.1 за $X - Y$ и 0 имаме, че съществува ненулев вектор $a \in \mathbb{R}^n$ такъв че за всяко $z \in X - Y$ имаме, че $\langle a, z\rangle \geqslant \langle a, 0\rangle = 0$, което е еквивалентно на

$$\langle a, x - y\rangle \geqslant 0 \text{ за всяко } x \in X,\ y \in Y,$$

или

$$\langle a, x\rangle \geqslant \langle a, y\rangle \text{ за всяко } x \in X,\ y \in Y.$$

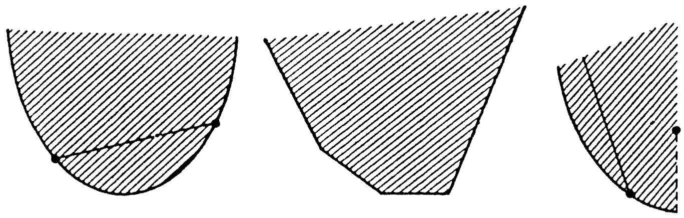
Следователно съществува число $\beta \in \mathbb{R}$, такова че $\inf\limits_{x \in X}\langle a, x\rangle \geqslant \beta \geqslant \sup\limits_{y \in Y}\langle a, y\rangle$ и хипер-равнина $H = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle a, z\rangle = \beta 0\}$, която отделя X и Y. ∎

10. Изпъкнали функции. Основни свойства.

Изпъкналите функции са важен клас функции за математическото оптимиране. Тук ще се запознаем с някои техни основни свойства.

10.1. Изпъкнали функции в $\mathbb{R}$

Нека първо разгледаме изпъкналите функции на една променлива, които са разглеждани и в курса по математически анализ и да погледнем на тях от геометрична гледна точка. Функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ се нарича изпъкнала, ако отсечката, съединяваща две произволни точки от графиката на f лежи *върху или над графиката* на f. Изпъкналите функции на една променлива, показани на фигура 10.5 илюстрират принципа за "отсечка над графиката". От тези примери се вижда и това, че изпъкналите функции могат да бъдат както недиференцируеми, така и прекъснати.



Фигура 10.5. Примери за изпъкнали функции в $\mathbb{R}$

Аналитичният израз на принципа за "отсечка над графиката" е следния: ако T е интервал в $\mathbb{R}$, то функцията $\varphi : T \to \mathbb{R}$ е изпъкнала в T ако за всеки $t_1, t_2 \in T$ и всяко $\lambda \in [0, 1]$ е изпълнено

$$\varphi(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leqslant \lambda\varphi(t_1) + (1 - \lambda)\varphi(t_2).$$

От анализа знаем, че една диференцируема в отворен интервал $T \subset \mathbb{R}$ функция $\varphi : T \to \mathbb{R}$ е изпъкнала, тогава и само тогава, когато производната ѝ φ' е растяща функция в T, т.е. тогава и само тогава когато

$$\text{за всеки } t_1, t_2 \in \mathrm{T} \text{ от } t_2 \geqslant t_1 \text{ е изпълнено } \varphi'(t_2) - \varphi'(t_1) \geqslant 0. \tag{10.1}$$

А за една двукратно диференцируема в отворен интервал $T \subset \mathbb{R}$ функция $\varphi : T \to \mathbb{R}$ знаем, че е изпъкнала, тогава и само тогава, когато втората ѝ производна ѝ φ'' е неотрицателна функция в T, т.е. тогава и само тогава когато

$$\text{за всяко } t \in \mathrm{T} \text{ е изпълнено } \varphi''(t) \geqslant 0. \tag{10.2}$$

10.2. Изпъкнали функции в $\mathbb{R}^n$

За функции на n променливи дефиницията за изпъкналост е аналогична на тази в едномерния случай.

Дефиниция 10.1. Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество. Функцията $f : X \to \mathbb{R}$ се нарича *изпъкнала* в X, ако

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \quad \text{за всяко } \lambda \in [0,1] \text{ и всеки } x_1, x_2 \in X.$$

Това неравенство се нарича още неравенство на Йенсен и е аналитичният израз на принципа за “отсечка над графиката” в случая на функция на n променливи: стойността на функцията f в точката $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x_2 + \lambda(x_1 - x_2)$, намираща се на отсечката с краища x_1 и x_2 не надминава стойността на линейната функция $f(x_2) + \lambda(f(x_1) - f(x_2))$ на λ, т.е. по отсечката с краища x_1 и x_2 графиката на линейната функция стои над графиката на f.

Примери за изпъкнали функции в $\mathbb{R}^n$:

(1) Функцията $f(x) = \langle c, x\rangle$, където $c \in \mathbb{R}^n$ е фиксиран вектор е изпъкнала в $\mathbb{R}^n$ функция, като за нея неравенството на Йенсен е изпълнено като равенство.

(2) Функцията $f(x) = \|x\|$ е изпъкнала в $\mathbb{R}^n$, тъй като от неравенство на триъгълника за нормата имаме, че

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda x_2) = \|\lambda x_1 + (1-\lambda x_2\| \leqslant \lambda\|x_1\| + (1-\lambda)\|x_2\| = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \ \forall \lambda \in [0,1].$$

Като отправна точка при разглеждане на изпъкналите функции ще ни послужи факта, че има тясна връзка между изпъкналите множества и изпъкналите функции. Като начало да отбележим, че защрихованата област над всяка от графиките на функциите на фигура 10.5 е изпъкнало множество.

Дефиниция 10.2. Нека $f : X \to \mathbb{R}$ е функция. Множеството $X \subset \mathbb{R}^n$, в което е дефинирана функцията f се нарича *дефиниционно множество на* f, а множеството

$$\operatorname{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in X, \ r \geqslant f(x)\}$$

се нарича *надграфика на* f.

Да обърнем внимание, че дефиниционното множество на f е подмножество на $\mathbb{R}^n$, а надграфиката на f е множество в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Твърдение 10.1. *Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е непразно изпъкнало множество. Функцията $f : X \to \mathbb{R}$ е изпъкнала в X, тогава и само тогава, когато надграфиката ѝ $\operatorname{epi} f$ е изпъкнало множество.*

Доказателство. Нека f е изпъкнала функция. Да вземем произволни $(x_1, r_1), (x_2, r_2) \in \operatorname{epi} f$ и произволно $\lambda \in [0,1]$. От $(x_1, r_1) \in \operatorname{epi} f$ имаме, че $r_1 \geqslant f(x_1)$, а от $(x_2, r_2) \in \operatorname{epi} f$ имаме, че $r_2 \geqslant f(x_2)$. Умножаваме двете страни на първото равенство с λ, а на второто с $(1-\lambda)$ и ги събираме, за да получим

$$\lambda r_1 + (1-\lambda)r_2 \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \geqslant f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2),$$

като за последното неравенство използваме, че f е изпъкнала функция. Тъй като X е изпъкнало множество, от $x_1, x_2 \in X$ и $\lambda \in [0,1]$ следва, че точката $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$, а последното неравенство дава $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda r_1 + (1-\lambda)r_2) \in \operatorname{epi} f$ и $\operatorname{epi} f$ е изпъкнало множество.

Обратно, нека множеството $\operatorname{epi} f$ е изпъкнало. Да вземем произволни $x_1, x_2 \in X$ и $\lambda \in [0,1]$. Точките $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in \operatorname{epi} f$, което е изпъкнало множество. Следователно изпъкналата им комбинация с тегла λ и $(1-\lambda)$ е в $\operatorname{epi} f$, т.е. $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)) \in \operatorname{epi} f$. Според дефиницията на $\operatorname{epi} f$ последното означава, че

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

откъдето f е изпъкнала функция. ■

10.3. Основни свойства на изпъкналите функции в $\mathbb{R}^n$

Твърдение 10.2. *Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество $f, g : X \to \mathbb{R}$ са изпъкнали функции, $\alpha > 0$ е число. Тогава са изпъкнали и функциите αf и $f + g$.*

Доказателството се прави директно с дефиницията за изпъкналост на функция. ■

Твърдение 10.3. *Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество. Нека Γ е произволно индексно множество. Нека за всяко $\gamma \in \Gamma$ функцията $f_\gamma : X \to \mathbb{R}$ е изпъкнала функция. Тогава е изпъкнала и функцията $f(x) := \sup\limits_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(x)$.*

Доказателство. Тъй като множествата $\operatorname{epi} f_\gamma$ са изпъкнали множества, тяхното сечение $\cap_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ според Твърдение 8.4 също е изпъкнало множество. По дефиниция

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{epi} f_\gamma := \{(x, r) : r \geqslant f_\gamma(x) \text{ за всяко } \gamma \in \Gamma\},$$

откъдето получаваме

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{epi} f_\gamma := \{(x, r) : r \geqslant \sup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(x)\} = \{(x, r) : r \geqslant f(x)\} = \operatorname{epi} f$$

и f е изпъкнала функция според Твърдение 10.2. ■

Твърдение 10.4. *Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество и $f : X \to \mathbb{R}$ е изпъкнала функция. Ако $x_1, \ldots, x_k \in X$, а $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, k$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, то е в сила неравенството*

$$f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i),$$

което се нарича неравенство на Йенсен за k точки.

Доказателство. Тъй като $f : X \to \mathbb{R}$ е изпъкнала функция, според Твърдение 10.2 $\operatorname{epi} f$ е изпъкнало множество. Всяко изпъкнало множество съдържа изпъкналите комбинации на произволен краен брой свои точки според Твърдение 8.5. Като образуваме изпъкналата комбинация на точките $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_k, f(x_k)) \in \operatorname{epi} f$ с тегла $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, тя ще принадлежи на $\operatorname{epi} f$, т.е. $(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i)) \in \operatorname{epi} f$. По дефиницията за надрафика имаме

$$f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i),$$

което трябваше да се докаже. ■

10.4. Изпъкнали функции – непрекъснатост и диференцируемост по посока

Изпъкналите функции са непрекъснати във вътрешността на дефиниционната си област. Ако $X \subset \mathbb{R}^n$ е множество в $\mathbb{R}^n$ то точката $x_0 \in X$ се нарича *вътрешна за* X ако съществува $\delta > 0$ такова че всички точки от отвореното кълбо $B(x_0, \delta)$ са в X. Множеството от всички вътрешни точки на множество X се нарича *вътрешност на* X и се означава със $\operatorname{int} X$. Множеството $\operatorname{int} X$ е отворено множество и X е отворено тогава и само тогава, когато $X = \operatorname{int} X$. Възможно е множеството от вътрешни точки на едно множество да е празно множество.

Теорема 10.1. *Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество и функцията $f : X \to \mathbb{R}$ е изпъкнала в X. Тогава f е непрекъсната във всяка точка $x_0 \in \operatorname{int} X$.*

Доказателство. Без доказателство. ■

Следствие 10.1. *Ако $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е изпъкнала функция, то f е непрекъсната.*

Доказателство. Всяка точка $x \in \mathbb{R}^n$ е вътрешна за $\mathbb{R}^n$ и от Теорема 10.1 следва, че f е непрекъсната в x. ■

Изпъкналите функции се характеризират с това, че рестрикцията им върху сечението на всяка права с дефиниционното им множество е изпъкнала функция на една променлива, което ще докажем в

Теорема 10.2. *Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество. Функцията $f : X \to \mathbb{R}$ е изпъкнала функция, тогава и само тогава, когато за всяка точка $x \in X$ и всяко $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$ функцията на една променлива $\varphi_{x,d} : T_{x,d} \to \mathbb{R}$ дефинирана в интервала $T_{x,d} = \{t \in \mathbb{R} : x + td \in X\}$ като $\varphi_{x,d}(t) := f(x + td)$ е изпъкнала като функция на t в $T_{x,d}$.*

Доказателство. Нека първо предположим, че f е изпъкнала в X. Да фиксираме $x \in X$ и $d \in \mathbb{R}^n$ и да разгледаме функцията $\varphi_{x,d}(t)$ в $T_{x,d}$. За да опростим означенията, след като сме фиксирали x и d функцията $\varphi_{x,d}(t)$ ще означаваме само с $\varphi(t)$, а множеството $T_{x,d}$ ще означаваме с T.

Да вземем произволни $t_1, t_2 \in T$ и произволно $\lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= f(x + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)d) = \\ &= f(\lambda x + (1-\lambda)x + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)d) = f(\lambda(x + t_1 d) + (1-\lambda)(x + t_2 d)). \end{aligned}$$

Тъй като $t_1, t_2 \in T$, това означава, че точките $x + t_1 d, x + t_2 d$ са в X, а тъй като f е изпъкнала в X то можем да продължим горната редица равенства

$$f(\lambda(x + t_1 d) + (1 - \lambda)(x + t_2 d)) \leqslant \lambda f(x + t_1 d) + (1 - \lambda) f(x + t_2 d) = \lambda\varphi(t_1) + (1 - \lambda)\varphi(t_2)$$

откъдето получаваме, че $\varphi(t)$ е изпъкнала в T.

За да докажем обратното твърдение, да вземем произволни $x, y \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$ и да ги фиксираме. Да разгледаме функцията $\varphi(t) = \varphi_{y,x-y}(t) = f(y + t(x - y))$. Тя е дефинирана в интервал $T \supset [0, 1]$, т.к. за $t \in [0, 1]$ точките $y + t(x - y)$ са по отсечката с краища x и y, която се съдържа в X понеже то е изпъкнало. Следователно φ е изпъкнала в интервала $[0, 1]$. Но

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \varphi(\lambda) = \varphi((1 - \lambda).0 + \lambda.1) \leqslant (1 - \lambda)\varphi(0) + \lambda\varphi(1) = (1 - \lambda) f(y) + \lambda f(x),$$

откъдето f е изпъкнала в X. ■

Ще покажем, че изпъкналите функции имат свойство, подобно на диференцируемост, но по-слабо.

Дефиниция 10.3. Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е непразно множество и нека $f : X \to \mathbb{R}$. Нека $x_0 \in X$ и $d \in \mathbb{R}^n$ е ненулев вектор, за който точките $x_0 + td \in X$ за достатъчно малки положителни t (d е допустима посока за X в x_0). Казваме, че f е *диференцируема по посока d в точката x_0* ако съществува границата

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}.$$

Означаваме тази граница с $\dfrac{\partial f}{\partial d}(x_0)$ и я наричаме *производна на f по посоката d в точката x_0*.

Теорема 10.3. *Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество и $f : X \to \mathbb{R}$ е изпъкнала функция. Във всяка точка $x_0 \in \operatorname{int} X$ функцията f има производна по всяка посока $d \in \mathbb{R}^n$.*

Доказателство. Нека $x_0 \in \operatorname{int} X$ и нека фиксираме $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$. Тъй като $x_0 \in \operatorname{int} X$, то $\varphi(t) := \varphi_{x_0,d}(t)$ ще е дефинирана в отворен интервал T около нулата и ще е изпъкнала в този интервал от Теорема 10.2.

Ще докажем съществуването на границата

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$$

като покажем, че диференчното частно е намаляваща функция при $t \to 0^+$, която е ограничена отдолу.

