Проф. ЯРОСЛАВ ТАГАМЛИЦКИ

ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ

ШЕСТО ИЗДАНИЕ

ИЗДАТЕЛСТВО НАУКА И ИЗКУСТВО СОФИЯ 1978

ПРЕДГОВОР КЪМ ЧЕТВЪРТОТО ИЗДАНИЕ

В настоящето издание са направени някои малки изменения. Така например разгледан е въпросът за интегриране по затворен път и са включени формулите на Грин, Остроградски и Стокс.

Я. Тагамлицки

Част I

ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ – ПРОСТИ ИНТЕГРАЛИ

Глава I

НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

§ 1. Увод

Читателят вече е имал случай да се запознае с някои от многобройните приложения на понятието производна. Сега ще направим още едно приложение, във връзка с което ще повдигнем един основен въпрос. Задачата, която ще решим, е следната: дадена е параболата

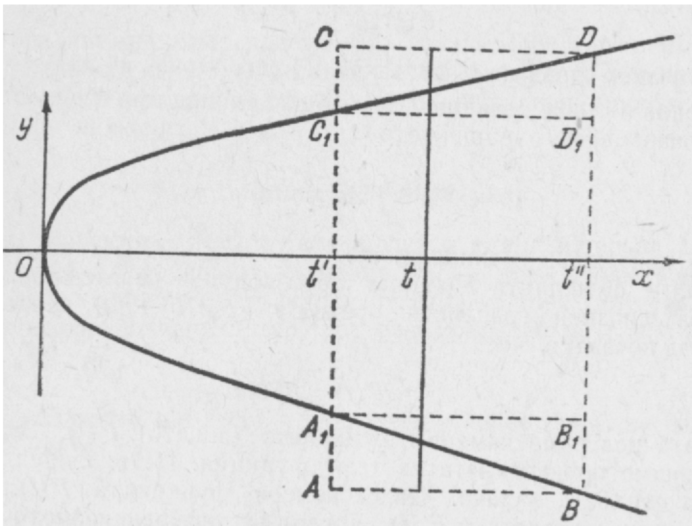
$$y^2 = 2px, \quad p > 0;$$

да се намери лицето на сегмента ѝ, който се отсича от правата с уравнение

$$x = t,$$

където t е неотрицателна константа (вж. черт. 1).

Да означим търсеното лице с $F(t)$. Ние избираме това означение, защото търсеното лице зависи от избора на t. Ще покажем, че функцията $F(t)$ има



Черт. 1

производна при всяко неотрицателно t и ще пресметнем стойността на тази производна. За тази цел фиксираме едно число t и избираме две неотрицателни числа t' и t'' така, че да имаме

$$t' \leq t \leq t''$$

и

$$t' \neq t''.$$

Очевидно лицето σ на ивицата, която е заградена от параболата и от правите $x = t'$ и $x = t''$, има стойност

$$\sigma = F(t'') - F(t').$$

От друга страна, имаме неравенствата
лицето на правоъгълника $A_1B_1C_1D_1 \leq \sigma <$ лицето на правоъгълника $ABCD$, т. е.

$$2\sqrt{2pt'}(t'' - t') \leq \sigma < 2\sqrt{2pt''}(t'' - t'),$$

откъдето

$$2\sqrt{2pt'} \leq \frac{F(t'') - F(t')}{t'' - t'} \leq 2\sqrt{2pt''}. \tag{1}$$

Да оставим t' и t'' да клонят към t чрез две произволни редици от стойности, като при това

$$t' \leq t \leq t'', \quad t'' \neq t'.$$

Като вземем предвид, че както $2\sqrt{2pt'}$, така и $2\sqrt{2pt''}$ клонят към една и съща граница (тази обща граница има стойност $2\sqrt{2pt}$), заключаваме, че отношението

$$\frac{F(t'') - F(t')}{t'' - t'}$$

също притежава граница, когато $t' \to t$ и $t'' \to t$. С това ние показахме, че функцията $F(t)$ има производна в разглежданата точка t. Извършвайки граничния преход $t' \to t$ и $t'' \to t$ в неравенството (1), заключаваме, че

$$F'(t) = 2\sqrt{2pt}. \tag{2}$$

Нашата цел е да намерим функцията (лицето) $F(t)$. Засега ние намерихме производната на тази функция. И така пред нас изниква следната задача. Да се намери функцията $F(t)$, когато е дадена производната ѝ $F'(t)$. Досега (в диференциалното смятане) се занимавахме главно с въпроса за намиране на производните на дадени функции. Сега ние за пръв път се натъкваме на обратната задача. Тази обратна задача представлява един от основните въпроси, с които се занимава така нареченото интегрално смятане.

Равенството (2) е установено при всички неотрицателни стойности на t. От друга страна, не е трудно да се види, че производната на функцията

$$\frac{4\sqrt{2p}}{3}t^{\frac{3}{2}}$$

е също $2\sqrt{2pt}$ при $t \geq 0$. Оттук заключаваме, че разликата

$$\varphi(t) = F(t) - \frac{4\sqrt{2p}}{3}t^{\frac{3}{2}}$$

е константа, защото

$$\varphi'(t) = F(t) - 2\sqrt{2pt} = 0.$$

И така при всички неотрицателни стойности на t имаме

$$\varphi(t) = \varphi(0).$$

Като вземем пред вид, че $F(0) = 0$, намираме

$$F(t) - \frac{4\sqrt{2p}}{3}t^{\frac{3}{2}} = 0$$

или

$$F(t) = \frac{4\sqrt{2p}}{3}t^{\frac{3}{2}}.$$

С това ние решихме поставената задача. При това решението на тази задача се сведе съществено към въпроса за намиране на функцията $F(t)$ в даден интервал, когато е дадена производна $F'(t)$ в този интервал.

§ 2. Неопределен интеграл

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в един интервал Δ. Казваме, че една диференцуема функция $F(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ (или неопределен интеграл от $f(x)$) в този интервал, когато при всички стойности на x от разглеждания интервал имаме

$$F'(x) = f(x).$$

За да изразим, че $F(x)$ е една примитивна функция на $f(x)$, пишем обикновено

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

(четете — интеграл от еф икс де икс).

Така например

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}$$

върху цялата ос x, защото

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

С това обаче не се изчерпват примитивните функции на функцията x^2. Така при всеки избор на константа C имаме

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C,$$

защото

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2.$$

Изобщо, ако $F(x)$ е една примитивна функция на $f(x)$ в някой интервал Δ, то $F(x) + C$ е пак примитивна функция $f(x)$ в този интервал, и то при всеки избор на константа C, защото

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x).$$

За нас обаче е особено важно, че функцията $f(x)$ няма други примитивни функции в разглеждания интервал. И наистина, ако $F_1(x)$ е също една примитивна функция на $f(x)$ в интервала Δ, то разликата на двете функции $F(x)$ и $F_1(x)$ е константа, защото функциите $F(x)$ и $F_1(x)$ имат една и съща производна и следователно производната на разликите им е нула.

От дефиницията на понятието неопределен интеграл имаме

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) \tag{1}$$

и следователно

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

защото

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Нека $\varphi(x)$ е една диференцуема функция на x. В бъдеще вместо интеграла

$$\int f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

ние често ще пишем символа

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x).$$

Освен това ние ще си служим и с други[1] опростявания в означенията. Така под

$$\int \mathrm{d}\varphi(x)$$

ще разбираме

$$\int 1\,\mathrm{d}\varphi(x)$$

и пр. При този начин на означаване имаме

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C, \tag{3}$$

защото това равенство изразява, че

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \tag{4}$$

нещо, което е вярно, защото двете функции

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x \text{ и } F(x)$$

имат една и съща производна и следователно се отличават с една адитивна (прибавъчна) константа.

Читателят трябва да помни равенствата (1), (2), (3) и (4), които изразяват в същност, че действията диференциране и интегриране са обратни едно на друго.

Разбира се, не всяка функция притежава неопределен интеграл. За да се убедим в това, разглеждаме функцията $f(x)$, дефинирана при всички стойност на x по следния начин: $f(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $f(x) = -1$ при $x < 0$. Ако допуснем, че функцията $f(x)$ притежава неопределен интеграл $F(x)$ (например върху цялата ос x), въз основа на теоремата за крайните нараствания получаваме

$$F(1) - F(0) = 1,$$

[1]Ще споменем още, че вместо $\int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ ние често ще пишем $\int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$ и пр. Най-сетне налага се да споменем, че ако една примитивна функция $F(x)$ се търси при всяко x,ние няма изрично да посочваме интервала, в който тя се търси.

$$F(0) - F(-1) = -1,$$

откъдето

$$F(1) - F(-1) = 0.$$

Последното равенство обаче противоречи на теоремата на Рол, защото функцията $F'(x) = f(x)$ не се анулира никъде.

С оглед на нашите непосредствени цели е полезно да отбележим още сега, че ако една функция $f(x)$ е развиваема в степенен ред

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

в отворения интервал $-a < x < a$, то тя сигурно притежава примитивна функция в този интервал. За да се убедим в това, достатъчно е да вземем пред вид, че редът

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu + 1} x^{\nu+1}$$

е сходящ[1] при $-a < x < a$ и че теоремата за диференциране на степенните редове ни дава $F'(x) = f(x)$.

По-късно ще докажем една много по-обща теорема, според която, ако една функция $f(x)$ е непрекъсната в един интервал Δ, тя притежава примитивна функция в този интервал.

§ 3. Таблица на основните интеграли

Читателят лесно ще провери сам валидността на следните формули във всеки интервал, в който е дефинирана подинтегралната[2] функция (за целта е достатъчно да се използува дефиницията на понятието неопределен интеграл, като се покаже, че производната на дясната страна във всяко едно от равенствата е равна на съответната подинтегрална функция):

1) $\displaystyle\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ при $n \neq -1$

във всеки интервал, в който x^n има смисъл;

[1] Двата степенни реда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu+1} x^{\nu+1},$$

както знаем, имат един и същ радиус на сходимост, защото първият ред може формално да се получи от втория чрез почленно диференциране.

[2] Функцията $f(x)$ в символа $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ се нарича подинтегрална функция.

2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$
във всеки интервал, който не съдържа началото;

3) $$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$$
във всеки интервал;

4) $$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$
във всеки интервал;

5) $$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$$
във всеки интервал;

6) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$
във всеки интервал, в който $\cos x \neq 0$;

7) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$
във всеки интервал, в който $\sin x \neq 0$;

8) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$
във всеки интервал;

9) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$
във всеки подинтервал на интервала $-1 < x < 1$;

10) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C$$
във всеки интервал, в който $|x| > 1$;

11) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + C$$
във всеки интервал.

За пример ще установим само формулата

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C, \tag{1}$$

която е валидна във всеки интервал Δ, който не съдържа началото.

Нека интервалът Δ е разположен вдясно от началото. Тогава $|x| = x$ и следователно

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

с което равенството (1) е установено в този случай. Нека интервалът Δ е разположен отляво на началото. Тогава $|x| = -x$ и следователно

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x},$$

с което равенството (1) е установено и за случая, когато интервалът Δ се намира вляво от началото.

Формулите, които разгледахме в този параграф, са основни и читателят трябва добре да ги помни.

§ 4. Елементарни свойства на обикновените интеграли

В този параграф ние ще разгледаме някои прости свойства на неопределените интеграли.

I. Нека функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ притежават неопределени интеграли в някой интервал Δ. В такъв случай функцията $f_1(x) + f_2(x)$ също притежава неопределен интеграл в Δ и[1]

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x + C. \tag{1}$$

Доказателство. И наистина функцията

$$\int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$$

е един неопределен интеграл на функцията

$$f_1(x) + f_2(x),$$

защото

$$\begin{aligned}\left(\int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x\right)' &= \left(\int f_1(x)\,\mathrm{d}x\right)' + \left(\int f_2(x)\,\mathrm{d}x\right)' \\ &= f_1(x) + f_2(x).\end{aligned}$$

II. Нека функцията $f(x)$ притежава неопределен интеграл в някой интервал Δ. В такъв случай функцията $af(x)$, където a е константа, също притежава неопределен интеграл в Δ и

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

[1]Ние често няма да пишем интеграционните константи (но, разбира се, ще ги помним). Така ние често ще пишем равенството (1) във вида

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$$

Доказателство. И наистина функцията

$$a \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

е един неопределен интеграл на функцията

$$af(x),$$

защото

$$\left(a \int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = a\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = af(x).$$

Пример 1. [1]

$$\begin{aligned}\int (x^3 + 5x^2 - 4x + 7)\,\mathrm{d}x &= \int x^3\,\mathrm{d}x + 5\int x^2\,\mathrm{d}x - 4\int x\,\mathrm{d}x + 7\int \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^4}{4} + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 7x + C.\end{aligned}$$

Пример 2.

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 1)^2\,\mathrm{d}x &= \int (x^4 - 2x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \int x^4\,\mathrm{d}x - 2\int x^2\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x + C.\end{aligned}$$

Пример 3.

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+2)(x^2-3)}{2x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 6}{2x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{x}{2} + 1 - \frac{3}{2x} - \frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} - 3\int x^{-2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{3}{2}\ln|x| + 3x^{-1} + C.\end{aligned}$$

III. Нека функцията $f(u)$ има примитивна функция в интервала Δ, нека функцията $\varphi(x)$ е диференцуема в интервала Δ' и нека стойностите на $\varphi(x)$ не напускат интервала Δ, когато x се мени в Δ'. При тези предположения ще покажем, че функцията

$$f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

притежава неопределен интеграл в интервала Δ' и ако положим

$$F(u) = \int f(u)\,\mathrm{d}u,$$

[1] Читателят трябва да разгледа *всички* примери в този параграф и да запомни как става интегрирането на по-сложните от тях.

то

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F[\varphi(x)] + C \tag{2}$$

при всички стойности на x от Δ'.

Доказателство. Правилото за диференциране на функция от функция ни дава при всеки избор на x от Δ'

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F[\varphi(x)] = F'_u[\varphi(x)]\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

защото

$$F'_u(u) = f(u).$$

Този резултат ни учи, че функцията

$$F[\varphi(x)]$$

е един неопределен интеграл на функцията $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ в интервала Δ'.

Забележка. Ние често ще записваме равенството (2) по-кратко така:

$$\int f[\varphi(x)]\,\mathrm{d}\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C. \tag{3}$$

Пример 4. [1] Да се пресметне интегралът

$$I = \int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Очевидно имаме

$$I = \int e^{x^2}\,\mathrm{d}x^2.$$

От друга страна

$$\int e^u\,\mathrm{d}u = e^u + C,$$

където u е независима променлива. Като се възползуваме от формулата (3), намираме

$$\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x^2 = e^{x^2} + C.$$

Пример 5. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Очевидно имаме

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \ln(e^x+1) + C,$$

защото

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln u \text{ при } u > 0.$$

[1]Читателят трябва да разгледа *всички* примери в този параграф и да запомни как става интегрирането на по-сложните от тях.

Пример 6. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \sqrt{2x+5}\,\mathrm{d}x \text{ при } x \geq -\frac{5}{2}.$$

Очевидно имаме

$$\int \sqrt{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{2x+5}\,\mathrm{d}(2x+1) = \frac{1}{2}\int (2x+5)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(2x+5) = \frac{1}{3}(2x+5)^{\frac{3}{2}} + C,$$

защото

$$\int u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример 7. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{a^4+x^4}, \quad a \neq 0.$$

Очевидно имаме

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{a^4+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x^2}{a^4+x^4} = \frac{1}{2a^4}\int \frac{\mathrm{d}x^2}{1+\dfrac{x^4}{a^4}} = \frac{1}{2a^4}\int \frac{\mathrm{d}x^2}{1+\left(\dfrac{x^2}{a^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\int \frac{\mathrm{d}\dfrac{x^2}{a^2}}{1+\left(\dfrac{x^2}{a^2}\right)^2} = \frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2} + C,$$

защото

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C.$$

Пример 8. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^4-x^4}}, \quad a \neq 0, \quad |x| < |a|.$$

Очевидно имаме

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x^2}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{1}{2a^2}\int \frac{\mathrm{d}x^2}{\sqrt{1-\dfrac{x^4}{a^4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\dfrac{x^2}{a^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a^2} + C,$$

защото

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C.$$

Пример 9. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Използуваме формулата
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$
В такъв случай
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos 2x\,\mathrm{d}2x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C, \end{aligned}$$
защото
$$\int \cos u\,\mathrm{d}u = \sin u + C.$$

Упражнение. Да се пресметне интегралът
$$I = \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$$
с помощта на тъждеството $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Пример 10. Да се пресметне интегралът
$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$
в кой да е интервал, в който $\sin x \neq 0$.

Очевидно имаме
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$
защото
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C.$$

Пример 11. Да се пресметне интегралът
$$I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x, \quad -1 < x < 1.$$
Очевидно имаме
$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

IV. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в някой интервал Δ; нека функцията $\varphi(t)$ е дефинирана и диференцуема в някой интервал Δ' и нека стойностите на $\varphi(t)$ принадлежат на Δ. Означаваме с N множеството от функционалните стойности на $\varphi(t)$ (очевидно N е интервал, който се съдържа в Δ).

Нека функцията $\varphi(t)$ притежава диференцуема обратна функция $\psi(t)$ и нека функцията

$$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$$

притежава неопределен интеграл в Δ'.Да положим

$$g(t) = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Ще покажем, че функцията $f(x)$ притежава примитивна функция поне в интервала N и

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = g[\psi(x)] + C. \tag{5}$$

Преди да постъпим към доказателството, нека да припомним, че съгласно дефиницията на понятието обратна функция се иска:

1) дефиниционната област на $\psi(x)$ да съвпада с множеството N от функционалните стойности на $\varphi(t)$;

2) стойностите на $\psi(x)$ да не напускат дефиниционната област Δ' на $\varphi(t)$;

3) при всички стойности на x от Δ да е в сила равенството

$$\varphi[\psi(x)] = x.$$

В дефиницията на понятието за обратна функция не се поставят никакви изисквания за диференцуемост. В нашия специален случай обаче се иска функцията $\varphi(t)$ да притежава *диференцуема* обратна функция.

След тези предварителни бележки преминаваме към доказателството.

Доказателство. Разглеждаме функцията

$$g[\psi(x)]$$

в интервала N. Тя е добре дефинирана в този интервал, защото функцията $\psi(x)$ е дефинирана в него и стойностите ѝ не напускат интервала Δ'.

Като вземем предвид, че

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

намираме

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g[\psi(x)] = f[\varphi(\psi(x))]\varphi'[\psi(x)]\psi'(x) = f(x)\varphi'[\psi(x)]\psi'(x),$$

защото

$$\varphi[\psi(x)] = x. \tag{6}$$

От друга страна, като диференцираме равенството (6) спрямо x, намираме

$$\varphi'[\psi(x)]\psi'(x) = 1,$$

т. е.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g[\psi(x)] = f(x),$$

с което нашето твърдение е доказано.

Забележка. Ако производната $\varphi'(t)$ не се анулира никъде в интервала Δ', а този интервал е краен и затворен, то функцията $\varphi(t)$ сигурно притежава диференцуема обратна функция. За да се убедим в това, ще вземем под внимание, че функцията $\varphi(t)$ е обратима (т. е. приема всяка стойност само един път). И наистина, ако допуснем противното, ще имаме поне две различни точки t_1 и t_2 от Δ', за които $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, и следователно съгласно теоремата на Рол производната на $\varphi(t)$ ще се анулира поне един път, което по допускане не е вярно. От друга страна, интервалът Δ' е краен и затворен и следователно ние можем да приложим познатата ни теорема за диференциране на обратни функции (вж. Диференциално смятане, част II, гл. III, § 15).

Наблюдателният читател ще забележи, разбира се, че в случая предположението за компактност на Δ' не е съществено. Ние го направихме, за да можем да се позовем на споменатата теорема от диференциалното смятане, която е доказана от нас при това предположение. Тази теорема е вярна обаче и в случая, когато разглежданият интервал не е компактен. Нека читателят сам обмисли доказателството.

В бъдеще вместо да казваме, че си служим с формулите (4) и (5), ще казваме накратко, че правим субституцията $x = \varphi(t)$ в интеграла

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Пример 12. [1] Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$$

в безкрайния интервал $x > 0$.

Разглеждаме функцията

$$\varphi(t) = \sqrt{t-1},$$

където $t > 1$. Множеството от функционалните стойности на тази функция съвпада точно с интересуващия ни интервал $x > 0$. Функцията

$$\psi(x) = x^2 + 1,$$

[1] Читателят трябва да разгледа *всички* примери в този параграф и да запомни как става интегрирането на по-сложните от тях.

където $x > 0$, е една обратна функция на $\varphi(t)$, защото функцията $\psi(x)$ е дефинирана при $x > 0$, стойностите ѝ принадлежат на дефиниционната област на $\varphi(t)$ и

$$\varphi[\psi(x)] = \sqrt{(x^2 + 1) - 1} = |x| = x.$$

Образуваме си помощната функция

$$g(t) = \int \frac{\varphi(t)\,\mathrm{d}\varphi(t)}{\sqrt{\varphi^2(t) + 1}} = \int \frac{\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}\sqrt{t-1}}{\sqrt{(\sqrt{t-1})^2 + 1}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C.$$

Като приложим формулата (5), намираме

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = g[\psi(x)] = \sqrt{\psi(x)} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$$

На практика записваме пресмятанията обикновено по следния начин: полагаме

$$x = \sqrt{t-1} \tag{7}$$

и пишем

$$I = \int \frac{\sqrt{t-1}\,\mathrm{d}\sqrt{t-1}}{\sqrt{(\sqrt{t-1})^2 + 1}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C;$$

като решим уравнението (7) относно t, получаваме

$$t = x^2 + 1;$$

заместваме t с равното му; то ни дава

$$I = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Същата задача можем да решим и с помощта на формулата (2) по следния начин: очевидно

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}};$$

като вземем предвид, че

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C,$$

получаваме

$$I = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Това решение има предимството, че се отнася за всички стойности на x, а не само за положителни стойности, както имахме в предишното решение.

Пример 13. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x,\ a > 0,$$

в интервала $-a < x < a$.

Разглеждаме функцията

$$\varphi(t) = a\cos t$$

при $0 < t < \pi$. Множеството от функционалните стойности на $\varphi(t)$ представлява точно интересуващият ни интервал $(-a, a)$. Функцията

$$\psi(x) = \arccos\frac{x}{a}, \quad -a < x < a,$$

е една обратна функция на $\varphi(t)$.

Образуваме си помощната функция

$$\begin{aligned} g(t) &= \int \sqrt{a^2 - \varphi^2(t)}\,\mathrm{d}\varphi(t) = \int \sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}a\cos t \\ &= -a^2 \int \sqrt{\sin^2 t}\sin t\,\mathrm{d}t = -a^2\int |\sin t|\sin t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Тук имаме $\sin t > 0$, защото $0 < t < \pi$, и следователно

$$g(t) = -a^2 \int \sin^2 t\,\mathrm{d}t.$$

По-нататък получаваме

$$\begin{aligned} g(t) &= -a^2 \int \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{-a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\int \cos 2t\,\mathrm{d}2t \\ &= \frac{-a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{-a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C. \end{aligned}$$

Като се възползуваме от формулите (4) и (5), намираме

$$I = g(\psi(x)) = -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Пример 14. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$$

при произволни реални стойности на x.

Разглеждаме функцията

$$\varphi(t) = \operatorname{tg} t$$

при $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$. Множеството от стойностите на тази функция съвпада с множеството на реалните числа.[1] Функцията

$$\psi(x) = \operatorname{arctg} x$$

е обратна на функцията $\varphi(t)$.

Образуваме си помощната функция

$$\begin{aligned} g(t) &= \int \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{[1+\varphi^2(t)]^2} = \int \frac{\mathrm{d}\operatorname{tg} t}{(t + \operatorname{tg}^2 t)^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^2\cos^2 t} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(1 + \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^2 \cos^2 t} = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\int \cos 2t\,\mathrm{d}2t + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C. \end{aligned}$$

[1] Т. е. това е точно интервалът, в който искаме да пресметнем интеграла.

Като се възползуваме от формулите (4) и (5), намираме

$$\begin{aligned} I = g[\psi(x)] &= \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\operatorname{arctg} x) + C \\ &= \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} + C = \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

Тук ние се възползувахме от формулата

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Задачи

Да се пресметнат следните интеграли:

1. $I = \int 5x^3\,\mathrm{d}x.$ Отг. $I = \frac{5}{4}x^4 + C.$

2. $I = \int (2x^3 - 3x + 5)\,\mathrm{d}x.$ Отг. $I = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.$

3. $I = \int \frac{5}{x^3}\,\mathrm{d}x,\ x > 0.$ Отг. $I = -\frac{5}{2x^2} + C.$

4. $I = \int \frac{2x^3 - 5x + 3}{x}\,\mathrm{d}x,\ x < 0.$ Отг. $I = \frac{2}{3}x^3 - 5x + 3\ln|x| + C.$

5. $I = \int \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x.$ Отг. $I = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C.$

6. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}},\ x > 0.$ Отг. $I = 2\sqrt{x} + C.$

7. $I = \int (2x+1)^2\,\mathrm{d}x.$ Отг. $I = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C.$

8. $I = \int \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x,\ 2x+3 \geq 0.$ Отг. $I = \frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}} + C.$

9. $I = \int \sqrt{2-x}\,\mathrm{d}x,\ 2-x \geq 0.$ Отг. $I = -\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} + C.$

10. $I = \int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x,\ ax+b \geq 0,\ a \neq 0,\ n \neq -1.$ Отг. $I = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C.$

11. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b},\ a \neq 0,\ ax+b < 0.$ Отг. $I = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$

12. $I = \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$ Отг. $I = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C.$

13. $I = \int e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x.$ Отг. $I = e^{\sin x} + C.$

14. $I = \int \sin(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x},\ x > 0.$ Отг. $I = -\cos(\ln x) + C.$

15. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 6x + 10}.$

Решение.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2 + 1} = \int \frac{\mathrm{d}(x+3)}{(x+3)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+3) + C.$$

16. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2 + 4x + 5}$.

Решение.

$$I = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2 + 8x + 10} = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2 + 8x + 4 + 6} = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+2)^2 + 6}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2x+2}{\sqrt{6}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \int \frac{\mathrm{d}\frac{2x+2}{\sqrt{6}}}{\left(\frac{2x+2}{\sqrt{6}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{2x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

17. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 5x + 6}$, $2 < x < 3$.

Решение.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)(x-3)} = \int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = \ln|x-3| - \ln|x-2| + C.$$

18. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + bx + c}$, $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c \neq 0$.

Упътване.

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}.$$

Отговор.

1) Ако $b^2 - 4ac < 0$, $I = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C$.

2) Ако $b^2 - 4ac > 0$, $I = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left[\frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}\right] + C$.

3) Ако $b^2 - 4ac = 0$, $I = -\frac{2}{2ax + b} + C$.

19. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2 + 2x - x^2}}$, $2 + 2x - x^2 > 0$.

Решение.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3 - (x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\frac{x-1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}}$$

$$= \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

20. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Решение.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} = \ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\right) + C$$

$$= \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + C_1.$$

21. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$.

Упътване. Разгледайте поотделно всичките случаи в зависимост от знаците на a и $b^2 - 4ac$. Сравнете със задача 18.

22. $I = \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\,\mathrm{d}x$, $x > a > 0$.

Решение.

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2 - a^2}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - a^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} - a^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2 - a^2)}{\sqrt{x^2 - a^2}} + a \int \frac{\mathrm{d}\frac{a}{x}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} = \sqrt{x^2 - a^2} + a \arcsin\frac{a}{x} + C.$$

23. $I = \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}\,\mathrm{d}x$, $x > 0$.

Решение.

$$I = \int \frac{x^2 + a^2}{x\sqrt{x^2 + a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + a^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2 + a^2)}{\sqrt{x^2 + a^2}} + a^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}}} = \sqrt{x^2 + a^2} - a \int \frac{\mathrm{d}\frac{a}{x}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}}}$$

$$= \sqrt{x^2 + a^2} - a \ln\left(\frac{a}{x} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}}\right) + C.$$

24. $I = \displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$, $b > a > 0$, $a < x < b$.

Решение.

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}\,\frac{\mathrm{d}(x^2-a^2)}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}}\,\mathrm{d}\sqrt{x^2-a^2}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2+(a^2-x^2)}}\,\mathrm{d}\sqrt{x^2-a^2} = \int \frac{\mathrm{d}\sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\dfrac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}\right)^2}}$$

$$= \arcsin\left(\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}\right) + C.$$

25. $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$, $x > -a$, $x > -b$, $a \neq b$.

Решение.

$$I = \int \frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}\right)\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right)\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}\right)}$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\int \sqrt{x+a}\,\mathrm{d}x - \int \sqrt{x+b}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{2(x+a)^{\frac{3}{2}}}{3(a-b)} - \frac{2(x+b)^{\frac{3}{2}}}{3(a-b)} + C.$$

26. $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $x > 0$.

Решение.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^{-2}+1)}{(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}} = (x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}} + C.$$

27. $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $x < 0$.

Решение.

$$I = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^{-2}+1)}{(x^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}} = -(x^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}} + C.$$

Забележка. Резултатите от задачите 26 и 27 могат да се представят още така:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

Този резултат е валиден за всички стойности на x, включително и за точката $x = 0$.

28. $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, $0 < x < 1$. Отг. $I = -\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$.

29. $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^n)^{\frac{n+1}{n}}}$, $a \neq 0$, $a + bx^n > 0$. Отг. $I = \dfrac{x}{a(x+bx^n)^{\frac{1}{n}}} + C$.

30. $I = \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x.$ Отг. $I = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C.$

31. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} \, \mathrm{d}x,\ a > 0,\ -a < x < a.$ Отг. $I = -\dfrac{a^2}{2} \arccos \dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

32. $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^2}.$ Отг. $I = \dfrac{x}{2(1 + x^2)} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$

33. $I = \int \dfrac{x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{2ax - x^2}},\ a > 0,\ 2ax - x^2 > 0.$ Отг. $I = a \arccos \dfrac{a - x}{x} - \sqrt{2ax - x^2} + C.$

34. $I = \int \sin^3 x \, \mathrm{d}x.$

Решение.

$$I = -\int \sin^2 x \, \mathrm{d} \cos x = -\int (1 - \cos^2 x) \, \mathrm{d} \cos x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

35. $I = \int \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x.$ Отг. $I = -\dfrac{1}{5} \sin^5 x + \dfrac{1}{3} \sin^3 x + C.$

36. $I = \int \dfrac{\cos x}{2 - \cos^2 x} \, \mathrm{d}x.$ Отг. $I = \operatorname{arctg}(\sin x) + C.$

37. $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x},\ \sin x \cos x \neq 0.$

Решение.

$$I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

38. $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x},\ 0 < x < \pi.$ Отг. $I = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + C.$

39. $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x},\ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}.$ Отг. $I = \ln \operatorname{tg} \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2} \right) + C.$

40. $I = \int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x,\ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}.$ Отг. $I = -\ln \cos x + C.$

41. $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{a \sin x + b \cos x},\ a \sin x + b \cos x \neq 0.$

Упътване. Положете

$$a = \rho \cos \Theta, \quad b = \rho \sin \Theta;$$

тогава

$$I = \frac{1}{\rho} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x + \Theta)}.$$

Отг. $I = \dfrac{1}{\rho} \ln \left| \operatorname{tg} \dfrac{x + \Theta}{2} \right| + C.$

42. $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}.$ Отг. $I = \operatorname{arctg} e^x + C.$

43. $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{e^x + 1}.$ Отг. $I = \ln \dfrac{e^x}{1 + e^x} + C.$

§ 5. Интегриране по части

Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ са диференцуеми в някой интервал Δ и нека функцията $v(x)u'(x)$ има примитивна в този интервал. В такъв случай функцията $u(x)v'(x)$ също има примитивна и

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x + C. \tag{1}$$

За да установим това, достатъчно е да покажем, че функцията

$$u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

е един неопределен интеграл за функцията $u(x)v'(x)$. Това се вижда непосредствено от следното равенство:

$$\begin{aligned}\left[u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x\right]' &= [u(x)v(x)]' - \left[\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x\right]' \\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - v(x)u'(x) = u(x)v'(x).\end{aligned}$$

Ние обикновено ще пишем равенството (1) във вида

$$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x) + C. \tag{2}$$

Равенството (2) се нарича формула за интегриране по части.

Пример 1. [1] Да се пресметне интегралът

$$I = \int \ln x\,\mathrm{d}x, \quad x > 0.$$

Решение. Прилагаме формулата (2), като избираме

$$u(x) = \ln x, \quad v(x) = x.$$

Тази формула ни дава

$$\begin{aligned}\int \ln x\,\mathrm{d}x &= (\ln x)x - \int x\,\mathrm{d}\ln x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C.\end{aligned}$$

[1] Читателят трябва да разгледа *всички* примери в този параграф и да запомни как става интегрирането на по-сложните от тях.

Пример 2. Да се пресметне интегралът

$$I = \int x \ln x \, \mathrm{d}x, \quad x > 0.$$

Решение. Очевидно

$$I = \frac{1}{2} \int \ln x \, \mathrm{d}x^2.$$

Прилагаме формулата (2), като избираме

$$u(x) = \ln x, \quad v(x) = x^2.$$

Това ни дава

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}(\ln x)x^2 - \frac{1}{2} \int x^2 \, \mathrm{d} \ln x = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{4} x^2 + C. \end{aligned}$$

Пример 3. Да се пресметне интегралът

$$I = \int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x.$$

Решение. Очевидно

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int x^2 \, \mathrm{d} \operatorname{arctg} x \\ &= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} \\ &= \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \sqrt{x^2 - a^2} \, \mathrm{d}x, \quad x > a > 0.$$

Решение. Като се възползуваме от формулата за интегриране по части, намираме

$$\begin{aligned}
I &= x\sqrt{x^2-a^2} - \int x \,\mathrm{d}\sqrt{x^2-a^2} = x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x - a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \\
&= x\sqrt{x^2-a^2} - I - a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.
\end{aligned}$$

Оттук получаваме

$$2I = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C$$

и следователно

$$I = \frac{x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C}{2}.$$

Забележка. Като приложихме формулата за интегриране по части, ние използувахме в същност, че функцията

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

има примитивна в интервала $x > a$. Това обаче не се вижда непосредствено от изложеното досега, поради което решението не може да се счита за завършено. След като обаче веднъж е получена функцията

$$F(x) = \frac{x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{2},$$

ние можем да установим лесно, че тя наистина е една примитивна на функцията $\sqrt{x^2-a^2}$ при $x > a$. За целта е достатъчно да покажем с директно пресмятане, че

$$F'(x) = \sqrt{x^2-a^2}.$$

По-късно ще покажем, че ако една функция е непрекъсната в един интервал, тя сигурно има примитивна в този интервал, нещо, което ще ни освободи от необходимостта да прецизираме изложеното тук решение. Нека отбележим обаче, че средствата, с които разполагаме досега, също ни дават възможност да установим (макар и по-сложно), че функцията $\varphi(x)$ има примитивна при $x > a$. Това може да стане например така: полагаме

$$x = a\frac{3-t}{1+t},$$

където $-1 < t < 1$; в такъв случай интегралът

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x$$

се преобразува формално в интеграла

$$g(t) = -\frac{4a^2}{\sqrt{8}}\int \frac{(3-t)^2}{(1-t)^4\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t;$$

функцията

$$h(t) = -\frac{4a^2}{\sqrt{8}}\frac{(3-t)^2}{(1+t)^4\sqrt{1-t}}$$

обаче има примитивна в интервала $-1 < t < 1$, защото е развиваема в степенен ред, както ни учи Нютоновият бином и правилото за умножаване на редове; след като е установено съществуването на една примитивна функция на $h(t)$ при $-1 < t < 1$, ние можем да твърдим въз основа на теоремата за смяна на променливите, че функцията $\varphi(x)$ също има примитивна при $x > a$.

Пример 5. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad a > 0,\ -a < x < a.$$

Решение. Като използуваме формулата за интегриране по части, намираме

$$\begin{aligned}
I &= x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\,\mathrm{d}\sqrt{a^2-x^2} = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-a^2+a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int \frac{\mathrm{d}\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} - I \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a} - I + C.
\end{aligned}$$

Оттук получаваме

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C$$

и следователно

$$I = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C}{2}.$$

Забележка 1. Сравнете с предната задача. Съществуването на неопределения интеграл

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x$$

при $-a < x < a$, което използувахме при интегрирането по части, следва например от това, че подинтегралната функция е развиваема в степенен ред при $-a < x < a$. Както вече имахме случай да отбележим, това ще следва и от общата теорема (която ще докажем по-късно) за съществуване на неопределен интеграл във всеки интервал, в който подинтегралната функция е непрекъсната.[1]

Забележка 2. В пример 13, § 4 на тази глава е посочено как разглежданият тук интеграл може да се пресметне със субституция.

Пример 6. Да се пресметне интегралът

$$I_n = \int x^n e^x\,\mathrm{d}x,$$

където n е цяло положително число.

Решение. Очевидно

$$I_n = \int x^n\,\mathrm{d}e^x = x^n e^x - \int e^x\,\mathrm{d}x^n = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\,\mathrm{d}x$$

или

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}. \tag{3}$$

Така намерената рекурентна зависимост ни позволява да изразим I_n чрез I_{n-1}. Прилагайки няколко пъти формулата (3), добиваме възможност да изразим I_n чрез познатия интеграл

$$I_0 = \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C.$$

[1]В бъдеще често ще има място за подобни забележки, обаче ние повече няма да ги правим.

Така например, за да пресметнем интеграла

$$I_3 = \int x^3 e^x \, \mathrm{d}x,$$

използуваме равенствата

$$\begin{aligned} I_3 &= x^3 e^x - 3I_2, \\ I_2 &= x^2 e^x - 2I_1, \\ I_1 &= xe^x - I_0, \\ I_0 &= e^x + C. \end{aligned}$$

Като елиминираме I_2, I_1, I_0, получаваме

$$I_3 = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + C_1,$$

където сме положили $-6C = C_1$.

Пример 7. Да се пресметне интегралът

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^n},$$

където n е цяло положително число.

Решение. При $n = 1$ имаме познат интеграл. Нека $n > 1$. В такъв случай извършваме следните преобразувания:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{1 + x^2 - x^2}{(1+x^2)^n} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2 \, \mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} \\ &= I_{n-1} - \frac{1}{2} \int \frac{x \, \mathrm{d}(x^2+1)}{(1+x^2)^n} = I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \int x \, \mathrm{d} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \\ &= I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \, \mathrm{d}x \\ &= I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} \cdot I_{n-1}. \end{aligned}$$

Оттук получаваме

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Като продължим няколко пъти тази формула или като повторим няколко пъти разсъжденията, с помощта на които я получихме, стигаме до познатия интеграл

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

Като пример да пресметнем интеграла

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}.$$

Очевидно имаме

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} \\
&= \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x\,\mathrm{d}(x^2+1)}{(1+x^2)^2} = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int x(1+x^2)^{-2}\,\mathrm{d}(1+x^2) \\
&= \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}\frac{(1+x^2)^{-2+1}}{-2+1} = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}\frac{1}{1+x^2} \\
&= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C
\end{aligned}$$

и следователно

$$I_2 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Сравнете с пример 14 към § 4 на тази глава.

Пример 8. Да се пресметне интегралът

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\,\mathrm{d}x,$$

където числата m и n са цели (положителни, отрицателни или нули).

Решение. При $m \neq -1$ имаме

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \int \sin^m x \cos^{n-1} x \,.\, \cos x\,\mathrm{d}x = \int \sin^m x \cos^{n-1} x\,\mathrm{d}\sin x \\
&= \frac{1}{m+1}\int \cos^{n-1} x\,\mathrm{d}\sin^{m+1} x \\
&= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int \sin^{m+1} x\,\mathrm{d}\cos^{n-1} x \\
&= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int (\sin^{m+1} x)(n-1)(\cos^{n-2} x)(-\sin x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^m x \sin^2 x \cos^{n-2} x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x (1-\cos^2 x) \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x - \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^n x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2} - \frac{n-1}{m+1} \cdot I_{m,n}.
\end{aligned}
$$

Оттук намираме

$$
(n+m) I_{m,n} = \cos^{n-1} x \sin^{m+1} x + (n-1) I_{m,n-2}. \tag{4}
$$

Тази формула, която изведохме при предположение, че $m \neq -1$, е вярна и при $m = -1$, както това се вижда, като сравним производните на двете страни на равенството (4).

По същия начин получаваме при $n \neq -1$

$$
\begin{aligned}
I_{m,n} &= \int \sin^{m-1} x \cos^n x \sin x \, \mathrm{d}x = -\int \sin^{m-1} x \cos^n x \, \mathrm{d} \cos x \\
&= -\frac{1}{n+1} \int \sin^{m-1} x \, \mathrm{d} \cos^{n+1} x \\
&= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \cos^{n+2} x \sin^{m-2} x \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \cos^n x (1-\sin^2 x) \sin^{m-2} x \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n} \frac{m-1}{n+1} I_{m,n}.
\end{aligned}
$$

Оттук намираме[1]

$$
(m+n) I_{m,n} = -\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m-1) I_{m-2,n}. \tag{5}
$$

С помощта на формулите (4) и (5) ние можем да изразим $I_{m,n}$ чрез $I_{m,n-2}$ и $I_{m-2,n}$, стига да имаме $m + n \neq 0$. Ние имаме интерес да си служим с формулата (4), съответно (5), когато числото n, съответно m, е по-голямо от 1.

Ако числото n е отрицателно и $n + 1 \neq 0$, бихме могли да постъпим по следния начин:

$$
\int \sin^m x \cos^n x \, \mathrm{d}x = \int \sin^{m+2} x \cos^n x \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\int \sin^{m+2} x \cos^n x \, \mathrm{d} \operatorname{ctg} x
$$

[1]Това равенство е валидно и при $n = -1$; в това се убеждаваме, като сравним производните на двете му страни.

$$
\begin{aligned}
&= -\int \sin^{m+n+2} x \frac{\cos^n x}{\sin^n x} \, \mathrm{d} \operatorname{ctg} x = -\int \sin^{m+n+2} x (\operatorname{ctg} x)^n \, \mathrm{d} \operatorname{ctg} x \\
&= -\frac{1}{n-1} \int \sin^{m+n+2} x \, \mathrm{d} (\operatorname{ctg} x)^{n+1} \\
&= -\frac{1}{n+1} \sin^{m+n+2} x \operatorname{ctg}^{n+1} x + \frac{1}{n+1} \int \operatorname{ctg}^{n+1} x \, \mathrm{d} \sin^{m+n+2} x \\
&= \frac{-1}{n+1} \sin^{m+n+2} x \operatorname{ctg}^{n+1} x + \frac{m+n+2}{n+1} \int \operatorname{ctg}^{n+1} x \sin^{m+n+1} x \cos x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{-\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin^m x \cos^{n+2} x \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

откъдето[1]

$$
I_{m,n} = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} I_{m,n+2}. \tag{6}
$$

По този начин изразихме интеграла $I_{m,n}$ чрез $I_{m,n+2}$. Аналогично при $m+1 \neq 0$ намираме

$$
\begin{aligned}
\int \sin^m x \cos^n x \, \mathrm{d}x &= \int \sin^m x \cos^{n+2} x \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^m \cos^{n+m+2} x \, \mathrm{d} \operatorname{tg} x \\
&= \int (\operatorname{tg} x)^m \cos^{n+m+2} x \, \mathrm{d} \operatorname{tg} x = \frac{1}{m+1} \int \cos^{n+m+2} x \, \mathrm{d} (\operatorname{tg} x)^{m+1} \\
&= \frac{1}{m+1} \cos^{m+n+2} x \operatorname{tg}^{m+1} x - \frac{1}{m+1} \int \operatorname{tg}^{m+1} x \, \mathrm{d} \cos^{n+m+2} x \\
&= \frac{\cos^{n+1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n+m+2}{m+1} \int \operatorname{tg}^{m+1} x \cos^{n+m+1} x \sin x \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

откъдето[2]

$$
I_{m,n} = \frac{\cos^{n+1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n+m+2}{m+1} I_{m+2,n}. \tag{7}
$$

Ние използваме формулата (7), когато числото m е отрицателно.

Като приложим няколко пъти формулите (4), (5), (6) и (7) или още по-добре, като повторим няколко пъти разсъжденията, с помощта на които ги получихме, можем винаги да изразим интеграла $I_{m,n}$ чрез някой от следните познати интеграли:

$$
I_{0,0} = \int \mathrm{d}x = x + C;
$$

[1] Формулите (4) и (6) не са съществено различни. За да се убедим в това, достатъчно е да решим равенството (4) относно $I_{m,n-2}$ и да заменим n с $n+2$.

[2] Формулите (5) и (7) не са съществено различни.

$$I_{1,0} = \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C;$$

$$I_{0,1} = \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C;$$

$$I_{1,1} = \int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \,\mathrm{d} \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + C;$$

$$I_{1,-1} = \int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d} \cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C;$$

$$I_{-1,1} = \int \frac{\cos x}{\sin x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d} \sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C;$$

$$I_{-1,0} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\dfrac{\mathrm{d}x}{2\cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C;$$

$$I_{-1,-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} = \int \frac{\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} = \int \frac{\mathrm{d} \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C;$$

$$I_{0,-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

Така например ние можем да пресметнем интеграла

$$I_{2,0} = \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$$

по следния начин:

$$\begin{aligned} I_{2,0} &= \int \sin x \sin x \,\mathrm{d}x = -\int \sin x \,\mathrm{d} \cos x = -\sin x \cos x + \int \cos x \,\mathrm{d} \sin x \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \,\mathrm{d}x \\ &= -\sin x \cos x + x - I_{2,0} + C, \end{aligned}$$

откъдето

$$2I_{2,0} = -\sin x \cos x + x + C$$

и следователно
$$I_{2,0} = \frac{-\sin x \cos x + x + C}{2}.$$

Сравнете с пример 9 в § 4 на тази глава.

Като втори пример ще разгледаме интеграла
$$I_{0,-3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Очевидно имаме
$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x} &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\int \sin^{-1} x \operatorname{ctg}^{-3} x \,\mathrm{d}\operatorname{ctg} x\\ &= \frac{1}{2}\int \sin^{-1} x \,\mathrm{d}\operatorname{ctg}^{-2} x = \frac{1}{2}\sin^{-1} x \operatorname{ctg}^{-2} - \frac{1}{2}\int \operatorname{ctg}^{-2} x \,\mathrm{d}\sin^{-1} x\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.\end{aligned}$$

Разгледаните тук общи пътища за пресмятане на интеграли от вида
$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \,\mathrm{d}x$$
не винаги са най-простите. Така например, за да пресметнем интеграла
$$I_{0,3} = \int \cos^3 x \,\mathrm{d}x,$$
по-добре е да постъпим така:
$$\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int \cos^2 x \,\mathrm{d}\sin x = \int (1 - \sin^2 x)\,\mathrm{d}\sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Същото се отнася за интеграла
$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \operatorname{tg}^2 x \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\\ &= \operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.\end{aligned}$$

Пример 9. Да се пресметнат интегралите
$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx \,\mathrm{d}x,$$

$$I_2 = \int e^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x$$

при $a^2 + b^2 \neq 0$.

Решение. Формулата за интегриране по части ни дава при $a \neq 0$

$$\int e^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int \cos bx \, \mathrm{d}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x,$$
$$\int e^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int \sin bx \, \mathrm{d}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x$$

или по-кратко

$$I_1 = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} I_2,$$
$$I_2 = \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} I_1.$$

(Ние не пишем интеграционните константи само за краткост.)

Оттук намираме

$$I_1 = \frac{e^{ax}[a \cos bx + b \sin bx]}{a^2 + b^2},$$
$$I_2 = \frac{e^{ax}[a \sin bx - b \cos bx]}{a^2 + b^2}.$$

Ние получихме тези формули при предположението, че $a \neq 0$. Те са валидни обаче и при по-общото предположение, че имаме $a^2 + b^2 \neq 0$, което се вижда с директна проверка.

Задачи

Да се пресметнат следните интеграли:

1. $I = \int x^n \ln x \, \mathrm{d}x$, $x > 0$, $n \neq -1$. *Отговор*. $I = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$.

2. $I = \int x^n (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x$, $x > 0$, $x \neq -1$.
Отговор. $I = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^2 - \dfrac{2}{(n+1)^2} x^{n+1} \ln x + \dfrac{2}{(n+1)^3} x^{n+1} + C$.

3. $I = \int x^3 e^x \, \mathrm{d}x$. *Отговор*. $I = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$.

4. $I = \int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$. *Отговор*. $I = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C$.

5. $I = \int \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x$, $-1 < x < 1$. *Отговор*. $I = -\dfrac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1}{2} \arcsin x + C$.

6. $I = \int \sqrt{a^2 + x^2} \, \mathrm{d}x$. *Отговор*. $I = \dfrac{1}{2} \left[x \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C \right]$.

7. $I_1 = \int e^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x$, $I_2 = \int e^{ax} \sin bx \, \mathrm{d}x$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Отговор. $I_1 = e^{ax} \dfrac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} + C_1$, $I_2 = e^{ax} \dfrac{-b \cos bx + a \sin bx}{a^2 + b^2} + C_2$.

8. $I = \int \arcsin x \, \mathrm{d}x$, $-1 < x < 1$. *Отговор.* $I = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$.

9. $I = \int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$. *Отговор.* $I = x \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$.

10. $I = \int x \arcsin x \, \mathrm{d}x$, $-1 < x < 1$. *Отговор.* $I = \dfrac{2x^2 - 1}{4} \arcsin x + \dfrac{x}{4} \sqrt{1 - x^2} + C$.

11. $I = \int x^2 \arcsin x \, \mathrm{d}x$, $-1 < x < 1$. *Отговор.* $I = \dfrac{2 + x^2}{9} \sqrt{1 - x^2} + \dfrac{x^3}{3} \arcsin x + C$.

12. $I = \int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$. *Отговор.* $I = \dfrac{1}{2}(x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x) + C$.

13. $I = \int \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \, \mathrm{d}x$, $x > 0$. *Отговор.* $I = -\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C$.

14. $I = \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$. *Отговор.* $I = \dfrac{x + \sin x \cos x}{2} + C$.

15. $I = \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$. *Отговор.* $I = \dfrac{x - \sin x \cos x}{2} + C$.

16. $I = \int \cos^4 x \, \mathrm{d}x$. *Отговор.* $I = \dfrac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \dfrac{3}{8} \cos x \sin x + \dfrac{3}{8} x + C$.

17. $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x}$, $0 < x < \pi$. *Отговор.* $I = -\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{3} \operatorname{cotg}^3 x + C$.

18. $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^4 x}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. *Отговор.* $I = \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{cotg} 2x + C$.

19. $I = \int \sin^{n-1} x \cos(n+1)x \, \mathrm{d}x$.

Отговор.
$$\begin{aligned} I &= \int \sin^{n-1} x (\cos nx \cos x - \sin nx \sin x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n} \int \cos nx \, \mathrm{d} \sin^n x - \int \sin^n x \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\sin^n x \cos nx}{n} - \frac{1}{n} \int \sin^n x \, \mathrm{d} \cos nx - \int \sin^n x \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\sin^n x \cos nx}{n} + C. \end{aligned}$$

20. $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^2}$. *Отговор.* $I = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x}{1 + x^2} + C$.

21. $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^3}$. *Отговор.* $I = \dfrac{3}{8} \operatorname{arctg} x + \dfrac{3x}{8(1 + x^2)} + \dfrac{x}{4(1 + x^2)^2} + C$.

22. $I = \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$, $x > 0$. *Отговор.* $I = (x + 1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$.

23. $I = \int \dfrac{\arcsin x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}x$, $-1 < x < 1$.

Отговор.
$$\begin{aligned} I &= \int \arcsin x \, \mathrm{d} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \arcsin x - \int \frac{x \, \mathrm{d}x}{1 - x^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \arcsin x + \frac{1}{2} \ln(1 - x^2) + C. \end{aligned}$$

24. $I_1 = \int \dfrac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x$, $I_2 = \int e^{\arcsin x} \, \mathrm{d}x$, $-1 < x < 1$.

Отговор. $I_1 = \dfrac{x - \sqrt{1-x^2}}{2} e^{\arcsin x} + C_1$, $I_2 = \dfrac{x + \sqrt{1-x^2}}{2} e^{\arcsin x} + C_2$.

25. $I = \displaystyle\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$, $x > 0$. *Отговор.* $I = x\dfrac{\sin(\ln x) - \cos(\ln x)}{2} + C$.

26. $I = \displaystyle\int e^{ax}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$, $a \neq 0$. *Отговор.* $I = e^{ax}\left[\dfrac{\sin 2x}{a^2+4} + \dfrac{a}{2}\dfrac{\cos 2x}{a^2+4} + \dfrac{1}{2a}\right]$.

27. $I = \displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$. *Отговор.* $I = \dfrac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + C$.

28. $I = \displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}\,\mathrm{d}x$, $x > 0$. *Отговор.* $I = \dfrac{2}{3}(e^x + 2)\sqrt{e^x - 1} + C$.

29. $I = \displaystyle\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, $-1 < x < 1$. *Отговор.* $I = x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C$.

30. $I = \displaystyle\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Отговор. $I = x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C$.

31. $I = \displaystyle\int \ln\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right)\mathrm{d}x$, $-1 < x < 1$.

Отговор. $I = x\ln\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right) + \dfrac{1}{2}(\arcsin x - x) + C$.

32. $I = \displaystyle\int x e^x \cos x\,\mathrm{d}x$. *Отговор.* $I = \dfrac{1}{2} x e^x(\sin x + \cos x) - \dfrac{1}{2} e^x \sin x + C$.

33. $I = \displaystyle\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,\mathrm{d}x$.

Отговор. $I = \dfrac{1}{2}(x \operatorname{arctg} x)^2 + \dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg} x) - x\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

§ 6. Разлагане на дробни рационални функции[1]

В този и следващите два параграфа ще изложим един общ метод за пресмятане на интеграли от рационални функции. Една функция $R(x)$ се

[1] В този параграф ние ще използуваме особено много познанията на читателя от висшата алгебра. Така ние ще предполагаме, че читателят е запознат с комплексните числа и познава основните свойства на полиномите.

нарича рационална, когато тя може да се представи[1] във вида[2]

$$R(x) = \frac{p_0x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_n}{q_0x^m + q_1x^{m-1} + \cdots + q_m}, \quad q_0 \neq 0,$$

където коефициентите $p_0, p_1, \ldots, p_n; q_0, q_1, \ldots, q_m$ и целите неотрицателни числа n и m не зависят от x. Ние ще разглеждаме само рационални функции с реални коефициенти.

Да разгледаме полинома

$$f(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + \cdots + q_m.$$

Нека a е корен на уравнението $f(x) = 0$. Както е известно от висшата алгебра, полиномът $f(x)$ може да се представи във вида[3]

$$f(x) = (x - a)^\alpha \varphi(x),$$

[1]В цялата дефиниционна област

[2]Читателят знае, че ако $m = 0$, то $R(x)$ се нарича полином. Тази терминология ни позволява да изкажем по следния начин дефиницията на понятието (дробна) рационална функция. Една функция се нарича рационална, когато тя може да се представи като частно на два полинома. (При това се иска, разбира се, полиномът в знаменателя да не се анулира тъждествено.)

[3]Доказателството може да се извърши например с помощта на формулата на Тейлор за полиноми, която, както е известно от висшата алгебра, е валидна и в областта на комплексните числа. И наистина нека α е най-малкото цяло положително число, за което $f^\alpha(a) \neq 0$. Такова число сигурно съществува, защото

$$f^{(m)}(a) = q_0m! \neq 0.$$

Да разгледаме формулата на Тейлор

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^m(a)}{m!}(x - a)^m.$$

Като вземем под внимание, че

$$f(a) = \cdots = f^{(\alpha-1)}(a) = 0,$$

намираме

$$f(x) = \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x - a)^\alpha + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x - a)^m.$$

Да положим

$$\varphi(x) = \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x - a)^{m-\alpha}.$$

В такъв случай

$$f(x) = (x - a)^\alpha \varphi(x)$$

и

$$\varphi(a) = \frac{f^\alpha(a)}{\alpha!} \neq 0.$$

където $\varphi(x)$ е полином, α — цяло положително число[1] и $\varphi(a) \neq 0$. Ако коренът a е реален, то коефициентите на $\varphi(x)$ са също така реални.

Да положим за краткост

$$g(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_n.$$

Нека коренът a е реален. Ние ще покажем, че може да се намери еднозначно реална константа A и полином с реални коефициенти $h(x)$ по такъв начин, че да имаме

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{h(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)}. \tag{1}$$

Ще започнем с най-простия въпрос — с въпроса за единственост.

Да допуснем за момент, че наистина съществува константа A и полином $h(x)$ с исканото свойство. В такъв случай имаме

$$g(x) = A\varphi(x) + h(x)(x-a). \tag{2}$$

Равенството (1) има смисъл, разбира се, само при такива стойности на x, за които $f(x) \neq 0$. По-специално трябва да имаме $x \neq a$. Поне при тези стойности на x е валидно и равенството (2). По този начин е осигурена валидността на равенството (2) при безбройно много стойности на x. От това обаче следва, че това равенство е валидно при всички стойности на x без изключение.[2] Специално при $x = a$ получаваме

$$g(a) = A\varphi(a)$$

и следователно

$$A = \frac{g(a)}{\varphi(a)} \tag{3}$$

и

$$h(x) = \frac{\varphi(a)g(x) - g(a)\varphi(x)}{(x-a)\varphi(a)}. \tag{4}$$

С това е показано, че константата A и полиномът $h(x)$ не могат да бъдат други освен тези, които се дават от равенствата (3) и (4) (ако въобще интересуващата ни задача за представяне на функцията $\frac{g(x)}{f(x)}$ във вида (1) има

[1] Числото α се нарича кратност на корена a.

[2] Ние знаем, че ако два полинома приемат една и съща стойност при безбройно много стойности на независимата променлива, те са тъждествено равни помежду си.

решение). По този начин ние получихме (положителен) отговор на въпроса за единственост.

Преминаваме към въпроса за съществуване. Тук ще се ръководим от резултатите, които добихме, изследвайки въпроса за единственост.

Разглеждаме помощния полином

$$\psi(x) = g(x) - A\varphi(x), \tag{5}$$

където[1]

$$A = \frac{g(a)}{\varphi(a)}.$$

В такъв случай очевидно имаме

$$\psi(a) = g(a) - \frac{g(a)}{\varphi(a)}\varphi(a) = 0.$$

Въз основа на този резултат ние можем да твърдим (както ни учи висшата алгебра[2]), че полиномът $\psi(x)$ се дели без остатък на $x - a$. Това означава, че полиномът $\psi(x)$ може да се представи във вида

$$\psi(x) = (x - a)h(x), \tag{6}$$

където $h(x)$ е полином. Равенствата (5) и (6) ни дават

$$g(x) = A\varphi(x) + (x - a)h(x),$$

откъдето

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A\varphi(x)}{f(x)} + \frac{(x - a)h(x)}{f(x)}$$

и следователно

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x - a)^{\alpha}} + \frac{h(x)}{(x - a)^{\alpha-1}\varphi(x)}.$$

[1]При избора на константа A ние се ръководим от равенство (3).