Нека вземем $0 < t_1 < t_2$ и такива, че $t_1, t_2 \in T$. Тъй като t_1 лежи на отсечката с краища 0 и t_2, то съществува $\lambda \in [0, 1]$, за което t_1 се представя като изпъкнала комбинация на 0 и t_2 с тегла λ и $(1 - \lambda)$, т.е.

$$t_1 = \lambda 0 + (1 - \lambda)t_2,$$

Получаваме, че $\lambda = \frac{t_2 - t_1}{t_2}$ и заместваме в изпъкналата комбинация

$$t_1 = \frac{t_2 - t_1}{t_2} 0 + (1 - \frac{t_2 - t_1}{t_2})t_2.$$

От изпъкналостта на φ имаме, че

$$\varphi(t_1) \leqslant \frac{t_2 - t_1}{t_2}\varphi(0) + (1 - \frac{t_2 - t_1}{t_2})\varphi(t_2).$$

Умножаваме двете страни на неравенството с $t_2 > 0$

$$t_2\varphi(t_1) \leqslant (t_2 - t_1)\varphi(0) + t_1\varphi(t_2),$$

$$t_2(\varphi(t_1) - \varphi(0)) \leqslant t_1(\varphi(t_2) - \varphi(0)).$$

Делим на $t_1 t_2 > 0$ и получаваме

$$\frac{\phi(t_1) - \phi(0)}{t_1} \leqslant \frac{\phi(t_2) - \phi(0)}{t_2},$$

откъдето следва, че диференчното частно е намаляваща функция на t при $t > 0$.

Нека сега $t_3 < 0 < t$ и $t_3 \in T$. Тогава 0 лежи на отсечката с краища t_3 и t и следователно съществува $\lambda \in [0, 1]$, за което

$$0 = \lambda t_3 + (1 - \lambda)t.$$

Намираме, че $\lambda = \frac{t}{t - t_3}$ и го заместваме

$$0 = \frac{t}{t - t_3}t_3 + (1 - \frac{t}{t - t_3})t.$$

Поради изпъкналостта на φ в T получаваме, че

$$\varphi(0) \leqslant \frac{t}{t - t_3}\varphi(t_3) + (1 - \frac{t}{t - t_3})\varphi(t).$$

Умножаваме двете страни на неравенството с $t - t_3 > 0$ и получаваме

$$(t - t_3)\varphi(0) \leqslant t\varphi(t_3) - t_3\varphi(t),$$

$$t_3(\varphi(t) - \varphi(0)) \leqslant t(\varphi(t_3) - \varphi(0)).$$

Делим равенството на $tt_3 < 0$ и получаваме

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} > \frac{\varphi(t_3) - \varphi(0)}{t_3}$$

за всяко $t > 0$, което означава че диференчното частно за $t > 0$ е ограничено отдолу.

Следователно производната по посока d на f в x_0 съществува и

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) = \inf_{t>0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}. \qquad \blacksquare$$

11. Диференцируеми изпъкнали функции.

Ще припомним дефиницията за диференцируемост на функция в точка (вж. Дефиниция diffunc) и дефиницията за диференцируемост на функция по посока.

Дефиниция 11.1. Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ и $f : X \to \mathbb{R}$. Казваме, че функцията f е *диференцируема в точката* $x_0 \in \operatorname{int} X$, ако съществува вектор $f'(x_0) \in \mathbb{R}^n$, наричан *производна* или *градиент* на f в x_0, така че да е изпълнено

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle f'(x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Дефиниция 11.2. Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ и нека $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$ е такова, че $\{x_0 + td\} \subset X$ за малки положителни t. Казваме, че f е *диференцируема по посока d в точката* x_0 ако съществува границата

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}.$$

Означаваме тази граница с $\dfrac{\partial f}{\partial d}(x_0)$ и я наричаме *производна на f по посоката d в точката x_0.*

Диференцируемостта на една функция в точка гарантира диференцируемостта ѝ в нея по всяка посока, както ще видим от

Твърдение 11.1. *Нека $f : X \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точка $x_0 \in \operatorname{int} X$. Тогава тя е диференцируема в x_0 по всяка посока $d \in \mathbb{R}^n$ и*

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) = \langle f'(x_0), d \rangle.$$

Доказателство. От дефинициите на производна по посока и на градиент имаме, че

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0) - \langle f'(x_0), td \rangle + \langle f'(x_0), td \rangle}{t} \\
&= \|d\| \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0) - \langle f'(x_0), td \rangle}{t\|d\|} + \frac{\langle f'(x_0), td \rangle}{t} = \\
&= \langle f'(x_0), d \rangle.
\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

В частност от това твърдение следва, че ако функцията f е диференцируема в точката x_0, тя има единствен градиент в тази точка, който е равен на

$$f'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right),$$

където $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ е частната производна на f по посоката $d = e_i$ в точката x_0, $i = 1, \dots, n$.

Обратното на Твърдение 11.1 не е вярно. Като пример може да ре разгледа недиференцируема в дадена точка изпъкнала функция (например функцията $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(x) := \|x\|$ не е диференцируема в точката $x_0 = 0$, но е диференцируема в x_0 по всяка посока от Теорема 10.3.

Теорема 11.1. *Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е непразно, изпъкнало и отворено множество и функцията $f : X \to \mathbb{R}$ е диференцируема във всяка точка от X. Тогава следните са еквивалентни:*
(1) *f е изпъкнала в X;*
(2) *$f(y) \geqslant f(x) + \langle f'(x), y - x\rangle$ за всеки $x, y \in X$;*
(3) *$\langle f'(y) - f'(x), y - x\rangle \geqslant 0$ за всеки $x, y \in X$.*

Доказателство. (1)⇒(2). Нека f е изпъкнала и $x, y \in X$. От Теорема 10.3 знаем, че от изпъкналостта на f следва, че диференчното частно е намаляваща функция на $t \in (0, 1]$, т.е.

$$\frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t} \leqslant \frac{f(x + 1(y - x)) - f(x)}{1} = f(y) - f(x), \quad \forall t \in (0, 1].$$

Тъй като $x \in \operatorname{int} X$, то f има производна по всяка посока според Теорема 10.3, следователно и по посоката $d = y - x$. След граничен преход по $t \to 0^+$ от горното неравенство имаме, че

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t} \leqslant f(y) - f(x).$$

Тъй като f е диференцируема в X според Твърдение 11.1 имаме, че

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x) = \langle f'(x), d\rangle = \langle f'(x), y - x\rangle$$

което заместено в горното неравенство дава

$$\langle f'(x), y - x\rangle \leqslant f(y) - f(x),$$

което е (2).

(2)⇒(3). От (2) имаме, че за всеки $x, y \in X$ е изпълнено

$$f(y) \geqslant f(x) + \langle f'(x), y - x\rangle,$$

$$f(x) \geqslant f(y) + \langle f'(y), x - y\rangle.$$

Като съберем тези две неравенства получаваме

$$0 \geqslant \langle f'(x), y - x\rangle + \langle f'(y), x - y\rangle = \langle f'(y) - f'(x), x - y\rangle,$$

което е (3).

(3)⇒(1). Да фиксираме $x, y \in X$ и да разгледаме функцията $\varphi(t) := f(x + t(y - x)$. Тя е дефинирана в отворен интервал $T \supset [0, 1]$ тъй като $x, y \in X$ с околности понеже X предполагаме, че е отворено. Тъй като f е диференцируема в X, то φ е диференцируема в T като $\varphi'(t) = \langle f'(x + t(y - x)), y - x\rangle$ за всяко $t \in T$. Производната ѝ е растяща функция в T тъй като ако $t_1, t_2 \in T$ и $t_2 \geqslant t_1$ от условието (3) имаме

$$0 \leqslant \langle f'(x + t_2(y - x)) - f'(x + t_1(y - x)), (t_2 - t_1)y - x\rangle =$$

$$(t_2 - t_1)\langle f'(x + t_2(y - x)) - f'(x + t_1(y - x)), y - x\rangle = (t_2 - t_1)[\phi'(t_2) - \phi'(t_1)]$$

и следователно

$$\varphi'(t_2) \geqslant \varphi'(t_1).$$

От това, че φ' е растяща в интервала T следва, че φ е изпъкнала в T. Следователно, f е изпъкнала в X ■

Дефиниция 11.3. Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е отворено множество и $f : X \to \mathbb{R}$ е функция. Казваме, че f е *двукратно диференцируема в* $x_0 \in \operatorname{int} X$ ако съществува вектор $f'(x_0) \in \mathbb{R}^n$ и симетрична матрица $f''(x_0) \in S(n \times n)$, такива че

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle f'(x_0), x - x_0 \rangle - \frac{1}{2}\langle x - x_0, f''(x_0)(x - x_0)\rangle}{\|x - x_0\|^2} = 0.$$

Коефициентите $\{f_{ij}\}$ на матрицата $f''(x_0)$ са вторите частни производни на f в x_0, т.е. $f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$.

Да припомним, че симетрична матрица $A \in S(n \times n)$ се нарича *неотрицателно дефинитна*, ако $\langle x, Ax \rangle \geqslant 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}^n$ и се нарича *положително дефинитна* ако $\langle x, Ax \rangle > 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Теорема 11.2. *Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало отворено множество и $f : X \to \mathbb{R}$ е функция с непрекъснати втори частни производни в X. Функцията f е изпъкнала в X тогава и само тогава, когато за всяко $x \in X$ втората ѝ производна $f''(x)$ е неотрицателно дефинитна матрица.*

Доказателство. Нека f е изпъкнала в X. Да фиксираме $x_0 \in X$ и да фиксираме $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. За достатъчно малки и положителни t точките $x_0 + tx \in X$, тъй като X е отворено множество. От изпъкналостта и диференцируемостта на f имаме, че

$$f(x_0 + tx) \geqslant f(x_0) + t\langle f'(x_0), x \rangle,$$

или

$$f(x_0 + tx) - f(x_0) - t\langle f'(x_0), x \rangle \geqslant 0.$$

Изваждаме от двете страни на неравенството $\frac{t^2}{2}\langle x, f''(x_0)x \rangle$ и получаваме

$$f(x_0 + tx) - f(x_0) - t\langle f'(x_0), x \rangle - \frac{t^2}{2}\langle x, f''(x_0)x \rangle \geqslant -\frac{t^2}{2}\langle x, f''(x_0)x \rangle.$$

Разделяме двете страни на неравенството на $t^2\|x\|^2 > 0$ и получаваме

$$\frac{f(x_0 + tx) - f(x_0) - t\langle f'(x_0), x \rangle - \frac{t^2}{2}\langle x, f''(x_0)x \rangle}{t^2\|x\|^2} \geqslant -\frac{t^2\langle x, f''(x_0)x \rangle}{2t^2\|x\|^2} = -\frac{1}{2}\langle x, f''(x_0)x \rangle.$$

След граничен преход по $t \to 0^+$ от двукратната диференцируемост на f в x_0 границата на лявата страна е нула и следва, че

$$\langle x, f''(x_0)x \rangle \geqslant 0,$$

т.е. $f''(x_0)$ е неотрицателно дефинитна понеже $x \in \mathbb{R}^n$ беше произволно.

За да докажем обратното твърдение, да фиксираме $x_0 \in X$ и $x \in \mathbb{R}^n$ и да разгледаме функцията на една променлива $\varphi(t) := f(x_0 + tx)$. Тя е дефинирана в отворен интервал T около нулата, тъй като X е отворено множество и тъй като f е двукратно диференцируема в X, то φ е двукратно диференцируема в T като

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0 + tx)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j = \langle x, f''(x_0 + tx)x \rangle \geqslant 0.$$

Последното неравенство идва от това, че $f''(x)$ предполагаме неотрицателно дефинитна за всяко $x \in X$, а $x_0 + tx \in X$ за $t \in T$. Следователно $\phi''(t) \geqslant 0$ за всяко $t \in T$ и φ е изпъкнала в T функция, а това (както видяхме в Теорема 11.1) означава, че f е изпъкнала в X функция. ■

12. Субградиенти. Субградиенти на изпъкнали функции.

Понятието субградиент обобщава понятието за градиент на функция в точка.

Дефиниция 12.1. Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ и $f : X \to \mathbb{R}$ и нека $x_0 \in X$. Векторът $x^* \in \mathbb{R}^n$ се нарича *субградиент на функцията* f *в точката* $x_0 \in X$, ако

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x^*, x - x_0 \rangle \quad \text{за всяко } x \in X.$$

За да изясним геометричния смисъл на това неравенство, да забележим, че то е еквивалентно на неравенството

$$\langle x^*, x_0 \rangle - f(x_0) \geqslant \langle x^*, x \rangle - f(x) \quad \text{за всяко } x \in X \sim$$

$$\langle x^*, x_0 \rangle - f(x_0) \geqslant \langle x^*, x \rangle - r \quad \text{за всяко } (x, r) \in \operatorname{epi} f.$$

Ако положим $v := (x^*, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, то последното неравенство е еквивалентно на

$$\langle v, (x_0, (f(x_0)) \rangle \geqslant \langle v, (x, r) \rangle \quad \text{за всяко } (x, r) \in \operatorname{epi} f,$$

т.е. хиперравнината $H = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, z \rangle = \langle v, (x_0, (f(x_0)) \rangle\}$ е опорна за $\operatorname{epi} f$ в точката $(x_0, f(x_0)) \in \operatorname{epi} f$.

Следователно, на всеки субградиент на f в x_0 съответства опорна за $\operatorname{epi} f$ хиперравнина в $(x_0, f(x_0))$.

Тъй като през дадена точка на дадено множество могат да минават множество различни опорни хипер-равнини, то в точка x_0 функцията f може да има и повече от един субградиент.

Дефиниция 12.2. Множеството от всички субградиенти на $f : X \to \mathbb{R}$ в $x_0 \in X$ се нарича *субдиференциал на функцията* f *в точката* x_0 и се означава

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x^*, x - x_0 \rangle \quad \text{за всяко } x \in X\}.$$

Пример. Да разгледаме функцията $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дефинирана като $f(x) = \|x\|$. Търсим субдиференциала на f в точката $x_0 = 0$. Субградиент на f в $x_0 = 0$ са вектор $x^* \in \mathbb{R}^n$ които удовлетворява

$$\|x\| = f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x^*, x - x_0 \rangle = \langle x^*, x \rangle \quad \text{за всяко } x \in \mathbb{R}^n$$

или като разделим на $\|x\| > 0$

$$1 \geqslant \langle x^*, \frac{x}{\|x\|} \rangle \quad \text{за всяко } x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$$

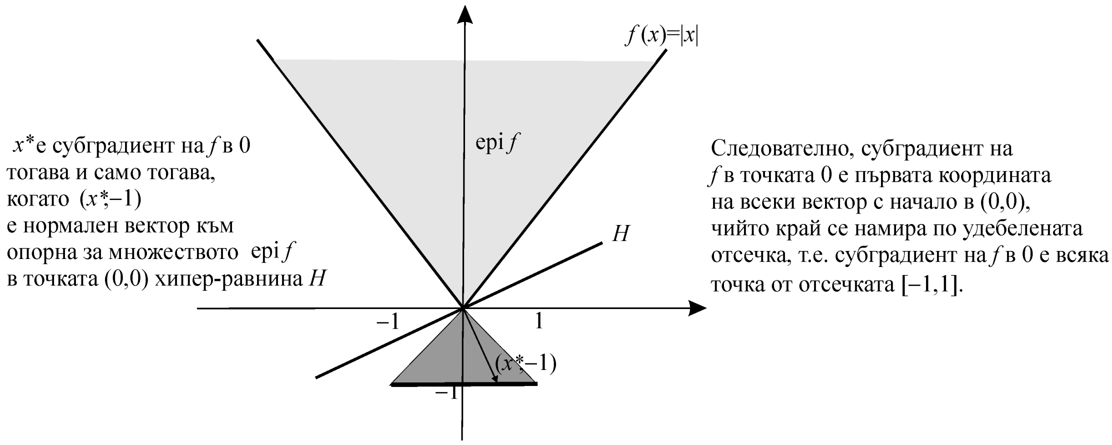
$$1 \geqslant \sup_{x \in S} \langle x^*, x \rangle = \|x^*\|.$$

където S е единичната сфера на $\mathbb{R}^n$. Следователно

$$\partial f(0) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \|x^*\| \leqslant 1\} = B[0, 1]$$

и субдиференциала на нормата в нулевия вектор е единичното кълбо в $\mathbb{R}^n$.