[2]Верността на това твърдение е очевидна, ако полиномът $\psi(x)$ се анулира тъждествено. Ако полиномът $\psi(x)$ не се анулира тъждествено, ние ще означим с k неговата степен. В такъв случай, като вземем под внимание, че $\psi(a) = 0$, получаваме от формулата на Тейлор равенството

$$\psi(x) = \frac{\psi'(a)}{1!}(x - a) + \frac{\psi''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{\psi^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$

или

$$\psi(x) = (x - a)\left[\frac{\psi'(a)}{1!} + \frac{\psi''(a)}{2!}(x - a) + \cdots + \frac{\psi^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^{k-1}\right].$$

С това твърдението е доказано.

С това ние доказахме, че е възможно да се намери по такъв начин една константа A и един полином $h(x)$, че да имаме (1) при всички стойности на x, за които $f(x) \neq 0$.

Като приложим няколко пъти получения резултат, ние добиваме възможност да представим функцията $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ във вида

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha}}{x-a} + \frac{p(x)}{\varphi(x)}, \tag{7}$$

където $A_1, A_2, \ldots, A_{\alpha}$ са константи, а $p(x)$ е полином на x. За да се убедим в това, представяме $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ във вида

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{g_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)},$$

където A_1 е константа, а $g_1(x)$ е полином. Както вече знаем от току-що доказаната теорема, това може да се направи. Като приложим още веднъж тази теорема, заключаваме, че функцията

$$\frac{g_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)}$$

може да се представи във вида

$$\frac{g_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{g_2(x)}{(x-\alpha)^{\alpha-2}\varphi(x)}$$

(разбира се, когато $\alpha - 1 > 0$).

Продължавайки тези разсъждения, намираме

$$\frac{g_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}\varphi(x)} = \frac{A_3}{(x-a)^{\alpha-2}} + \frac{g_3(x)}{(x-a)^{\alpha-3}\varphi(x)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{g_{\alpha-1}(x)}{(x-a)\varphi(x)} = \frac{A_{\alpha}}{x-a} + \frac{g_{\alpha}(x)}{\varphi(x)}.$$

От тази верига равенства получаваме равенството (7), където

$$p(x) = g_{\alpha}(x).$$

Представянето (7) е валидно и тогава, когато a е комплексно число. В такъв случай обаче ние не можем да твърдим изобщо, че коефициентите

$A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$ са реални. Но и в този случай ние можем да дадем едно разлагане на рационалната функция $\frac{g(x)}{f(x)}$, при което няма да става нужда да напускаме областта на реалните числа.

От висшата алгебра е известно следното: ако коефициентите на уравнението

$$f(x) = 0,$$

където

$$f(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \cdots + q_m$$

са реални и a е един корен на това уравнение от кратност α, то числото $\overline{a}$ е също[1] негов корен от кратност α. В случая, когато коренът a не е реален, ние можем (както знаем от висшата алгебра) да представим полинома $f(x)$ във вида

$$f(x) = (x - a)^\alpha (x - \overline{a})^\alpha P(x),$$

където $P(x)$ е полином с *реални* коефициенти и $P(a) \neq 0$. Разкривайки скобите, ние получаваме

$$(x - a)(x - \overline{a}) = x^2 - (a + \overline{a})x + a\overline{a}.$$

Ако означим реалните числа $-(a + \overline{a})$ и $\overline{a}a$ съответно с p и q, получаваме

$$f(x) = (x^2 + px + q)^\alpha P(x).$$

И така нека коренът a не е реален. Ще покажем, че е възможно да се изберат (и то еднозначно) две *реални* константи M и N и полином с *реални* коефициенти $Q(x)$ по такъв начин, че при $f(x) \neq 0$ да имаме

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\alpha} + \frac{Q(x)}{(x^2 + px + q)^{\alpha - 1} P(x)}. \tag{8}$$

Ние и тук, както по-горе, ще започнем с по-простия (и по-малко интересния) въпрос за единственост. Ако допуснем, че съществуват две реални константи M и N и полином $Q(x)$ с реални коефициенти, за които е изпълнено (8) при $f(x) \neq 0$, то в такъв случай при всички стойности на x ще имаме

$$g(x) = (Mx + N)P(x) + Q(x)(x^2 + px + q). \tag{9}$$

[1]Нека $a = u + iv$, където u и v са реални числа. Със знака $\overline{a}$ се означава числото $u - iv$. Числото $\overline{a}$ се нарича конюговано или спрегнато на a.

Специално при $x = a$ получаваме

$$g(a) = (Ma + N)P(a). \tag{10}$$

Да представим комплексните числа a и $\dfrac{g(a)}{P(a)}$ във вида

$$a = u + iv, \quad \frac{g(a)}{P(a)} = r + is,$$

където u, v, r, s са реални числа. В такъв случай уравнението (10) приема вида

$$r + is = M(u + iv) + N. \tag{11}$$

Като приравним реалните и имагинерните части от двете страни на равенството (11), намираме

$$\begin{aligned} r &= Mu + N, \\ s &= Mv. \end{aligned} \tag{12}$$

От тази система получаваме еднозначно M и N, защото $v \neq 0$ (тук ние използуваме съществено условието за *нереалност* на корена a). След като са определени еднозначно константите M и N, добиваме възможност да определим еднозначно и полинома $Q(x)$, като си послужим с равенството (9). С това е решен интересуващият ни въпрос за единственост. За нашите нужди е по-важен обаче съответният въпрос за съществуване. Преминаваме към разглеждането на този въпрос, като се ръководим от резултатите, които получихме, изследвайки единствеността.

Образуваме си системата (12) и определяме от нея M и N (реалните числа u, v, r и s са познати, защото числото a и полиномите $g(x)$ и $P(x)$ са дадени). Ние *можем* да определим M и N от тази система, защото $v \neq 0$. Пресметнатите по този начин числа M и N са реални, защото числата u, v, r и s са реални.

Разглеждаме помощния полином

$$H(x) = g(x) - (Mx + N)P(x).$$

Този полином се анулира при $x = a$, защото при направения избор на константите M и N са изпълнени равенствата (12).

И наистина от равенствата (12) следва, че е изпълнено равенството (11), а от последното равенство следва равенството (10). От друга страна, коефициентите на $H(x)$ са реални. Това ни дава право[1] да заключим, че този полином се анулира и при $x = \overline{a}$. Числата a и $\overline{a}$ са обаче различни, защото коренът a не е реален. Оттук заключаваме, че полиномът $H(x)$ се дели без остатък на полинома

$$(x - a)(x - \overline{a}) = x^2 + px + q.$$

Това значи, че имаме

$$g(x) - (Mx + N)P(x) = (x^2 + px + q)Q(x), \tag{13}$$

където $Q(x)$ е полином. Като вземем под внимание, че константите M, N, p и q, както и коефициентите на полиномите $g(x)$ и $P(x)$ са реални, заключаваме, че коефициентите на полинома $Q(x)$ са също реални.

От равенството (13) намираме

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\alpha} + \frac{Q(x)}{(x^2 + px + q)^{\alpha-1}P(x)}.$$

С това е решен и интересуващият ни въпрос за съществуване.

Получените дотук резултати ни позволяват да представим всяка дробна рационална функция[2]

$$R(x) = \frac{g(x)}{(x - a)^\alpha (x - b)^\beta \cdots (x^2 + px + q)^\lambda \cdots} \tag{14}$$

---

[1]Това е известно от висшата алгебра. Доказателството може да се извърши например, като се възползуваме от лесно проверимите равенства $\overline{\xi + \eta} = \overline{\xi} + \overline{\eta}$, $\overline{\xi\eta} = \overline{\xi}\overline{\eta}$. И наистина нека числата $a_0, a_1, \ldots, a_n$ са реални; разглеждаме числото

$$c = a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \cdots + a_{n-1} a + a_n;$$

в такъв случай очевидно

$$\overline{c} = \overline{a}_0 \overline{a}^n + \overline{a}_1 \overline{a}^{n-1} + \cdots + \overline{a}_{n-1} \overline{a} + \overline{a}_n = a_0 \overline{a}^n + a_1 \overline{a}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \overline{a} + a_n;$$

от друга страна, при $c = 0$ имаме $\overline{c} = 0$ и следователно, ако α е корен на уравнението

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

коефициентите на което са реални, то числото $\overline{a}$ е корен на същото уравнение.

[2]Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че коефициента q_0 пред x^m в полинома

$$f(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \cdots + q_{m-1} x + q_m$$

е равен на единица.

във вида

$$R(x) = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a}$$
$$+ \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b} + \cdots$$
$$+ \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^\lambda} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{x^2+px+q} + \cdots + S(x),$$

където $A_1, A_2, \dots, M_\lambda, N_\lambda$ са константи и $S(x)$ е полином.

Да разгледаме като пример функцията

$$R(x) = \frac{x^4}{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2} \tag{15}$$

В такъв случай съгласно, това, което доказахме, ние можем да представим функцията $R(x)$ във вида

$$R(x) = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1} + S(x), \tag{16}$$

където A_1, A_2, M_1, M_2, N_2 са константи и $S(x)$ е полином. И наистина[1], както знаем, ние можем да представим функцията

$$R(x) = \frac{x^4}{(x-1)^2\left[(x+1)(x^2+x+1)^2\right]}$$

във вида

$$R(x) = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{g_1(x)}{(x-1)[(x+1)(x^2+x+1)^2]},$$

където A_1 е константа и $g_1(x)$ е полином. Като извършим аналогично разлагане на функцията

$$\frac{g_1(x)}{(x-1)[(x+1)(x^2+x+1)^2]}$$

въз основа на същата помощна теорема, получаваме

$$R(x) = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{g_2(x)}{(x+1)(x^2+x+1)^2},$$

където A_2 е константа и $g_2(x)$ е полином.

Като разложим по аналогичен начин функцията

$$\frac{g_2(x)}{(x+1)(x^2+x+1)^2},$$

получаваме

$$R(x) = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{g_3(x)}{(x^2+x+1)^2},$$

където B е константа и $g_3(x)$ е полином.

---

[1]Изводът на общата формула (14) става, разбира се, по същия начин. Нека читателят сам обмисли подробностите.

По-нататък разлагаме функцията

$$\frac{g_3(x)}{(x^2+x+1)^2}.$$

Това ни дава

$$R(x) = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{g_4(x)}{x^2+x+1},$$

където M_1 и N_1 са реални константи и $g_4(x)$ е полином. Като разложим най-сетне функцията

$$\frac{g_4(x)}{x^2+x+1},$$

получаваме

$$R(x) = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1} + S(x),$$

където M_2 и N_2 са реални константи и $S(x)$ е полином. С това ние получаваме желаното представяне (16).

В нашия специален случай полиномът $S(x)$ се анулира тъждествено. И наистина, като се освободим от знаменателя, получаваме

$$\begin{aligned} (17)\quad x^4 = (x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2 \Bigg[&\frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B}{x+1} \\ &+ \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1} \Bigg] + (x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2 S(x). \end{aligned}$$

Изразът

$$(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2 \left[\frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1} \right]$$

представлява полином[1], чиято степен е сигурно по-малка[2] от 7. Нека допуснем за момент, че полиномът $S(x)$ не се анулира тъждествено. В такъв случай произведението

$$S(x)(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2$$

представлява полином, чиято степен сигурно не е по-малка[3] от 7. От това заключаваме, че в дясната страна на равенството (17) имаме полином, чиято степен не е по-малка от 7. Това

[1] След разкриване на счупените скоби знаменателите се съкращават.

[2] Нека обърнем внимание върху това, че степента на полинома

$$(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2,$$

който фигурира в знаменателя на дробната рационална функция (15), е равна на 7.

[3] Когато $S(x)$ е (различна от нула) константа, степента на произведението

$$S(x)(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)^2$$

е равна на 7. Когато $S(x)$ е полином от по-висока степен, степента на разглежданото произведение е по-голяма от 7.

обаче не е възможно, защото в лявата страна на това равенство имаме полином, чиято степен е по-малка от 7.

Тези разсъждения могат да се извършат и в общия случай. Те ни позволяват да твърдим, че ако числителят $g(x)$ на рационалната функция $R(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ има степен, по-малка от степента на знаменателя

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdots(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots,$$

то полиномът $S(x)$ във формулата (14) сигурно се анулира тъждествено.[1] Нека отбележим на това място, че извършвайки деление, ние можем да представим всяка дробна рационална функция като сума от един полином и един остатък, който представлява дробна рационална функция, при която степента на числителя е по-малка от степента на знаменателя. Поради това се препоръчва да се извърши делението, преди да се използва формулата (14).

Като пример да разгледаме функцията

$$R(x) = \frac{x^5+x^4-x^2-x+1}{x^3-1}.$$

Тук степента на числителя е по-висока от степента на знаменателя. Поради това ние първо извършваме деление, което ни дава

$$R(x) = x^2+x+\frac{1}{x^3-1}.$$

Като приложим формулата (14) към дробната рационална функция $\dfrac{1}{x^3-1}$, при която степента на числителя е вече по-малка от степента на знаменателя, получаваме[2]

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

и следователно

$$R(x) = x^2+x+\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Рационалните функции от вида

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}},\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}\quad (p^2-4q<0),$$

[1]Нека читателят сам докаже това, като умножи двете части на равенството (14) с полинома

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\cdots(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots$$

и сравни степените на полиномите, които ще получи по този начин от двете страни на това равенство.

[2]Ние можем да твърдим сега, че полиномът $S(x)$ от формулата (14) се анулира тъждествено, защото степента на числителя на рационалната функция $\dfrac{1}{x^3-1}$ е по-малка от степента на знаменателя ѝ.

където A, M, N, a, p, q, α, λ са константи, от които константите α и λ са цели и положителни, се наричат елементарни дроби. Използувайки тази терминология, ние можем да формулираме по следния начин резултата, до който достигнахме: *всяка дробна рационална функция, при която степента на числителя е по-малка от степента на знаменателя, може да се представи като сума от елементарни дроби.*

§ 7. Пресмятане на коефициентите (Продължение на § 6)

Пресмятането на коефициентите във формулата (14) от предния параграф може да се извърши по различни начини.

I. Ще разгледаме първо така наречения метод на сравняване на коефициентите (или както често се казва, метод на неопределените коефициенти). За целта се освобождаваме от знаменателите в равенството (14) от предния параграф и правим приведение на подобните членове. Като приравним коефициентите пред еднаквите степени на x в двете страни на така намереното равенство, получаваме уравнения, от които определяме неизвестните коефициенти.[1] Читателят най-добре ще разбере смисъла на това, което казахме, като проучи следващите примери.

Пример 1. Да се представи като сума от елементарни дроби следната рационална функция:

$$R(x) = \frac{x^3}{(x-1)(x^3-1)}.$$

Решение. Разлагаме знаменателя на множители. Това ни дава

$$R(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Степента на числителя на разглежданата рационална функция е по-малка от степента на знаменателя. Поради това ние можем да представим тази функция като сума от елементарни дроби така:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

По този начин задачата се свежда към пресмятането на коефициентите A, B, M и N, нещо, което може да стане, както казахме, по следния начин: освобождаваме се от знаменателите; това ни дава

$$x^3 = A(x^2+x+1) + B(x-1)(x^2+x+1) + (Mx+N)(x-1)^2$$

[1] Разбира се, тук е уместно да се постави въпросът, дали така получената система има решение и дали това решение е единствено. Отговорът на този въпрос не е сложен. Твърдението за съществуване и за единственост на решението на така получената система е еквивалентно с твърдението за съществуване (което ние доказахме) и за единственост (което ние не доказахме, но което лесно се доказва) на представянето (14) от предния параграф и следователно е вярно. Ние тук изоставяме подробностите. Нека читателят сам ги обмисли.

или още

$$x^3 = (B + M)x^3 + (A - 2M + N)x^2 + (A + M - 2N)x + A - B + N;$$

приравняваме коефициентите пред съответните степени на x и получаваме

$$\begin{aligned} B + M &= 1, \\ A - 2M + N &= 0, \\ A + M - 2N &= 0, \\ A - B + N &= 0. \end{aligned}$$

По този начин намерихме една линейна система относно неизвестните коефициенти A, B, M, N, от която получаваме

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{3}, \quad M = \frac{1}{3}, \quad N = \frac{1}{3}$$

и следователно

$$\frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{3(x-1)^2} + \frac{2}{3(x-1)} + \frac{x+1}{3(x^2+x+1)}.$$

Пример 2. Да се представи като сума от елементарни дроби следната рационална функция:

$$R(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}.$$

Решение. Съгласно формулата (14) от предния параграф имаме

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}.$$

Оттук получаваме

$$1 = A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2$$

или

$$1 = (C + B)x^2 + (A - B)x - A.$$

Като приравним съответните коефициенти, намираме

$$\begin{aligned} C + B &= 0, \\ A - B &= 0, \\ -A &= 1, \end{aligned}$$

откъдето

$$A = -1, \quad B = -1, \quad C = 1.$$

II. Определянето на коефициентите във формулата (14) от предния параграф може да стане и по други начини. Ние ще изясним с няколко примера същността на един такъв начин.

Пример 1. Да се представи като сума от елементарни дроби следната рационална функция:

$$R(x) = \frac{x+2}{x^2 - 2x - 3}.$$

Очевидно имаме

$$R(x) = \frac{x+2}{(x+1)(x-3)}.$$

Степента на числителя в случая е по-малка от степента на знаменателя и следователно

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}.$$

Освобождаваме се от знаменателя. Това ни дава

$$x+2 = A(x-3) + B(x+1). \tag{1}$$

Функцията $R(x)$ е дефинирана, разбира се, само при онези стойности на x, за които $x^2 - 2x - 3 \neq 0$. Напротив, равенството (1) е валидно при *всички* стойности на x без изключение.[1] Специално при $x = -1$ намираме $1 = -4A$, т. е. $A = -\frac{1}{4}$, а при $x = 3$ намираме $5 = 4B$ или $B = \frac{5}{4}$.

И така

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-3)} = \frac{-1}{4(x+1)} + \frac{5}{4(x-3)}.$$

Пример 2. Да се представи като сума от елементарни дроби следната рационална функция:

$$R(x) = \frac{x}{x^4-1}. \tag{2}$$

Очевидно имаме

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}.$$

Като вземем под внимание, че степента на числителя в случая е по-малка от степента на знаменателя, получаваме

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Освобождаваме се от знаменателя. Това ни дава

$$x = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Mx+N)(x-1)(x+1). \tag{3}$$

Функцията (2) е дефинирана само при онези стойности на x, при които $x^4 - 1 \neq 0$. При тези стойности на x е валидно и равенството (3). В двете части на това равенство имаме обаче полиноми. Като вземем под внимание, че разглежданото равенство е валидно при безбройно много стойности на x, заключаваме, че то е валидно при *всички* стойности на x без изключение.[2] Специално при $x = 1$ намираме

$$1 = 4A, \quad A = \frac{1}{4};$$

при $x = -1$ намираме

$$-1 = -4B, \quad B = \frac{1}{4};$$

[1] И наистина равенството (1) е сигурно валидно при $x^2 - 2x - 3 \neq 0$, т. е. при безбройно много стойности на x. Като вземем под внимание, че от двете страни на това равенство имаме полиноми, заключаваме, че съответните им коефициенти са равни помежду си и следователно равенството (1) е валидно при всички стойности на x без изключение.

[2] Това се отнася както за реални, така и за комплексни стойности на x. И наистина в двете страни на равенството (3) имаме полиноми със съответно равни коефициенти.

при $x = i$ получаваме
$$i = (Mi + N)(i - 1)(i + 1)$$
или
$$i = -2Mi - 2N. \tag{4}$$
Като сравним реалните и имагинерните части в двете страни на равенството (4), намираме
$$N = 0, \quad M = -\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Да се представи като сума от елементарни дроби следната рационална функция:
$$R(x) = \frac{3x^3 - 1}{(x + 1)^2(x - 1)^3}.$$

Решение. Тъй като степента на числителя на $R(x)$ е по-малка от степента на знаменателя, то имаме
$$\frac{3x^3 - 1}{(x + 1)^2(x - 1)^3} = \frac{A_1}{(x + 1)^2} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{B_1}{(x - 1)^3} + \frac{B_2}{(x - 1)^2} + \frac{B_3}{x - 1}.$$

Като се освободим от знаменателя, намираме
$$3x^3 - 1 = A_1(x - 1)^3 + A_2(x + 1)(x - 1)^3 + B_1(x + 1)^2 + B_2(x + 1)^2(x - 1) + B_3(x + 1)^2(x - 1)^2. \tag{5}$$
При $x = -1$ получаваме
$$-4 = -8A_1, \quad A_1 = \frac{1}{2}.$$
При $x = 1$ получаваме
$$2 = 4B_1, \quad B_1 = \frac{1}{2}.$$
Ние давахме на x тъкмо онези стойности, при които се анулира знаменателят на $R(x)$, защото в такъв случай много от членовете в дясната страна на равенството (5) се анулират. Това опростява значително пресмятанията.[1] Ние можем да даваме на x, разбира се, и произволни значения. В нашия специален случай ще получим обаче по този път уравнения с няколко неизвестни.[2] За да избегнем необходимостта да решаваме система, ние ще предпочетем в случая да постъпим другояче. За целта представяме равенството (5) във вида
$$3x^3 - 1 - A_1(x - 1)^3 - B_1(x + 1)^2 = A_2(x + 1)(x - 1)^3 + B_2(x + 1)^2(x - 1) + B_3(x + 1)^2(x - 1)^2.$$
Като вземем под внимание намерените стойности A_1 и B_1, получаваме
$$\frac{(5x + 2)(x + 1)(x - 1)}{2} = (x + 1)(x - 1)\left[A_2(x - 1)^2 + B_2(x + 1) + B_3(x + 1)(x - 1)\right].$$
Съкращаваме на $(x + 1)(x - 1)$ и намираме
$$\frac{5x + 2}{2} = A_2(x - 1)^2 + B_2(x + 1) + B_3(x + 1)(x - 1).$$
Оттук при $x = -1$ получаваме
$$-\frac{3}{2} = 4A_2, \quad A_2 = -\frac{3}{8};$$

[1]По такъв начин определяме коефициентите от уравнения, които съдържат само по едно неизвестно.

[2]Това, разбира се, не представлява никаква принципиална трудност.

при $x = 1$ намираме

$$\frac{7}{2} = 2B_2, \quad B_2 = \frac{7}{4}.$$

Остана да се определи само коефициентът B_3. Това може да стане например, като положим $x = 0$. В такъв случай получаваме

$$1 = A_2 + B_2 - B_3,$$

т. е.

$$B_3 = A_2 + B_2 - 1 = -\frac{3}{8} + \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{8}.$$

III. Да разгледаме рационалната функция

$$R(x) = \frac{g(x)}{f(x)},$$

където $f(x)$ и $g(x)$ са полиноми. Нека $x = a$ е един *прост* корен на уравнението $f(x) = 0$. Това значи, че $f(x)$ може да се представи във вида

$$f(x) = (x - a)\varphi(x),$$

където $\varphi(x)$ е полиномът на x и $\varphi(a) \neq 0$.

Както знаем, ние можем да представим $R(x)$ във вида

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{h(x)}{\varphi(x)},$$

където A е константа и $h(x)$ е полином. Ние ще покажем, че[1]

$$A = \frac{g(a)}{f'(a)}.$$

За тази цел ние се освобождаваме от знаменателя $f(x)$. По такъв начин получаваме

$$g(x) = \frac{Af(x)}{x - a} + h(x)(x - a)$$

[1]Не е трудно да се види, че $f'(a) \neq 0$. И наистина, като диференцираме равенството

$$f(x) = (x - a)\varphi(x),$$

получаваме

$$f'(x) = \varphi(x) + (x - a)\varphi'(x).$$

Специално при $x = a$ намираме

$$f'(a) = \varphi(a),$$

т. е.

$$f'(a) \neq 0.$$

или още

$$g(x) = A\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + h(x)(x - a).$$

Като оставим x да клони към a чрез стойности, различни от a, получаваме

$$g(a) = Af'(a),$$

откъдето

$$A = \frac{g(a)}{f'(a)}.$$

§ 8. Интегриране на рационални функции (Продължение от § 6 и 7)

Ние видяхме, че всяка рационална функция може да се представи като сума от функции от вида

$$Ax^m, \quad \frac{B}{(x-a)^a}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \quad (p^2 - 4p < 0).$$

По този начин интегралите от рационални функции могат да се представят като суми от следните видове интеграли:

$$\int Ax^m \,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

където m е цяло неотрицателно число;

$$\int \frac{B\,\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha}, \tag{2}$$

където α е цяло положително число, и

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x, \quad (p^2 - 4q < 0), \tag{3}$$

където n е цяло положително число.

Очевидно имаме

$$\int Ax^m \,\mathrm{d}x = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} + C,$$

$$\int \frac{B\,\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} = B\int (x-a)^{-\alpha}\,\mathrm{d}(x-a) = \frac{B}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} + C$$

при $\alpha > 1$ и
$$\int \frac{B\,\mathrm{d}x}{x-a} = B\ln|x-a| + C.$$
Остава да разгледаме интеграла
$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$
при предположение, че корените на квадратното уравнение
$$x^2+px+q=0$$
не са реални и числото n е цяло положително.

Ние ще положим
$$x = u - \frac{p}{2}.$$
Това ни дава
$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{M\left(u-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(u^2-\frac{p^2}{4}+q\right)^n}\,\mathrm{d}u.$$
Да положим за краткост
$$\sqrt{q-\frac{p^2}{4}} = a.$$
Числото a е реално и различно от нула, защото корените на квадратното уравнение
$$x^2+px+q=0$$
не са реални и следователно $p^2-4q<0$. Интересуващият ни интеграл приема вида
$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = M\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^n} + \left(N-\frac{pM}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^n}.$$
От друга страна, очевидно имаме
$$\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int (u^2+a^2)^{-n}\,\mathrm{d}(u^2+a^2)$$
$$= \frac{1}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}} + C$$

при $n > 1$ и

$$\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{u^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(u^2+a^2)}{u^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(u^2+a^2) + C.$$

Остава да се пресметне интегралът

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^n}.$$

При $n > 1$ правим следните преобразувания:

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+u^2-u^2}{(u^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+u^2}{(u^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{a^2}\int \frac{u^2}{(u^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\int \frac{u\,\mathrm{d}(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^n} \\
&= \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\int u\,\mathrm{d}\frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}} \\
&= \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{u}{2a^2(n-1)(u^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)}\int \frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{u}{2a^2(n-1)(u^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1} \\
&= \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1} + \frac{u}{2a^2(n-1)(u^2+a^2)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

По този начин изразихме I_n чрез I_{n-1}. Като извършим няколко пъти тези пресмятания, добиваме възможност да изразим интеграла I_n чрез познатия интеграл

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\dfrac{u}{a}}{\left(\dfrac{u}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$$

Задачи

Да се пресметнат следните интеграли (интегрирането се извършва в произволно избран интервал, в който е дефинирана подинтегрална функция):

1. $I = \int \frac{2x^3+7x^2+4x+2}{2x+3}\,\mathrm{d}x.$ *Отговор.* $I = \frac{x^3}{3} + x^2 - x + \frac{5}{2}\ln|2x+3| + C.$

2. $I = \int \dfrac{2x+6}{2x^2+3x+1}\,\mathrm{d}x.$ *Отговор.* $I = 5\ln|2x+1| - 4\ln|x+1| + C.$

3. $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^4-1}.$ *Отговор.* $I = \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$

4. $I = \int \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{x^3-1}.$ *Отговор.* $I = \dfrac{1}{3}\ln|x-1| - \dfrac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

5. $I = \int \dfrac{4x^2+2}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x.$ *Отговор.* $I = 3\ln(x-1) + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C.$

6. $I = \int \dfrac{4x^2-15x+19}{x^3-7x+6}\,\mathrm{d}x.$ *Отговор.* $I = 5\ln|x+3| + \ln|x-2| - 2\ln|x-1| + C.$

7. $I = \int \dfrac{6x^2+17x+13}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$ *Отговор.* $I = \dfrac{-1}{(x+1)^2} - \dfrac{5}{x+1} + 6\ln|x+1| + C.$

8. $I = \int \dfrac{x^2-x+14}{(x-4)^2(x-2)}\,\mathrm{d}x.$ *Отговор.* $I = -\dfrac{13}{x-4} + 4\ln|x-2| - 3\ln|x-4| + C.$

9. $I = \int \dfrac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}\,\mathrm{d}x.$ *Отговор.* $I = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+3) + C.$

10. $I = \int \dfrac{7x}{x^3-5x^2+12x-60}\,\mathrm{d}x.$ *Отговор.* $I = \dfrac{35}{37}\ln\dfrac{|x-5|}{\sqrt{x^2+12}} + \dfrac{42}{37\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2\sqrt{3}} + C.$

11. $I = \int \dfrac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$ *Отговор.* $I = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x+2}{x^2+x+1} + \dfrac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

12. $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^4+1}.$ $I = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C.$

13. $I = \int \dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x.$ *Отговор.* $I = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

§ 9. Интегриране на ирационални функции

В предните три параграфа ние изложихме един общ метод за пресмятане на интеграли от рационални функции. Въпросът за пресмятане на интеграли от ирационални функции е много по-сложен. Ние не разполагаме с общ метод, който да ни позволява да изразяваме интегралите от всякакви ирационални функции чрез елементарни функции[1] (без да прибягваме до граничен преход). Дори ние знаем от работите на Лиувил, Чебишев и Абел, че такъв метод не съществува.

В този параграф ние ще разгледаме някои категории интеграли от ирационални функции, които могат да се преобразуват в интеграли от рационални функции с помощта на подходящи субституции.

[1] Тези думи се нуждаят очевидно от прецизиране. Ние няма да се спираме тук на този въпрос, защото това ще ни отведе твърде далеч.

I. Интегриране на рационални функции на радикали на x

Нека ни е даден интеграл от вида

$$\int R\left(x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) \mathrm{d}x, \tag{1}$$

където $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е рационална[1] функция на $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Числата $p_1, p_2, \ldots, p_n$ са цели, а числата $q_1, q_2, \ldots, q_n$ са цели и положителни.

Пресмятането на този интеграл може да се извърши така: означаваме с k най-малкото кратно на знаменателите $q_1, q_2, \ldots, q_n$; в такъв случай числата

$$\frac{kp_1}{q_1}, \frac{kp_2}{q_2}, \ldots, \frac{kp_n}{q_n}$$

ще бъдат цели; полагаме

$$x = t^k;$$

като вземем под внимание, че $\mathrm{d}x = kt^{k-1}\,\mathrm{d}t$, получаваме интеграла

$$\int R\left(t^{\frac{kp_1}{q_1}}, t^{\frac{kp_2}{q_2}}, \ldots, t^{\frac{kp_n}{q_n}}\right) kt^{k-1}\,\mathrm{d}t.$$

По този начин приведохме дадения интеграл към интеграл от рационална функция.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\,\mathrm{d}x, \quad x > 0.$$

Интеграционната променлива x фигурира в степен с показатели $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$. За да се освободим от тези ирационалности, полагаме $x = t^6$ (тук най-малкото кратно на знаменателите е 6). С помощта на тази субституция интегралът се преобразува в

$$\int \frac{t^3-1}{t^2-1} 6t^5\,\mathrm{d}t.$$

II. Интегриране на рационални функции на x и на радикали от една (дробна) линейна функция на x

Ние ще покажем как могат да се смятат интеграли от вида

$$\int R\left[x\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right] \mathrm{d}x, \tag{2}$$

[1] Това значи, че функцията $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представлява частно на два полинома.

където функцията $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е рационална; числата $p_1, \dots, p_n$ са цели; числата $q_1, \dots, q_n$ са цели и положителни; a, b, a_1, b_1 са константи, подчинени на условието $ab_1 - a_1 b \neq 0$.[1]

Функциите от вида

$$y = \frac{ax+b}{a_1 x + b_1} \tag{3}$$

се наричат дробни линейни. Това не изключва, разбира се, възможността да имаме, например $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, т. е. функцията (3) да има вида

$$y = ax + b.$$

Специално при $a = 1$, $b = 0$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ получаваме интеграла, който разгледахме преди малко.

Пресмятането на интеграла (2) може да се извърши с помощта на субституцията

$$\frac{ax+b}{a_1 x + b_1} = t^k,$$

където k означава най-малкото кратно на знаменателите $q_1, \dots, q_n$. В такъв случай получаваме

$$x = \frac{b_1 t^k - b}{a - a_1 t^k}, \quad \mathrm{d}x = k \frac{ab_1 - ba_1}{(a - a_1 t^k)^2} t^{k-1}\, \mathrm{d}t \tag{4}$$

и следователно (2) се преобразува в

$$\int R\left[\frac{b_1 t^k - b}{a - a_1 t^k}, t^{\frac{kp_1}{q_1}}, \dots, t^{\frac{kp_n}{q_n}}\right] \cdot k \frac{ab_1 - ba_1}{(a - a_1 t^k)^2} t^{k-1}\, \mathrm{d}t. \tag{5}$$

По този начин ние преобразувахме интеграла (2) в интеграл от рационална функция $\left[\text{числата } \dfrac{kp_1}{q_1}, \dots, \dfrac{kp_n}{q_n} \text{ са цели}\right]$.

[1]Ако $ab_1 - a_1 b = 0$, то отношението

$$y = \frac{ax+b}{a_1 x + b_1}$$

не зависи от x, защото

$$y' = \frac{ab_1 - a_1 b}{(a_1 x + b_1)^2} = 0.$$

В такъв случай интегралът (2) е интеграл от рационална функция.

Независимо от това, ако $ab_1 - a_1 b = 0$, то субституцията (4) въобще не може да се използва за пресмятане на интеграли. Така например в този случай от дясната страна на равенството (5) имаме константа, поради което това равенство очевидно не е вярно. Не противоречи ли това на формулата (5), която ние доказахме в § 4 на тази глава?

Пример 1. Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1+x}}, \quad x > -1.$$

За да се освободим от радикала под знака на интеграла, полагаме

$$1 + x = t^2, \quad t > 0.$$

Това ни дава

$$x = t^2 - 1, \quad \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t.$$

По такъв начин даденият интеграл се преобразува в

$$2\int \frac{(t^2-1)t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\int (t-1)t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + C$$

и следователно

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1+x}} = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - 1 - x + C.$$

Пример 2. Да се пресметне интегралът

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)^2}, \quad -2 < x < 2.$$

За да се освободим от корена под знака на интеграла, полагаме

$$\frac{2-x}{2+x} = t^3.$$

Това ни дава

$$x = 2\frac{1-t^3}{1+t^3}, \quad \mathrm{d}x = -12\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2}.$$

След тази субституция получаваме

$$-\frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{3}{8}t^{-2} + C$$

и следователно

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)^2} = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C.$$

III. Субституции на Ойлер

Нека $R(x, y)$ е рационална функция на x и y. Ще покажем как се пресмятат интеграли от вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x, \quad a \neq 0. \tag{6}$$

При това ще предполагаме, че радикалът $\sqrt{ax^2+bx+c}$ е реален в интервала, в който пресмятаме интеграла. В такъв случай, ако корените на квадратното уравнение на $ax^2+bx+c=0$ са комплексни или равни помежду си, то непременно ще имаме $a>0$. И наистина в противен случай квадратният тричлен $ax^2+bx+c=0$ би приемал само отрицателни стойности с евентуално изключение на една точка противно на направеното допускане, според което радикалът $\sqrt{ax^2+bx+c}$ приема реални стойности в интеграционния интервал.

1. Първа субституция на Ойлер (Euler)

Нека $a>0$. В такъв случай, ако положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=u+x\sqrt{a},$$

намираме

$$x=\frac{u^2-c}{b-2u\sqrt{a}}$$

и следователно

$$\mathrm{d}x=-2\frac{u^2\sqrt{a}-bu+c\sqrt{a}}{\left(b-2u\sqrt{a}\right)^2}\,\mathrm{d}u.$$

От друга страна,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=u+x\sqrt{a}=\frac{u^2\sqrt{a}-bu+c\sqrt{a}}{2u\sqrt{a}-b}.$$

По такъв начин интегралът (6) се преобразува в

$$-2\int R\left(\frac{u^2-c}{b-2u\sqrt{a}},\frac{u^2\sqrt{a}-bu+c\sqrt{a}}{2u\sqrt{a}-b}\right)\frac{u^2\sqrt{a}-bu+c\sqrt{a}}{(b-2u\sqrt{a})^2}\,\mathrm{d}u,$$

т. е. в интеграл от рационална функция.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Полагаме

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+u.$$

Това ни дава

$$x=\frac{u^2-1}{1-2u},$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2(u-u^2-1)}{(1-2u)^2}\cdot\mathrm{d}u,$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = x + u = \frac{u - u^2 - 1}{1 - 2u}.$$

По такъв начин намираме

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}} = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{1-2u} = -\ln|1-2u| + C = \ln\frac{1}{|1+2x-2\sqrt{x^2+x+1}|} + C.$$

2. Втора субституция на Ойлер

Нека корените на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ са реални и различни. В такъв случай интересуващият ни интеграл може да се пресметне с помощта на субституцията

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)u,$$

където α е един от корените на уравнението $ax^2+bx+c = 0$. Да означим с β другия корен. В такъв случай получаваме

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)u$$

и следователно

$$a(x-\beta) = (x-\alpha)u^2,$$

$$x = \frac{\alpha u^2 - \beta a}{u^2 - a}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2au(\beta-\alpha)}{(u^2-a)^2}\,\mathrm{d}u,$$

и

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \left(\frac{\alpha u^2 - \beta a}{u^2-a} - \alpha\right)u = \frac{ua(\alpha-\beta)}{u^2-a}.$$

По такъв начин интегралът (6) се преобразува в

$$\int R\left[\frac{\alpha u^2-\beta a}{u^2-a}, \frac{ua(\alpha-\beta)}{u^2-a}\right]\frac{2au(\beta-\alpha)}{(u^2-a)^2}\,\mathrm{d}u,$$

т. е. в интеграл от рационална функция.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}, \quad x > 1.$$

Полагаме

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = u(x-1).$$

Тази субституция ни дава

$$x = \frac{4+u^2}{u^2-1},$$

$$\mathrm{d}x = -10\frac{u\,\mathrm{d}u}{(u^2-1)^2}.$$

По такъв начин получаваме интеграла

$$-\frac{2}{5}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{2}{5u} + C$$

и следователно

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} + C.$$

3. *Трета субституция на Ойлер*

Първите две субституции на Ойлер са напълно достатъчни, за да можем да пресмятаме всякакви интеграли от вида (6). Така, ако корените на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не са реални (т. е. ако не може да се използува втората субституция на Ойлер), то, както вече отбелязахме, сигурно $a > 0$ и следователно можем да приложим първата субституция. Все пак ние ще посочим още следната субституция, която в някои случаи води по-бързо до целта:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xu + \sqrt{c}. \tag{7}$$

Тази субституция може да се прилага при $c > 0$. От равенството (7) получаваме

$$x = \frac{b - 2u\sqrt{c}}{u^2 - a},$$

$$\mathrm{d}x = 2\frac{u^2\sqrt{c} - bu + a\sqrt{c}}{(a-u^2)^2}\,\mathrm{d}u$$

и

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{b-2u\sqrt{c}}{u^2-a}u + \sqrt{c} = \frac{u^2\sqrt{c} - bu + a\sqrt{c}}{a-u^2},$$

откъдето намираме интеграла

$$2\int R\left[\frac{2u\sqrt{c}-b}{a-u^2}, \frac{u^2\sqrt{c}-bu+a\sqrt{c}}{a-u^2}\right]\frac{u^2\sqrt{c}-bu+a\sqrt{c}}{(a-u^2)^2}\,\mathrm{d}u.$$

По такъв начин преобразувахме (6) в интеграл от рационална функция.

Нека обърнем внимание на това, че един интеграл може да спада, разбира се, едновременно към няколко от разгледаните типове. Така например към интеграла

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-5x+4}}$$

могат да се приложат и трите субституции на Ойлер. Ще приложим третата от тях:

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} = xu + 2.$$

По такъв начин намираме

$$\begin{aligned} x &= \frac{5 + 4u}{1 - u^2}, \\ \mathrm{d}x &= \frac{4 + 10u + 4u^2}{(1 - u^2)^2}\,\mathrm{d}u, \\ \sqrt{x^2 - 5x + 4} &= xu + 2 = \frac{2 + 5u + 2u^2}{1 - u^2}, \end{aligned}$$

след което получаваме интеграла

$$2\int \frac{\mathrm{d}u}{1 - u^2} = \int \frac{\mathrm{d}u}{1 - u} + \int \frac{\mathrm{d}u}{1 + u} = -\ln|1 - u| + \ln|1 + u| + C$$

и следователно

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}} = \ln\left|\frac{x - 2 + \sqrt{x^2 - 5x + 4}}{x + 2 - \sqrt{x^2 - 5x + 4}}\right| + C.$$

Накрая нека отбележим, че интегралът (6) може да се рационализира и с помощта на други субституции. Така например при $a > 0$ може да се използува субституцията

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = u - x\sqrt{a}, \tag{8}$$

а при $c > 0$ може да се използува субституцията

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xu - \sqrt{c} \tag{9}$$

и пр. Покажете сами, че субституциите (8) и (9) наистина преобразуват интеграла (6) в интеграли от рационални функции.

IV. Абелеви интеграли

Нека $R(x, y)$ е рационална функция на x и y и нека $y = \varphi(x)$ е една функция, определена в някой интервал Δ, която удовлетворява уравнението

$$F(x, y) = 0. \tag{10}$$

Да разгледаме интеграла

$$\int R(x, y)\,\mathrm{d}x, \tag{11}$$

където $y = \varphi(x)$ (под интеграла имаме по този начин функция само на x). Интеграл от този вид се нарича Абелев интеграл относно кривата (10).

Така например интегралът

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2 + bx + c})\,\mathrm{d}x,$$

който ние разгледахме по-горе, може да се напише във вида

$$\int R(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

където

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c},$$

и следователно представлява един Абелев интеграл относно коничното сечение

$$y^2 = ax^2 + bx + c.$$

Има случаи, при които кривата (10) притежава рационално параметрично представяне, т. е. такова параметрично представяне[1]

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

при което $f(t)$ и $g(t)$ са рационални функции на t в някой интервал. В такъв случай Абелевият интеграл (11) може да се преобразува в интеграл от рационална функция по следния начин:

$$\int R[f(t), g(t)]\,\mathrm{d}f(t) = \int R[f(t), g(t)]f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Кривата, която притежава рационално параметрично представяне, се нарича уникурзална крива. Така например, както е известно от аналитичната геометрия, всяко неизродено конично сечение представлява уникурзална крива. Кривата с уравнение

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a \neq 0$$

[1]Казваме, че уравненията

$$x = f(t), \quad y = g(t), \tag{12}$$

където параметърът t се мени в някой интервал Δ, ни дават едно параметрично представяне на кривата

$$F(x, y) = 0, \tag{13}$$

когато при всеки избор на t от Δ точката с координати $[f(t), g(t)]$ лежи върху кривата (13) и, обратно, всяка точка от кривата (13), с евентуално изключение на краен брой такива точки, може да се получи от уравненията (12) при подходяща стойност на параметъра t от Δ.

(тази крива се нарича Декартов лист) е също тъй уникурзална. И наистина, ако положим $y = tx$, получаваме

$$x^3 + t^3x^3 - 3ax \,.\, tx = 0,$$

откъдето[1]

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

V. Диференциален бином

Изразът $x^m(a + bx^n)^p\,\mathrm{d}x$, в който m, n, p са рационални числа, а коефициентите a и b са произволни различни от нула константи, се нарича диференциален бином.

Ако поне едно от числата

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n} + p$$

е цяло, то интегралът

$$\int x^m(a + bx^n)^p\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

може да се преобразува в интервал от рационална функция. Ще разгледаме поотделно всеки един от тези случаи.

1. Ако числото p е цяло, то имаме познатия случай, който разгледахме в т. I (интеграл от рационална функция на радикали).

2. Ако числото $\dfrac{m+1}{n}$ е цяло, полагаме

$$a + bx^n = u.$$

В такъв случай получаваме

$$x = \left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\frac{(u-a)^{\frac{1}{n}-1}}{b^{\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u$$

[1]При $t \neq -1$ точката с координати

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} \tag{14}$$

лежи върху Декартовия лист (това се вижда например с непосредствено заместване) и, обратно, всяка точка (x_0, y_0) от Декартовия лист може да се получи от уравненията (14) при подходящ избор на t (за да се убедим в това, достатъчно е при $x_0 \neq 0$ да изберем $t = \dfrac{y_0}{x_0}$, а при $x_0 = 0$ да изберем $t = 0$).

и следователно (15) се преобразува в

$$\frac{1}{n} b^{-\frac{m+1}{n}} \int u^p (u-a)^{\frac{m+1}{n}-1} \, \mathrm{d}u.$$

Като вземем под внимание, че числото $\dfrac{m+1}{n}$ е цяло, заключаваме, че така полученият интеграл спада към класата интеграли, които ние разгледахме в т. I (интеграл от рационална функция на радикали), и следователно може да се преобразува в интеграл от рационална функция.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x} \, \mathrm{d}x, \quad x > 0.$$

Тук имаме

$$m = -1, \quad n = \frac{1}{2}, \quad p = \frac{1}{2}.$$

В този специален случай числото

$$\frac{m+1}{n} = 0$$

е цяло. Поради това извършваме субституцията

$$1 + \sqrt{x} = u$$

или, което е същото,

$$x = (u-1)^2, \quad u > 1.$$

Тази субституция ни дава

$$\mathrm{d}x = 2(u-1) \, \mathrm{d}u$$

и по такъв начин получаваме интеграла

$$2 \int \frac{\sqrt{u}(u-1)}{(u-1)^2} \, \mathrm{d}u = 2 \int \frac{\sqrt{u}}{u-1} \, \mathrm{d}u.$$

Така получения интеграл преобразуваме в интеграл от рационална функция с помощта на субституцията

$$u = z^2, \quad z > 1.$$

Довършете сами пресмятанията!

3. Нека числото $\dfrac{m+1}{n} + p$ е цяло. В такъв случай правим следните преобразувания:

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, \mathrm{d}x = \int x^{m+np} \left(\frac{a}{x^n} + b \right)^p \mathrm{d}x = \int x^{m+np} (b + ax^{-n})^p \, \mathrm{d}x.$$

По този начин получихме пак интеграл от диференциален бином, т. е. интеграл от вида

$$\int x^{m_1} (b + ax^{n_1})^{p_1} \, \mathrm{d}x,$$

където

$$m_1 = m + np, \quad n_1 = -n, \quad p_1 = p.$$

В този случай имаме

$$\frac{m_1+1}{n_1} = \frac{m+np+1}{-n} = -\left[\frac{m+1}{n} + p\right]$$

и следователно числото $\dfrac{m_1+1}{n_1}$ е цяло. По този начин ние преобразувахме интересуващия ни интеграл в интервал от познат тип. Съгласно това, което казахме по-горе, ние можем да пресметнем интеграла

$$\int x^{m+np}(b + ax^{-n})^p \,\mathrm{d}x,$$

а следователно и интеграла

$$\int x^m(a + bx^n)^p \,\mathrm{d}x$$

с помощта на субституцията

$$b + ax^{-n} = u.$$

Пример. Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}, \quad x > 0.$$

Тук имаме интеграл от диференциален бином, където

$$m = -2, \quad n = 2, \quad p = -\frac{1}{2}.$$

В случая числото

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{-2+1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

е цяло. Поради това правим преобразуването

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^{-2}+1}}$$

и полагаме

$$x^{-2} + 1 = u$$

или, което е същото,

$$x = (u-1)^{-\frac{1}{2}}, \quad u > 1.$$

Тази субституция ни дава

$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(u-1)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u$$

и ни води до интеграла

$$-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} + C,$$

откъдето

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

Разгледаните от нас три случая, при които интеграли от типа (15) могат да се изразят чрез познатите на нас елементарни функции, са били познати отдавна. През миналия век П. Л. Чебишев доказа, че ако $a \neq 0$, $b \neq 0$ и никое от трите числа

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n} + p$$

не е цяло, то интегралът

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, \mathrm{d}x$$

не може да се изрази с помощта на елементарните функции, без да се извършва граничен преход.Така например интегралът

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^4}}, \quad -1 < x < 1, \tag{16}$$

спада към интегралите от типа (15), като

$$m = 0, \quad n = 4, \quad p = -\frac{1}{2}.$$

В този случай обаче никое от числата

$$p = -\frac{1}{2}, \quad \frac{m+1}{n} = \frac{1}{4}, \quad \frac{m+1}{n} + p = -\frac{1}{4}$$

не е цяло и следователно този интеграл не може да се представи с помощта само на елементарните функции (без граничен преход). Въпреки това функцията

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}, \quad -1 < x < 1,$$

притежава неопределен интеграл в интервала, в който е дефинирана. Така например функцията

$$F(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6 \ldots 2n} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

е един неопределен интеграл на $f(x)$ при $-1 < x < 1$, защото

$$F'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6 \ldots 2n} x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{4n} = (1 - x^4)^{-\frac{1}{2}}.$$

VI. Елиптични и хиперелиптични интеграли

Интегралите от вида

$$\int R\left(x,\ \sqrt{a_0x^m + a_1x^{m+1} + \cdots + a_m}\right) \mathrm{d}x,$$

където $R(x, y)$ е рационална функция на x и y и цялото число m е по-голямо от 2, обикновено не могат да се представят с помощта само на елементарни функции, без да се извършва граничен преход. Когато $m = 3$ или $m = 4$, тези интеграли се наричат елиптични. Когато $m > 4$, те се наричат хиперелиптични. Така например интегралът (16) е елиптичен.

Задачи

Да се пресметнат следните интеграли:

1. $I = \displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,\ 0 < x < 1.$ *Отговор.* $I = -\left[x + 4\sqrt{x} + 4\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right] + C.$

2. $I = \displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x,\ x > 0.$

Отговор. $I = -\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \dfrac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + x - \dfrac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$

3. $I = \displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1+x}},\ x > -1.$ *Отговор.* $I = \dfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - x + C.$

4. $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}},\ x > -1.$

Отговор. $I = 2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + 6\sqrt[6]{1+x} - 6\ln\left(1+\sqrt[6]{1+x}\right) + C.$

5. $I = \displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x},\ 0 < x < 1.$ *Отговор.* $I = \ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + C.$

6. $I = \displaystyle\int \sqrt{x^2+2x-1}\frac{\mathrm{d}x}{x},\ x > -1+\sqrt{2}.$

Отговор. $I = \sqrt{x^2+2x-1} + \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right) - 2\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x^2+2x-1}\right) + C.$

7. $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}},\ -1 < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$ *Отговор.* $I = \ln\dfrac{3+x-2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}.$

8. $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}},\ x > 1.$ *Отговор.* $I = \dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}} + C.$

9. $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{-x^2+4x-3}},\ 2 < x < 3.$ *Отговор.* $I = \ln\dfrac{\sqrt{-x^2+4x-3}+x-3}{\sqrt{-x^2+4x-3}-x+3} + C.$

10. $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}},\ x > -1.$ *Отговор.* $I = \ln\dfrac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+2^2}} + C.$

11. $I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,\ x>0.$ *Отговор.* $I = \frac{3}{7}\left(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C.$

12. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$ *Отговор.* $I = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

13. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^\alpha)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}},\ x>0,\ \alpha\neq 0.$ *Отговор.* $I = \frac{x}{(1+x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}+C.$

14. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}},\ 0<x<1.$ *Отговор.* $I = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C.$

§ 10. Интегриране на трансцендентни функции

Както видяхме, не всички интеграли от алгебрични функции могат да се изразят само с помощта на елементарните функции, без да се извършва граничен преход. Разбира се, същите трудности срещаме и при интегралите на трансцендентни функции. Така например интегралът

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}, \quad x>1, \tag{1}$$

който често се среща в анализа и приложенията му, не може, както това доказва строго Лиувил (J. Liouville), да се изрази с елементарните функции без помощта на граничен преход. Въпреки това не е трудно да се убедим в съществуването на неопределения интеграл (1). За тази цел да разгледаме безкрайния ред

$$F(x) = \ln(\ln x) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^\nu}{\nu!\nu}.$$

Този ред е сходящ при $x>1$ и може почленно да се диференцира, както ни учи теоремата за почленното диференциране на степенните редове и теоремата за диференциране на функция от функция. Като диференцираме, получаваме

$$F'(x) = \frac{1}{x\ln x} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^{\nu-1}}{\nu!x} = \frac{1}{x\ln x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\ln x)^\nu}{\nu!} = \frac{1}{x\ln x}e^{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}\cdot x = \frac{1}{\ln x}.$$

Този резултат ни учи, че функцията $F(x)$ е един неопределен интеграл на $\frac{1}{\ln x}$ в интервал $x>1$.

Ние вече казахме по-горе, че функцията $F(x)$ не може да се изрази само с елементарни функции, без да се извършва граничен преход. По такъв начин

$F(x)$ представлява нова трансцендентна функция. Тази функция се нарича *интегрален логаритъм*.

Често срещаните в анализа и неговите приложения интеграли

$$\int \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

също тъй не могат да се изразят само с елементарни функции.

Случаите, когато ние знаем да пресмятаме неопределените интеграли само с помощта на елементарните функции, са, тъй да се каже, „редки“. Ние ще разгледаме два случая, при които подинтегралната функция е трансцендентна, но интегралът може да се изрази с елементарни функции.

I. Нека $R(u, v)$ е рационална функция на u и v. В такъв случай интегралът[1]

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

може да се преобразува в интеграл на рационална функция, грубо казано, с помощта на субституцията

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

във всеки интервал[2] $[a, b]$, в който двете функции

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \text{ и } R(\sin x, \cos x)$$

са дефинирани. Така например, ако $-\pi < a < b < \pi$, то функцията

$$x = 2\operatorname{arctg} t$$

е дефинирана и диференцуема при $\operatorname{tg}\frac{a}{2} \le t \le \operatorname{tg}\frac{b}{2}$, притежава диференцуема обратна функция и най-сетне множеството от стойностите ѝ съвпада точно с интервала $[a, b]$. Това ни позволява да приложим теоремата за смяна на променливите интеграли. По такъв начин, като вземем пред вид, че

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

[1]Очевидно към този интеграл се свеждат всички интеграли от рационални функции на $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, защото

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

[2]В случая, разбира се, не е съществено дали интервалът $[a, b]$ е затворен или отворен.

намираме[1]

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int R\left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right]\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Пример. Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$$

при $-\pi < x < \pi$. Полагаме

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

или по-добре[2]

$$x = 2\operatorname{arctg} t,$$

откъдето

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{2+t^2}.$$

Като вземем пред вид още, че $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, получаваме

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left(2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{3+t^3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}\dfrac{t}{\sqrt{3}}}{1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

II. Нека $R(x)$ е рационална функция на x. Интегралите от вида

$$\int R'(x)\ln x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int R'(x)\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int R'(x)\arcsin x\,\mathrm{d}x$$

могат да се преобразуват в познати интеграли във всеки интервал, в който е дефинирана подинтегралната функция, с помощта на едно интегриране по части по следния начин:

$$\int R'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}R(x) = R(x)\ln x - \int R(x)\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\int R'(x)\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}R(x) = R(x)\operatorname{arctg} x - \int R(x)\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

[1] Смисълът на този по същество неточен начин на записване е ясен.

[2] С оглед на формула (5) от § 4 на тази глава, която ние сега ще приложим.

$$\int R'(x)\arcsin x\,\mathrm{d}x = \int \arcsin x\,\mathrm{d}\,R(x) = R(x)\arcsin x - \int R(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

По този начин преобразувахме първите два интеграла в интеграли от рационални функции, а третия интеграл — в Абелев интеграл, който може да се рационализира с помощта на Ойлеровите субституции.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$I = \int \frac{2x}{(1+x^2)^2}\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x.$$

Като вземем пред вид, че

$$R(x) = \int \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\,(x^2+1)}{(1+x^2)^2} = \frac{-1}{1+x^2}$$

е рационална функция, получаваме

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}\frac{-1}{1+x^2} = \frac{-\operatorname{arctg} x}{1+x^2} + \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\operatorname{arctg} x \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = -\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} + \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}\frac{1}{1+x^2} = \frac{-\operatorname{arctg} x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C. \end{aligned}$$

Задачи

Да се пресметнат следните интеграли в интервала $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$:

1. $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}$. *Отговор.* $I = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ln \dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{-\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}} + C = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right) + C'$.

2. $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4 - \sin^2 x}$. *Упътване.* Положете $\operatorname{tg} x = t$. *Отговор.* $I = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2} + C$.

3. $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2 + \sin x + 2\cos x}$. *Отговор.* $I = \ln\left(2 + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) + C$.

4. $I = \displaystyle\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)}\,\mathrm{d}x$. *Отговор.* $I = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + C$.

5. $I = \displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,\mathrm{d}x$.

Упътване. Използувайте формулите $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.
Отговор. $I = -\operatorname{arctg}(\cos 2x) + C$.

6. $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x(1 - \cos x)}}$. *Отговор.* $I = \sqrt{2}\ln \dfrac{1 - \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$.

7. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$. *Отговор.* $I = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$.

Да се пресметнат следните интеграли:

8. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $x > 0$. *Отговор.* $I = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

9. $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$, $-1 < x < 1$. *Отговор.* $I = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

10. $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \ln x\,\mathrm{d}x$, $x > 0$. *Отговор.* $I = -\frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln x + C$.

Глава II

ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ

§ 1. Дефиниция на понятието определен интеграл

Нека $f(x)$ е една функция, която е дефинирана и ограничена в един краен[1] и, да кажем, затворен интервал $[a, b]$, където $a < b$. Ние ще разделим интервала $[a, b]$ на краен брой подинтервали[2]

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

с помощта на точките

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

при което $x_0 = a$, $x_n = b$. Нека M_i е точната горна граница, а m_i — точната долна граница[3] на $f(x)$ в i-тия подинтервал $[x_{i-1}, x_i]$. Образуваме двете суми

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Така образуваните суми се наричат съответно голяма и малка сума на Дарбу (Darboux). Ние можем очевидно да образуваме по безбройно много начини сумите на Дарбу в зависимост от начина на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали. На всеки начин на делението отговаря обаче една единствена голяма и една единствена малка сума.

В случая, когато разглежданата функция приема само неотрицателни стойности, не е трудно да се даде геометрично тълкуване на сумите на Дарбу. Така например на черт. 2 е изобразена графиката на една функция, стойностите на която са неотрицателни. Интервалът $[a, b]$ в случая е разделен на 4 части. Не е трудно да се види, че малката сума на Дарбу, която отговаря на избрания начин на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали, представлява точно сумата от лицата на вписаните правоъгълници

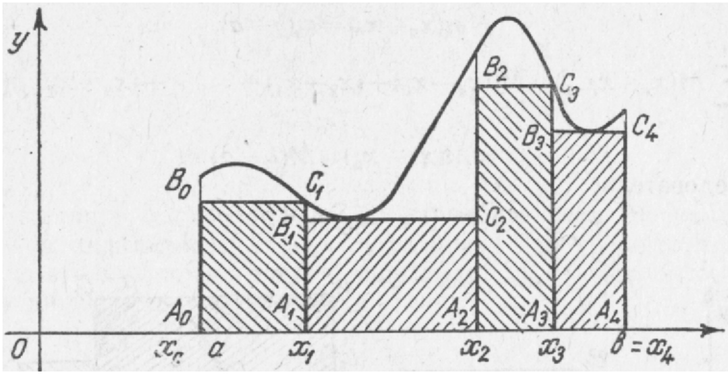
$$A_0A_1C_1B_0,\ A_1A_2C_2B_1,\ A_2A_3C_3B_2,\ A_3A_4C_4B_3.$$

---

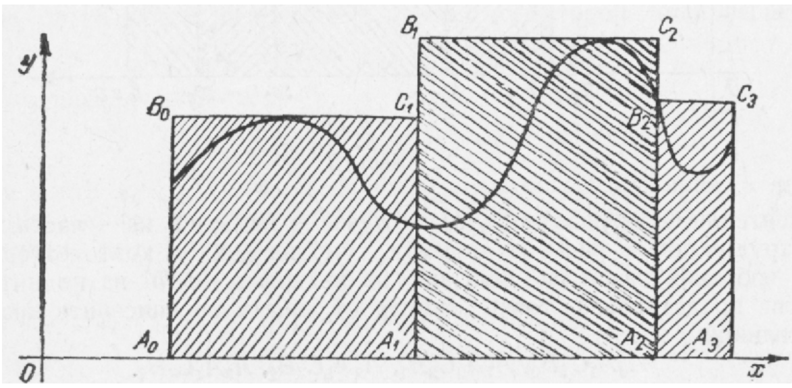
[1] В предположенията, които направихме, се иска интервалът $[a, b]$ да бъде краен, за да можем да го разложим на краен брой подинтервали, всеки един от които има крайна дължина. Ние впоследствие многократно ще се ползуваме и от обстоятелството, че дължината на целия интервал $[a, b]$ е крайна. Предположението, че интервалът е затворен, не е съществено.