В случая $n = 1$ функцията е $f(x) = |x|$ и субдиференциалът ѝ в нулата е отсечката $[-1, 1]$.



Фигура 12.6. Субградиенти и субдиференциал на $f(x) = |x|$ в 0

Твърдение 12.1. *Ако* $x_1^* \in \partial f(x_1)$ *и* $x_2^* \in \partial f(x_2)$, *то*

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \geqslant 0.$$

Доказателството е директно от дефиницията за субградиент. ■

Твърдение 12.2. *Нека* $X \subset \mathbb{R}^n$ *е изпъкнало множество и нека* $f : X \to \mathbb{R}$ *е такава, че* $\partial f(x) \neq \emptyset$ *за всяко* $x \in X$. *Тогава* f *е изпъкнала в* X.

Доказателство. Нека вземем произволни $x_1, x_2 \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$. По условието на твърдението в точката $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$ съществува субградиент x^* на f и следователно са в сила неравенствата

$$f(x_1) \geqslant f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + \langle x^*, x_1 - (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)\rangle,$$

$$f(x_1) \geqslant f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + (1 - \lambda)\langle x^*, x_1 - x_2\rangle. \tag{12.1}$$

и

$$f(x_2) \geqslant f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + \langle x^*, x_2 - (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)\rangle,$$

$$f(x_2) \geqslant f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + \lambda\langle x^*, x_2 - x_1\rangle. \tag{12.2}$$

Като умножим (12.1) с λ, а (12.2) с $1 - \lambda$ и ги съберем получаваме неравенството от дефиницията за изпъкналост на f. ■

Вярно е и следното

Твърдение 12.3. *Ако* $X \subset \mathbb{R}^n$ *е отворено изпъкнало множество и* $f : X \to \mathbb{R}$ *е изпъкнала в* X, *то* $\partial f(x) \neq \emptyset$ *за всяко* $x \in X$.

Твърдение 12.4. *Нека* $X \subset \mathbb{R}^n$ *е отворено изпъкнало множество и* $f : X \to \mathbb{R}$ *е изпъкнала функция в* X. *Ако* f *е диференцируема в* $x_0 \in X$, *то* $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.

Доказателство. Ще докажем, че $f'(x_0)$ се съдържа в субдиференциала на f в x_0 и ще покажем, че той няма други елементи.

Да вземем произволно $x \in X$. Тъй като f е изпъкнала, диференчното частно по посоката $x - x_0$ е намаляваща функция на $t \in [0, 1]$ към производната по посока:

$$f(x){-}f(x_0){=}\frac{f(x_0{+}1(x{-}x_0)){-}f(x_0)}{1} \geqslant \frac{f(x_0{+}t(x{-}x_0)){-}f(x_0)}{t} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\partial f}{\partial(x{-}x_0)}(x_0) = \langle f'(x_0), x{-}x_0\rangle,\ \forall x \in X.$$

като последното равенство се дължи на това, че f е диференцируема в x_0.

Следователно $f'(x_0) \in \partial f(x_0)$ и $\partial f(x_0)$ не е празното множество. Да вземем произволен елемент $x^* \in \partial f(x_0)$. Тъй като X е отворено множество, съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко $t \in [0, \delta]$ точката $x_0 + td \in X$ и от дефиницията за субградиент

$$f(x_0 + td) - f(x_0) \geqslant \langle x^*, td\rangle.$$

Делим на $t > 0$ и правим граничен преход по $t \to 0^+$. От диференцируемостта на f в x_0

$$\langle f'(x_0), d\rangle = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} \geqslant \langle x^*, d\rangle,$$

или $\langle f'(x_0){-}x^*, d\rangle \geqslant 0$. Това е вярно за всеки ненулев вектор $d \in \mathbb{R}^n$. В частност, ако допуснем, че $x^* \neq f'(x_0)$ ще имаме че $d = x^*{-}f'(x_0)$ е ненулев вектор, за който $\langle f'(x_0){-}x^*, x^*{-}f'(x_0)\rangle \geqslant 0$ или $-\|x^* - f'(x_0)\|^2 \geqslant 0$, откъдето $\|x^* - f'(x_0)\| = 0$ и следователно $x^* = f'(x_0)$, с което ще получим търсеното противоречие. ■

13. Екстремални свойства на изпъкналите функции.

Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е диференцируема функция в x_0. От анализа знаем, че условието $f'(x_0) = 0$ е необходимо, а ако f е изпъкнала функция и достатъчно условие за това x_0 да бъде точка на минимум за f. Когато f е изпъкнала, но не е диференцируема в точката си на минимум (като например функцията $\|x\|$ не е диференцируема в точката си на минимум – нулевият вектор), е възможно да се намери аналог на горното необходимо и достатъчно условие вече не за градиента на функцията в точката (който не съществува), а за субградиента ѝ в точката.

Теорема 13.1. *Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество и нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е изпъкнала функция в X. Точката $x_0 \in X$ е решение на минимизационната задача*

$$(P) \qquad \begin{array}{l} \min f(x) \\ x \in X. \end{array}$$

тогава и само тогава, когато съществува субградиент $x^* \in \partial f(x_0)$, за който

$$\langle x^*, x - x_0 \rangle \geqslant 0, \quad \forall x \in X.$$

Доказателство. Нека $x^* \in \partial f(x_0)$ е такъв, че

$$\langle x^*, x - x_0 \rangle \geqslant 0, \quad \forall x \in X.$$

Тъй като x^* е субградиент на f в x_0 по дефиницията за субградиент имаме

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x^*, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Като комбинираме горните две неравенства получаваме или

$$f(x) - f(x_0) \geqslant 0, \quad \forall x \in X$$

което означава, че x_0 е решение на (P).

Обратно, нека x_0 е решение на (P). Трябва да намерим субградиент $x^* \in \partial f(x_0)$ който да удовлетворява даденото свойство. За целта построяваме следните множества в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$Y_1 := \{(x - x_0, r) : x \in \mathbb{R}^n, r \geqslant f(x) - f(x_0)\},$$

$$Y_2 := \{(x - x_0, r) : x \in X, r < 0\}.$$

Y_1 и Y_2 са изпъкнали множества (проверка с дефиницията за изпъкналост на множество) и $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Ако допуснем, че съществува някое $x \in X$, за което $(x - x_0, r) \in Y_1 \cap Y_2$, то това означава, че за $x \in X$ е изпълнено $0 > r \geqslant f(x) - f(x_0)$, т.е. $f(x_0) > f(x)$, което е в противоречие с това, че x_0 е решение на (P).

Като приложим за Y_1 и Y_2 теоремата за отделимост на изпъкнали непресичащи се множества ще получим ненулев вектор $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ и реално число β, такива че хипер-равнината $H := \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle a, z \rangle = \beta\}$ отделя Y_1 и Y_2. Като запишем $a = (v, \mu)$, където $v \in \mathbb{R}^n,\ \mu \in \mathbb{R}$ то отделимостта означава, че

$$\langle v, x - x_0 \rangle + \mu r \leqslant \beta, \quad \text{за всички } x \in \mathbb{R}^n, r \geqslant f(x) - f(x_0) \tag{13.1}$$

и

$$\beta \leqslant \langle v, x - x_0 \rangle + \mu r, \quad \text{за всички } x \in X, r < 0. \tag{13.2}$$

Като вземем $x = x_0$ в (14.1) ще получим, че $\mu r \leqslant \beta$ за всяко $r \geqslant f(x_0) - f(x_0) = 0$. В частност за $r = 0$ ще получим, че $\beta \geqslant 0$.

Като вземем $x = x_0$ в (14.2) ще получим, че $\beta \leqslant \mu r$ за всяко $r < 0$ и след граничен преход по $r \to 0^-$ ще получим, че $\beta \leqslant 0$.

Следователно, $\beta = 0$. Отразяваме го в двойките неравенства и получаваме

$$\langle v, x - x_0 \rangle + \mu r \leqslant 0, \quad \text{за всички } x \in \mathbb{R}^n, r \geqslant f(x) - f(x_0) \tag{13.3}$$

и

$$0 \leqslant \langle v, x - x_0 \rangle + \mu r, \quad \text{за всички } x \in X, r < 0. \tag{13.4}$$

От (13.3) при $x = x_0$ имаме, че $\mu r \leqslant 0$ за всяко $r \geqslant 0$, което е възможно само ако $\mu \leqslant 0$.

Ако допуснем, че $\mu = 0$, то от (13.3) ще следва, че $\langle v, x - x_0 \rangle \leqslant 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}^n$, което е възможно само ако v е нулевият вектор. Ще получим, че векторът $a = (v, \mu) = (0, 0)$ е нулевият вектор, което не е така.

Следователно $\mu < 0$.

Като разделим (13.3) и (13.4) на $(-\mu) > 0$ и означим $x^* := \frac{v}{-\mu} \in \mathbb{R}^n$ получаваме

$$r \geqslant \langle x^*, x - x_0 \rangle, \quad \text{за всички } x \in \mathbb{R}^n, r \geqslant f(x) - f(x_0) \tag{13.5}$$

и

$$\langle x^*, x - x_0 \rangle \geqslant r, \quad \text{за всички } x \in X, r < 0. \tag{13.6}$$

Твърдим, че векторът x^* е елемент на $\partial f(x_0)$, който удовлетворява условието в теоремата. Наистина, като вземем произволно $x \in \mathbb{R}^n$ и $r := f(x) - f(x_0)$ в (13.5) ще получим, че

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x^*, x - x_0 \rangle.$$

Следователно

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \langle x^*, x - x_0 \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

откъдето според дефиницията за субградиент имаме, че $x^* \in \partial f(x_0)$.

Да фиксираме сега $x \in X$ и да направим граничен преход по $r \to 0^-$ в (13.6). Получаваме, че $\langle x^*, x - x_0 \rangle \geqslant 0$. Тъй като това можем да направим за всяко $x \in X$, това означава, че x^* удовлетворява условието на теоремата. ■

Ако направим допълнителни предположения за функцията f и/или за множеството X от Теорема 13.1 ще получим интересни и полезни следствия.

Следствие 13.1. *При предположенията на Теорема 13.1 да допуснем още, че f е диференцируема в x_0. Точката $x_0 \in X$ е решение на задачата (P) тогава и само тогава, когато $\langle f'(x_0), x - x_0 \rangle \geqslant 0$ за всяко $x \in X$.*

Доказателство. От Теорема 13.1 имаме, че $x_0 \in X$ е решение на задачата (P) тогава и само тогава, когато съществува $x^* \in \partial f(x_0)$, такъв че $\langle x^*, x - x_0 \rangle \geqslant 0$ за всяко $x \in X$. Тъй като f е диференцируема в x_0, то $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$ и горното условие ще се изпълнява само от единствения елемент на субдиференцциала – градиента $f'(x_0)$. ■

Следствие 13.2. *При предположенията на Теорема 13.1 да допуснем още, че множеството X е отворено. Точката x_0 е решение на задачата (P) тогава и само тогава, когато $0 \in \partial f(x_0)$.*

Доказателство. Ако $0 \in \partial f(x_0)$, то по дефиницията за субградиент имаме

$$f(x) \geqslant f(x_0) + \langle 0, x - x_0 \rangle = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

и x_0 е решение на (P).

Обратно, ако x_0 е решение на (P) от Теорема 13.1 следва, че съществува $x^* \in \partial f(x_0)$, такъв че $\langle x^*, x - x_0 \rangle \geqslant 0$ за всяко $x \in X$. Тъй като X е отворено множество, то за всяка посока $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$ съществува $t > 0$, такова че точката $x_0 + td \in X$. Следователно,

$$\langle x^*, x_0 + td - x_0 \rangle \geqslant 0.$$

$$\langle x^*, d \rangle \geqslant 0.$$

Тъй като горното неравенство е вярно за всяко $d \in \mathbb{R}^n$, то $x^* = 0$. Следователно $0 \in \partial f(x_0)$. ■

Класическият случай от анализа, който разглежда диференцируема функция и отворено множество също може да се получи като следствие от Теорема 13.1:

Следствие 13.3. *При предположенията на Теорема 13.1 да допуснем още, че множеството X е отворено, а функцията f е диференцируема в точката x_0. Точката x_0 е решение на задачата (P) тогава и само тогава, когато $f'(x_0) = 0$.*

Доказателство. От Следствие 13.2 следва, че x_0 е решение на задачата (P) тогава и само тогава когато $0 \in \partial f(x_0)$ което е възможно тогава и само тогава, когато $f'(x_0) = 0$ тъй като $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$ понеже f е изпъкнала и диференцируема в x_0. ■

14. Теорема на Кун и Такър (афинни ограничения).

Разглеждаме следната оптимизационна задача: да се намери минимумът на функцията $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в многостенното множество $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x\rangle \leqslant b_i,\ j = 1, \ldots, m\}$, т.е.

$$(P) \qquad f(x) \to \min$$
$$\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

При предположение за диференцируемост на функцията f във въпрос 3 доказахме следното необходимо условие: ако $\overline{x}$ е решение на задачата (P), то съществуват неотрицателни числа $\overline{\lambda}_i$, $i = 1, \ldots, m$, за които са изпълнени условията

$$f'(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i a_i = 0, \tag{14.1}$$

$$\overline{\lambda}_i(\langle a_i, \overline{x}\rangle - b_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{14.2}$$

Функцията на Лагранж $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ за задачата (P) (вж. (GP) от въпрос 7 за $X = \mathbb{R}^n$) е следната функция

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\langle a_i, x\rangle - b_i), \tag{14.3}$$

където $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+$.

Условието (14.1) означава, че $L'_x(\overline{x}, \overline{\lambda}) = 0$, т.е. $\overline{x}$ е стационарна точка в $\mathbb{R}^n$ на функцията $L(\cdot, \overline{\lambda})$. Ако допълнително предположим, че $f(x)$ е изпъкнала функция на x в $\mathbb{R}^n$, то $L(x, \overline{\lambda})$ е изпъкнала функция на x в $\mathbb{R}^n$ и условието (14.1) е еквивалентно на това, че $\overline{x}$ е точка на минимум на функцията $L(\cdot, \overline{\lambda})$ в $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leqslant L(x, \overline{\lambda}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{14.4}$$

От (3.3) и от това, че $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\langle a_i, \overline{x}\rangle - b_i) \leqslant 0$ за всяко $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+$ следва, че

$$L(\overline{x}, \lambda) = f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\langle a_i, \overline{x}\rangle - b_i \leqslant f(\overline{x}) = L(\overline{x}, \overline{\lambda}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+. \tag{14.5}$$

От условията (14.4) и (14.5) имаме, че

$$L(\overline{x}, \lambda) \leqslant L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leqslant L(x, \overline{\lambda}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \tag{14.6}$$

което означава, че $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ е седлова точка за функцията на Лагранж L в областта $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$, което е достатъчно условие за това $\overline{x}$ да е решение на задачата (P) (вж. въпрос 7).

Следователно, при предположение за изпъкналост и диференцируемост в точката $\overline{x}$ на функцията f необходимите условия за оптималност (14.1) и (14.2) са и достатъчни условия за оптималност, т.е. (14.1) и (14.2) са необходими и достатъчни условия за оптималност. По-долу ще докажем това твърдение без предположението за диференцируемост в $\overline{x}$ на функцията f.

Теорема 14.1. *Нека функцията* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *е изпъкнала в* $\mathbb{R}^n$. *Ако точката* $\overline{x}$ *е решение на задачата* (P), *то съществува* $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$, *такова че* $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ *е седлова точка на функцията на Лагранж* (14.3) *в* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$, *т.е.*

$$L(\overline{x}, \lambda) \leqslant L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leqslant L(x, \overline{\lambda}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+.$$

Доказателство. Нека $\overline{x}$ е решение на (P). Да означим с $I := \{i : \langle a_i, \overline{x}\rangle = b_i\}$ множеството от индексите на *активните* в точката $\overline{x}$ ограничения.