[2] Тези подинтервали не са задължени да бъдат равни помежду си.

[3] В предположенията, които направихме за функцията $f(x)$, ние искахме тя да бъде ограничена, за да можем да говорим за горните граници M_i и долните граници m_i.



Черт. 2



Черт. 3

Аналогично на черт. 3 е изобразена също функция, която приема само неотрицателни стойности. Интервалът $[a, b]$ е разделен на 3 подинтервала. Голямата сума на Дарбу, която отговаря на избрания начин на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали, представлява сумата от лицата на правоъгълниците

$$A_0A_1C_1B_0,\ A_1A_2C_2B_1,\ A_2A_3C_3B_2.$$

Не е трудно да се види, че множеството на всички суми на Дарбу (както малките, така и големите) е ограничено (и отгоре, и отдолу). И наистина нека M е една горна граница на функцията $f(x)$, а m е една нейна долна граница в интервала $[a, b]$. В такъв случай, като вземем пред вид неравенствата

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M,$$

получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}).$$

От друга страна,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) &= m[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})]\\ &= m(x_n - x_0) = m(b-a),\\ \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}) &= M[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})]\\ &= M(x_n - x_0) = M(b-a)\end{aligned}$$

и следователно

$$m(b-a) \le s \le S \le M(b-a).$$

По този начин ние установихме не само ограничеността на множеството от сумите на Дарбу, но показахме, че ако S и s са съответно голямата и малката сума на Дарбу, които отговарят на *един и същ* начин на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали, то

$$s \le S. \tag{1}$$

Ние ще установим сега валидността на неравенството (1) и в случая, когато голямата сума S и малката сума s са образувани с помощта на два *какви да са* (*не непременно еднакви*) начина на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали. За да се убедим в това, ние ще покажем предварително, че при въвеждане на нови точки на деление големите суми на Дарбу монотонно намаляват, а малките суми монотонно растат. По-точно ние ще установим следното: нека

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

е едно произволно подразделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали, нека M_i е точната горна, а m_i — точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ и нека

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

са съответните суми на Дарбу; въвеждаме нова точка на деление ξ и означаваме с S' и s' сумите на Дарбу, които получаваме, когато към точките на деление $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ причислим още и точката ξ; в такъв случай

$$s \le s', \quad S' \le S.$$

И наистина, ако ξ съвпада с някоя от точките $x_0, x_1, \dots, x_n$, то новото деление не е различно от старото и следователно $s' = s$ и $S' = S$. За да установим верността на твърдението в общия случай, т. е. когато ξ не съвпада с някоя от точките $x_0, x_1, \dots, x_n$ означаваме с k най-малкото цяло положително число, за което $\xi < x_k$. В такъв случай $x_{k-1} < \xi$. Нека L_1 е точната горна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{k-1}, \xi]$, а L_2 е точната горна граница на $f(x)$ в подинтервала $[\xi, x_k]$. В такъв случай[1]

$$S' = \sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i - x_{i-1}) + L_1(\xi - x_{k-1}) + L_2(x_k - \xi) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Оттук, като вземем пред вид, че

$$S = \sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i - x_{i-1}) + M_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

намираме

$$S' - S = L_1(\xi - x_{k-1}) + L_2(x_k - \xi) - M_k(x_k - x_k - 1).$$

От друга страна,

$$L_1 \le M_k,$$
$$L_2 \le M_k,$$

защото M_k е горна граница на $f(x)$ в *целия* подинтервал $[x_{k-1}, x_k]$ и следователно е горна граница и във всеки един от подинтервалите $[x_{k-1}, \xi]$ и $[\xi, x_k]$, докато L_1 и L_2 са най-малките горни граници на $f(x)$ в тези подинтервали. По такъв начин получаваме

$$S' - S \le M_k(\xi - x_{k-1}) + M_k(x_k - \xi) - M_k(x_k - x_{k-1}) = 0,$$

[1] Разбира се, не е изключено някоя от сумите

$$\sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad \sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

да бъде празна.

с което е показано, че $S' \leq S$. Неравенството $s' \geq s$ се установява по аналогичен начин. Сега не е трудно да се установи общата валидност на неравенството (1) и в случая, когато голямата и малката сума са образувани с помощта на различни точки на деление. По-точно ние имаме пред вид следното: нека разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали по два начина с помощта на двете системи от делящи точки

$$a = x_0' < x_1' < \cdots < x_p' = b;$$
$$a = x_0'' < x_1'' < \cdots < x_q'' = b$$

и нека s е малката сума на Дарбу, която отговаря на системата $x_0', x_1', \ldots, x_p'$, а S е голямата сума, която отговаря на системата $x_0'', x_1'', \ldots, x_q''$; в такъв случай $s \leq S$. За да докажем това, ние означаваме с s_k малката сума на Дарбу, която получаваме, когато делим интервала $[a, b]$ с помощта на точките

$$x_0', x_1', \ldots, x_p'; x_1'', x_2'', \ldots, x_k'' \quad (1 \leq k \leq q),$$

а с S_k означаваме голямата сума на Дарбу, която получаваме, когато делим интервала $[a, b]$ с помощта на точките

$$x_0'', x_1'', \ldots, x_q''; x_1', x_2', \ldots, x_k' \quad (1 \leq k \leq p).$$

Съгласно доказаното по-горе имаме

$$s \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_q,$$
$$S \geq S_1 \geq S_2 \geq \cdots \geq S_p.$$

От друга страна, сумите s_q и S_p са образувани с помощта на едни и същи точки на деление, т. е.

$$s_q \leq S_p,$$

и следователно

$$s \leq S.$$

С това неравенство (1) е установено в цялата му общност в смисъл, че сега вече не се иска голямата и малката сума да бъдат образувани с помощта на един и същ начин на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали.

Този резултат ни дава възможност да установим следното важно неравенство, което свързва точната горна граница $\underline{I}$ на малките суми с точната долна граница $\overline{I}$ на големите суми на Дарбу:

$$\underline{I} \leq \overline{I}.$$

За да докажем това, фиксираме една голяма сума S и разглеждаме множеството на всичките малки суми s. Неравенството

$$s \leq S.$$

ни учи, че голямата сума S е *една горна граница* на множеството на малките суми. Като вземем предвид обаче, че $\underline{I}$ е *точната* горна граница на това множество, т. е. *най-малката* от всичките му горни граници, заключаваме, че

$$\underline{I} \leq S. \tag{2}$$

И така неравенството (2) е установено при *всеки* избор на голямата сума S. Този резултат ни учи, че $\underline{I}$ е една долна граница на множеството на големите суми. Като вземем предвид, че $\overline{I}$ е точната долна граница на това множество, т. е. *най-голямата* от всички долни граници, заключаваме, че

$$\underline{I} \leq \overline{I}. \tag{3}$$

С това интересуващото ни неравенство е установено.

Точната горна граница $\underline{I}$ на множеството на малките суми на Дарбу на една ограничена функция $f(x)$ в един краен интервал $[a, b]$, където $a < b$, се нарича долен интеграл на тази функция в разглеждания интервал и се означава със знака

$$\underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Аналогично точната долна граница $\overline{I}$ на множеството на големите суми на Дарбу се нарича горен интеграл и се означава със знака

$$\overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

При тези означения неравенството (3) може да се напише по следния начин:

$$\underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

След тези предварителни бележки ние вече сме готови да дадем дефиниция на понятието Риманов интеграл[1] (или, както се казва често, определен интеграл).

[1] В последно време след работите на Борел и Лебег теорията на интеграла е осъществила важен напредък с въвеждането на понятието Лебегов интеграл, което е много по-общо от разглежданото тук класическо понятие Риманов интеграл.

Казваме, че една функция $f(x)$, която е дефинирана и ограничена в един краен интервал $[a, b]$, е интегруема в Риманов смисъл в този интервал, когато горният и долният ѝ интеграл са равни помежду си. Общата стойност на горния и долния интеграл на една интегруема функция се нарича неин Риманов (*или определен*) *интеграл*.

Римановият интеграл на една интегруема функция $f(x)$ в интервала $[a, b]$, където $a < b$, се означава обикновено със знака

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Пример 1. Нека $f(x) = 1$ при всички стойности на x в интервала $[a, b]$. Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Във всеки един от тези подинтервали точната горна и точната долна граница на разглежданата функция е равна на 1. Поради това съответната голяма и съответната малка сума на Дарбу имат стойност

$$\sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Оттук заключаваме, че както точната долна граница на големите суми, така и точната горна граница на малките суми има също тъй стойността $b - a$. Това ни учи, че разглежданата функция е интегруема и стойността на интеграла ѝ в разглеждания интервал е $b - a$.

С помощта на въведените по-горе означения този резултат се записва по следния начин:

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b - a.$$

Ние често ще си служим с по-краткото означение

$$\int_a^b \mathrm{d}x = b - a.$$

Пример 2. Нека $f(x) = x$ при $a \leq x \leq b$. Не е трудно да се покаже, че тази функция е интегруема. За тази цел делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с S и s съответната голяма и малка сума, т. е.

$$S = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}), \tag{4}$$

$$s = \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu-1} (x_\nu - x_{\nu-1}). \tag{5}$$

Изваждайки двете равенства (4) и (5), получаваме

$$S - s = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{\nu-1})^2.$$

Оттук, като вземем предвид неравенствата

$$S \geq \overline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x, \quad s \leq \underline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x, \quad \underline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x,$$

получаваме

$$0 \leq \overline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x \leq \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{\nu-1})^2.$$

Ние имаме свободата да делим интервала $[a, b]$ на подинтервали по произволен начин. Специално, ако разделим този интервал на n *равни* части, ще получим

$$0 \leq \overline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x \leq \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 n = \frac{(b-a)^2}{n}.$$

В последното неравенство ние можем да даваме на цялото положително число n произволно големи стойности. Като вземем предвид, че разликата

$$\overline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x$$

ни най-малко не зависи от n, заключаваме, че

$$\overline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x = 0.$$

С това е установена интегруемостта на разглежданата функция.

За да пресметнем стойността на интеграла

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x,$$

събираме почленно двете неравенства (4) и (5). По този начин намираме

$$S + s = \sum_{\nu=1}^{n} \left(x_\nu^2 - x_{\nu-1}^2\right) = b^2 - a^2,$$

откъдето

$$\overline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x + s \leq b^2 - a^2,$$

$$S + \underline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x \geq b^2 - a^2$$

и следователно

(6) $$s \leq b^2 - a^2 - \overline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x,$$

$$S \geq b^2 - a^2 - \underline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Неравенството (6) учи, че числото

$$b^2 - a^2 - \overline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x$$

е една горна граница на множеството на малките суми. Като вземем пред вид, че долният интеграл представлява точната, т. е. *най-малката* горна граница на това множество, получаваме

$$\underline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x \leq b^2 - a^2 - \overline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x$$

и следователно

$$\underline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x \leq b^2 - a^2$$

и още

$$2\int_a^b x\,\mathrm{d}x \leq b^2 - a^2. \tag{8}$$

Аналогично, изхождайки от неравенството (7), получаваме

$$2\int_a^b x\,\mathrm{d}x \geq b^2 - a^2. \tag{9}$$

Неравенствата (8) и (9) ни дават

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Пример 3. Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в интервала $a \leq x \leq b$, където $a < b$, по следния начин:

$$f(x) = 1 \text{ при рационални стойности на } x;$$
$$f(x) = 0 \text{ при ирационални стойности на } x.$$

Така дефинираната функция не е интегруема в разглеждания интервал. И наистина горната граница 1 на разглежданата функция се достига във всеки подинтервал на интервала $[a, b]$ и следователно представлява *точната* горна граница на функцията във всеки подинтервал. Аналогично се убеждаваме, че точната долна граница на функцията във всеки един подинтервал на интервала $[a, b]$ е равна на нула. Оттук заключаваме, че при всеки избор на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

съответната голяма сума S има стойност

$$S = \sum_{\nu=1}^{n} 1\,(x_\nu - x_{\nu-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

и съответната малка сума s има стойност

$$s = \sum_{\nu=1}^{n} 0\,(x_\nu - x_{\nu-1}) = 0.$$

Оттук заключаваме, че

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = b - a$$

и

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

което показва, че разглежданата функция не е интегруема.

§ 2. Достатъчни условия за интегруемост

В този параграф ще дадем няколко достатъчни условия за интегруемост в Риманов смисъл.

I. *Всяка функция $f(x)$, която е дефинирана и непрекъсната*[1] *в един краен и затворен интервал $[a,b]$, е интегруема в него.*

Доказателство. Избираме едно произволно положително число ε и делим интервала $[a,b]$ на подинтервали

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

където

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

по такъв начин, че осцилацията на $f(x)$ във всеки един от тези подинтервали да бъде по-малка от ε. Това, както знаем, е възможно.

Нека M_i е точната горна и m_i е точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Разглеждаме съответната голяма сума S и съответната малка сума s:

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1}),$$

[1]Тук не е нужно да предполагаме, че функцията $f(x)$ е ограничена, защото, както знаем, това вече следва от непрекъснатостта ѝ в крайния и затворен интервал $[a,b]$.

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \, (x_i - x_{i-1})\,.$$

В такъв случай

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,(x_i - x_{i-1})\,.$$

Оттук, като вземем предвид неравенствата

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le S, \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \ge s, \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

намираме

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,(x_i - x_{i-1})\,.$$

При избрания начин на делението на интервала $[a, b]$ на подинтервали осцилацията $M_i - m_i$ във всеки един от тях удовлетворява неравенството

$$M_i - m_i \le \varepsilon$$

и следователно

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\,(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a).$$

Като вземем пред вид, че положителното число ε е произволно, а числата

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

и $b - a$ ни най-малко не зависят от ε, заключаваме, че

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

защото в противен случай неравенството

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon(b-a)$$

сигурно ще бъде нарушено,[1] ако направим положителното число ε достатъчно малко.

II. И така непрекъснатите функции (при наличността на останалите условия, които ние формулирахме в току-що доказаната теорема) са интегруеми. С непрекъснатите функции обаче съвсем не се изчерпва множеството на интегруемите функции. Така например, ако една функция $f(x)$ е дефинирана и ограничена[2] в интервала $[a, b]$ и има само краен брой точки на прекъсване, тя е също интегруема.

Ние ще докажем тази теорема за случая, когато функцията $f(x)$ има една единствена, и то вътрешна (по отношение на интервала $[a, b]$) точка на прекъсване c. Нека читателят сам обмисли общото доказателство.[3]

Избираме едно достатъчно малко (иначе произволно) положително число ε по такъв начин, че да имаме

$$a < c - \varepsilon, \quad c + \varepsilon < b.$$

Делим интервалите $[a, c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\begin{gathered} a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_p = c - \varepsilon, \\ c + \varepsilon = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_q = b \end{gathered}$$

така, че осцилацията на функцията $f(x)$ във всеки един от тях да бъде по-малка от ε. Това може да се направи, защото функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворените интервали $[a, c - \varepsilon]$ и $[c + \varepsilon, b]$.

Означаваме с M_i и m_i съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$; с N_i и n_i съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[y_{i-1}, y_i]$; с L и l съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ и най-сетне с M и m една горна и една долна граница на $f(x)$ в целия интервал $[a, b]$.

В такъв случай голямата сума S и малката сума s имат съответно стойностите

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{p} M_i(x_i - x_{i-1}) + L \,.\, 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{q} N_i(y_i - y_{i-1}), \\ s &= \sum_{i=1}^{p} m_i(x_i - x_{i-1}) + l \,.\, 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{q} n_i(y_i - y_{i-1}). \end{aligned}$$

[1]Нека припомним тук, че интервалът $[a, b]$ е краен.

[2]Тук се налага да предполагаме изрично ограничеността на функцията, защото тази функция притежава точки на прекъсване и следователно би могла да бъде неограничена.

[3]Което, разбира се, става по същия начин.

Оттук получаваме

$$S - s = \sum_{i=1}^{p}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + (L - l)\,.\,2\varepsilon + \sum_{i=1}^{q}(N_i - n_i)(y_i - y_{i-1}).$$

Като вземем пред вид неравенствата

$$S \geq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad s \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

намираме

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \sum_{i=1}^{p}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + (L - l)\,.\,2\varepsilon + \sum_{i=1}^{q}(N_i - n_i)(y_i - y_{i-1}), \end{aligned}$$

откъдето

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \sum_{i=1}^{p}\varepsilon(x_i - x_{i-1}) + (M - m)\,.\,2\varepsilon + \sum_{i=1}^{q}\varepsilon(y_i - y_{i-1}) \\ &= \varepsilon[(c - \varepsilon - a) + 2(M - m) + (b - c - \varepsilon)] < \varepsilon[b - a + 2M - 2m]. \end{aligned}$$

Като вземем пред вид, че положителното число ε е подчинено на единственото ограничение да бъде достатъчно малко, а числата

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ и } b - a + 2M - 2m$$

ни най-малко не зависят от ε, заключаваме, че

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

защото в противен случай неравенството

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon(b - a + 2M - 2m)$$

сигурно ще бъде нарушено, ако дадем на положителното число ε достатъчно малка стойност.

III. В известни случаи дори наличието на безбройно много точки на прекъсване не е пречка за интегруемостта. Така ние ще видим сега, че монотонните функции (при някои предположения относно дефиниционната им област) са също тъй интегруеми (дори ако притежават безбройно много точки на прекъсване). По-точно ние ще докажем следната теорема:

Всяка функция $f(x)$, която е дефинирана и монотонна в един краен и затворен интервал $[a, b]$, е интегруема в него.[1]

Доказателство. Ние ще разгледаме само случая, когато ни е дадена една монотонно растяща функция. Нека читателят сам разгледа случая, когато функцията монотонно намалява.

Избираме едно произволно число ε и делим интервала $[a, b]$ на подинтервали

$$[x_0, x_1],\ [x_1,\ x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

по такъв начин, че дължината на всеки един от тези подинтервали да бъде по-малка от ε. Разглеждаме съответната голяма сума S и съответната малка сума s. Очевидно имаме

$$S = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}),$$
$$s = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Оттук получаваме

$$S - s = \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})](x_\nu - x_{\nu-1}).$$

[1]Тук не е необходимо да предполагаме, че функцията $f(x)$ е ограничена, защото това вече следва от нейната монотонност: при монотонно растящи функции имаме

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b),$$

а при монотонно намаляващи функции имаме

$$f(a) \geq f(x) \geq f(b).$$

Като вземем пред вид неравенствата

$$S \geq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad s \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

намираме

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})](x_\nu - x_{\nu-1}),$$

откъдето

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})]\varepsilon = \varepsilon[f(b) - f(a)].$$

Като вземем пред вид още, че положителното число ε е произволно, а числата

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ и } f(b) - f(a)$$

не зависят ни най-малко от ε, заключаваме, че

(1) $$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

защото в противен случай неравенството

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon[f(b) - f(a)]$$

сигурно ще бъде нарушено, ако изберем положителното числото ε достатъчно малко.

Равенството (1) ни учи, че функцията $f(x)$ е интегруема. С това интересуващата ни теорема е доказана.

§ 3. Основни свойства на определените интеграли

I. Нека функцията $f(x)$ е ограничена в интервала[1] $[a, b]$ и c е коя да е вътрешна точка в този интервал. В такъв случай

(2) $$\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

[1]Нека припомним на това място, че интервалите, които разглеждаме, са крайни, ако изрично не е казано противното.

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Доказателство. Ние ще докажем само равенството (2). Равенството (3) се доказва по същия начин.

Делим интервалите $[a, c]$ и $[c, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_p = c, \tag{4}$$

$$c = x''_0 < x''_1 < \cdots < x''_q = b. \tag{5}$$

Означаваме с m_i точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x'_{i-1}, x'_i]$ и с m''_i точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x''_{i-1}, x''_i]$. Разглеждаме съответните малки суми

$$s' = \sum_{i=1}^{p} m'_i(x'_i - x'_{i-1}),$$

$$s'' = \sum_{i=1}^{q} m''_i(x''_i - x''_{i-1}).$$

Очевидно числото

$$s' + s'' = \sum_{i=1}^{p} m'_i(x'_i - x'_{i-1}) + \sum_{i=1}^{q} m''_i(x''_i - x''_{i-1})$$

представлява една специална малка сума за функцията $f(x)$, отговаряща на интервала $[a, b]$. От това заключваме[1], че

$$s' + s'' \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

откъдето

$$s' \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - s''. \tag{6}$$

Ние сега ще фиксираме точките (5). С това не е направено никакво ограничение за точките (4). Неравенството (6) ни учи, че числото

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - s''$$

[1] Припомняме, че долният интеграл е (точната) *горна* граница на множеството на малките суми.

е една горна граница на малките суми s'. Като вземем пред вид, че

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x$$

е точната, т. е. *най-малката* горна граница на тези суми, намираме

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - s''. \tag{7}$$

Неравенството (7) ни дава

$$s'' \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Ние имахме свободата да фиксираме точките (5) произволно. Сега ще се възползуваме от тази свобода. И така неравенството (8) е установено за всичките малки суми s''. От това заключаваме, че числото

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x$$

е една горна граница за тези суми. Като вземем пред вид, че

$$\underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

е точната, т. е. най-малката им горна граница, намираме

$$\underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x$$

и следователно

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

По-нататък делим интервала $[a, b]$ по произволен начин на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с m_i точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Разглеждаме малката сума

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Нека x_p е най-голямото от числата[1]

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n,$$

което не надминава c. В такъв случай

$$x_p \leq c < x_{p+1}.$$

Означаваме с m' и m'' точната долна граница на $f(x)$ съответно в подинтервалите $[x_p, c]$ и $[c, x_{p+1}]$. Очевидно имаме[2]

$$m' \geq m_{p+1}, \quad m'' \geq m_{p+1},$$

т. е.

$$m'(c - x_p) + m''(x_{p+1} - c) \geq m_{p+1}(x_{p+1} - x_p).$$

От това заключаваме, че[3]

$$\begin{aligned}
s &= \sum_{i=1}^{p} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_{p+1}(x_{p+1} - x_p) + \sum_{i=p+2}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \left[\sum_{i=1}^{p} m_i(x_i - x_{i+1}) + m'(c - x_p)\right] + \left[m''(x_{p+1} - c) + \sum_{i=p+2}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})\right] \\
&\leq \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Това неравенство ни учи, че числото

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

[1]Такова число сигурно има, защото $x_0 = a < c$. Това число е по-малко от x_n, защото $x_n = b > c$.

[2]Ние бихме могли да се убедим във валидността на тези неравенства така: m_{p+1} е долна граница на $f(x)$ в целия интервал $[x_p, x_{p+1}]$, а следователно и в подинтервала $[x_p, c]$, докато m' е точната долна граница, т. е. най-голямата долна граница на $f(x)$ в същия подинтервал, оттук заключаваме, че $m' \geq m_{p+1}$. Аналогично се установява и неравенството $m'' \geq m_{p+1}$.

[3]При $p = 0$ трябва да се разбира

$$\sum_{i=1}^{p} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0.$$

При $p = n - 1$ трябва да се разбира

$$\sum_{i=p+2}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0.$$

представлява една горна граница на малките суми s. Като вземем под внимание, че

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

представлява точната, т. е. най-малката им горна граница, получаваме

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Неравенствата (9) и (10) ни учат, че

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Следствие 1. Ако

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{\int_{x_i-1}^{x_i}} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\int_{x_i-1}^{x_i}} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Следствие 2. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, то тя е интегруема и във всеки подинтервал на $[a, b]$. И наистина нека $a < c < b$. В такъв случай

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

и следователно

$$\left(\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0.$$

Като вземем пред вид, че

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0 \quad \text{и} \quad \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

намираме

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

т. е. функцията $f(x)$ е интегруема в двата подинтервала $[a,c]$ и $[c,b]$. Оттук може да се установи, че функцията $f(x)$ е интегруема и във всеки подинтервал $[c,d]$, където $a < c < d < b$. И наистина ние вече установихме, че тя е интегруема в подинтервала $[c,b]$, а от това и от доказаното по-горе следва, че тя е интегруема и в подинтервала $[c,d]$.

Следствие 3. Ако функцията $f(x)$ е интегруема както в интервала $a \leq x \leq c$, така и в интервала $c \leq x \leq b$, то тя е интегруема и в интервала $a \leq x \leq b$. И наистина от

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

и

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

имаме

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Следствие 4. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$ и $a < c < b$, то

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

По-общо, ако

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_i-1}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

II. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и ограничена в интервала $[a,b]$ и λ е една константа. В такъв случай при $\lambda \geq 0$ имаме

$$\underline{\int_a^b} \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11}$$

и

$$\overline{\int_a^b} \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

а при $\lambda \leq 0$ имаме

$$\underline{\int_a^b} \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

и

$$\overline{\int_a^b} \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Доказателство. Ние ще разгледаме само равенството (11) при $\lambda > 0$, защото останалите равенства се установяват по същия начин, а случаят $\lambda = 0$ е тривиален.

Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с m_i точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Очевидно[1] точната долна граница на $\lambda f(x)$ в същия подинтервал е λm_i.

Разглеждаме двете малки суми

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \lambda m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Явно е, че $s = \dfrac{\sigma}{\lambda}$.

Като вземем пред вид неравенството

$$s \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

(което изразява, че долният интеграл е една горна граница на малките суми), получаваме

$$\frac{\sigma}{\lambda} \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

[1]За да се убедим в това, означаваме с m_i' точната долна граница на $\lambda f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Очевидно имаме $m_i \leq f(x)$, $m_i' \leq \lambda f(x)$ при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ и следователно $\lambda m_i \leq \lambda f(x)$, $\dfrac{m_i'}{\lambda} \leq f(x)$. Тези неравенства ни учат, че числата $\dfrac{m_i'}{\lambda}$ и λm_i са долни граници съответно на функциите $f(x)$ и $\lambda f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Като вземем пред вид, че m_i и m_i' са точните, т. е. най-големите им долни граници, намираме $m_i \geq \dfrac{m_i'}{\lambda}$ и $m_i' \geq \lambda m_i$. Тези неравенства ни дават $m_i' = \lambda m_i$.

или

$$\sigma \leq \lambda \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

С това е установено, че числото

$$\lambda \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

е една горна граница на множеството на малките суми σ. Като вземем пред вид, че $\underline{\int_a^b} \lambda f(x)\,\mathrm{d}x$ е точната горна, т. е. най-малката горна граница на тези суми, получаваме

$$\underline{\int_a^b} \lambda f(x)\,\mathrm{d}x \leq \lambda \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Аналогично се установява неравенството

$$\lambda \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^b} \lambda f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Оттук заключаваме, че

$$\underline{\int_a^b} \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Следствие. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и λ е константа, то функцията $\lambda f(x)$ е също тъй интегруема и

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

III. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, то и функцията $|f(x)|$ е интегруема в този интервал.

Доказателство. Избираме $\varepsilon > 0$ и образуваме една голяма сума на Дарбу S^* и една малка сума s^* за функцията $f(x)$ по такъв начин, че да имаме

$$S^* < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon,$$

$$s^* > \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

Това е възможно да се направи, защото $\overline{\int_a^b}$ е най-голямата долна граница на големите суми и $\underline{\int_a^b}$ е най-малката горна граница на малките суми на Дарбу, т. е. $\overline{\int_a^b} + \varepsilon$ не е долна граница на големите суми, а $\underline{\int_a^b} - \varepsilon$ не е горна граница на малките суми.

По-нататък делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

по такъв начин, че измежду точките $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ да се намират всичките точки на деление както на сумата S^*, така и на сумата s^*. Означаваме с M_i точната горна, с m_i точната долна граница на $f(x)$, а с M'_i и m'_i съответно точната горна и точната долна граница на $|f(x)|$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ и разглеждаме сумите на Дарбу

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),\\
s &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),\\
S' &= \sum_{i=1}^{n} M'_i(x_i - x_{i-1}),\\
s' &= \sum_{i=1}^{n} m'_i(x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

Очевидно

$$S^* \geq S, \quad s^* \leq s$$

и

$$0 \leq \overline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq S' - s' = \sum_{i=1}^{n}(M'_i - m'_i)(x_i - x_{i-1}).$$

От друга страна, както и да избираме точките ξ_1 и ξ_2 в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$, имаме

$$\begin{aligned}
f(\xi_1) - f(\xi_2) &\leq M_i - m_i,\\
f(\xi_2) - f(\xi_1) &\leq M_i - m_i,
\end{aligned}$$

т. е.