Множествата в $\mathbb{R}^{n+1}$

$$Y_1 := \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : r > f(x)\},$$

$$Y_2 := \{(x, f(\overline{x})) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \langle a_i, x - \overline{x}\rangle \leqslant 0, i \in I\}$$

са непразни изпъкнали множества (проверка с дефиницията за изпъкналост на множество). Те са и непресичащи се множества. Ако допуснем, че съществува $(x, r) \in Y_1 \cap Y_2$, то $r = f(\overline{x}) > f(x)$ и $\langle a_i, x - \overline{x}\rangle \leqslant 0$, $i \in I$. За всяко положително t и всяко $i \in I$ точката $x_t := \overline{x} + t(x - \overline{x})$ удовлетворява

$$\langle a_i, x_t\rangle = \langle a_i, \overline{x}\rangle + t\langle a_i, x - \overline{x}\rangle \leqslant b_i.$$

За всяко $i \notin I$

$$\langle a_i, x_t\rangle = \langle a_i, \overline{x}\rangle + t\langle a_i, x - \overline{x}\rangle < b_i + t\langle a_i, x - \overline{x}\rangle \leqslant b_i$$

за достатъчно малки положителни t.

Следователно x_t е допустима точка за (P) при достатъчно малки положителни t и тъй като $\overline{x}$ е решение на (P), то $f(x_t) \geqslant f(\overline{x})$.

От това и изпъкналостта на f имаме

$$f(\overline{x}) \leqslant f(x_t) = f(tx + (1-t)\overline{x}) \leqslant tf(x) + (1-t)f(\overline{x}),$$

откъдето следва, че $f(\overline{x}) \leqslant f(x)$, което е в противоречие с това, че $(x, f(\overline{x})) \in Y_1$.

Прилагаме теоремата за отделимост за изпъкналите и непресичащи се множества Y_1 и Y_2 и получаваме ненулев вектор $(v, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, който удовлетворява

$$\langle (v, \mu), (y, r)\rangle \geqslant \langle (v, \mu), (x, f(\overline{x}))\rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall r > f(y), \quad \forall x : \langle a_i, x - \overline{x}\rangle \leqslant 0, i \in I,$$

т.е.

$$\langle v, y\rangle + \mu r \geqslant \langle v, x\rangle + \mu f(\overline{x}), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall r > f(y), \quad \forall x : \langle a_i, x - \overline{x}\rangle \leqslant 0, i \in I. \tag{14.7}$$

Като вземем в (14.7) $y = x = \overline{x}$ ще получим, че

$$\mu r \geqslant \mu f(\overline{x}), \quad \forall r > f(\overline{x}).$$

Оттук е ясно, че $\mu \geqslant 0$. Ако допуснем, че $\mu = 0$, то от (14.7) за $x = \overline{x}$ ще получим, че

$$\langle v, y\rangle \geqslant \langle v, \overline{x}\rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

което е в сила само за нулевия вектор $v = 0$. Но тогава $(v, \mu) = (0, 0)$ ще бъде нулевият вектор, което не е възможно. Следователно $\mu > 0$. Като разделим на $\mu > 0$ неравенството (14.7) и положим $x^* = -\left(\frac{v}{\mu}\right)$ ще получим , че

$$\langle -x^*, y\rangle + r \geqslant \langle -x^*, x\rangle + f(\overline{x}), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall r > f(y), \quad \forall x : \langle a_i, x - \overline{x}\rangle \leqslant 0, i \in I. \tag{14.8}$$

След граничен преход в (14.8) при $r \to f(y)$ получаваме

$$\langle -x^*, y\rangle + f(y) \geqslant \langle -x^*, x\rangle + f(\overline{x}), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x : \langle a_i, x - \overline{x}\rangle \leqslant 0, i \in I, \tag{14.9}$$

откъдето за $x = \overline{x}$ ще получим

$$f(y) \geqslant \langle x^*, y - \overline{x}\rangle + f(\overline{x}), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \tag{14.10}$$

което означава, че $x^* \in \partial f(\overline{x})$. От (14.9) за $y = \overline{x}$ ще получим

$$f(\overline{x}) - \langle x^*, \overline{x}\rangle \geqslant f(\overline{x}) - \langle x^*, x\rangle, \quad \forall x : \langle a_i, x - \overline{x}\rangle \leqslant 0, i \in I, \tag{14.11}$$

т.е.

$$\langle -x^*, x - \overline{x}\rangle \leqslant 0, \quad \forall x : \langle a_i, x - \overline{x}\rangle \leqslant 0, i \in I.$$

Това означава, че неравенството $\langle -x^*, x - \overline{x}\rangle \leqslant 0$ е следствие от системата неравенства $\langle a_i, x - \overline{x}\rangle \leqslant 0$, $i \in I$. От Лемата на Фаркаш (вж. въпрос 2) следва, че съществуват числа $\overline{\lambda}_i \geqslant 0$, $i \in I$, такива че $-x^* = \sum_{i \in I} \overline{\lambda}_i a_i$ или $x^* + \sum_{i \in I} \overline{\lambda}_i a_i = 0$, което е аналог на условието (14.1), в който производната на функцията $f'(\overline{x})$, която може и да не съществува е заменена с елемент x^* на субдиференциала на функцията f в точката $\overline{x}$.

Заместваме така изразения вектор $-x^*$ в (14.9) и получаваме

$$f(y) + \sum_{i \in I} \overline{\lambda}\langle a_i, y\rangle \geqslant f(\overline{x}) + \sum_{i \in I} \overline{\lambda}\langle a_i, \overline{x}\rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

и тъй като $\langle a_i, \overline{x}\rangle = b_i$, $i \in I$, то

$$f(\overline{x}) \leqslant f(y) + \sum_{i \in I} \overline{\lambda}_i(\langle a_i, y\rangle - b_i) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{14.12}$$

Полагаме $\overline{\lambda}_i := 0$ за всяко $i \notin I$ и получаваме, че

$$\overline{\lambda}_i(\langle a_i, \overline{x}\rangle - b_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

което са точно условията (14.2). Това означава, че $L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = f(\overline{x})$ и (14.12) добива вида

$$L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leqslant f(x) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i(\langle a_i, x\rangle - b_i) = L(x, \overline{\lambda}) \quad \text{за всяко } x \in \mathbb{R}^n. \tag{14.13}$$

От $\langle a_i, \overline{x}\rangle - b_i \leqslant 0$ за всяко $i = 1, \ldots, m$ имаме, че

$$L(\overline{x}, \lambda) = f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\langle a_i, \overline{x}\rangle - b_i) \leqslant f(\overline{x}) = L(\overline{x}, \overline{\lambda}) \text{ за всяко } \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+. \tag{14.14}$$

От (14.1) и (14.2) следва, че $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ е седлова точка за функцията на Лагранж в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$, което трябваше да се покаже. ■

15. Теорема на Кун и Такър (общ случай).

Ще докажем необходимо и достатъчно условие за решението на оптимизационната задача:

$$
\begin{aligned}
(Q) \qquad & f(x) \to \min \\
& g_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m \\
& x \in X,
\end{aligned}
$$

където $f : X \to \mathbb{R}$ и $g_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ са реалнозначни функции, дефинирани в подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$.

Функцията на Лагранж $\mathcal{L} : X \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ за задачата (Q) (вж. въпрос 7) е следната функция

$$
\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \tag{15.1}
$$

където $x \in X$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+$.

Ще казваме, че за задачата (Q) е изпълнено *условието на Слейтър*, ако съществува точка $x_0 \in X$, такава че $g_i(x_0) < 0$, за всяко $i = 1, \dots, m$.

Теорема 15.1. *Нека функциите $f : X \to \mathbb{R}$ и $g_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ са изпъкнали в изпъкналото множество $X \subset \mathbb{R}^n$. Нека за задачата (Q) е в сила условието на Слейтър. Ако точката $\overline{x}$ е решение на задачата (Q), то съществува $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$, такова че $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ е седлова точка на функцията на Лагранж* (15.1) *в областта $X \times \mathbb{R}^m_+$, т.е.*

$$
\mathcal{L}(\overline{x}, \lambda) \leqslant \mathcal{L}(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leqslant \mathcal{L}(x, \overline{\lambda}), \quad \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+.
$$

Доказателство. Нека $\overline{x}$ е решение на (Q). Да разгледаме множеството в $\mathbb{R}^{m+1}$

$$
Y := \{ y \in \mathbb{R}^{m+1}, y = (y_0, y_1, \dots, y_m) : \text{съществува } x \in X, \text{ такова че } y_0 \geqslant f(x), \ y_i \geqslant g_i(x), i = 1, \dots, m \}.
$$

Множеството Y е непразно и изпъкнало множество (проверете с дефиницията за изпъкналост на множество) в $\mathbb{R}^{m+1}$. Точката $\overline{y} := (f(\overline{x}), 0, \dots, 0) \in Y$ е гранична точка за множеството Y, тъй като за всяко $\varepsilon > 0$ точката $y_{+\varepsilon} := (f(\overline{x}) + \varepsilon, 0, \dots, 0) \in Y$, но точката $y_{-\varepsilon} := (f(\overline{x}) - \varepsilon, 0, \dots, 0) \notin Y$, което се дължи на това, че $\overline{x}$ е решение на (Q). Според Лема 9.3 съществува опорна за множеството Y хипер-равнина в граничната му точка $\overline{y}$, т.е. съществува ненулев вектор $v \in \mathbb{R}^{m+1}$, $v = (v_0, v_1, \dots, v_m)$, такъв че

$$
\langle v, y \rangle \geqslant \langle v, \overline{y} \rangle \ (= v_0 f(\overline{x})), \quad \forall y \in Y. \tag{15.2}
$$

Тъй като координатите на точките в Y са неограничени отгоре, то от (15.2) следва, че v е вектор с неотрицателни координати. Ще покажем, че първата му координата е положително число, т.е. $v_0 > 0$. Да допуснем, че $v_0 = 0$ и да разгледаме точката $y_0 := (f(x_0), g_1(x_0), \dots, g_m(x_0)) \in Y$, където точката $x_0 \in X$ удовлетворява условието на Слейтър. От (15.2) имаме, че

$$
\sum_{i=0}^{m} v_i g_i(x_0) = \langle v, y_0 \rangle \geqslant \langle v, \overline{y} \rangle = 0.
$$

Тъй като $v_i \geqslant 0$, а $g_i(x_0) < 0$ за всяко $i = 1, \ldots, m$, то $\sum_{i=1}^{m} v_i g_i(x_0) \leqslant 0$ и горното неравенство е възможно само ако $v_i g_i(x_0) = 0$ за всяко $i = 1, \ldots, m$, т.е. само тогава, когато $v_i = 0$ за всяко $i = 1, \ldots, m$. Но това означава, че v е нулевият вектор, което не е възможно.

Следователно, $v_0 > 0$.

Полагаме $\overline{\lambda}_i = \dfrac{v_i}{v_0} \geqslant 0$ за всяко $i = 1, \ldots, m$ и от (15.2) получаваме, че

$$f(x) + \sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i g_i(x) \geqslant f(\overline{x}), \quad \forall x \in X. \tag{15.3}$$

Като вземем в (15.3) $x = \overline{x}$ ще получим, че

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{\lambda}_i g_i(\overline{x}) \geqslant 0,$$

но $\overline{\lambda}_i \geqslant 0$, а $g_i(\overline{x}) \leqslant 0$, откъдето

$$\overline{\lambda}_i g_i(\overline{x}) = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m. \tag{15.4}$$

От (15.4) и (15.3) получаваме, че

$$\mathcal{L}(\overline{x}, \overline{\lambda}) = f(\overline{x}) \leqslant \mathcal{L}(x, \overline{\lambda}), \quad \forall x \in X. \tag{15.5}$$

От друга страна, тъй като $g_i(\overline{x}) \leqslant 0$ за всяко $i = 1, \ldots, m$, то

$$\mathcal{L}(\overline{x}, \lambda) = f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\overline{x}) \leqslant f(\overline{x}) = \mathcal{L}(\overline{x}, \overline{\lambda}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+. \tag{15.6}$$

От (15.5) и (15.6) следва, че $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ е седлова точка за функцията на Лагранж $\mathcal{L}$ в областта $X \times \mathbb{R}^m_+$, което трябваше да се покаже. ■

Изпълнението на условието на Слейтър е съществено предположение в Теоремата на Кун и Такър. Ако условието на Слейтър не е в сила за задачата (Q), Теорема 15.1 може да не е вярна, както се вижда от следния пример:

Да разгледаме минимизационната задача:

$$(Q) \qquad \begin{aligned} & f(x) = x \to \min \\ & g(x) = x^2 \leqslant 0, \end{aligned}$$

където $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са изпъкнали функции. Решение на задачата (Q) е единствената допустима точка $\overline{x} = 0$ и условието на Слейтър не е в сила за нея. Ако допуснем, че Теорема 15.1 е вярна, то ще съществува $\overline{\lambda} \geqslant 0$ такова че $(0, \overline{\lambda})$ е седлова точка в областта $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ на функцията на Лагранж за задачата (Q), която е $\mathcal{L}(x, \lambda) = x + \lambda x^2$. Това означава, че би било вярно неравенството

$$x(1 + \overline{\lambda} x) = x + \overline{\lambda} x^2 = \mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) \geqslant \mathcal{L}(0, \overline{\lambda}) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

което не е възможно.

Ще намерим вида на достатъчните условия за оптималност на решението на частни случаи на задачата (Q). Първо ще разгледаме задачата

$$
\begin{aligned}
(Q') \qquad & f(x) \to \min \\
& g_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m \\
& \langle a_j, x \rangle \leqslant b_j, \quad j = 1, \dots, k.
\end{aligned}
$$

Това е задача (Q), в която множеството X се задава с краен брой афинни неравенства $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_j, x \rangle \leqslant b_j, j = 1, \dots k\}$, т.е. е многостенно множество, получено от сечението на краен брой затворени пролупространства.

Функцията на Лагранж $\Lambda : X \times \mathbb{R}_+^{m+k}$ за задачата (Q') (вж. въпрос 7) е следната

$$
\Lambda(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j (\langle a_j, x \rangle - b_j), \tag{15.7}
$$

където $x \in X$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}_+^m$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathbb{R}_+^k$.