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \le M_i - m_i$$

и толкова повече

$$|f(\xi_1)| - |f(\xi_2)| \le M_i - m_i.$$

Оттук не е трудно да се установи, че

$$M_i' - m_i' \le M_i - m_i.$$

За тази цел избираме произволно положително число δ и определяме ξ_1 и ξ_2 така, че да имаме

$$|f(\xi_1)| > M_i' - \delta, \quad |f(\xi_2)| < m_i' + \delta.$$

По такъв начин получаваме

$$M_i' - m_i' - 2\delta < M_i - m_i.$$

Като вземем пред вид, че положителното число δ е произволно, намираме

$$M_i' - m_i' \le M_i - m_i.$$

Този резултат ни позволява да пишем

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i' - m_i')(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = S - s$$

и следователно

$$\begin{aligned} 0 &\le \overline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x \le S - s \le s \le S^* - s^* \\ &< \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon - \left(\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \right) = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Оттук, като вземем пред вид, че положителното число ε е произволно, а неотрицателната разлика

$$\overline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

не зависи от ε, заключаваме, че

$$\overline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0,$$

т. е. функцията $|f(x)|$ е наистина интегруема.

IV. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $[a, b]$ и във всички точки от този интервал удовлетворява неравенствата

$$m \leq f(x) \leq M,$$

където m и M са константи.

В такъв случай

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a), \tag{12}$$

$$m(b-a) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a). \tag{13}$$

Доказателство. Ние ще докажем неравенството (12); неравенството (13) се доказва по същия начин.

Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с m_i точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Очевидно имаме[1]

$$m \leq m_i \leq M$$

и следователно

$$m(b-a) = \sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}) = M(b-a).$$

От неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

което изразява, че долният интеграл е една горна граница на малките суми, получаваме

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[1]И наистина от $m_i \leq f(x) \leq M$ при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ имаме $m_i \leq M$. От друга страна, m е една долна граница на $f(x)$ в целия интервал $[a, b]$, а следователно и в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$, докато m_i е точната, т. е. най-голямата долна граница на функцията $f(x)$ в същия подинтервал, т. е. $m \leq m_i$.

От друга страна, неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq M(b-a)$$

ни учи, че константата $M(b-a)$ е една горна граница на множеството на малките суми. Като вземем пред вид, че $\underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ е точната, т. е. най-малката горна граница на тези суми, намираме

$$\underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Следствие. Нека функцията $f(x)$ е ограничена в интервала $[a,b]$ и $f(x) \geq 0$. В такъв случай

$$\underline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$
$$\overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Специално, ако функцията $f(x)$ е интегруема, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

V. Нека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са две ограничени функции в интервала $[a,b]$, които при всички стойности на x удовлетворяват неравенството

$$f_1(x) \leq f_2(x).$$

В такъв случай

$$\underline{\int}_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \leq \underline{\int}_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

и

$$\overline{\int}_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int}_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{15}$$

Доказателство. Ще докажем неравенството (14); неравенството (15) се доказва по същия начин. Делим интервала $[a,b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с m'_i и m''_i точните долни граници съответно на $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Очевидно имаме[1]

$$m'_i \le m''_i.$$

От това неравенство получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} m'_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} m''_i(x_i - x_{i-1}),$$

т. е.[2]

$$\sum_{i=1}^{n} m'_i(x_i - x_{i-1}) \le \underline{\int}_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Този резултат ни учи, че числото $\underline{\int}_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$ е една горна граница на множеството на малките суми на $f_1(x)$. Като вземем в съображение, че

$$\underline{\int}_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x$$

е точната, т. е. най-малката от горните граници на тези суми, получаваме

$$\underline{\int}_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \le \underline{\int}_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Следствие. Ако функцията $f(x)$ е ограничена в интервала $[a, b]$, $a < b$, то

$$\left|\overline{\int}_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \overline{\int}_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Следователно, ако функцията $f(x)$ е интегруема, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

[1]Като вземем пред вид неравенствата $m'_i \le f_1(x) \le f_2(x)$ при $x_{i-1} \le x \le x_i$, получаваме $m'_i \le f_2(x)$. Това неравенство ни учи, че m'_i е една долна граница на $f_2(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Като вземем пред вид още, че m''_i е точната, т. е. най-голямата долна граница на $f_2(x)$ в същия подинтервал, получаваме $m'_i \le m''_i$.

[2]Тук ние се възползуваме от неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} m''_i(x_i - x_{i-1}) \le \underline{\int}_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x,$$

което изразява, че долният интеграл е една горна граница за малките суми.

Доказателство. От неравенствата

$$f(x) \leq |f(x)|,$$
$$-f(x) \leq |f(x)|$$

получаваме

$$\overline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\overline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \underline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \underline{\int_a^b} [-f(x)]\,\mathrm{d}x = -\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Но

$$\left| \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \right|$$

е едното (по-голямото) от двете числа

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{и} \quad -\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

тъй че

$$\overline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \left| \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \right|.$$

Забележка. Неравенството

$$\left| \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \underline{\int_a^b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

не винаги е валидно. За да се убедим в това, разглеждаме функцията $f(x)$, дефинирана с условията $f(x) = -1$ при рационални стойности на x и $f(x) = 0$ при ирационални стойности на x.

§ 4. Интегриране на сума

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две ограничени функции в интервала $[a, b]$. В такъв случай

$$\underline{\int_a^b} [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x$$

и

$$\overline{\int_a^b} [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

От това следва, че ако двете функции $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми, то сумата $f(x) + g(x)$ е също така интегруема и

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ние ще извършим доказателството, като разгледаме първо специалния случай, когато $g(x)$ е константа. Да означим с m тази константа. В такъв случай

$$\underline{\int_a^b} [f(x) + m]\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + m(b - a), \tag{1}$$

$$\overline{\int_a^b} [f(x) + m]\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + m(b - a). \tag{2}$$

Доказателство. Ще докажем равенството (1); равенството (2) се доказва по същия начин.

Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с m_i и m_i' съответно точната долна граница на $f(x)$ и $f(x) + m$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. В такъв случай имаме

$$m_i' = m_i + m. \tag{3}$$

И наистина от неравенството

$$m_i \leq f(x),$$

валидно при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, получаваме

$$m_i + m \leq f(x) + m,$$

т. е. $m_i + m$ е една долна граница на $f(x) + m$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Като вземем пред вид, че m_i' е точната, т. е. най-голямата долна граница на тази функция в същия подинтервал, намираме

$$m_i + m \leq m_i'. \tag{4}$$

Аналогично от неравенството

$$m_i' \leq f(x) + m,$$

валидно при $x_{i-1} \le x \le x_i$, получаваме

$$m'_i - m \le f(x),$$

т. е. числото $m'_i - m$ е една долна граница на функцията $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Като вземем пред вид, че m_i е точната, т. е. най-голямата долна граница на тази функция в същия подинтервал, намираме

$$m'_i - m \le m_i$$

или

$$m'_i \le m_i + m. \tag{5}$$

Неравенствата (4) и (5) ни дават $m'_i = m_i + m$.

Равенството (3) ни дава възможност да пишем

$$\sum_{i=1}^{n} m'_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(m_i + m)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + m(b - a)$$

и следователно

$$\sum_{i=1}^{n} m'_i(x_i - x_{i-1}) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + m(b - a).$$

С това ние доказахме, че числото

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + m(b - a)$$

е една горна граница на множеството на малките суми на функцията $f(x)+m$. Когато вземем пред вид, че числото

$$\underline{\int_a^b} [f(x) + m]\,\mathrm{d}x$$

е точната, т. е. най-малката им горна граница, намираме

$$\underline{\int_a^b} [f(x) + m]\,\mathrm{d}x \le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + m(b - a). \tag{6}$$

Аналогично, използувайки неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \underline{\int_a^b} [f(x) + m]\,\mathrm{d}x - m(b - a),$$

доказваме, че

$$\underline{\int_a^b} [f(x) + m] \,\mathrm{d}x \geq \underline{\int_a^b} f(x) \,\mathrm{d}x + m(b - a). \tag{7}$$

Неравенствата (6) и (7) ни дават

$$\underline{\int_a^b} [f(x) + m] \,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x) \,\mathrm{d}x + m(b - a).$$

След всичко извършено ние сме готови вече да разгледаме общия случай.

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две ограничени функции в интервала $[a, b]$. В такъв случай

$$\underline{\int_a^b} [f(x) + g(x)] \,\mathrm{d}x \geq \underline{\int_a^b} f(x) \,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} g(x) \,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

$$\overline{\int_a^b} [f(x) + g(x)] \,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x) \,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} g(x) \,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Доказателство. Ще докажем, неравенството (8); неравенството (9) се доказва по същия начин.

Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с m_i точната долна граница на $g(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Съгласно доказаните по-горе теореми

$$\begin{aligned}\underline{\int_a^b} [f(x) + g(x)] \,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n} \underline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} [f(x) + g(x)] \,\mathrm{d}x \geq \sum_{i=1}^{n} \underline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} [f(x) + m_i] \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\underline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} f(x) \,\mathrm{d}x + m_i(x_i - x_{i-1}) \right] \\ &= \underline{\int_a^b} f(x) \,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})\end{aligned}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \underline{\int_a^b} [f(x) + g(x)] \,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

С това доказахме, че числото

$$\underline{\int_a^b}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x$$

е една горна граница на множеството на малките суми на $g(x)$. Като вземем пред вид, че

$$\underline{\int_a^b}g(x)\,\mathrm{d}x$$

е точната, т. е. най-малката им горна граница, получаваме

$$\underline{\int_a^b}g(x)\,\mathrm{d}x\le\underline{\int_a^b}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x-\underline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x,$$

с което неравенството (8) е установено.

Следствие. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a,b]$, то функцията $f(x)+g(x)$ е също тъй интегруема в този интервал и

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Доказателство. От неравенствата

$$\begin{aligned}\underline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x+\underline{\int_a^b}g(x)\,\mathrm{d}x\le\underline{\int_a^b}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x&\\ \le\overline{\int_a^b}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x\le\overline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x+\overline{\int_a^b}g(x)\,\mathrm{d}x&\end{aligned}$$

и от равенствата

$$\underline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x,\qquad\underline{\int_a^b}g(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b}g(x)\,\mathrm{d}x$$

получаваме

$$\underline{\int_a^b}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Първото равенство ни учи, че функцията $f(x)+g(x)$ е интегруема, а последното ни дава

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

§ 5. Произведение на две интегруеми функции

Ще докажем, че произведението $f(x)g(x)$ на две интегруеми в един интервал $a \leq x \leq b$ функции $f(x)$ и $g(x)$ е интегруема функция в този интервал.

Доказателство. Първо ще разгледаме случая, когато функциите $f(x)$ и $g(x)$ са неотрицателни. Избираме едно положително число ε. Означаваме с S' и s' една голяма и една малка сума на Дарбу на функцията $f(x)$, които удовлетворяват условията

$$S' < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon, \quad s' > \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

Означаваме с S'' и s'' една голяма и една малка сума на Дарбу на функцията $g(x)$, които удовлетворяват условията

$$S'' < \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon, \quad s'' > \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

В такъв случай

$$S' - s' < 2\varepsilon, \quad S'' - s'' < 2\varepsilon,$$

тъй като функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми, т. е.

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Да разделим интервала $a \leq x \leq b$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

които са избрани така, че между тях да фигурира всяка точка, която се използва при образуването на сумите S', s', S'', s''. Означаваме с M_i', респективно M_i'', точната горна граница на $f(x)$, респективно $g(x)$, в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$, а с m_i', респективно m_i'', означаваме точната долна граница на $f(x)$, респективно $g(x)$, в този подинтервал. В такъв случай при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ имаме

$$m_i' m_i'' \leq f(x)g(x) \leq M_i' M_i''$$

и следователно

$$\overline{\int_a^b} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n} M_i' M_i'' (x_i - x_{i-1}),$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geq \sum_{i=1}^{n} m_i' m_i''(x_i - x_{i-1}),$$

откъдето получаваме

$$\overline{\int_a^b} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n}(M_i'M_i'' - m_i'm_i'')(x_i - x_{i-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} M_i''(M_i' - m_i')(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} m_i'(M_i'' - m_i'')(x_i - x_{i-1}).$$

Да означим с M една обща горна граница на $f(x)$ и $g(x)$ в целия интервал $a \leq x \leq b$. В такъв случай ще имаме

$$m_i' \leq M \text{ и } M_i'' \leq M$$

и следователно

$$\overline{\int_a^b} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\leq M\sum_{i=1}^{n}(M_i' - m_i')(x_i - x_{i-1}) + M\sum_{i=1}^{n}(M_i'' - m_i'')(x_i - x_{i-1}).$$

От друга страна,

$$\sum_{i=1}^{n} M_i'(x_i - x_{i-1}) \leq S', \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i - x_{i-1}) \geq s',$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_i''(x_i - x_{i-1}) \leq S'', \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i''(x_i - x_{i-1}) \geq s''.$$

По такъв начин получаваме

$$\overline{\int_a^b} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M(S' - s') + M(S'' - s'') \leq 4M\varepsilon,$$

което е достатъчно да можем да твърдим, че

$$\overline{\int_a^b} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

По такъв начин ние установихме интегруемостта на произведението $f(x)g(x)$ в случая, когато функциите $f(x)$ и $g(x)$ са неотрицателни. За да се освободим от това предположение, означаваме с m една обща долна граница на $f(x)$ и $g(x)$. В такъв случай функциите

$$f(x) - m \text{ и } g(x) - m$$

са неотрицателни и следователно въз основа на доказаното можем да твърдим, че произведението

$$[f(x) - m][g(x) - m]$$

е интегруемо. Това обаче ни позволява да твърдим, че функцията

$$f(x)g(x) = [f(x) - m][g(x) - m] + mf(x) + mg(x) - m^2$$

е също тъй интегруема, защото е сума на интегруеми функции. С това доказателството е завършено.

§ 6. Интегралът като функция на една от интеграционните си граници. Теорема на Лайбниц и Нютон. Зависимост между определени и неопределени интеграли

Нека функцията $f(t)$ е интегруема в интервала $a \leq t \leq b$. В такъв случай, както видяхме по-горе, тази функция е интегруема и в подинтервала $a \leq t \leq x$, където $a < x \leq b$.

Стойността на интеграла

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

може, разбира се, евентуално да се мени когато x се мени. Тя обаче е еднозначно определена, когато x е дадено, и следователно представлява функция на x, дефинирана в интервала $[a, b]$.

Ние ще пишем за краткост

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

и ще установим, че тази функция е *непрекъсната*. Ще докажем дори нещо повече: *тази функция удовлетворява условието на Липшиц* (вж. Диференциално смятане, част III, глава II, § 5).

За да се убедим в това, означаваме с M и m една горна и една долна граница на $f(t)$ в интервала $[a, b]$.

Нека $x_1 < x_2$ са две точки от интервала $[a, b]$. В такъв случай

$$F(x_2) = \int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

и следователно

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Като се възползуваме от неравенството (12) от § 3, получаваме[1]

$$m(x_2 - x_1) \leq \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(x_2 - x_1)$$

и следователно

$$m(x_2 - x_1) \leq F(x_2) - F(x_1) \leq M(x_2 - x_1). \tag{1}$$

От това двойно неравенство се вижда непосредствено, че функцията $F(x)$ удовлетворява условието на Липшиц.[2]

За да се убедим, че функцията $F(x)$ е непрекъсната във всяка точка x_0 на интервала $(a, b]$, оставяме x_1 и x_2 да клонят към x_0 чрез две произволни редици от стойности (лежащи, разбира се, в интервала $(a, b]$) по такъв начин, че да имаме

$$x_1 \leq x_0 \leq x_2.$$

В такъв случай са валидни неравенствата[3] (1). Като вземем предвид, че разликата $x_2 - x_1$ клони към нула, заключаваме, че разликата

$$F(x_2) - F(x_1)$$

---

[1]В случая функцията $f(t)$ е интегруема и следователно, като приложим неравенството (12) от § 3, можем да пишем

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

(т. е. вместо долния интеграл вземаме редовния Риманов интеграл) или в нашия специален случай

$$m(x_2 - x_1) \leq \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(x_2 - x_1).$$

[2]Ако функцията $f(t)$ не е задължена да бъде интегруема в интервала (a, b), но все пак е ограничена, ние можем да приложим горните разсъждения за функциите

$$F_1(x) = \underline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad F_2(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

и да заключим, че те удовлетворяват условието на Липшиц и следователно са непрекъснати.

[3]Дори при $x_1 = x_2$. В този случай валидността на тези неравенства не следва от направените по-горе разсъждения, обаче тя се вижда непосредствено, тъй като в този случай $F(x_1) = F(x_2)$.

също клони към нула, което, както знаем, е достатъчно да твърдим, че функцията $F(x)$ е непрекъсната в точката x_0.

След тези предварителни бележки ще докажем следната важна теорема, която е известна под името теорема на Лайбниц и Нютон:

Нека функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ и непрекъсната в точката x_0, където $a < x_0 \leq b$. В такъв случай функцията

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

е диференцуема в точката x_0 и

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Доказателство. Разглеждаме отношението

$$\frac{F(x_n) - F(\xi_n)}{x_n - \xi_n},$$

където

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \tag{2}$$

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots, \tag{3}$$

са две редици, удовлетворяващи условията

$$a < \xi_n \leq x_0 \leq x_n \leq b, \quad \xi_n \neq x_n, \quad \lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Очевидно имаме

$$\begin{aligned}\frac{F(x_n) - F(\xi_n)}{x_n - \xi_n} &= \frac{\displaystyle\int_a^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{\xi_n} f(t)\,\mathrm{d}t}{x_n - \xi_n} \\ &= \frac{\left[\displaystyle\int_a^{\xi_n} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\xi_n}^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right] - \int_a^{\xi_n} f(t)\,\mathrm{d}t}{x_n - \xi_n} = \frac{1}{x_n - \xi_n}\int_{\xi_n}^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Избираме едно произволно положително число ε и определяме $\delta > 0$ по такъв начин, че при

$$|x_0 - t| < \delta, \quad a \leq t \leq b,$$

да имаме

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

или, което е същото,

$$f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon. \tag{4}$$

След това избираме едно толкова голямо ν, че при $n > \nu$ да имаме $x_n - x_0 < \delta$ и $x_0 - \xi_n < \delta$. Това е възможно, защото редиците (2) и (3) клонят към x_0 и защото $\delta > 0$. В такъв случай при $\xi_n \leq t \leq x_n$ имаме $|t - x_0| < \delta$ и следователно са в сила неравенствата (4).

Като използуваме неравенствата (12) от § 3, получаваме

$$[f(x_0) - \varepsilon](x_n - \xi_n) \leq \int_{\xi_n}^{x_n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq [f(x_0) + \varepsilon](x_n - \xi_n)$$

и следователно

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x_n) - F(\xi_n)}{x_n - \xi_n} \leq f(x_0) + \varepsilon$$

или

$$\left| \frac{F(x_n) - F(\xi_n)}{x_n - \xi_n} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon,$$

нещо, което е достатъчно, както знаем, за да твърдим, че функцията $F(x)$ е диференцуема[1] в точката x_0 и че

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Особено е важен случаят, когато подинтегралната функция $f(x)$ е непрекъсната във всичките точки на интеграла $a \leq x \leq b$. В такъв случай във всичките точки на интервала $(a, b]$ имаме

$$F'(x) = f(x),$$

т. е. функцията $F(x)$ представлява една примитивна функция на $f(x)$ в интервала $(a, b]$. Върху тази зависимост между определените и неопределените

[1]Ако функцията $f(x)$ не е подчинена на условието да бъде интегруема, но все пак е ограничена, то ние можем да приложим горните разсъждения за функциите

$$F_1(x) = \underline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad F_2(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

и да заключим, че във всяка точка x_0, в която функцията $f(x)$ е непрекъсната, двете функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ са диференцуеми и

$$F_1'(x_0) = F_2'(x_0) = f(x_0).$$

интеграли почива един важен метод за пресмятане на определените интеграли. Ние ще изложим този метод.

Нека $\Phi(x)$ е една примитивна функция на функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$. Това значи, че функцията $\Phi(x)$ е диференцуема в интервала $a \leq x \leq b$ и

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Полагаме

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ при } a < x \leq b$$

и разглеждаме разликата

$$\varphi(x) = F(x) - \Phi(x). \tag{5}$$

Очевидно имаме

$$\varphi'(x) = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

т. е. функцията $\varphi(x)$ е една константа. Да означим с C нейната стойност. За да пресметнем стойността на тази константа, извършваме граничен преход $x \to a$.

Като вземем пред вид неравенствата

$$m(x - a) \leq F(x) \leq M(x - a),$$

в които M е една горна, а m е една долна граница на $f(x)$, получаваме

$$\lim_{x \to a} F(x) = 0. \tag{6}$$

От друга страна, функцията $\Phi(x)$ по предположение е диференцуема в затворения интервал $[a, b]$ и следователно е непрекъсната в него. Оттук получаваме по-специално:

$$\lim_{x \to a} \Phi(x) = \Phi(a). \tag{7}$$

Като извършим граничния преход $x \to a$ в равенството (5) и вземем пред вид равенствата (6) и (7), получаваме

$$C = -\Phi(a)$$

и следователно

$$F(x) - \Phi(x) = -\Phi(a),$$

или още

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(x) - \Phi(a). \tag{8}$$

Така например, за да пресметнем интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x,$$

вземаме пред вид познатия неопределен интеграл

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x.$$

Като приложим формулата (8), получаваме

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Накрая ще отбележим, че понякога формулата (8) се записва във вида

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \Big|\Phi(t)\Big|_a^x,$$

като се използва означението

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \Big|\Phi(t)\Big|_a^x.$$

При този начин на писане имаме например

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = \Big|\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

§ 7. Допълнения към дефиницията на понятието интеграл

Ние дефинирахме символа

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

само за случая, когато долната интеграционна граница a е по-малка от горната b. Сега ще дефинираме символа (1) при $a \geq b$ по следния начин: при $a = b$ полагаме

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{2}$$

а при $a > b$ полагаме

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

(ние знаем какво значи $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, защото $b < a$).

При дефиницията (2) се ръководим от следните съображения: нека $f(x)$ е една интегруема функция в интервала $[a, b]$, $a < b$; ако означим с M и m съответно една нейна горна и една нейна долна граница в разглеждания интервал, то при $a < x \leq b$ имаме

$$m(x-a) \leq \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(x-a);$$

оттук заключаваме, че

$$\lim_{x\to a} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

(тук x клони към a чрез стойности, по-големи от a); като полагаме

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

ние си осигуряваме непрекъснатостта на функцията

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

в точката a (досега функцията $F(x)$ беше дефинирана и непрекъсната само в интервала $(a, b]$).

При дефиницията (3) ние се ръководим от следните съображения: ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, c]$, $a < c$, и b е една вътрешна точка в този интервал, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x; \tag{4}$$

ние се стремим да нагодим дефиницията (3) така (ако това е възможно), че да осигурим валидността на равенството (4), каквото[1] и да е взаимното

[1] Т. е. не само когато $a < b < c$.

разположение на точките a, b, c; специално при $c = a$ получаваме от равенството (4)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

или

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

И така, ако желаем да осигурим общата валидност на равенството (4), ние нямаме друг избор освен да възприемем дефиницията (3).

От направените дотук разсъждения обаче съвсем не е ясно дали при така дадените дефиниции (2) и (3) равенството (4) е действително вярно при всички взаимни разположения на точките a, b, c. Този въпрос се решава в положителен смисъл с непосредствена проверка, която ще предоставим на читателя.[1] По такъв начин достигаме до следния резултат:

Ако функцията $f(x)$ *е интегруема в интервала* Δ и a, b, c са три точки от този интервал, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

(каквото и да е взаимното разположение на точките a, b, c).

В предния параграф ние доказахме следната теорема: ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, $a < b$, то функцията

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad a < x \leq b,$$

е диференцуема и

$$F'(x) = f(x)$$

(теоремата на Лайбниц и Нютон). При тази теорема долната интеграционна граница a е по-малка от независимата променлива x. Не е трудно да се види, че функцията

$$\Phi(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ където } a \leq c \leq b,$$

[1]Читателят лесно ще даде сам доказателството, като разгледа поотделно случаите, които могат да се представят:

$$c < a < b,\ c = a < b,\ a < c < b,\ a < c = b,\ a < b < c,$$
$$c < b < a,\ c = b < a,\ b < c < a,\ b < c = a,\ b < a < c,$$
$$c < a = b,\ c = a = b,\ a = b < c.$$

е също тъй диференцуема при $a \leq x \leq b$ и

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Тази теорема се отличава от по-горната по това, че в случая независимата променлива x може да приема както стойности, по-големи от c, така и стойности, по-малки от c.

Доказателството се извършва без труд, като положим $f(x) = f(a)$ при $x < a$ и вземем пред вид, че

$$\Phi(x) = \int_c^p f(t)\,\mathrm{d}t + \int_p^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

където $p < a$. И наистина ние знаем, че функцията

$$\int_p^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

е диференцуема (защото тук имаме $p < x \leq b$ и функцията $f(t)$ е непрекъсната при $p \leq t \leq b$). Оттук заключаваме, че функцията $\Phi(x)$ е също диференцуема и

$$\Phi'(x) = \left[\int_c^p f(t)\,\mathrm{d}t + \int_p^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]' = \left[\int_p^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]' = f(x).$$

Досега разглеждахме определения интеграл като функция на горната му граница. Ние бихме могли обаче да направим аналогични разглеждания, като фиксираме горната граница и оставим да се мени долната граница. Така например, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, $a < b$ и c е една точка от този интервал, то функцията

$$\varphi(x) = \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

е диференцуема при $a < x \leq b$ и

$$\varphi'(x) = -f(x),$$

защото[1]

$$\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

[1]При $x > c$ това дава дефиницията (3); при $x < c$ пак нямаме нищо ново, тъй като дефиницията (3) ни дава

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t;$$

при $x = c$ валидността на това равенство следва от дефиницията (2).

и следователно

$$\varphi'(x) = -\left(\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -f(x).$$

§ 8. Смяна на променливите

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в някой интервал Δ; нека функцията $\varphi(t)$ е дефинирана и притежава непрекъсната първа производна в някой интервал[1] $[\alpha, \beta]$; нека всички стойности на $\varphi(t)$ лежат в интервала Δ; нека най-сетне

(1) $$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

При тези предположения ще докажем, че

(2) $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Преди да пристъпим към доказателството, нека обърнем внимание върху това, че ние можем да образуваме функцията $f[\varphi(t)]$, защото стойностите на функцията $\varphi(t)$ не напускат дефиниционната област на $f(x)$. Ние можем да образуваме и интеграла

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

защото функцията $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ е непрекъсната като произведение на две непрекъснати функции[2] $f[\varphi(t)]$ и $\varphi'(t)$ и следователно е интегруема. Най-сетне ние можем да образуваме и интеграла

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

защото функцията $f(x)$ е непрекъсната.

И така в двете части на равенството (2) имаме две добре дефинирани числа. Остава да покажем, че те са равни помежду си. За тази цел полагаме

$$F(u) = \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$$

[1] Тук не трябва да се смята, че α е непременно левият край на този интервал, макар и да пишем $[\alpha, \beta]$.

[2] Функцията $f[\varphi(t)]$ е непрекъсната, защото функциите $f(x)$ и $\varphi(t)$ са непрекъснати.

и образуваме двете помощни функции

$$\Phi(s) = F[\varphi(s)],$$
$$\psi(s) = \int_{\alpha}^{s} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

в интервала $[\alpha,\beta]$.

Теоремата на Лайбниц и Нютон и правилото за диференциране на функция от функция ни дават

$$\Phi'(s) = F'[\varphi(s)]\,.\,\varphi'(s) = f[\varphi(s)]\varphi'(s),$$
$$\psi'(s) = f[\varphi(s)]\varphi'(s).$$

Оттук заключаваме, че разликата

$$\Phi(s) - \psi(s)$$

е една константа. Специално, като вземем пред вид, че $\varphi(\alpha) = a$, получаваме при $s = \alpha$

$$\Phi(\alpha) - \psi(\alpha) = F[\varphi(\alpha)] - \psi(\alpha) = F(a) - \psi(\alpha).$$

Като вземем пред вид, че

$$F(a) = \int_{a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$
$$\psi(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

намираме

$$\Phi(\alpha) - \psi(\alpha) = 0$$

и следователно при всички стойности на s от интервала $[\alpha,\beta]$ имаме

$$\Phi(s) - \psi(s) = 0.$$

Специално при $s = \beta$ получаваме

$$\Phi(\beta) - \psi(\beta) = 0$$

или

$$F[\varphi(\beta)] = \psi(\beta);$$

но $\varphi(\beta)$ е равно на b, тъй че

$$F(b) = \psi(\beta)$$

или

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ние често ще записваме формулата (2) във вида

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}\varphi(t)$$

и ще казваме, че интегралът

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

е получен от интеграла

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

с помощта на субституцията $x = \varphi(t)$.

Пример. Да се пресметне интегралът

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Решение. Полагаме $x = \cos t$ и решаваме уравненията[1] $-1 = \cos\alpha$, $1 = \cos\beta$. Очевидно $\alpha = \pi$ и $\beta = 0$ са решения на тези уравнения (ние бихме могли да вземем обаче кои да са други техни решения).

Като вземем пред вид, че функцията $\sqrt{1-x^2}$ е непрекъсната в интервала $[-1, 1]$, че функцията $\cos t$ е диференцуема и има непрекъсната производна в интервала $[\pi, 0]$, че стойностите на функцията $\cos t$ не напускат интервала $[-1, 1]$ и най-сетне, че $-1 = \cos\pi$ и $1 = \cos 0$, заключаваме, че ние можем да използуваме формулата (2). Това ни дава

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_\pi^0 \sqrt{1-\cos^2 t}\,\mathrm{d}\cos t$$

или

$$I = -\int_\pi^0 \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin^2 t\,\mathrm{d}t.$$

По-нататък пресмятанията се развиват по познатия начин:

$$I = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left|\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

[1] Тези уравнения съответствуват на уравненията (1).

§ 9. Интегриране по части при определените интеграли

Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ са диференцуеми и производните им са непрекъснати в интервала $[a, b]$. В такъв случай е валидна следната формула:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

И наистина, като вземем пред вид, че функцията $u(x)v(x)$ е един неопределен интеграл на непрекъснатата функция $u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$, заключаваме, че

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)]\,\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a),$$

откъдето

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

или още

(1) $$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ние често ще записваме формулата (1) по-кратко по следния начин:

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x)$$

или още

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = \Big|u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x).$$

Пример 1. Да се пресметне интегралът

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Решение. Интегрираме по части:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}\sin x = \Big|x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Пример 2. Да се пресметне интегралът

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Решение. Тук непосредственото интегриране по части е възпрепятствувано от обстоятелството, че функцията

$$\sqrt{1-x^2}$$

не е диференцуема при $x = 1$ и $x = -1$. За да отстраним тази трудност, прилагаме формулата за интегриране по части към

$$F(\varepsilon) = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

където $0 < \varepsilon < 1$. Това ни дава

$$\begin{aligned}
F(\varepsilon) &= \left| x\sqrt{1-x^2} \right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} - \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} x\,\mathrm{d}\sqrt{1-x^2} = \left| x\sqrt{1-x^2} \right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left| x\sqrt{1-x^2} \right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left| x\sqrt{1-x^2} \right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} - F(\varepsilon) + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \left| x\sqrt{1-x^2} \right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} - F(\varepsilon) + \left| \arcsin x \right|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Извършваме граничния преход $\varepsilon \to 0$. Това ни дава

$$F(0) = \left| x\sqrt{1-x^2} \right|_{-1}^{1} - F(0) + \left| \arcsin x \right|_{-1}^{1} = -F(0) + \pi,$$

защото функцията $F(\varepsilon)$ е непрекъсната (дори удовлетворява условието на Липшиц), както това се вижда например от представянето

$$F(\varepsilon) = \int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^{-1+\varepsilon} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

По такъв начин получаваме

$$F(0) = \frac{\pi}{2}$$

и следователно

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Задачи

Да се пресметнат следните интеграли:

1. $I = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Решение.

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \left| \ln x \right|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

2. $I = \int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x$. *Отговор*. $I = \frac{2}{3}$.

3. $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$. *Отговор*. $I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

4. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}$.

Упътване. Извършете субституцията $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ или по-точно $x = 2\operatorname{arctg} t$.

Отговор. $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. $I = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x.$ *Отговор.* $I = \frac{1}{2}a^2\pi.$

6. $I = \int_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2 + \cos x)^2}.$

Упътване. Тук е удобно да се извърши субституцията $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ или по-точно $x = 2\operatorname{arctg} t$. Непосредственото използуване на тази субституция обаче среща една мъчнотия. Функцията $2\operatorname{arctg} t$ не е способна да приема стойността π — нещо, което спъва използуването на теоремата за смяна на променливите при определените интеграли. Поради това нека читателят пресметне предварително помощния интеграл

$$\varphi(\alpha) = \int_{0}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{(2 + \cos x)^2}$$

при $0 < \alpha < \pi$ и се възползува от зависимостта

$$I = \lim_{\alpha\to\pi} \varphi(\alpha),$$

която следва от непрекъснатостта на функцията $\varphi(\alpha)$.

Отговор. $I = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi.$

7. $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x + \sin^4 x}.$ *Отговор.* $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

8. $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 - \cos\alpha \sin x}$, $\alpha \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ *Отговор.* $I = \frac{2\pi}{|\sin\alpha|}.$

9. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x + \sin x}.$ *Отговор.* $I = \pi\sqrt{2}.$

10. $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x\,\mathrm{d}x.$ *Отговор.* $I = \frac{4}{15}.$

11. Да се пресметне интегралът

$$I = \int_{0}^{1} \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Упътване. Като извършите субституцията $x = \operatorname{tg} t$, ще получите

$$I = \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Покажете, че

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,\mathrm{d}t,$$

като преобразувате първия интеграл с помощта на субституцията $t = \frac{\pi}{4} - z$.

12. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $-a \leq x \leq a$ и нечетна в този интервал, т. е. $f(-x) = -f(x)$. Покажете, че

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

13. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $-a \leq x \leq a$ и е четна в този интервал, т. е. $f(-x) = f(x)$. Покажете, че

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

14. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана, непрекъсната при всяко x и периодична с период ω, т. е. $f(x+\omega)=f(x)$. Покажете, че при всеки избор на числото a имаме

$$\int_a^{a+\omega} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\omega} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Упътване. Покажете, че

$$\int_{\omega}^{a+\omega} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

и използувайте равенството

$$\int_a^{a+\omega} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\omega} f(x) + \int_{\omega}^{a+\omega} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

15. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната при всяко x и при всички стойности на t удовлетворява равенството

$$\int_t^{t+\omega} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\omega} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Покажете, че функцията $f(x)$ е периодична с период ω.

Упътване. Диференцирайте по t

$$\varphi(t) = \int_t^{t+\omega} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

§ 10. Теорема за средните стойности

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$, а функцията $\varphi(x)$ е интегруема и не си мени знака в този интервал. В такъв случай

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

където ξ е една точка, подходящо избрана в затворения интервал $[a,b]$.

Доказателство. Ние ще разгледаме на първо време случая, когато $\varphi(x) \geq 0$ и $a<b$.

Да означим с M точната горна граница на $f(x)$, а с m точната ѝ долна граница в интервала $[a,b]$. В такъв случай, като се възползуваме от обстоятелството, че $\varphi(x) \geq 0$, получаваме

$$m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x).$$

Оттук получаваме

$$m\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

тъй като $a < b$. От друга страна,

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

и следователно, ако

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \neq 0,$$

ние можем да напишем

$$m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x} \leq M. \tag{3}$$

По предположение функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и следователно тя приема в някоя точка x_1 стойността M и в някоя точка x_2 — стойността m (теорема на Вайерщрас). От това заключаваме, че тази функция приема в интервала $[x_1, x_2]$ всички стойности, които се намират между M и m. Като вземем пред вид, че числото

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x}$$

се намира между M и m, заключаваме, че има точка ξ в интервала $[x_1, x_2]$, а следователно и в интервала $[a, b]$, за която

$$f(\xi) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x}$$

или

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ние не можем да направим тези разсъждения, ако $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$, защото в такъв случай не можем да се ползуваме от неравенствата (3). Обаче неравенствата (2) ни учат, че и

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

и следователно равенството (1) е вярно при всеки избор на ξ.

С това ние установихме валидността на теоремата при $\varphi(x) \geq 0$ и $a < b$. При $a = b$ валидността на тази теорема е очевидна, защото в двете страни на равенството (1) имаме нула. Останалите случаи се свеждат без труд към разгледания случай, при който $\varphi(x) \geq 0$ и $a < b$. Така например, ако $\varphi(x) \leq 0$ и $a < b$, ние можем да представим равенството (1) във вида

$$\int_a^b f(x)[-\varphi(x)]\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b [-\varphi(x)]\,\mathrm{d}x$$

и по този начин да получим познатия случай, защото $-\varphi(x) \geq 0$. Аналогично се разглеждат и другите случаи, които могат да се представят. По-специално, ако $\varphi(x) = 1$, равенството (1) добива вида

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a). \tag{4}$$

Тук ние можем да изберем точката ξ в отворения интервал (a, b), когато $a \neq b$. И наистина, ако положим

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

равенството (4) ще добие вида

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a)$$

и следователно то може да се разглежда като специален случай от теоремата за крайните нараствания. (Теоремата за крайните нараствания трябва да се разглежда като по-обща, защото при нея не се иска непрекъснатостта на $F'(x)$.)

§ 11. Друга дефиниция на понятието определен интеграл

Дефиницията на понятието определен интеграл, която дадохме в § 1, произхожда от Дарбу. Сега ще разгледаме дефиницията, която дава Риман, и ще установим еквивалентността на двете дефиниции.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в крайния затворен интервал $[a, b]$. Делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \tag{1}$$

и във всеки един от тези подинтервали избираме по една точка. Нека ξ_i е точката, която избираме в i-тия подинтервал $[x_{i-1}, x_i]$, така че

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i.$$

Сумата

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

се нарича Риманова интегрална сума, която отговаря на избрания начин на деление на интервала $[a, b]$ на подинтервали и на направения избор на междинните точки ξ_i. Тази сума ние можем да образуваме, без да има нужда да предполагаме нещо за ограничеността на функцията $f(x)$.

Ако съществува такова число I, че при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ така, че ако точките на деление (1) удовлетворяват условието $x_i - x_{i-1} < \delta$ при всички цели стойности на i от 1 до n, то

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

казваме, че сумите на Риман σ клонят към граница I, когато дължините на подинтервалите клонят към нула.

Риман дава следната дефиниция на понятието определен интеграл: казваме, че функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, ако Римановите суми σ клонят към някаква граница I, когато дължините на подинтервалите клонят към нула. Границата I се нарича определен интеграл на $f(x)$, разпространен върху интервала $[a, b]$.

При дефиницията на Риман няма нужда да се предполага предварително, че функцията $f(x)$ е ограничена, обаче не е трудно да се види, че от съществуването на определения интеграл според дефиницията на Риман следва, че функцията $f(x)$ е ограничена. И наистина нека ε е произволно положително число и нека I е стойността на определения интеграл от $f(x)$ върху интервала $[a, b]$ според дефиницията на Риман. Делим интервала $[a, b]$ на достатъчно дребни подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

за да имаме

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

при всеки избор на ξ_i, от подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. В такъв случай получаваме[1]

$$|f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})| \le \varepsilon + \left| \sum_{i=1}^{k-1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right|.$$

Фиксираме ξ_i при $i \ne k$ и оставяме ξ_k да се мени в подинтервала $[x_{k-1}, x_k]$. Полученото неравенство ни учи, че функцията $f(x)$ е ограничена в подинтервала $[x_{k-1}, x_k]$. Тъй като ние можем обаче да даваме на k всички цели стойности от 1 до n, заключаваме, че $f(x)$ е ограничена в целия интервал $[a, b]$.

Не е трудно да се убедим, че ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ според дефиницията на Риман, тя е интегруема и според дефиницията на Дарбу и интегралите в двата смисъла са равни помежду си. И наистина нека ε е произволно положително число и нека положителното число δ е толкова малко, че ако точките на деление (1) удовлетворяват условието $x_i - x_{i-1} < \delta$ при всички цели стойности на i от 1 до n, да имаме

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

при всеки избор на ξ_i от подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Означаваме с M_i точната горна, а с m_i точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$.

Ако оставим $f(\xi_i)$ да клони[2] към M_i, получаваме след съответния граничен преход

$$\left| \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - I \right| \le \varepsilon,$$

откъдето

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \le I + \varepsilon$$

[1]Разбира се, някоя от сумите $\sum\limits_{i=1}^{k-1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ и $\sum\limits_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ може евентуално да бъде празна.

[2]Каквото и да бъде положителното число η, числото $M_i - \eta$ не е горна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$, тъй като M_i е най-малката горна граница в този подинтервал. От това заключаваме, че може да се избере точка ξ_i в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ така, че да имаме $f(\xi_i) > M_i - \eta$. Оттук, като вземем предвид, че $f(\xi_i) \le M_i$, получаваме $M_i - \eta < f(\xi_i) \le M_i$, т. е. функцията $f(x)$ е способна да приема в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ стойности, произволно близки до M_i. Аналогично се вижда, че тя е способна да приема в този подинтервал и стойности, произволно близки до m_i.

и толкова повече
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le I + \varepsilon.$$

Ако оставим $f(\xi_i)$ клони към m_i, получаваме
$$\left|\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) - I\right| \le \varepsilon,$$
откъдето
$$I - \varepsilon \le \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$
и следователно
$$I - \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
По такъв начин намерихме
$$I - \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le I + \varepsilon$$
при всеки избор на положителното число ε и следователно
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = I.$$
С това ние доказахме, че ако една функция $f(x)$ е интегруема според дефиницията на Риман, тя е интегруема и според дефиницията на Дарбу и интегралите в двата смисъла са равни помежду си.

За да докажем, че и обратното е вярно, ние ще установим следната теорема на Дарбу: когато дължините на подинтервалите клонят към нула, големите суми на Дарбу на всяка ограничена функция клонят към горния, а малките суми на Дарбу клонят към долния интеграл на тази функция. Ние няма да прецизираме точния смисъл на тези думи, понеже едно аналогично прецизиране ние вече направихме по-горе за Римановите суми.

Ще докажем теоремата на Дарбу за големите суми; за малките суми тя се доказва аналогично. За тази цел избираме произволно положително число δ и делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките
$$a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n = b$$
по такъв начин, че да имаме
$$\xi_i - \xi_{i-1} < \delta$$

при всички цели стойности на i от 1 до n. Нека M е една горна граница на $f(x)$[1] в целия интервал $[a,b]$, нека M_i е точната горна граница на $f(x)$ в подинтервала $[\xi_{i-1},\xi_i]$ и нека

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i(\xi_i - \xi_{i-1})$$

е съответната голяма сума на Дарбу. Нека към точките на деление ξ_0, ξ_1, $\dots$, ξ_n причислим още една нова точка на деление ξ и да означим с S' съответната голяма сума на Дарбу. При тези условия ще покажем, че

$$S - S' \leq 2M\delta. \tag{2}$$

И наистина, ако ξ съвпада с някоя от точките $\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n$, то $S - S' = 0$, т. е. в този тривиален случай неравенството (2) е вярно. Ако ξ не съвпада с някоя от точките $\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n$, ние ще означим с k най-малкото цяло положително число, за което $\xi < \xi_k$, т. е. $\xi_{k-1} < \xi < \xi_k$. Нека L_1 е точната горна граница на функцията $f(x)$ в подинтервала $[\xi_{k-1},\xi]$ и L_2 е точната ѝ горна граница в подинтервала $[\xi,\xi_k]$. В такъв случай

$$S - S' = M_k(\xi_k - \xi_{k-1}) - L_1(\xi - \xi_{k-1}) - L_2(\xi_k - \xi)$$

и следователно

$$\begin{aligned} S - S' &\leq |M_k|(\xi_k - \xi_{k-1}) + |L_1|(\xi - \xi_{k-1}) + |L_2|(\xi_k - \xi) \\ &\leq M(\xi_k - \xi_{k-1}) + M(\xi - \xi_{k-1}) + M(\xi_k - \xi) = 2M(\xi_k - \xi_{k-1}) \leq 2M\delta. \end{aligned}$$

Сега не е трудно да се докаже теоремата на Дарбу. Нека ε е произволно положително число и нека S^* е голяма сума на Дарбу, която удовлетворява неравенството

$$S^* < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Такава сигурно има, защото $\overline{\int_a^b}$ с най-голямата долна граница на множеството на големите суми на Дарбу и следователно $\overline{\int_a^b} + \frac{\varepsilon}{2}$ не е долна граница на това множество.

Означаваме с

$$a = x_0^* < x_1^* < x_2^* < \cdots < x_p^* = b$$

[1] В IV издание на учебника е $|f(x)|$ (Бел. на Черногоров).

точките на деление, които отговарят на сумата S^*.

Да разгледаме една произволна голяма сума на Дарбу S, чиито точки на деление

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

са подчинени на единственото условие да удовлетворяват неравенствата

$$x_i - x_{i-1} < \delta$$

при всички цели стойности на i от 1 до n, където $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4Mp}$.

Нека S_k е голяма сума на Дарбу, която се получава, когато към точките на деление $x_0, x_1, \ldots, x_n$ причислим още и точките $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*$. В такъв случай съгласно доказаното имаме

$$\begin{gathered} S - S' \leq 2M\delta, \\ S_1 - S_2 \leq 2M\delta, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_{p-1} - S_p \leq 2M\delta \end{gathered}$$

и следователно

$$S - S_p \leq 2M\delta p = \frac{\varepsilon}{2}.$$

От друга страна, всичките точки на деление на S^* участвуват при образуване на сумата S_p, откъдето

$$S_p \leq S^*$$

и следователно

$$S - S^* \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

което заедно с неравенствата

$$\begin{gathered} S^* - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S \end{gathered}$$

ни дава

$$0 \leq S - \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

По такъв начин теоремата на Дарбу е доказана.

Сега не е трудно да се покаже, че ако една функция $f(x)$ е интегруема според дефиницията на Дарбу, тя е интегруема и според дефиницията на

Риман. И наистина нека $\varepsilon > 0$ и нека σ е една сума на Риман. Ако S и s са съответно голямата и малката сума на Дарбу, които са образувани с помощта на същите точки на деление, с които е образувана и сумата σ, то

$$s \leq \sigma \leq S.$$

От друга страна, теоремата на Дарбу ни учи, че ако дължините на подинтервалите са достатъчно малки, то

$$S < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon,$$
$$s > \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

Нека функцията $f(x)$ е интегруема според дефиницията на Дарбу. В такъв случай

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

и следователно

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon < s \leq \sigma \leq S < \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon,$$

т. е.

$$\left|\sigma - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

с което е показано, че сумите на Риман наистина клонят към общата стойност на горния и долния интеграл на разглежданата функция, когато дължините на подинтервалите клонят към нула. По такъв начин ние установихме пълната еквивалентност на дефинициите на Дарбу и Риман.

§ 12. Едно обобщение на основната теорема на интегралното смятане и общото условие за интегруемост в Риманов смисъл

Казваме, че едно множество M от точки върху една права има мярка нула в смисъл на Лебег–Борел, ако при всеки избор на положителното число ε множеството M може да се покрие[1] с (евентуално безкрайна) редица от

[1]Това значи, че се иска всяка точка от M да принадлежи поне на един от интервалите Δ_1, Δ_2, Δ_3, ...

интервали[1]

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots,$$

сумата от дължините на които да е по-малка от ε.

Ще казваме, че една функция удовлетворява някое условие (например има производна или е непрекъсната и пр.) *почти навсякъде* в едно множество N, ако множеството от точките на N, където това условие не е изпълнено, има мярка нула или е празно.[2]

Ние ще установим следното обобщение на познатата на читателя още от диференциалното смятане теорема за монотонните функции.

Ако една функция $F(x)$, удовлетворяваща условието на Липшиц в един интервал Δ, е диференцуема почти навсякъде в този интервал и производната ѝ е неотрицателна, то функцията е монотонно растяща.

Доказателство. Да допуснем противното. В такъв случай могат да се намерят две числа α и β от интервала Δ, свързани с неравенството $\alpha < \beta$, за които

$$F(\alpha) - F(\beta) > 0.$$

Означаваме с K една горна граница на израза

$$\left| \frac{F(x') - F(x'')}{x' - x''} \right|,$$

когато x' и x'' се менят в интервала Δ така, че остават различни помежду си. Такава горна граница съществува, защото функцията $F(x)$ удовлетворява условието на Липшиц.

Нека G е множеството на точките от интервала Δ , където $F(x)$ няма неотрицателна производна. Покриваме G с редица от *отворени* интервали

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$$

и означаваме с $\varphi_\nu(x)$ функция, равна на 1, когато x принадлежи на Δ_ν, и на 0, когато x не принадлежи на Δ_ν. Нека p_ν и q_ν са съответно левият и десният край на подинтервала Δ_ν. В такъв случай, като означим с a по-малкото от числата α и p_ν, а с b по-голямото от числата β и q_ν, ще имаме

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \varphi_\nu(t)\,\mathrm{d}t &\le \int_a^b \varphi_\nu(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\alpha^{p_\nu} \varphi_\nu(t)\,\mathrm{d}t + \int_{p_\nu}^{q_\nu} \varphi_\nu(t)\,\mathrm{d}t + \int_{q_\nu}^{b} \varphi_\nu(t)\,\mathrm{d}t = q_\nu - p_\nu.\end{aligned}$$

[1]Без да ограничаваме общността, ние можем да считаме, че интервалите Δ_1, Δ_2, Δ_3, ... са отворени, като за целта, ако е необходимо, заменим всеки интервал с двойно по-голям, който го съдържа.

[2]Целесъобразно е празното множество да се разгледа като множество с мярка нула.

Да си изберем едно толкова малко положително число ε и една такава система от покриващи интервали

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots,$$

че да имаме

$$F(\alpha) - F(\beta) > \varepsilon(\beta - \alpha) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_\nu(t)\,\mathrm{d}t.$$

Това е възможно, защото, от една страна,

$$F(\alpha) - F(\beta) > 0,$$

а, от друга,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_\nu(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} (q_\nu - p_\nu),$$

като при това сумата

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (q_\nu - p_\nu)$$

може да се направи произволно малка, защото множеството G има мярка нула.

Делим интервала $[\alpha, \beta]$ на две равни части и означаваме с $[\alpha_1, \beta_1]$ такава половина на $[\alpha, \beta]$, за която да имаме

$$F(\alpha_1) - F(\beta_1) > \varepsilon(\beta_1 - \alpha_1) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \varphi_\nu(t)\,\mathrm{d}t.$$

Не е трудно да се убедим, че поне едната от двете половини на интервала $[\alpha, \beta]$ удовлетворява това условие. И наистина в противен случай, ако положим $\gamma = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, ще имаме

$$F(\gamma) - F(\beta) \leq \varepsilon(\beta - \gamma) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\gamma}^{\beta} \varphi_\nu(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$F(\alpha) - F(\gamma) \leq \varepsilon(\gamma - \alpha) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\gamma} \varphi_\nu(t)\,\mathrm{d}t.$$

Като съберем почленно тези неравенства, ще получим

$$F(\alpha) - F(\beta) \leq \varepsilon(\beta - \alpha) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_\nu(t)\,\mathrm{d}t,$$

което противоречи на неравенството

$$F(\alpha) - F(\beta) > \varepsilon(\beta - \alpha) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_\nu(t)\,\mathrm{d}t.$$

По-нататък делим интервала $[\alpha_1, \beta_1]$ на две равни части и означаваме с $[\alpha_2, \beta_2]$ сигурно съществуващата половина, за която

$$F(\alpha_2) - F(\beta_2) > \varepsilon(\beta_2 - \alpha_2) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \varphi_\nu(t)\,\mathrm{d}t,$$

и т. н. По този начин получаваме една Канторова система от интервали $[\alpha_n, \beta_n]$, подчинени на условието

(1) $$F(\alpha_n) - F(\beta_n) > \varepsilon(\beta_n - \alpha_n) + K \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \varphi_\nu(t)\,\mathrm{d}t.$$

Нека x_0 е точка, която принадлежи на всичките интервали $[\alpha_n, \beta_n]$. Ще покажем, че x_0 не принадлежи на G. И наистина в противен случай x_0 ще бъде *вътрешна* точка за някой от интервалите Δ_m и следователно при достатъчно голяма стойност на n интервалът $[\alpha_n, \beta_n]$ ще се съдържа изцяло в Δ_m, поради което ще имаме $\varphi_m(t) = 1$ при всички стойности на t от $[\alpha_n, \beta_n]$, т. е.

$$\int_{a_n}^{\beta_n} \varphi_m(t)\,\mathrm{d}t = \beta_n - \alpha_n.$$

От друга страна, неравенството (1) ни дава

$$F(\alpha_n) - F(\beta_n) > K \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \varphi_m(t)\,\mathrm{d}t,$$

откъдето

$$F(\alpha_n) - F(\beta_n) > K(\beta_n - \alpha_n),$$

нещо, което противоречи на неравенството

$$\left| \frac{F(\alpha_n) - F(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} \right| \le K.$$

И така x_0 не принадлежи на G и следователно функцията $F(x)$ е диференцуема в точката x_0. Неравенството (1) ни дава обаче

$$\frac{F(\alpha_n) - F(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n} > \varepsilon.$$

Оттук, извършвайки граничен преход, намираме

$$-F'(x_0) \geq \varepsilon,$$

което не вярно, защото $F'(x_0) \geq 0$. С това доказателството е завършено.

Въз основа на доказаното ние можем да установим следното обобщение на основната теорема на интегралното смятане:

Ако една удовлетворяваща условието на Липшиц функция $F(x)$ е диференцуема почти навсякъде в един интервал Δ и производната ѝ е равна на нула, то функцията $F(x)$ е константа.

И наистина от доказаната по-горе теорема следва, че двете функции $F(x)$ и $-F(x)$ са монотонно растящи, т. е. функцията $F(x)$ е наистина константа.

Като приложение ще докажем следната теорема на Лебег:

За да бъде една функция $f(x)$ интегруема в Риманов смисъл в един интервал $[a, b]$, необходимо и достатъчно е тя да бъде ограничена и почти навсякъде непрекъсната в интервала $[a, b]$.

Доказателство. Ние първо ще покажем, че условието е достатъчно. Нека функцията $f(x)$ е ограничена и почти навсякъде непрекъсната в интервала $[a, b]$. Разглеждаме двете функции

$$F_1(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

и

$$F_2(x) = \underline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

при $a < x \leq b$. Тези функции удовлетворяват условието на Липшиц и в точките на непрекъснатост на $f(x)$ (т. е. почти навсякъде в интервала $[a, b]$) имаме

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F_1(x) - F_2(x)] = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

т. е. разликата $F_1(x) - F_2(x)$ е една константа. От друга страна,

$$\lim_{x \to a} F_1(x) = \lim_{x \to a} F_2(x) = 0.$$

Следователно

$$F_1(x) = F_2(x).$$

Оттук получаваме по-специално $F_1(b) = F_2(b)$, т. е.

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

което ни учи, че функцията $f(x)$ е интегруема в Риманов смисъл в интервала $[a, b]$.

Сега ще установим, че условието на Лебег е необходимо. За тази цел на всяко положително число ε съпоставяме по *едно* разлагане на интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките на деление

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

по такъв начин, че разликата между съответната голяма и съответната малка сума на Дарбу да бъде по-малка от ε^2. Нека

$$\Delta_{n_1}, \Delta_{n_2}, \ldots, \Delta_{n_k}$$

са онези[1] подинтервали (измежду подинтервалите, на които сме разделили интервала $[a, b]$), в които осцилацията на $f(x)$ е по-голяма от ε. В такъв случай сумата от дължините на подинтервалите

$$\Delta_{n_1}, \Delta_{n_2}, \ldots, \Delta_{n_k}$$

е по-малка от ε. Нека $A(\varepsilon)$ е множеството от точките, които принадлежат на поне един от интервалите Δ_{n_1}, Δ_{n_2}, ..., Δ_{n_k}. Всяка вътрешна за интервала $[a, b]$ точка ξ, която не принадлежи на $A(\varepsilon)$, лежи в някой *затворен* подинтервал[2] (евентуално може да бъде и крайна точка на такъв подинтервал), в който осцилацията на $f(x)$ е по-малка или равна на ε. Не е трудно обаче да включим точката ξ и в *отворен* подинтервал, където осцилацията на $f(x)$ в най-неблагоприятния[3] случай да не надминава 2ε.

Разглеждаме множеството B_n от точките, които принадлежат на поне едно от множествата

$$A\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right), A\left(\frac{1}{2^{n+2}}\right), A\left(\frac{1}{2^{n+3}}\right), \ldots$$

Очевидно множеството B_n може да бъде покрито с редица от интервали, сумата от дължините на които е по-малка от

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \cdots = \frac{1}{2^n}.$$

[1] Ако изобщо има такива.

[2] Този подинтервал избираме измежду подинтервалите, на които сме разделили интервала $[a, b]$

[3] Това е случаят, когато точката ξ съвпада с някоя от точките $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Нека например $\xi = x_k$. В такъв случай включваме точката ξ в подинтервала $[x_{k-1}, x_{k+1}]$.

Нека B е множеството на точките, които принадлежат на всичките множества

$$B_1, B_2, B_3, \ldots$$

Очевидно множеството B се съдържа в B_n при всяка цяла положителна стойност на n и следователно може да се покрие с редица от интервали, сумата от дължините на които е по-малка от $\frac{1}{2^n}$, т. е. тази сума може да се направи произволно малка, стига n да изберем достатъчно голямо. С това ние показахме, че множеството B има мярка нула. По такъв начин доказателството на интересуващата ни теорема ще бъде завършено, ако ние покажем, че във всички вътрешни точки на интервала $[a, b]$, които не принадлежат на B, функцията $f(x)$ е непрекъсната. За да установим това, разглеждаме произволна точка x_0, която не принадлежи на B. В такъв случай може да се намери цяло положително число n по такъв начин, че точката x_0 да не принадлежи на никое от множествата

$$A\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right), A\left(\frac{1}{2^{n+2}}\right), A\left(\frac{1}{2^{n+3}}\right).$$

Избираме едно положително число ε. Нека цялото положително число k е толкова голямо, че да имаме $\frac{1}{2^{n+k}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Точката x_0 не принадлежи на $A\left(\frac{1}{2^{n+k}}\right)$, откъдето заключаваме, че около нея може да се построи околност, в която осцилацията е по-малка от $\frac{2}{2^{n+k}}$, т. е. по-малка и от ε — нещо, което е достатъчно да можем да твърдим, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0. С това ние показахме, че ако една функция е интегруема в Риманов смисъл, тя е непрекъсната почти навсякъде, и следователно завършихме доказателството, защото по-горе ние бяхме изяснили, че за да бъде една функция интегруема в Риманов смисъл, необходимо е тя да бъде ограничена.

Пример 1. Произведение на две функции, интегруеми в Риманов смисъл, е също интегруема функция в Риманов смисъл, защото това произведение е ограничено и почти навсякъде непрекъснато.

Пример 2. Ако функцията $f(x)$ е интегруема в Риманов смисъл в интервала $a \leq x \leq b$ и почти навсякъде $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

И наистина функцията

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

е диференцуема и $F'(x) = f(x)$ във всички точки, където $f(x)$ е непрекъсната. По такъв начин за удовлетворяващата условието на Липшиц функция $F(x)$ имаме почти навсякъде $F'(x) \geq 0$, т. е. тази функция монотонно расте и следователно $F(x) \geq \lim\limits_{x\to a} F(x) = 0$.

Забележка. От доказаното се вижда, че ако за две интегруеми в Риманов смисъл функции $f(x)$ и $g(x)$ имаме почти навсякъде $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$

ако ли пък почти навсякъде $f(x) = g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

§ 13. Точкови множества

Ще разгледаме в този параграф множеството от точки в една равнина. Всичко, което ще изложим обаче, се пренася без всякакъв труд за случая на произволен брой измерения. Така ние бихме могли да пренесем всичко казано за множеството от точки върху една права и пр.