Теорема 15.2. *Нека $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_j, x \rangle \leqslant b_j, j = 1, \dots k\} \subset \mathbb{R}^n$. Нека функциите $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ са изпъкнали функции. Нека за задачата (Q') е в сила условието на Слейтър, т.е. съществува точка $x_0 \in X$, такава, че $g_i(x_0) < 0$, $i = 1, \dots, m$.*

Ако точката $\overline{x}$ е решение на задачата (Q'), то съществува $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^k$, такова че $(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\mu})$ е седлова точка на функцията на Лагранж (15.7) в областта $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^k$, т.е.

$$
\Lambda(\overline{x}, \lambda, \mu) \leqslant \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\mu}) \leqslant \Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\mu}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^m, \forall \mu \in \mathbb{R}_+^k.
$$

Доказателство. За задачата (Q') са в сила предположенията Теорема 15.1. Следователно съществува $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$ такова, че $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ е седлова точка за функцията на Лагранж за (Q)

$$
\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \quad x \in X, \lambda \in \mathbb{R}_+^m,
$$

в областта $X \times \mathbb{R}_+^m$, т.е.

$$
\mathcal{L}(\overline{x}, \lambda) \leqslant \mathcal{L}(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leqslant \mathcal{L}(x, \overline{\lambda}), \quad \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^m. \tag{15.8}
$$

Условието

$$
\mathcal{L}(\overline{x}, \overline{\lambda}) \leqslant \mathcal{L}(x, \overline{\lambda}), \quad \forall x \in X
$$

означава, че решението $\overline{x}$ на задачата (Q') е решение на задачата с афинни ограничения

$$
\begin{aligned}
(P) \qquad & \mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) \to \min \\
& \langle a_j, x \rangle \leqslant b_j, \quad j = 1, \dots, k.
\end{aligned}
$$

Тази задача разгледахме във въпрос 14 и показахме, че съществува $\overline{\mu} = (\overline{\mu}_1, \dots, \overline{\mu}_k) \in \mathbb{R}^k_+$, такова че $(\overline{x}, \overline{\mu})$ е седлова точка за функцията на Лагранж за задачата (P)

$$L(x, \mu) = \mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j(\langle a_j, x\rangle - b_j)$$

в областта $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k_+$, т.е.

$$L(\overline{x}, \mu) \leqslant L(\overline{x}, \overline{\mu}) \leqslant L(x, \overline{\mu}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \mu \in \mathbb{R}^k_+. \tag{15.9}$$

Да забележим, че

$$L(x, \mu) = \Lambda(x, \overline{\lambda}, \mu), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \mu \in \mathbb{R}^k_+.$$

Следователно от (15.9) имаме

$$\Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \mu) \leqslant \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\mu}) \leqslant \Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\mu}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \mu \in \mathbb{R}^k_+. \tag{15.10}$$

Остава да забележим, че от лявото неравенство в (15.8) имаме

$$\Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \mu) = \mathcal{L}(\overline{x}, \overline{\lambda}) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j(\langle a_j, \overline{x}\rangle - b_j) \geqslant \mathcal{L}(\overline{x}, \lambda) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j(\langle a_j, \overline{x}\rangle - b_j) = \Lambda(\overline{x}, \lambda, \mu),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \forall \mu \in \mathbb{R}^k_+.$$

Последното, комбинирано с (15.10) дава

$$\Lambda(\overline{x}, \lambda, \mu) \leqslant \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\mu}) \leqslant \Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\mu}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \forall \mu \in \mathbb{R}^k_+, \tag{15.11}$$

което трябваше да се докаже. ■

Ако разгледаме задачата

$$\begin{aligned}
(Q'') \qquad & f(x) \to \min \\
& g_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m \\
& \langle a_j, x\rangle \leqslant b_j, \quad j = 1, \dots, k \\
& \langle c_l, x\rangle = d_l, \quad l = 1, \dots, s,
\end{aligned}$$

то това е задача (Q), в която множеството X се задава с краен брой афинни равенства и неравенства $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_j, x\rangle \leqslant b_j, j = 1, \dots, k,\ \langle c_l, x\rangle = d_l, l = 1, \dots s\}$, т.е. е многостенно множество, което е сечение на краен брой хипер-равнини и затворени полупространства. Очевидно X може да се представи с краен брой афинни неравенства като $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_j, x\rangle \leqslant b_j, j = 1, \dots, k,\ \langle c_l, x\rangle \leqslant d_l, l = 1, \dots s,\ \langle -c_l, x\rangle \leqslant -d_l, l = 1, \dots s\}$, при което задачата (Q'') е от вида (Q'). Функцията на Лагранж за нея

$$\Lambda(\overline{x}, \lambda, \mu, \nu', \nu'') = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j(\langle a_j, x\rangle - b_j) + \sum_{l=1}^{s} \nu'_s(\langle c_l, x\rangle - d_l) + \sum_{l=1}^{s} \nu''_s(\langle -c_l, x\rangle + d_l),$$

е дефинирана в областта $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^s_+ \times \mathbb{R}^s_+$. Да забележим, че

$$\Lambda(\overline{x}, \lambda, \mu, \nu', \nu'') = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j(\langle a_j, x\rangle - b_j) + \sum_{l=1}^{s} (\nu'_s - \nu''_s)(\langle c_l, x\rangle - d_l)$$

и следователно можем да я разглеждаме като функция

$$\Lambda(\overline{x}, \lambda, \mu, \nu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j(\langle a_j, x\rangle - b_j) + \sum_{l=1}^{s} \nu_s(\langle c_l, x\rangle - d_l) \tag{15.12}$$

дефинирана в областта $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^s$. Това означава, че за множителите на Лагранж, съответстващи на равенствата няма ограничение за знака. Получаваме следната

Теорема 15.3. *Нека* $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_j, x\rangle \leqslant b_j, j = 1, \ldots, k,\ \langle c_l, x\rangle = d_l, l = 1, \ldots s\}$*. Нека функциите* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и* $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ *са изпъкнали функции. Нека за задачата* (Q'') *е в сила условието на Слейтър, т.е. съществува точка* $x_0 \in X$*, такава, че* $g_i(x_0) < 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Ако точката $\overline{x}$ *е решение на задачата* (Q'')*, то съществува* $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{\nu}) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^s$*, такова че* $(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{\nu})$ *е седлова точка на функцията на Лагранж* (15.12) *в областта* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^k_+ \times \mathbb{R}^s$*, т.е.*

$$\Lambda(\overline{x}, \lambda, \mu, \nu) \leqslant \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{\nu}) \leqslant \Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{\nu}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \forall \mu \in \mathbb{R}^k_+, \forall \nu \in \mathbb{R}^s.$$

16. Диференциална форма на Теоремата на Кун и Такър.

Ще докажем необходими и достатъчни условия за решението на оптимизационната задача:

$$
\begin{aligned}
(P) \qquad & f(x) \to \min \\
& g_i(x) \leqslant 0, \qquad i = 1, \dots, m \\
& \langle c_l, x\rangle = d_l, \quad l = 1, \dots s, \\
& x_j \geqslant 0, \qquad j \in J,
\end{aligned}
$$

където $x \in \mathbb{R}^n$, а $J \subset \{1, \dots, n\}$.

Функцията на Лагранж за задачата (P) е следната функция

$$\Lambda(x, \lambda, \nu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{l=1}^{s} \nu_l(\langle c, x\rangle - d_l). \tag{16.1}$$

дефинирана в областта $X \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^s$, т.е. за $x \in X := \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geqslant 0, j \in J\}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m_+$, $\nu = (\nu_1, \dots \nu_s) \in \mathbb{R}^s$.

Теорема 16.1. *Нека функциите $f : X \to \mathbb{R}$ и $g_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ са изпъкнали в X. Предполагаме, че съществува допустима за (P) точка x_0 (точка удовлетворяващи всички ограничения на задачата), такава че $g_i(x_0) < 0$ за $i = 1, \dots, m$, които не са афинни неравенства. Нека функциите f, g_i, $i = 1, \dots, m$ са диференцируеми в $\overline{x}$. За да бъде $\overline{x}$ решение на (P) е необходимо и достатъчно да съществуват $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$, $\overline{\nu} \in \mathbb{R}^s$, такива че*

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_j}(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) \geqslant 0, \quad j \in J, \tag{16.2}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_j}(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) = 0, \quad j \in \{1, \dots, n\} \setminus J, \tag{16.3}$$

$$\overline{x}_j \frac{\partial \Lambda}{\partial x_j}(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{16.4}$$

$$\overline{x}_j \geqslant 0, \quad j \in J, \tag{16.5}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_i}(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{16.6}$$

$$\overline{\lambda}_i \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_i}(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{16.7}$$

$$\overline{\lambda}_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{16.8}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \nu_l}(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) = 0, \quad l = 1, \dots, s. \tag{16.9}$$

Доказателство. Необходимост. Нека $\overline{x}$ е решение на (P). Тогава от Теоремата на Кун и Такър съществува $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$, $\overline{\nu} \in \mathbb{R}^s$, такива че точката $(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu})$ е седлова точка за функцията на Лагранж, т.е.

$$\Lambda(\overline{x}, \lambda, \nu) \leqslant \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) \leqslant \Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \forall \nu \in \mathbb{R}^s, \tag{16.10}$$

където $X = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geqslant 0, j \in J\}$. От

$$\Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) \leqslant \Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \quad \forall x \in X$$

следва, че функцията $\Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\nu})$ достига минимума си по x в множеството X в точката $\overline{x}$, откъдето следва, че са изпълнени условията (16.2)–(16.5). От

$$\Lambda(\overline{x}, \lambda, \nu) \leqslant \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \forall \nu \in \mathbb{R}^s$$

следва, че функцията $\Lambda(\overline{x}, \lambda, \nu)$ достига максимума си по (λ, ν) в множеството $\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^s$ в точката $\overline{(\lambda}, \overline{\nu})$, откъдето следва, че са изпълнени условията (16.6)–(16.9).

Достатъчност. Нека са изпълнени условията (16.2)–(16.9). Тъй като функцията $\Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\nu})$ е изпъкнала като функция на x, то

$$\Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) \geqslant \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) + \langle L'_x(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), x - \overline{x} \rangle =$$

$$= \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) + \langle L'_x(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), x \rangle - \langle L'_x(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \overline{x} \rangle.$$

От условията (16.5) следва, че $\overline{x} \in X$. От условията (16.2) и (16.3) следва, че за всяко $x \in X$ е изпълнено $\langle L'_x(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), x \rangle \geqslant 0$. От условията (16.4) следва, че $\langle L'_x(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \overline{x} \rangle = 0$, откъдето горното неравенство се свежда до

$$\Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) \geqslant \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \quad \forall x \in X,$$

и имаме, че $\overline{x}$ е точка на минимум на $\Lambda(x, \overline{\lambda}, \overline{\nu})$ в X.

От друга страна, функцията $\Lambda(\overline{x}, \lambda, \nu)$ е линейна функция на (λ, ν) в областта $\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^s$. Следователно,

$$\Lambda(\overline{x}, \lambda, \nu) = \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}) + \langle L'_\lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \lambda - \overline{\lambda} \rangle + \langle L'_\nu(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \nu - \overline{\nu} \rangle.$$

От условията (16.6)–(16.9) имаме, че

$$\Lambda(\overline{x}, \lambda, \nu) \leqslant \Lambda(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \forall \nu \in \mathbb{R}^s.$$

Следователно $(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\nu})$ е седлова точка за функцията на Лагранж в областта $X \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^s$, което трябваше да се покаже. ■

17. Задача за безусловна минимизация. Общ оптимизационен алгоритъм. Скорост на сходимост.

Интересуваме се от методи за решаване на минимизационна задача без ограничения

$$(P)\ \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x).$$

Въпреки, че има голямо разнообразие от алгоритми за нейното решаване възможно е да се даде обща форма за тези алгоритми.

Общият оптимизационен алгоритъм има следната форма:

1) определя се някакво начално приближено решение x_0;

2) за $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

• ако x_k е оптимално, алгоритъмът спира;

• ако x_k не е оптимално се определя по-добро приближено решение

$$x_{k+1} := x_k + \alpha_k p_k,$$

което става на два етапа:

• на първия етап се определя векторът $p_k \in \mathbb{R}^n$ – *посока на търсене* на следващото приближено решение, за която се надяваме да сочи към решението или поне да подобрява текущата стойност на функцията f;

• на втория етап се определя $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$ – *дължина на стъпката* по p_k, която правим, за да намерим следващото приближено решение. След като на първия етап е намерена и фиксирана посоката p_k, намирането на α_k става чрез решаване на едномерна минимизационна задача.

Възниква въпросът защо не се търси решението директно, а се строят итерационни алгоритми? Отговорът е, че освен за най-простите оптимизационни задачи, формула за решението не съществува. Например, ако разгледаме едномерната минимизационна задача

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = e^x + x^2$$

необходимото условие за оптималност $f'(x) = 0$ дава $e^x + 2x = 0$, но няма проста формула за решаването на това нелинейно по променливата x уравнение.

Следователно за решаването на много оптимизационни задачи се използва някаква форма на итерационен метод, при която решението се получава като граница на безкрайна редици от приближени решения.

Друг въпрос е защо търсенето на новото приближено решение става на два етапа. В идеалния случай бихме искали да получим новото приближено решение като

$$x_{k+1} = x_k + p_k,$$

където p_k е решение на задачата

$$\min_{p\in\mathbb{R}^n} f(x_k + p),$$

но решаването на тази задача е еквивалентно на решаването на изходната задача (P).

Затова се прибягва до компромисния двуетапен вариант на търсене на приближено решение. За задачата (P) обикновено се иска посоката на търсене p_k да е *посока на спускане за*

f в точката x_k, т.е за малка стъпка, направена от функцията f по направлението p_k, тя да намалява, което можем да запишем така

$$f(x_k + \alpha p_k) < f(x_k), \quad 0 < \alpha \leqslant \varepsilon,$$

за някое $\varepsilon > 0$.

След като посоката p_k е определена и фиксирана, стъпката по нея или числото α_k се определя така, че да минимизира функцията f по тази посока:

$$\min_{\alpha \geqslant 0} f(x_k + \alpha p_k).$$

Това е минимизационна задача на една променлива α и то $\alpha \geqslant 0$ тъй като p_k е фиксирана като посока на спускане и да се вземат предвид стойностите на $\alpha < 0$ не е необходимо. Дори за тази едномерна задача, както видяхме от примера по-горе, е възможно да няма проста формула за решението, т.е. възможно е тя да не може да се реши точно. Затова вместо α, което дава точно минимума на f върху лъча $x_k + \alpha p_k$ се взима приближена до него стойност α_k, т.е. взема се приближен минимум на f върху $x_k + \alpha p_k$. Намирането на α_k се нарича *линейно търсене*, тъй като съответства на търсене на минимума на f по лъча $x_k + \alpha p_k$.

Ако някакъв алгоритъм решава някаква задача за краен брой стъпки, то броят на тези стъпки или броят на необходимите аритметични операции за тяхното реализиране служи за измерване на неговата ефективност. При разгледания общ оптимизационен алгоритъм обаче броят на необходимите стъпки може да е безкраен. При този тип алгоритми възникват два въпроса:

- сходящ ли е алгоритъмът (т.е. дали редицата $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ е сходяща) и ако да, то
- колко бързо е сходящ.

Това колко бързо редицата от приближени решения клони към точното решение е начин да се измери ефективността на алгоритъма. Да предположим, че имаме редица от приближени решения $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, която клони към решение x^*. Като дефинираме редицата от грешките

$$e_k := x_k - x^*$$

забелязваме, че при сходимост $\|e_k\| \to 0$.

Казваме, че редицата $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ клони към x^* *със скорост на сходимост $r > 0$ и константа C*, ако

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|^r} = C \quad \text{и} \quad C < \infty.$$

За да разберем идеята на понятието *скорост на сходимост*, да разгледаме няколко примера. За да улесним разглежданията, ще предположим, че имаме идеалния случай на поведение на горната редица, т.е. че

$$\|e_{k+1}\| = C\|e_k\|^r,$$

за да избегнем граничния преход.

Когато $r = 1$ скоростта на сходимост се нарича *линейна* и при горното предположение имаме

$$\|e_{k+1}\| = C\|e_k\|.$$

Ако $0 < C < 1$, то нормата на грешката намалява с постоянен коефициент по-малък от единица на всяка итерация и редицата от грешките е сходяща.

Ако $C > 1$, то редицата от грешките е разходяща.

Ако $C = 0,1 = 10^{-1}$ и $\|e_0\| = 1$ редицата от нормите на грешките е:

$$1;\ 10^{-1};\ 10^{-2};\ 10^{-3}; \dots$$

и точност на решението до седмия знак се постига за седем итерации, което е добър резултат за един алгоритъм.

От друга страна, ако $C = 0,99$ и $\|e_0\| = 1$ редицата от нормите на грешките е:

$$1;\ 0,99;\ 0,9801;\ 0,9703; \dots$$

и са необходими 1 600 итерации за свеждане нормата на грешката до 10^{-7}, което е лош резултат.

Това идва да покаже, че при линейна скорост на сходимост на един алгоритъм ($r = 1$) важна е и големината на константата C.

Ако $r = 1$ и $C = 0$ сходимостта се нарича *суперлинейна.*

Да отбележим, че суперлинейна сходимост имаме и за всяка редица, която има по-висока от линейна скоростна сходимост $r > 1$. Наистина, ако за $r > 1$ имаме $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|} = C$, т.е. имаме скорост на сходимост $r > 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|^r}\dfrac{\|e_k\|^r}{\|e_k\|} = C \lim\limits_{k\to\infty} \|e_k\|^{r-1} = 0$, т.е. имаме и суперлинейна сходимост.

Ако $r = 2$ сходимосттта се нарича *квадратична.* Като пример да вземем $r = 2$, $C = 1$ и $\|e_0\| = 10^{-1}$. Редицата от нормите на грешките е:

$$10^{-1};\ 10^{-2};\ 10^{-4};\ 10^{-8}\ \dots,$$

т.е. за три итерации се постига точност от 10^{-7}. В тази идеална форма на квадратична сходимост нормата на грешката се вдига на квадрат на всяка стъпка. Друг начин да се каже това е, че на всяка итерация броят на верните знаци на решението се удвоява. Разбира се при $C \neq 1$ това не е точно така, но все пак интуитивно горното дава достатъчно добра представа за атрактивността на методите с квадратична и по-висока скорост на сходимост.

Очевидно при квадратична и по-висока скорост на сходимост големината на константата C не е толкова съществена, докато в линейния случай тя играе важна роля. Ако при $r = 1$ константата C е малка на практика има малка разлика между линейната и по-високите скорости на сходимост като се вземе предвид нивото на точност на компютърните пресмятания.

Да отбележим и това, че скоростта на сходимост отразява поведението на алгоритъма в близост до решението и че тя нерядко се случва да бъде наблюдавана в последните итерации на алгоритъма като е възможно в началните итерации (далеч от решението) нормата на грешката изобщо да не намалява.

18. Метод на Нютон.

Методът на Нютон е често използван метод за решаване на минимизационна задача без ограничения

$$(P) \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

като за функцията f се предполага, че е двукратно диференцируема в $\mathbb{R}^n$.

Първо ще изложим метода на Нютон в класическата му форма, а в последствие ще покажем как той може да се коригира така, че да се гарантират две съществени неща

- посоките на търсене да бъдат посоки на спускане и
- сходимост на метода.

Методът на Нютон е алгоритъм, който се основава на необходимото условие от първи ред за намиране на локален минимум на функцията f:

$$f'(x) = 0.$$

По-точно казано методът на Нютон намира стационарна точка на f. Да разгледаме уравнението $f'(x) = 0$. Да го решим означава да намерим нула на нелинейната функция $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, която на всяко $x \in \mathbb{R}^n$ съпоставя $f'(x) \in \mathbb{R}^n$, т.е. това означава да намерим решение на нелинейна система уравнения. Идеята е тази нелинейна система да се сведе до линейна като се използва линейна апроксимация на производната.

Нека x_k е приближеното решение на k-та итерация. Развиваме f' в ред на Тейлър около x_k като пропускаме остатъчния член, т.е. правим линейна апроксимация на f'

$$f'(x_k + p) \approx f'(x_k) + f''(x_k)p \tag{18.1}$$

като отчетем, че f'' е производната на f'. Приравняваме дясната страна на нулевия вектор и получаваме линейната система

$$0 = f'(x_k) + f''(x_k)p,$$

в която неизвестните са координатите на вектора $p \in \mathbb{R}^n$. Линейната система може да се запише и като

$$f''(x_k)p = -f'(x_k).$$

Ако матрицата $f''(x_k)$ е неособена ($\det f''(x_k) \neq 0$) решаваме тази система и нейното решение

$$p_k = -[f''(x_k)]^{-1} f'(x_k)$$

е посоката на търсене за метода, която още се нарича нютонова посока.

За следващо приближено решение полагаме $x_{k+1} := x_k + p_k$.

По този начин се създава оптимизационен алгоритъм, при който на всяка стъпка посоката на търсене p_k се получава чрез решаване на система линейни уравнения, а стъпката по нея е $\alpha_k = 1$. Да отбележим, че няма гаранции, че така получената посока на търсене p_k е посока на спускане на функцията f в x_k нито че $\alpha_k = 1$ дава най-добрата стойност при линейно търсене по посоката p_k.

Да забележим, че линейната апроксимация $f'(x_k) + f''(x_k)p$ на производната от (18.1) е производна на квадратичната функция на p

$$q(p) := f(x_k) + \langle f'(x_k), p\rangle + \frac{1}{2}\langle p, f''(x_k)p\rangle$$

която се състои от първите три члена в развитието на f в ред на Тейлър около x_k. Този факт позволява методът на Нютон да се интерпретира и по друг начин: на всяка итерация нелинейната функция $f(x_k + p)$ се апроксимира с квадратичната функция $q(p)$, т.е.

$$f(x_k + p) \approx f(x_k) + \langle f'(x_k), p\rangle + \frac{1}{2}\langle p, f''(x_k)p\rangle = q(p),$$

минимизира се $q(p)$ като функция на p, за да се получи посоката на търсене p_k и след това се полага $x_{k+1} = x_k + p_k$.

Следователно методът на Нютон има квадратична скорост на сходимост. Разбира се трябва да се изключат случаите, когато той пропада заради сингулярност на матрицата $f''(x_k)$ (т.е. $\det f''(x_k) = 0$) или пък не е сходящ.

Ако методът на Нютон е сходящ, то той със сигурност е сходящ към стационарна точка на f. В представената класическа форма на алгоритъма обаче няма нищо, което да влияе върху това тази точка да е точно точка на минимум (а не например на максимум или на инфлексия), но на този въпрос ще се спрем по-късно.

Методът на Нютон рядко се използва в класическата си форма. По-често той се модифицира чрез вграждане на някаква помощна стратегия, която да гарантира сходимост към стационарна точка и дори към локален минимум, ако такъв съществува.

Трудно е да бъдат изучени всички методи за решаване на задачи за безусловна минимизация, но е добре да се помни, че всички те са някакъв компромисен вариант на метода на Нютон.

Вече казахме, че при прилагането на класическия метод на Нютон сходимостта, ако съществува, е квадратична. Ако се прилага модифициран вариант на метода обаче, не може да се очаква запазването на толкова висока скорост на сходимост. Въпреки това е възможно да се постигне суперлинейна скорост на сходимост, като за целта е необходимо посоките на търсене да приближават нютоновите посоки в близост до решението.

Теорема 18.1. *Нека $S \subset \mathbb{R}^n$ е отворено множество. Нека $f : S \to \mathbb{R}$ е двукратно диференцируема в S и втората ѝ производна f'' е липшицова в S, т.е. за някаква константа $L > 0$ е изпълнено*

$$\|f''(x) - f''(y)\| \leqslant L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in S.$$

Разглеждаме редица

$$x_{k+1} = x_k + p'_k,$$

за която предполагаме, че

1) $x_k \in S$;
2) $\lim_{k\to\infty} x_k = x^* \in S$;
3) $x_k \neq x^*$ *за всяко* k.

Предполагаме още, че матрицата $f''(x^*)$ е положително дефинитна.

Тогава редицата $\{x_k\}$ е сходяща към x^* суперлинейно и $f'(x^*) = 0$ тогава и само тогава, когато

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|p'_k - p_k\|}{\|p'_k\|} = 0,$$

където p_k са нютоновите посоки.

Да напомним, че $(n \times n)$ матрица A наричаме неотрицателно дефинитна, ако $\langle x, Ax\rangle \geqslant 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}^n$ и пишем $A \geqslant 0$ и A наричаме положително дефинитна, ако $\langle x, Ax\rangle > 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ и пишем $A > 0$.

В теоремата неявно се предполага, че на всяка итерация нютоновите посоки p_k са добре дефинирани, т.е. че $f''(x_k)$ е обратима за всяко k, но това е несъществено предположение, тъй като заключението на теоремата е за точки близо до x^*, а в теоремата се предполага, че $f''(x^*) > 0$. Непрекъснатостта на f'' в x^* гарантира, че $f''(x_k) > 0$ за достатъчно големи k и проблем с обратимостта на $f''(x_k)$ няма.

Това, че $f'(x^*) = 0$ и това че $f''(x^*) > 0$ гарантира, че x^* е точка на локален минимум за f.

19. Модификации на класическия метод на Нютон. Линейно търсене.

Методът на Нютон е метод за решаване на минимизационна задача без ограничения

$$(P) \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

като за функцията f се предполага, че е двукратно диференцируема в $\mathbb{R}^n$.

След като вече изложихме метода на Нютон в класическата му форма във въпрос 18, сега ще покажем как той може да се коригира така, че да се гарантират две съществени неща

- посоките на търсене да бъдат посоки на спускане и
- сходимост на метода.

19.1. Гарантиране на спускане – с модифициране на хесиана.

Целта ни е да намерим оптимизационен алгоритъм, който така да модифицира класическия метод на Нютон, че посоките на търсене да са посоки на спускане. Знаем, че в общия оптимизационен алгоритъм за задачата (P) приближеното решение се определя във вида

$$x + \alpha p,$$

където $\alpha > 0$ е число, а $p \in \mathbb{R}^n$ е посока на спускане за функцията f в точката x, т.е.

$$f(x + tp) < f(x), \quad \forall t \in (0, \varepsilon)$$

за някое $\varepsilon > 0$. В частност векторът p ще бъде посока на спускане на f в x, ако е изпълнено условието

$$\langle f'(x), p\rangle < 0 \tag{19.1}$$

(вж. Лема 4.1).

Намирането на нютоновите посоки от класическия метод на Нютон не гарантираше, че те са посоки на спускане за f. Ако p е нютонова посока, то тя се определя като решение на системата

$$f''(x)p = -f'(x)$$

и за p условието (19.1) да бъде посока на спускане изглежда така

$$0 > \langle f'(x), p\rangle = -\langle f''(x)p, p\rangle,$$

или

$$\langle p, f''(x)p\rangle > 0. \tag{19.2}$$

В частност условието (19.2) ще бъде изпълнено за p, ако матрицата $f''(x)$ е положително дефинитна, т.е. $f''(x) > 0$. Следователно, ако $f''(x) > 0$, то нютоновата посока $p = -[f''(x)]^{-1}f'(x)$ ще бъде посока на спускане за f в x.

Да отбележим, че условието за положителна дефинитност на $f''(x)$ гарантира изпълнението на условието за спускане (19.1), но е по-силно от него.

Как да постъпим, ако $f''(x)$ не е дефинитна матрица? Да забележим, че ако $A > 0$ е произволна положително дефинитна $(n \times n)$ матрица, то векторът p, който е решение на системата $Ap = -f'(x)$ ще бъде посока на спускане за f в x, тъй като

$$\langle f'(x), p\rangle = \langle -Ap, p\rangle < 0$$

и условието (19.1) ще бъде изпълнено за него.

В случая, когато хесианът $f''(x)$ не е дефинитна матрица една възможна стратегия за определяне на посока на търсене, която да е посока на спускане е той де се замени с положително дефинитна матрица. Това, както вече отбелязахме по-горе, ще гарантира, че получената посока на търсене е посока на спускане.

Знаем, че методът на Нютон може да се интерпретира като апроксимиране на функцията $f(x + p)$ с квадратичната функция от Тейлоровото развитие

$$f(x + p) \approx f(x) + \langle f'(x), p\rangle + \frac{1}{2}\langle p, f''(x)p\rangle =: q(p)$$

и последващо минимизиране на квадратичната функция $q(p)$ за намиране на нютоновата посока.

Идеята е да заменим хесиана $f''(x)$ в горната апроксимация с положително дефинитна матрица A, т.е. да апроксимираме $f(x + p)$ с изпъкналата функция $f(x) + \langle f'(x), p\rangle + \frac{1}{2}\langle p, Ap\rangle$ и да определим посоката на търсене, като приравним на 0 градиента ѝ. Ако $f''(x) > 0$, то $q(p)$ си е изпъкнала функция и замяна на хесиана с друга матрица няма да е необходима.

Това на пръв поглед може да изглежда като произволна замяна, но има няколко основателни оправдания тя да бъде направена:

• първо, ако замяната се направи по подходящ начин, полученият в резултат алгоритъм може да се направи сходящ чрез използване на методи за линейно търсене;

• второ, в решението x^* на задачата (P) матрицата $f''(x^*) \geqslant 0$, т.е. винаги е неотрицателно дефинитна и нерядко е такава, че $f''(x^*) > 0$, така че хесианът ще се заменя с друга матрица само в точки, които са отдалечени от решението.

• трето, положително дефинитната матрица, която заменя хесиана може да се намери при прилагането на класическата формула на Нютон с малки допълнителни изчисления. Как по-точно става това:

Намирането на нютоновата посока p става чрез решаване на линейната система

$$f''(x)p = -f'(x).$$

Ако $f''(x) > 0$, то при прилагане на метода на Гаус за решаването ѝ, $f''(x)$ се представя във вида

$$f''(x) = LDL^{\mathrm{T}},$$

където L е долно триъгълна матрица, а D е диагонална матрица с положителни елементи по диагонала. Ако $f''(x)$ не е положително дефинитна, то в даден момент при пресмятане елементите на диагонала на D ще се получи

$$d_{ii} \leqslant 0.$$

Ако това се случи, заменяме d_{ii} или с $|d_{ii}|$ или с някакво малко положително число. Модифицирането на диагоналните елементи на D е еквивалентно на замяната на хесиана $f''(x)$ с

$$f''(x) \to f''(x) + E,$$

където E е диагонална матрица, такава че новата матрица $f''(x) + E$ да бъде положително дефинитна. Разлагаме новата положително дефинитна матрица

$$f''(x) + E = LDL^{\mathrm{T}}$$

и я използваме за намиране на посоката на търсене p':

$$LDL^{\mathrm{T}}p' = -f'(x).$$

Да отбележим, че дори в случая, когато матрицата $f''(x) > 0$ тя се разлага във вида LDL^{T}, за да се пресметне посоката p (разлагането е еквивалентно на привеждане на матрицата на линейната система в триъгълна) така, че модифицираното матрично разлагане се получава с малко усилие – смяна на намерено $d_{ii} \leqslant 0$ с подходящо положително число.

По този начин получаваме

Модифициран метод на Нютон с линейно търсене

1) определя се някакво начално приближено решение x_0 и се фиксира $\varepsilon > 0$;

2) за $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

• ако $f'(x_k) < \varepsilon$, алгоритъмът спира;

• ако $f'(x_k) \geqslant \varepsilon$ се разлага модифицирания хесиан

$$f''(x_k) + E = LDL^{\mathrm{T}}$$

и се решава линейната система

$$LDL^{\mathrm{T}}p' = -f'(x_k)$$

за намиране на посоката на търсене p'_k. Да отбележим, че E се взима като нулевата матрица, ако $f''(x_k)$ е "достатъчно" положително дефинитна.

• прилага се линейно търсене по p'_k за определяне на стъпката α_k и на новото приближено решение

$$x_{k+1} := x_k + \alpha_k p'_k.$$

За така модифицирания метод на Нютон, в който посоките на търсене са посоки на спускане търсим начини да гарантираме сходимост на редицата от приближени решения.

19.2. Гарантиране на сходимост – с методи за линейно търсене.

Техниките, които се използват, за да се гарантира сходимост на един оптимизационен алгоритъм се наричат *глобализиращи стратегии* – те се опитват да контролират алгоритъма в случаите, когато има опасност той да излезе от контрол и същевременно избягват намеса в случаите, когато алгоритъмът работи ефективно.

Далеч от решението – в точки, където Тейлоровото развитие е лошо приближение на стойността на функцията близо до минимума, глобализиращите стратегии са активна част от алгоритъма, която го предпазва от отдалечаване от решението и от разходимост. Близо до решението тези стратегии стоят на заден план и служат за нещо като охрана: ползват се при необходимост, но е нормално да не се прибягва до тях.

Определението "глобализиращи стратегии" се използва, за да се разграничи методът за определяне на ново приближено решение от метода за намиране на посока на търсене. В повечето алгоритми формулата за намиране на посока на търсене се получава от Тейлоровото развитие, което е локална апроксимация на функцията. Методът за определяне на новото приближено решение е замислен да гарантира *глобална сходимост*, т.е. сходимост към решението от произволна начална точка. Да отбележим, че в метода на Нютон сходимостта е към стационарна точка.

Методите за линейно търсене са най-старите и най-широко разпространените глобализиращи стратегии. За да ги опишем, нека x_k е текущото приближено решение и нека p_k е посока на търсене в x_k. Тогава новото приближено решение се определя като

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k,$$

където дължината на стъпката α_k е положително число, избрано така, че

$$f(x_{k+1}) < f(x_k).$$

Тъй като стойността на f в новото приближено решение е по-малка от тази в старото, то това означава, че сме се придвижили към минимума. (това обаче не е цялата истина – на някои изключения и подробности ще се спрем по-долу.)

Да разгледаме по-внимателно формулата за линейно търсене. Вече знаем, как при прилагане на метода на Нютон да гарантираме това, че p_k е посока на спускане, т.е. p_k да удовлетворява условието (19.1). Щом p_k е посока на спускане, то

$$f(x_k + \alpha p_k) < f(x_k)$$

поне за достатъчно малки $\alpha > 0$. Поради това имаме, че като дължина на стъпката можем да вземем положително число ($\alpha_k > 0$) и така да напуснем текущото приближено решени. Техниката на намиране на тази стъпка се нарича *линейно търсене*, тъй като търсенето на новото приближено решение x_{k+1} се осъществява по линията $x_k + \alpha p_k$. Интуитивно е ясно, че бихме искали да решим едномерната задача

$$\min_{\alpha>0} f(x_k + \alpha p_k)$$

и да вземем за стъпка нейно точно решение $\alpha_k > 0$. Обикновено намирането на точно решение (ако съществува) на тази задача е трудоемко и на практика тя се решава само приближено, а α_k се взима като някакво нейно приближено решение. В тази си груба форма приближеният минимум просто ще намали стойността на f в новото приближено решение, както вече отбелязахме. Това обаче не е достатъчно, за да гарантира сходимост, както може да се види от следния пример за **"наивно линейно търсене":**

За задачата

$$(p) \quad \min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = x^2$$

да вземем начално приближено решение $x_0 = -3$. На всяка итерация взимаме посока на търсене $p_k = 1$ с дължина на стъпката по нея $\alpha_k = 2^{-k}$. Така новото приближено решение е

$$x_{k+1} = x_k + 2^{-k}.$$

Редицата от приближени решения е:

$$-3;\ -2;\ -\frac{3}{2};\ -\frac{5}{4};\ -\frac{9}{8};\ldots$$

или $x_k = -(1+2^{1-k})$. Всяка от посоките на търсене $p_k = 1$ е посока на намаляване на f в x_k, тъй като удовлетворява

$$\langle f'(x_k), p_k\rangle = 2x_k.1 = -2(1+2^{1-k}) < 0$$

и очевидно стъпката α_k дава намаляване на функционалната стойност, т.е. $f(x_{k+1}) < f(x_k)$.

Въпреки, че алгоритъмът осигурява намаляване на функцията на всяка итерация, той не е сходящ към стационарна точка (минимум, тъй като f е изпъкнала), понеже $x_k \to -1$, а $f'(-1) = -2 < 0$. Решението на задачата очевидно е $x^* = 0$.

Следователно при линейното търсене се изисква приближеният минимум, който се взима да осигурява нещо повече от намаляване на функцията на всяка итерация.

Един от начините да се гарантира сходимост е да се направят допълнителни предположения – две върху посоките на търсене p_k и две върху дължината на стъпката α_k.

1. Предположения за p_k – а) да осигурява *достатъчно спускане*;
   б) да бъде *свързана с градиента*;
2. Предположения за α_k – а) да осигурява *достатъчно намаляване*;
   б) да *не е прекалено малка*.

1а) Да разгледаме първо *достатъчното спускане*. Най-напред посоката на търсене p_k трябва да е посока на спускане, т.е. да удовлетворява условието $\langle f'(x_k), p_k\rangle < 0$. Опасността, която възниква тук е посоката p_k да стане произволно близка до ортогонална на $f'(x_k)$, оставайки посока на спускане (скаларното произведение на $f'(x_k)$ p_k да е отрицателно, но много близо до нула). В този случай напредването на алгоритъма към решението ще бъде съвсем малко. За да се застраховаме срещу това предполагаме, че за някакво предварително зададено $\varepsilon > 0$ е изпълнено, че

$$-\frac{\langle f'(x_k), p_k\rangle}{\|f'(x_k)\|\|p_k\|} \geqslant \varepsilon, \quad \forall k.$$

Това условие е еквивалентно на условието $\cos\theta \geqslant \varepsilon$, където θ е ъгълът между посоката на търсене p_k и антиградиента $-f'(x_k)$. Поради тази причина това условие се нарича още ъглово условие и е условие за това посоката p_k да не бъде почти ортогонална на антиградиента $-f'(x_k)$.

1б) Посоката на търсене p_k се нарича *свързана с градиента*, ако за дадена константа $m > 0$

$$\|p_k\| \geqslant m\|f'(x_k)\|, \quad \forall k.$$

Това условие се налага, за да не може нормата на посоката на търсене да стане много по-малка от нормата на градиента.

Тези две условия върху p_k обикновено се гарантират като се направят леки модификации в методите за намиране на посока на търсене. Ние ще предполагаме, че използваният метод за намиране на посока на търсене е бил модифициран така, че да удовлетворява тези две условия. Техниките за постигане на тези две условия са специфични за всеки отделен метод.

2а) Условието за *достатъчно намаляване* на f при определяне на стъпката α_k осигурява това, че на всяка итерация се получава нетривиално намаляване на функцията f. "Нетривиалността" се измерва в термините на Тейлоровото развитие. Линейната апроксимация на $f(x_k + \alpha p_k)$ се получава от Тейлоровото развитие като

$$f(x_k + \alpha p_k) \approx f(x_k) + \alpha \langle f'(x_k), p_k \rangle.$$

При линейното търсене искаме големината на стъпката α_k да дава намаляване в стойността на функцията, което да е поне пропорционално на намаляването, предписано от горната формула. По-точно искаме

$$f(x_k + \alpha_k p_k) \leqslant f(x_k) + \mu \alpha_k \langle f'(x_k), p_k \rangle,$$

където $\mu \in (0,1)$ е предварително фиксирана константа.

Когато μ е близо до нула това условие по-лесно се удовлетворява, тъй като се изисква само малко намаляване на функцията.

Ако α е малко линейната апроксимация е добра и условието за достатъчно намаляване ще бъде изпълнено. Ако α е голяма, линейната апроксимация е лоша и намаляването, предвидено от нея може да се различава съществено от действителното намаляване на f и условието да се наруши. В този смисъл условието за достатъчно намаляване предпазва α_k от това да стане "прекалено голямо".

2б) Остана да разгледаме последното условие за α_k – това да не е *твърде малко*. То може да се гарантира по следния начин: нека p_k е посока на търсене, която удовлетворява условието за достатъчно спускане. Да дефинираме α_k като първият елемент на редицата

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^i}, \ldots,$$

който удовлетворява условието за достатъчно намаляване. Такова α_k винаги съществува. Хубавото на този алгоритъм е, че лесно се програмира. Първо се тества дали $\alpha = 1$ удовлетворява условието за достатъчно намаляване. Да отбележим, че първо се пробва $\alpha = 1$, а не $\alpha = 5$ например, тъй като в класическия метод на Нютон стойността на α е точно $\alpha = 1$ и се очаква, че в близост до решението стъпка с дължина единица ще бъде допустима, като това ще доведе и до квадратична скорост на сходимост. Ако $\alpha = 1$ не удовлетворява условието за достатъчно намаляване се опитват $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{4}$ и т.н., докато се намери допустимо α.

Теорема 19.1. *Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е функция на n променливи. Нека x_0 е дадено начално приближено решение и да дефинираме*

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k,$$

където $p_k \in \mathbb{R}^n$, а α_k е положително число. Да предположим още, че

1) *множеството $S := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leqslant f(x_0)\}$ е ограничено;*

2) $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *е липшицово непрекъсната, т.е. за някое* $L > 0$ *е изпълнено*

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leqslant L\|x - y\|.$$

3) *Векторите* p_k *удовлетворяват условието за достатъчно спускане*

$$-\frac{\langle f'(x_k, p_k\rangle}{\|f'(x_k)\|\|p_k\|} \geqslant \varepsilon > 0, \quad \forall k;$$

4) *Посоките на търсене* p_k *са свързани с производната:*

$$\|p_k\| \geqslant m\|f'(x_k)\|, \quad \forall k$$

като $m > 0$ *и са ограничени по норма, т.е.*

$$\|p_k\| \leqslant M, \quad \forall k;$$

5) *числата* α_k *са избрани като първият елемент от редицата* $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$*, който удовлетворява условието за достатъчно намаляване*

$$f(x_k + \alpha_k p_k) \leqslant f(x_k) + \mu\alpha_k\langle f'(x_k), p_k\rangle,$$

където $\mu \in (0, 1)$.

Тогава $\lim\limits_{k\to\infty} \|f'(x_k)\| = 0.$

Освен предположенията за p_k и α_k, в условията на теоремата има още предположения. Това е предположението 2 за липшицовост на производната на f и предположение 1, което гарантира, че функцията f достига минимума си в някоя точка на множеството S – тъй като S е компактно множество (от предположение 2 в частност следва, че f е непрекъсната, а това влече, че S е затворено, следователно компактно). Това означава, че теоремата не разглежда функции от вида $f(x) = e^x$, които са ограничени отдолу, но не достигат минималната си стойност. Това са съществените предположения – върху функцията. Останалите предположения касаят p_k и α_k и се удовлетворяват чрез внимателно програмиране на метода.

Заключението на теоремата е, че $f'(x_k) \to 0$, т.е. не се твърди, че редицата $\{x_k\}$ е сходяща към локален минимум. За да се докаже този по-силен резултат са необходими и по-силни предположения. Всички точки на сгъстяване на редицата $\{x_k\}$ от теоремата са стационарни точки за f. Т.е. при направените предположения за функцията f и за метода, тръгвайки от произволно начално приближение x_0 можем да намерим редица – произволна сходяща подредица на $\{x_k\}$ (а такава винаги съществува, т.к. $\{x_k\}$ се съдържа в компактното множество S), която е сходяща към стационарна точка на f.

20. Задача за условна минимизация. Глобяващи и бариерни методи за решаване.

Задачата за условна минимизация е задача за намиране на минимална стойност на функция f на n променливи, за стойности на аргумента ѝ x в дадено множество $S \subset \mathbb{R}^n$ от ограничения, която записваме като

$$(P) \quad \min_{x \in S} f(x).$$

Множеството $S \subset \mathbb{R}^n$ се нарича още множеството от допустими решения на задачата.

Методите за нейното решаване се свеждат до решаването на редица от задачи за безусловна минимизация с идеята, че границата на техните решения (ако съществува) е решение на задачата (P).

Каква е геометричната мотивация за този подход? Ако вземем *индикаторната функция на множеството* S, която се дефинира като

$$\sigma_S(x) = \begin{cases} 0, & x \in S \\ +\infty, & x \notin S \end{cases}$$

то тя може да се разглежда като безкрайно голяма глоба за нарушаване на допустимостта. Следователно, задачата за условен минимум (P) може да се трансформира в еквивалентната на нея задача за безусловен минимум

$$(\tilde{P}) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \sigma_S(x)$$

и ако можем да решим задачата $(\tilde{P})$ то сме решили и задачата (P), тъй като точка x^* е решение на (P) тогава и само тогава, когато е решение на $(\tilde{P})$.

За съжаление това е практически неосъществима идея тъй като целевата функция на задачата $(\tilde{P})$ не е дефинирана извън допустимото множество S. Дори в дефиницията на σ_S да заменим $+\infty$ с голямо положително число, новата ни задача $(\tilde{P})$ пак ще е трудно разрешима, тъй като целевата ѝ функция не е непрекъсната. Вместо това, идеалната глоба σ_S се заменя с непрекъсната функция, или още по-точно заменя се с редица от непрекъснати функции, които я апроксимират.

При *бариерните методи* тази функция (наричана още бариерен член) приближава σ_S *от вътрешността* на допустимото множество S. Тя създава бариера, която предпазва при итерациите да се достигне и премине границата на допустимото множество.

При *глобяващите методи* тази функция (наричана още глобяващ член) приближава σ_S *от външността* на допустимото множество S и служи като глоба за недопустимостта.

Бариерните методи генерират *редица от допустими точки*, която клони към решението на задачата (P) от вътрешността на допустимото множество S и по тази причина се наричат методи на вътрешните точки. Тъй като тези методи изискват непразна вътрешност на допустимото множество, те не са подходящи за задача с ограничения равенства.

Обратно, глобяващите методи позволяват недопустимост на точките като предвиждат постепенно увеличаваща се глоба за нарушаване на допустимостта и обикновено генерират редица от точки, която клони към решението на (P) от външността на допустимото множество S, т.е.

редица от недопустими точки. Поради това, че тези методи не изискват непразна вътрешност на допустимото множество, те са по-удобни за задачи с ограничения равенства, въпреки че успешно могат да работят и за задачи с ограничения неравенства.

Въпреки посочените разлики бариерните и глобяващите методи имат много общи черти като например изградените теории за тяхната сходимост и структурата на съответните им безусловни задачи. Това позволява много от теорията за бариерните методи да се адаптира за глобяващите методи и обратно.

20.1. Бариерни методи

Разглеждаме задачата за условен минимум с нелинейни ограничения неравенства

$$\begin{aligned}&\min f(x)\\&g_i(x) \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, m\end{aligned}$$

като с S означаваме допустимото множество на задачата, т.е. $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \geqslant 0, i = 1, \dots, m\}$ и предполагаме, че функциите $f, g_i : S \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ са двукратно непрекъснато диференцируеми в S.

Казахме, че бариерните методи генерират редица от точки, които лежат във вътрешността на допустимото множество. Следователно, предполагаме, че допустимото множество S на задачата има непразна вътрешност, т.е. че съществува $x_0 \in S$, такова че $g_i(x_0) > 0$ за всяко $i = 1, \dots, m$. Също така предполагаме че всяка точка от границата на S може да се достигне чрез редица от точки от вътрешността на S.

Бариерните методи осигуряват допустимост на решенията на безусловните задачи като създават бариера, която ги пази от границата на допустимото множество. За целта тези методи използват бариера, която приближава идеалната глобяваща функция σ_S откъм вътрешността на S. Как става това? Нека $\varphi(x)$ е функция на n променливи, която е непрекъсната във вътрешността на допустимото множество и която става неограничено голяма при приближаване към границата на допустимото множество откъм неговата вътрешност, т.е. $\varphi(x) \to +\infty$, когато $g_i(x) \to 0^+$ за някое i. Примери за такива функции са

- логаритмичната функция $\varphi(x) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \log(g_i(x))$ и
- обратната функция $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}$.

Нека μ е положително число. Тогава $\mu\varphi(x)$ ще клони към $\sigma_S(x)$ при $\mu \to 0^+$.

Като прибавим бариерен член от вида $\mu\varphi(x)$ към целевата функция $f(x)$ получаваме *бариерната функция*

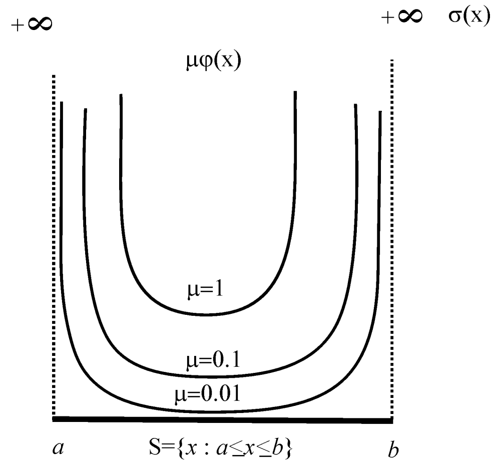
$$\beta(x, \mu) = f(x) + \mu\varphi(x),$$

в която числото μ се разглежда като бариерен параметър.

Бариерните методи решават редица от задачи за безусловен минимум от вида

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \beta(x, \mu_k)$$

за редица $\{\mu_k\}$ от положителни числа, която монотонно намалява към нула. Тъй като бариерният член е безкрайност върху границата на допустимото множество, то решенията на



Фигура 20.7. Бариерни функции приближаващи σ_S на множеството $S = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$

горната задача са във вътрешността на допустимото множество. Когато μ намалява, ефектът на бариерния член също намалява и решенията доближават границата на допустимото множество.

Защо се налага да се решават редица от безусловни задачи? Изглежда като че ли е по-добре да се реши една безусловна задача, в която да се използва малка стойност на параметъра μ, но това не се прави на практика. Причината е, че когато μ е малко задачата се решава по-трудно, тъй като тогава $\mu\varphi$ е близо до σ_S. По тази причина се започва с по-големи стойности на μ и ако μ се намалява постепенно и ако решението на безусловната задача от предходната стъпка се използва за начално приближено решение за следващата безусловна задача, то тя се решава по-лесно.

20.2. Глобяващи методи

За разлика от бариерните методи, глобяващите методи решават редица от задачи за безусловен минимум, чиито решения обикновено са недопустими за оригиналната задача за условен минимум. Те налагат глоба за нарушаване на ограниченията и тъй като глобата нараства, решенията се насочват към допустимото множество.

Предимство на глобяващите методи е, че те не изискват получените точки да са строго допустими (във вътрешността на допустимото множество) и за разлика от бариерните са подходящи за решаване на задачи с ограничения равенства.

Разглеждаме задачата за условен минимум с нелинейни ограничения равенства

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

като с S означаваме допустимото множество на задачата, т.е. $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) = 0, i = 1, \dots, m\}$ и предполагаме, че функциите $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ са двукратно непрекъснато диференцируеми в $\mathbb{R}^n$.

Глоба за нарушаване на ограниченията ще бъде непрекъсната функция $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ със свойството

$$\begin{aligned}&\psi(x) = 0, \quad \text{ако } x \text{ е допустимо (т.е. } x \in S)\\&\psi(x) > 0 \quad \text{в противен случай (т.е. } x \notin S).\end{aligned}$$

Примери за такива функции са

• $\psi(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} g_i(x)^2$ или

• $\psi(x) = \dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} |g_i(x)|^\gamma$, $\gamma \geqslant 1$.

Тежестта на глобата се контролира от положителен параметър ρ. Когато ρ нараства, функцията $\rho\psi$ приближава идеалната глоба σ_S. Чрез добавяне на члена $\rho\psi$ към целевата функция f се получава *глобяващата функция*

$$\pi(x, \rho) = f(x) + \rho\psi(x).$$

Глобяващият метод се състои в решаване на редица от задачи за безусловен минимум от вида

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \pi(x, \rho_k)$$

за редица $\{\rho_k\}$ от положителни числа, която монотонно расте към $+\infty$. В общия случай решенията на тази задача за безусловен минимум нарушават условията за допустимост. Нарастването на ρ постепенно насочва тези решения към допустимото множество. Аналогично на бариерните методи, при глобяващите методи при нарастване на ρ решаването на безусловната задача става по-трудно и затова то се прави поетапно, като решението на предходната безусловна задача се използва за начално приближено решение на следващата, което улеснява нейното решаване.

20.3. Сходимост на методите за условна минимизация

Ще засегнем въпроса за сходимост на методите за условна минимизация като ще се спрем подробно на сходимостта на бариерните методи при задача с ограничения неравенства. Резултатите за сходимост на глобяващи методи се получават по подобен начин.

И така, разглеждаме задачата за условен минимум с нелинейни ограничения неравенства

$$\begin{aligned}&\min f(x)\\&g_i(x) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m\end{aligned}$$

като с S означаваме допустимото множество на задачата, т.е.

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \geqslant 0, i = 1, \ldots, m\},$$

а с S_0 означаваме неговата вътрешност

$$S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) > 0, i = 1, \ldots, m\}.$$

Ще направим следните предположения:

1) функциите $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ са непрекъснати в $\mathbb{R}^n$;

2) множеството $\{x \in S : f(x) \leqslant \alpha\}$ е ограничено за всяко крайно $\alpha \in \mathbb{R}$;
3) множеството $S_0 \neq \emptyset$;
4) $S \equiv \overline{S_0}$, т.е. S съвпада със затварянето на вътрешността си.

От предположенията 1 и 2 следва, че f достига минимума си върху S. Предположение 3 е необходимо за дефиниране на бариерните под-задачи. Предположение 4 е необходимо, за да се избегнат случаите, когато точката на минимум е изолирана точка и в нейна околност няма вътрешни точки на допустимото множество. Като пример за необходимостта от 4 да разгледаме задачата

$$\begin{aligned} &\min f(x) = x \\ &x^2 - 1 \geqslant 0 \\ &x + 1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Допустимото ѝ множество се състои от лъча $x \geqslant 1$ и изолираната точка $x = -1$. Точката $x = -1$ е решението на задачата, но тъй като е изолирана точка не може да се приближи с точки от вътрешността на допустимото множество и бариерен метод не би могъл да клони към това решение.

Бариерната функция, която използваме за бариерния метод е от вида $\beta(x, \mu) = f(x) + \mu\varphi(x)$, където $\varphi(x)$ е непрекъсната във вътрешността на допустимото множество функция и е такава, че $\varphi(x) \to +\infty$ при $g_i(x) \to 0^+$ за някое i.

Ще докажем, че при определени условия редицата от бариерни минимуми има сходяща подредица и границата на произволна такава подредица е решение на задачата за условен минимум.

Въпреки, че на практика често се получава сходимост на цялата редица от бариерни минимуми, от теоретична гледна точка не винаги е възможно да се гарантира сходимост на цялата редица, а само сходимост на нейна подредица. Следният пример е илюстрация на такава ситуация: имаме несходяща редица със сходяща подредица. За задачата

$$\begin{aligned} &\min f(x) = -x^2 \\ &1 - x^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

логаритмичната бариерна функция е $\beta(x, \mu) = -x^2 - \mu \log(1 - x^2)$ и тя има единствен минимум $x = 0$ ако $\mu \geqslant 1$ и два минимума $x = \pm\sqrt{1 - \mu}$, ако $\mu < 1$ (като $x = 0$ е локален максимум за стойности на $\mu < 1$). Да предположим, че μ_k е редица от намаляващи бариерни параметри, които са по-малки от 1. Тогава редица от минимуми на функциите $\beta(x, \mu_k)$ може да е например редицата $x_k = (-1)^k\sqrt{1 - \mu_k}$, която осцилира в околности на точките -1 и $+1$ и следователно е разходяща. Въпреки това, нейните подредици $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k+1}\}$ са сходящи към решения на задачата с ограничения.

На практика, понеже решението на една под-задача се използва като начално приближено решение за следващата под-задача е малко вероятно редицата от минимуми, получена при пресмятанията да осцилира по начина описан по-горе и получените последователно минимуми ще бъдат всичките или в околност на -1 или в околност на $+1$ и получената редица ще бъде сходяща.

Теорема 20.1. (теорема за сходимост на бариерни методи) *Да предположим, че за задачата*

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &g_i(x) \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

са изпълнени предположенията 1) − 4).

Да предположим, че редицата от задачи за безусловна минимизация

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \beta(x,\mu) = f(x) + \mu\varphi(x)$$

се решават за стойности на параметъра $\mu > 0$*, такива че*

$$\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_k > \dots$$

където $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k = 0$.

Да предположим, че функциите $\beta(x,\mu_k)$ *имат минимум в* S_0 *за всяко* $k = 1,2,\dots$. *Нека* x_k *е глобален минимум за* $\beta(x,\mu_k)$. *Тогава*

а) $f(x_{k+1}) \leqslant f(x_k)$*;*

б) $\varphi(x_{k+1}) \geqslant \varphi(x_k)$*;*

в) *редицата* $\{x_k\}$ *има сходяща подредица;*

г) *ако* $\{x_{k_j}\}$ *е произволна сходяща подредица на* $\{x_k\}$*, то нейната граница е глобално решение на задачата с ограничения.*

Доказателство. а) Тъй като x_k е минимум за $\beta(x,\mu_k)$, то

$$\beta(x_k,\mu_k) \leqslant \beta(x,\mu_k) \quad \text{за всяко } x \in \mathbb{R}^n \text{ и в частност} \quad \beta(x_k,\mu_k) \leqslant \beta(x_{k+1},\mu_k),$$

т.е.

$$f(x_k) + \mu_k\varphi(x_k) \leqslant f(x_{k+1}) + \mu_k\varphi(x_{k+1}). \tag{20.1}$$

Тъй като x_{k+1} е минимум за $\beta(x,\mu_{k+1})$ аналогично получаваме

$$f(x_{k+1}) + \mu_{k+1}\varphi(x_{k+1}) \leqslant f(x_k) + \mu_{k+1}\varphi(x_k). \tag{20.2}$$

Умножаваме (20.1) с μ_{k+1}, а (20.2) с μ_k и събираме, за да получим

$$(\mu_k - \mu_{k+1})f(x_{k+1}) \leqslant (\mu_k - \mu_{k+1})f(x_k)$$

и тъй като $\mu_{k+1} < \mu_k$, от горното следва $f(x_{k+1}) \leqslant f(x_k)$, което е а).

б) от това, че x_k е минимум на $\beta(x,\mu_k)$ имаме (20.1) и тъй като $f(x_{k+1}) \leqslant f(x_k)$ от а), то $\varphi(x_k) \leqslant \varphi(x_{k+1})$, което е б).

в) да разгледаме множеството $S_1 = \{x \in S : f(x) \leqslant f(x_1)\}$. От непрекъснатостта на f следва, че S_1 е затворено множество, а от предположение 2) следва, че е ограничено. Следователно, S_1 е компактно. Според доказаното в а) $f(x_k) \leqslant f(x_1)$ за всяко k и редицата $\{x_k\}$ се съдържа в компактното множество S_1. Следователно $\{x_k\}$ има сходяща подредица, чиято граница е в S_1, т.е. в S.

г) Нека $\{x_{k_j}\}$ е сходяща подредица на $\{x_k\}$ и нека $\hat{x}$ е нейната граница. Тъй като $g_i(x_{k_j}) > 0$ за всяко k_j, то след граничен преход ще имаме $g_i(\hat{x}) \geqslant 0$ за всяко $i = 1,\dots,m$ и следователно $\hat{x}$ е допустима точка.

Нека f^* е минималната стойност на f върху допустимото множество S. Ще покажем, че $f^* = f(\hat{x})$ като допуснем противното, т.е. допуснем че

$$f(\hat{x}) > f^*. \tag{20.3}$$

От предположения 1) и 2) следва, че f достига минимума си върху S в точка $x_0 \in S$, т.е. $f^* = f(x_0)$. От предположение 4) следва, че съществува точка $y \in S_0$ такава, че $f(\hat{x}) > f(y)$. Да означим $\varepsilon := f(\hat{x}) - f(y)$. Очевидно $\varepsilon > 0$. От непрекъснатостта на f следва, че $\lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = f(\hat{x})$ и следователно за достатъчно големи j ще имаме

$$f(y) + \frac{1}{2}\varepsilon < f(x_{k_j}). \tag{20.4}$$

Тъй като x_k е минимум на $\beta(x, \mu_k)$, то

$$f(x_{k_j}) + \mu_{k_j}\varphi(x_{k_j}) \leqslant f(y) + \mu_{k_j}\varphi(y). \tag{20.5}$$

Ще разгледаме два случая.

i) $\hat{x} \in S_0$. Тогава за достатъчно големи j точките $x_{k_j} \in S_0$ и стойностите $\varphi(x_{k_j})$ ще бъдат ограничени (те са близо до $\varphi(\hat{x})$ поради непрекъснатостта на φ в точките на S_0). Тъй като $y \in S_0$, $\varphi(y)$ е крайно и следователно, за големи j

$$-\frac{1}{8}\varepsilon \leqslant \mu_{k_j}\varphi(x_{k_j}) \text{ и } \mu_{k_j}\varphi(y) \leqslant \frac{1}{8}\varepsilon,$$

което заедно с (20.5) дава

$$f(x_{k_j}) - \frac{1}{8}\varepsilon \leqslant f(y) + \frac{1}{8}\varepsilon \quad \text{или} \quad f(x_{k_j}) \leqslant f(y) + \frac{1}{4}\varepsilon,$$

което е в противоречие с (20.4) и следователно с допускането (20.3).

ii) $\hat{x} \in S \setminus S_0 = \partial S$. От (20.4) следва, че $f(y) < f(x_{k_j})$. Добавяме това към (20.5) и делим на $\mu_{k_j} > 0$, за да получим, че

$$\varphi(x_{k_j}) < \varphi(y).$$

Тъй като $y \in S_0$, то дясната страна е крайно число. От друга страна x_{k_j} се доближават до $\hat{x}$, което е от границата на S и лявата страна ще клони към $+\infty$ и отново получаваме противоречие. ■

Съществено допускане в Теоремата за сходимост е това, че бариерната функция има минимум в S_0. Ще дадем условие, което може да ни го гарантира.

Лема 20.1. *Да предположим, че S е компактно множество. Тогава за всяко $\mu > 0$ съществува точка $x(\mu) \in S_0$, която минимизира $\beta(x, \mu)$.*

Доказателство. Нека $x_0 \in S_0$ е произволна фиксирана точка.

Дефинираме $W := \{x \in S_0 : \beta(x, \mu) \leqslant \beta(x_0, \mu) = \beta_0\}$.

Тъй като S е компакт и $W \subset S$, то W е ограничено. Ще покажем, че W е затворено, откъдето ще следва, че W е компакт.

Нека $\{w_j\}$ е сходяща редица от точки на W с граница $\hat{w}$. Тъй като $\{w_j\} \subset S$, което е компакт то $\hat{w} \in S$. Ако $\hat{w} \in \partial S$ (т.е. $g_i(\hat{w}) = 0$ за някое i) то $\lim_{j\to\infty} \beta(w_j, \mu) = +\infty$, което е в противоречие с това, че $w_j \in W$. Следователно $\hat{w} \in S_0$. Тъй като $w_j \in W$, то $\beta(w_j, \mu) \leqslant \beta_0$ за всяко j. Непрекъснатостта на $\beta(x, \mu)$ в $\hat{w} \in S_0$ дава, че $\beta(\hat{w}, \mu) \leqslant \beta_0$ и следователно $\hat{w} \in W$.

Доказахме, че W е компакт. Тъй като $\beta(x, \mu)$ като функция на x е непрекъсната в компактното множество W, тя достига минимума си $x(\mu)$ в W. Но по дефиниция стойността на β във всяка точка от S, която не е в W трябва да е по-голяма от β_0 и следователно по-голяма от минималната стойност $\beta(x(\mu), \mu)$. Следователно $x(\mu)$ е глобален минимум на $\beta(x, \mu)$ в S. ■