Наред с истинските множества ние ще разгледаме и така нареченото празно множество. Това е един помощен символ $\emptyset$, за който е казано, че никоя точка от равнината не му принадлежи.[1]

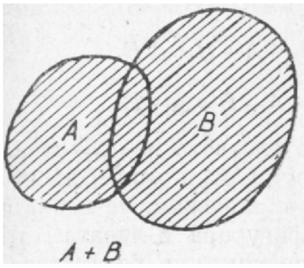
Нека ни е дадено едно точково множество A. Една функция се нарича характеристична функция на A, ако тя е дефинирана в цялата равнина (или съответно върху цялата ос OX, или върху цялото пространство и пр. в зависимост от броя на измеренията, които имаме пред вид) и приема стойност единица в точките, които принадлежат на A, и стойността нула в точките, които не принадлежат на A.

Нека ни са дадени две множества A и B. Под сума или обединение $A + B$ на тези множества разбираме множеството от точките, които принадлежат поне на едно от тези множества.[2] На черт. 4 е илюстрирана дефиницията на понятието сума. Под произведение или сечение AB на две множества A

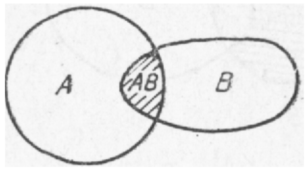
[1] Казваме, че ни е дадено едно множество A в равнината, когато за всяка точка P от равнината е казано дали принадлежи на A или не. Две множества A и B от точки в равнината наричаме идентични, когато тези и само тези точки принадлежат на едното от тях, които принадлежат на другото. В този смисъл $\emptyset$ е едно добре дефинирано множество, защото за всяка точка е казано дали принадлежи, или не принадлежи на $\emptyset$ (именно казано е, че никоя точка не принадлежи на $\emptyset$).

[2] По точно $A+B$ е множеството, към което се причисляват онези и само онези точки, които принадлежат поне на едното от двете множества A и B. При тази редакция дефиницията може да се прилага и тогава, когато имаме работа с празното множество.

и B се разбира множеството от общите им точки.[1] Понятието сечение AB е добре дефинирано дори тогава, когато A и B нямат общи точки. В такъв случай сечението е празното множество, за което говорихме по-горе. На черт. 5 е илюстрирана дефиницията на понятието сечение. Понятията сума и сечение на множествата имат смисъл, колкото и да бъдат множествата. Те могат да бъдат дори безбройно много.



Черт. 4



Черт. 5

При така дефинираните операции събиране и умножение са в сила комутативният, асоциативният и дистрибутивният закон:

$$A + B = B + A, \quad AB = BA,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad (AB)C = A(BC),$$
$$(A + B)C = AC + BC.$$

Доказателството не е сложно. Като пример ние ще докажем дистрибутивния закон

$$(A + B)C = AC + BC$$

и ще предоставим останалите закони на читателя (проверката на които става по същия начин). Нека P е една точка, която принадлежи на $(A + B)C$. В такъв случай тази точка принадлежи на $A + B$ и на C. Щом P принадлежи на $A + B$, тя принадлежи поне на едното от двете множества A и B. Например[2] нека тя принадлежи на A. Но като вземем пред вид, че P принадлежи и на C, заключаваме, че тази точка принадлежи на AC, а следователно и на $AC + BC$. И така всяка точка (ако има такава), която принадлежи на $(A + B)C$, принадлежи и на $AC + BC$.

[1]По-точно AB е множеството, към което се причисляват онези и само онези точки, които са причислени и към A, и към B. Тази редакция на дефиницията може да се използва и тогава, когато имаме работа с празното множество.

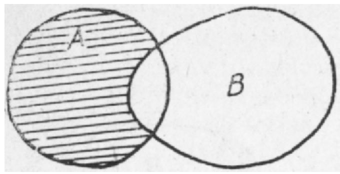
[2]Аналогично се разглежда случаят, когато P принадлежи на B.

Нека Q е една точка, която принадлежи на $AC + BC$; в такъв случай тази точка принадлежи или на AC, или на BC. Нека например[1] тя принадлежи на AC. В такъв случай точката Q принадлежи както на A, така и на C, а от това следва, че тя принадлежи на $A + B$ и на C, т. е. тя принадлежи на $(A + B)C$. И така всяка точка, която принадлежи на $AC + BC$ (ако има такава), принадлежи на $(A + B)C$. С това ние доказахме, че наистина

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Понятието сума и произведение на множества, както вече казахме, се обобщава по очевиден начин и за произволно (дори безкрайно) множество събираеми и множители. При това основните закони (комутативният, асоциативният и дистрибутивният) запазват своята валидност (доказателството остава същото).

Под разлика $A - B$ на две множества A и B разбираме множеството[2] от точките, които принадлежат на A, но не принадлежат на B. На черт. 6 е илюстрирана дефиницията на понятието разлика. Специално, ако R означава множеството от всичките точки на равнината, то разликата $R - A$ се нарича допълнително множество на A и се означава обикновено със символа $\overline{A}$.



Черт. 6

Не е трудно да се покаже, че при всеки избор на множествата A и B имаме

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B},$$
$$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B},$$
$$\overline{A - B} = \overline{A} + B.$$

Доказателството не представлява никаква трудност и може да се извърши, като покажем, че всяка точка, която фигурира в лявата страна на интересуващите ни равенства, фигурира и в дясната страна на съответното равенство и обратно. Нека читателят сам извърши за упражнение доказателството.

[1]Аналогично се разглежда случаят, когато Q принадлежи към BC.

[2]По-точно $A - B$ е множеството, към което са причислени онези и само онези точки, които са причислени към A, но не са причислени към B. Тази редакция на дефиницията може да се използва и тогава, когато имаме работа с празното множество.

Нека ни са дадени две множества A и B. Казваме, че A е едно подмножество на B, когато всяка точка, която принадлежи на A, принадлежи и на B. За да изразим, че A е едно подмножество на B, ние пишем кратко $A \subset B$.

В § 1, глава I, част III на диференциалното смятане ние дефинирахме понятието вътрешна, външна и контурна точка на едно множество M. Множеството на контурните точки на M ще означаваме със символа $K(M)$ и ще наричаме контур на M.

Лесно е да се провери, че външните точки на A са вътрешни за $\overline{A}$ и обратно. Оттук заключаваме, че множествата A и $\overline{A}$ имат един и същ контур. Използувайки означенията, които ние току-що въведохме, можем да пишем

$$K(A) = K(\overline{A}). \tag{1}$$

Не е трудно да се докаже, че

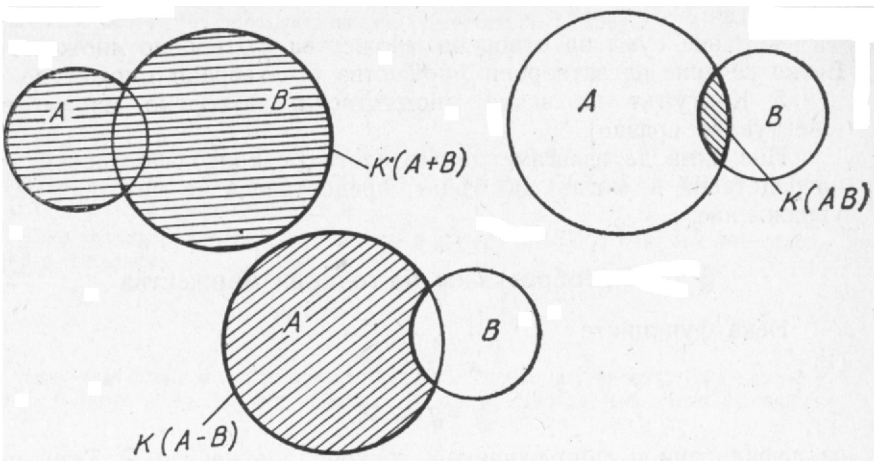
$$K(A + B) \subset K(A) + K(B), \tag{2}$$

$$K(AB) \subset K(A) + K(B), \tag{3}$$

$$K(A - B) \subset K(A) + K(B). \tag{4}$$

На черт. 7 са илюстрирани тези неравенства.

Доказателство на неравенството (2)**.** Нека P е една контурна точка на $A + B$. Тя не може да бъде външна едновременно за A и B. И наистина, ако допуснем противното, ще можем около P да изберем (кръгова) околност G_1, която няма общи точки с A, и (кръгова) околност G_2, която няма общи точки



Черт. 7

с B. В такъв случай сечението $G_1 G_2$ представлява (кръгова) околност на P, която няма общи точки нито с A, нито с B и следователно няма общи точки и с $A + B$. Оттук заключаваме, че P е една външна точка за множеството $A + B$ — нещо, което противоречи на допускането, че P е контурна точка на това множество. И така точката P не е външна поне за едното от двете множества A и B. Нека например тя не е външна за множеството A. Точката P обаче не е и вътрешна за A, защото в противен случай тя би била вътрешна и за $A+B$, което не е вярно, тъй като тя е контурна на $A+B$. И така точката P не е нито външна, нито вътрешна за A, т. е. тя е контурна. С това ние доказахме, че точката P принадлежи на $K(A)$ и толкова повече на $K(A) + K(B)$.

Доказателство на неравенството (3).

$$K(AB) = K(\overline{\overline{A}\,\overline{B}}) = K(\overline{A} + \overline{B}) \subset K(\overline{A}) + K(\overline{B}) = K(A) + K(B).$$

Доказателство на неравенството (4).

$$K(A - B) = K(\overline{\overline{A - B}}) = K(\overline{A} + B) \subset K(\overline{A}) + K(B) = K(A) + K(B).$$

В заключение ще споменем следното:

1. Каквото и да бъде множеството A, множеството $A + K(A)$ е затворено, а множеството $A - K(A)$ е отворено.

2. Ако множеството A е затворено, то множеството $\overline{A}$ е отворено. Ако множеството A е отворено, то множеството $\overline{A}$ е затворено.

3. Сума на краен брой затворени множества е затворено множество. Сечение на краен брой отворени множества е отворено множество.

4. Всяка сума на отворени множества е отворено множество. Всяко сечение на затворени множества е затворено множество.

5. Контурът на всяко множество е затворено множество (евентуално празно).

Ние няма да излагаме доказателствата, които са съвсем непосредствени и могат да бъдат предоставени на читателя като упражнение.

§ 14. Преобразуване на точкови множества

Нека функциите:

$$\begin{aligned} x &= f(u, v), \\ y &= g(u, v), \end{aligned} \tag{1}$$

са дефинирани в едно равнинно точково множество R. Тези две функции ще наричаме трансформация на R. С помощта на трансформацията (1) ние можем на всяка точка P от R с координати (u_0, v_0) да съпоставим точка P' с координати (x_0, y_0), които се определят от равенствата

$$x_0 = f(u_0, v_0),$$
$$y_0 = g(u_0, v_0).$$

Така дефинираната точка P' ще наричаме образ на P при трансформацията (1).

Когато точката P описва някакво подмножество A на R, образът ѝ P' описва някакво множество, което ще означаваме със символа A' и ще наричаме образ на A. Така образа на R ще означаваме с R'.

В общия случай при една трансформация различни точки не са задължени да се изобразят върху различни точки.

Да разгледаме като пример трансформацията

$$x = a_{11}u + a_{12}v + p,\qquad (2)$$
$$y = a_{21}u + a_{22}v + q.$$

Две точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) от равнината UOV се изобразяват върху една и съща точка тогава и само тогава, когато

$$a_{11}u_1 + a_{12}v_1 + p = a_{11}u_2 + a_{12}v_2 + p,$$
$$a_{21}u_1 + a_{22}v_1 + q = a_{21}u_2 + a_{22}v_2 + q,$$

т. е. когато

$$a_{11}(u_1 - u_2) + a_{12}(v_1 - v_2) = 0,\qquad (3)$$
$$a_{21}(u_1 - u_2) + a_{22}(v_1 - v_2) = 0.$$

Оттук се вижда, че в разглеждания случай съществуват различни точки в равнината UOV, които при трансформацията (2) се изобразяват върху една и съща точка тогава и само тогава, когато системата (3) (където $u_1 - u_2$ и $v_1 - v_2$ се разглеждат като неизвестни) има нетривиално решение, т. е. когато

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Ще казваме, че трансформацията (1) *е обратима в* R*, когато тя изобразява различни точки върху различни точки.*

Така трансформацията (2) е обратима в равнината UOV тогава и само тогава, когато е изпълнено

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Читателят знае от геометрията, че трансформация от вида (2) се нарича подобие с модул a, където a е положително число, ако са изпълнени условията

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = a^2,$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = a^2,$$
$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0.$$

Специално, ако $a = 1$, подобието се нарича еднаквост.

Подобието е една обратима трансформация, защото правилото за умножение на детерминанти ни дава

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^4 \neq 0.$$

Както и да избираме точка с координати (x, y) от R', винаги съществува точка P от R, чиито координати (u, v) удовлетворяват уравненията (1), защото всяка точка от R' е образ на някоя точка от R. Ако трансформацията (1) е обратима, то точката P е еднозначно определена, когато точката (x, y) е дадена, а с това еднозначно е определена както абсцисата ѝ u, така и ординатата ѝ v. По такъв начин получаваме две функции

$$\begin{aligned} u &= F(x, y), \\ v &= G(x, x), \end{aligned} \tag{4}$$

определени в R', за които точката с координати

$$(F(x, y), G(x, y))$$

не напуска R, когато точката (x, y) се мени в R', и които удовлетворяват условията

$$\begin{aligned} x &= f[F(x, y), G(x, y)], \\ y &= g[F(x, y), G(x, y)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Така дефинираната трансформация (4) на R' ще наричаме обратна трансформация на трансформацията (1).

Ще покажем, че ако трансформацията (1) е обратима, то нейната обратна трансформация (4) удовлетворява условията

$$\begin{aligned} u &= F(f(u, v), g(u, v)), \\ v &= G(f(u, v), g(u, v)), \end{aligned} \tag{7}$$

където точката (u, v) се избира произволна в R.

И наистина да положим

$$\begin{aligned} x_1 &= f(u, v), \quad & u_1 &= F(x_1, y_1), \\ y_1 &= g(u, v), \quad & v_1 &= G(x_1, y_1). \end{aligned} \tag{8}$$

Ще отбележим на това място, че ние можем да образуваме $F(x_1, y_1)$ и $G(x_1, y_1)$, защото точката с координати $(f(u, v), g(u, v))$ принадлежи на R', т. е. принадлежи на дефиниционната област на двете функции (4). Ние обаче знаем, че точката с координати $(F(x_1, y_1), G(x_1, y_1))$ принадлежи на R и следователно можем да образуваме

$$f(u_1, v_1) \text{ и } g(u_1, v_1).$$

По такъв начин получаваме

$$\begin{aligned} f(u_1, v_1) &= f[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)], \\ g(u_1, v_1) &= g[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)]. \end{aligned}$$

От друга страна, въз основа на (5) имаме

$$\begin{aligned} f[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)] &= x_1, \\ g[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)] &= y_1 \end{aligned}$$

и следователно

$$\begin{aligned} f(u_1, v_1) &= f(u, v), \\ g(u_1, v_1) &= g(u, v). \end{aligned}$$

Оттук като вземем под внимание, че трансформацията (1) е обратима, получаваме $u_1 = u$, $v_1 = v$, което заедно с (8) дава (7).

Като пример да разгледаме трансформацията (2) при предположение, че

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В такъв случай, ако означим с A_{ik} адюнгираното количество на a_{ik} и решим системата (2) относно u и v, ще получим

$$\begin{aligned} u &= \frac{A_{11}}{A} x + \frac{A_{21}}{A} y + p', \\ v &= \frac{A_{12}}{A} x + \frac{A_{22}}{A} y + q', \end{aligned} \tag{9}$$

където

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ p' &= -\frac{A_{11}}{A} p - \frac{A_{21}}{A} q, \\ q' &= -\frac{A_{12}}{A} p - \frac{A_{22}}{A} q. \end{aligned}$$

Като изхождаме от дефиницията на понятието обратна трансформация, убеждаваме се с директна проверка, че трансформацията (9) е обратна на трансформацията (2).

Специално, ако трансформацията (2) е подобие, то A_{ik} се изразяват просто чрез a_{ik} и A. И наистина, ако решим системата

$$\begin{aligned} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} &= a^2, \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} &= 0 \end{aligned}$$

относно a_{11} и a_{12}, ще получим

$$a_{11} = \frac{a^2}{A}A_{11} \text{ и } a_{12} = \frac{a^2}{A}A_{12}.$$

Аналогично, ако решим системата

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0,$$
$$a_{21}a_{21} + a_{22}a_{22} = a^2$$

относно a_{21} и a_{22}, ще получим

$$a_{21} = \frac{a^2}{A}A_{21}, \quad a_{22} = \frac{a^2}{A}A_{22},$$

т. е.

$$a_{ik} = \frac{a^2}{A}A_{ik}$$

при $i = 1, 2$ и $k = 1, 2$.

По такъв начин трансформацията (9) добива вида

$$u = \frac{a_{11}}{a^2}x + \frac{a_{21}}{a^2}y + p',$$
$$v = \frac{a_{12}}{a^2}x + \frac{a_{22}}{a^2}y + q'.$$

Тази трансформация е подобие, чийто модул е $\frac{1}{a}$, защото

$$\frac{a_{11}^2}{a^4} + \frac{a_{21}^2}{a^4} = \frac{a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21}}{a^2A} = \frac{1}{a^2},$$
$$\frac{a_{12}^2}{a^4} + \frac{a_{22}^2}{a^4} = \frac{a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22}}{a^2A} = \frac{1}{a^2},$$
$$\frac{a_{11}a_{12}}{a^4} + \frac{a_{21}a_{22}}{a^4} = \frac{a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22}}{a^4} = 0.$$

Нека C е отворен кръг с център в точката (α, β) и радиус r. Това значи, че точката с координати (u, v) се причислява към C тогава и само тогава, когато е изпълнено неравенството

$$(u-\alpha)^2 + (v-\beta)^2 < r^2.$$

Нека трансформацията (2) е подобие с модул α. В такъв случай образът C' на C при тази трансформация е отворен кръг с радиус ar. И наистина нека (u, v) е една точка от C. Да означим с (x, y) координатите на образа ѝ. Това значи че

$$x = a_{11}u + a_{12}v + p,$$
$$y = a_{21}u + a_{22}v + q.$$

Да положим

$$\alpha' = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + p,$$
$$\beta' = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + q.$$

В такъв случай очевидно

$$x - \alpha' = a_{11}(u-\alpha) + a_{12}(v-\beta),$$
$$y - \beta' = a_{21}(u-\alpha) + a_{22}(v-\beta).$$

Като повдигнем в квадрат двете страни на така получените равенства и съберем, ще получим

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2=a^2[(u-\alpha)^2+(v-\beta)^2]$$

и следователно

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2<a^2r^2.$$

Този резултат ни учи, че точката (x, y) принадлежи на отворения кръг с център в точката (α', β') и радиус ar.

Съвсем по аналогичен начин се вижда, че всяка точка на отворения кръг с център в (α', β') и радиус ar е образ на някоя точка от C. Нека читателят сам извърши пресмятанията. С това е установено, че C' е отворен кръг с център в точката (α', β') и радиус ar.

От (5) се вижда, че обратната трансформация на една трансформация е обратима. И наистина нека

$$F(x_1, y_1)=F(x_2, y_2),$$
$$G(x_1, y_1)=G(x_2, y_2).$$

В такъв случай от (5) получаваме

$$x_1=f[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)]=f[F(x_2, y_2), G(x_2, y_2)]=x_2,$$
$$y_1=g[F(x_1, y_1), G(x_1, y_1)]=g[F(x_2, y_2), G(x_2, y_2)]=y_2.$$

Нека трансформацията (1) е дефинирана в R и нека A и B са две подмножества на R. В такъв случай[1]

(10) $$(A+B)'=A'+B',$$

(11) $$(AB)'\subset A'B',$$

(12) $$(A-B)'\supset A'-B',$$

(13) ако $A\subset B$, то $A'\subset B'$.

Ще докажем само зависимостта (10). Зависимостите (11), (12) и (13) се установяват по същия начин.

Нека Q_1 е една точка от $(A+B)'$. Това значи, че тя е образ на някоя точка P_1 от $A+B$. Точката P_1 принадлежи поне на едното от двете събираеми A и B. Нека например тя принадлежи на A (случаят, когато P_1 принадлежи на B, се разглежда по същия начин). В такъв случай нейният образ Q принадлежи на A', а следователно и на $A'+B'$. С това ние показахме, че

$$(A+B)'\subset A'+B'.$$

[1] Нека M и N са две множества. Ще пишем $M\subset N$ или $N\supset M$, ако всяка точка на M принадлежи на N.

Нека Q_2 е една точка от $A' + B'$. В такъв случай тя принадлежи поне на едното от двете множества A' и B'. Нека например тя принадлежи на A' (случаят, когато Q_2 принадлежи на B', се разглежда по същия начин). В такъв случай Q_2 е образ на някоя точка P_2 от A. Точката P_2 обаче принадлежи на $A + B$ и следователно нейният образ Q_2 принадлежи на $(A + B)'$. С това е показано, че

$$A' + B' \subset (A + B)',$$

а следователно и равенството (10).

Специално, ако трансформацията (1) е обратима в R, то зависимостите (11) и (12) приемат по-прецизен вид

$$(AB)' = A'B', \tag{14}$$

$$(A - B)' = A' - B'. \tag{15}$$

Ще покажем само равенството (14). Равенството (15) се доказва по същия начин.

Нека Q е една точка от $A'B'$. В такъв случай Q принадлежи както на A', така и на B'. Това обаче значи, че тя е образ както на една точка P_1 от A, така и на една точка P_2 от B. Като вземем под внимание, че трансформацията (1) е обратима, заключаваме, че точките P_1 и P_2 съвпадат, т. е. Q е образ на точка P, която принадлежи както на A, така и на B, т. е. на точка от AB. С това е показано, че Q принадлежи на $(AB)'$ и следователно

$$A'B' \subset (AB)',$$

което заедно с (11) ни дава (14).

Нека (1) е една трансформация (не непременно обратима) на R. Ако функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са непрекъснати в R, то всяко *затворено* и *ограничено* подмножество A на R се изобразява върху *затворено* и *ограничено* подмножество на R'.

Първо ще покажем, че множеството A' е затворено. За тази цел разглеждаме редица от точки на A'

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots \tag{16}$$

с точка на сгъстяване Q_0. Нашата цел ще бъде да установим, че точката Q_0 принадлежи на A'. Означаваме с (x_0, y_0) координатите на Q_0 и избираме от (16) подредица

$$S_1, S_2, S_3, \ldots,$$

която клони към Q_0. Да означим с (x_n, y_n) координатите на S_n. В такъв случай

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n,$$
$$y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Точката S_n е образ на някоя точка P_n от A. Да означим с (u_n, v_n) координатите на P_n. По такъв начин получаваме

$$x_n = f(u_n, v_n),$$
$$y_n = g(u_n, v_n).$$

Редицата

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$$

е ограничена, защото множеството A е ограничено. Да изберем от нея една сходяща подредица

$$P_{m_1}, P_{m_2}, \dots, P_{m_n}, \dots$$

и да означим с P_0 нейната граница. Като вземем под внимание, че множеството A е затворено, заключаваме, че точката P_0 принадлежи на A. Да означим с (u_0, v_0) координатите на P. В такъв случай

$$u_0 = \lim_{n\to\infty} u_{m_n},$$
$$v_0 = \lim_{n\to\infty} v_{m_n}.$$

Да разгледаме равенствата

$$x_{m_n} = f(u_{m_n}, v_{m_n}),$$
$$y_{m_n} = g(u_{m_n}, v_{m_n})$$

и да оставим n да расте неограничено. В такъв случай ще получим след граничния преход

$$x_0 = f(u_0, v_0),$$
$$y_0 = g(u_0, v_0),$$

с което е показано, че Q_0 е образ на точка от A, т. е. Q_0 принадлежи на A' и следователно множеството A' е затворено. Остава да покажем, че множеството A' е ограничено. Това обаче е очевидно, защото функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са непрекъснати в ограниченото и затвореното множество A и следователно са ограничени.

Ще казваме, че трансформацията (1) е регулярна, ако:

1. Множеството R, където се разглеждат функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$, е отворено.

2. Функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ притежават непрекъснати частни производни от първи ред във всички точки на R.

3. Трансформацията (1) е обратима.

4. Във всички точки на R имаме
$$\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & f'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Нека трансформацията (1) е регулярна в точковото множество R, нека A е едно подмножество на R и нека (u_0, v_0) е една вътрешна точка на A. В такъв случай образът (x_0, y_0) на точката (u_0, v_0) е една вътрешна точка за A'.

И наистина очевидно имаме
$$\begin{aligned} x_0 &= f(u_0, v_0), \\ y_0 &= g(u_0, v_0). \end{aligned}$$

От друга страна, като вземем под внимание, че трансформацията (1) е регулярна, заключаваме, че са налице условията, при които доказахме теоремата за съществуване на неявни функции. Това обстоятелство ни позволява да твърдим, че е достатъчно малка околност Δ на точката (x_0, y_0) съществуват две непрекъснати функции
$$\varphi(x_1, x_2) \quad \text{и} \quad \psi(x_1, x_2),$$
за които точката с координата $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ се намира в отнапред дадена околност D на точката (u_0, v_0) (а следователно се намира в A, щом околността D е достатъчно малка, тъй като точката (u_0, v_0) е вътрешна за A), и които удовлетворяват условията
$$\begin{aligned} x &= f\left[\varphi(x, y), \psi(x, y)\right], \\ y &= g\left[\varphi(x, y), \psi(x, y)\right], \\ u_0 &= \varphi(x_0, y_0), \\ v_0 &= \psi(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{17}$$

Равенствата (17) ни учат обаче, че всяка точка от Δ е образ на някоя точка от A, т. е. точката (x_0, y_0) е вътрешна за A'. С това интересуващото ни свойство е установено. От доказаното следва, че отворено множество се преобразува при регулярна трансформация в отворено множество. По-специално множеството R' е отворено.

Въз основа на изложеното не е трудно да се убедим, че ако една точка P от R е външна за едно подмножество A на R, то точката P' е външна за A'. И наистина, щом точката P принадлежи на отвореното множество R и е външна за A, тя ще бъде вътрешна за множеството $R - A$ и следователно P' ще бъде вътрешна точка за $(R - A)' = R' - A'$, следователно ще бъде външна за A'.

Ще покажем, че обратната трансформация на регулярна трансформация е също тъй регулярна трансформация.

И наистина нека (1) е регулярна трансформация на R и (4) е нейната обратна трансформация. От изложеното дотук се вижда, че множеството R' е отворено. Нека (x_0, y_0) е коя да е точка от R' и нека

$$\begin{aligned} u_0 &= F(x_0, y_0), \\ v_0 &= G(x_0, y_0). \end{aligned}$$

В такъв случай

$$\begin{aligned} x_0 &= f(u_0, v_0), \\ y_0 &= g(u_0, v_0). \end{aligned}$$

При условията, в които се намираме, теорията на неявните функции ни осигурява съществуването на две функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ във всяка достатъчно малка околност Δ на точката (x_0, y_0), които имат непрекъснати частни производни от първи ред в Δ, за които точката с координати $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ принадлежи към R и които удовлетворяват условията

$$\begin{aligned} x &= f\left[\varphi(x, y), \psi(x, y)\right], \\ y &= g\left[\varphi(x, y), \psi(x, y)\right], \\ u_0 &= \varphi(x_0, y_0), \\ v_0 &= \psi(x_0, y_0). \end{aligned}$$

От друга страна, имаме

$$\begin{aligned} x &= f\left[F(x, y), G(x, y)\right], \\ y &= g\left[F(x, y), G(x, y)\right], \end{aligned}$$

както и да избираме точката (x, y) в R'. Като вземем под внимание, че трансформацията (1) е обратима, получаваме

$$F(x, y) = \varphi(x, y), \qquad G(x, y) = \psi(x, y)$$

всеки път, когато точката (x, y) принадлежи на $\Delta R'$. Така получените равенства ни учат, че функциите $F(x, y)$ и $G(x, y)$ имат непрекъснати частни производни в достатъчно малка околност на всяка точка (x_0, y_0) от R' и следователно имат непрекъснати първи частни производни навсякъде в R'.

Ние вече видяхме, че обратната трансформация на една обратима трансформация е винаги обратима. Оттук заключаваме, че трансформацията (4) е обратима.

За да можем да твърдим, че трансформацията (4) е регулярна, остава да покажем, че

$$\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Това може да се покаже така:

$$\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F'_x f'_u + F'_y g'_u & F'_x f'_v + F'_y g'_v \\ G'_x f'_u + G'_y g'_u & G'_x f'_v + G'_y g'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

С това ние показахме, че обратната трансформация на регулярна трансформация е също тъй регулярна трансформация.

Нека (1) е една регулярна трансформация на R и нека

$$\begin{aligned} s &= \varphi(x, y), \\ t &= \psi(x, y) \end{aligned} \tag{18}$$

е една регулярна трансформация R'. Да положим

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= \varphi[f(u, v), g(u, v)], \\ g_1(u, v) &= \psi[f(u, v), g(u, v)]. \end{aligned} \tag{19}$$

Функциите (19) са добре дефинирани в R. Трансформацията на R

$$\begin{aligned} s &= f_1(u, v), \\ t &= g_1(u, v) \end{aligned} \tag{20}$$

се нарича произведение на двете трансформации (1) и (18). Не трудно да се види, че тя е регулярна. И наистина множеството R е отворено, функциите (19) имат непрекъснати частни производни поне от първи ред в R, както това се вижда от правилото за диференциране на съставни функции, трансформацията (20) е обратима, защото от

$$\begin{aligned} f_1(u_1, v_1) &= f_1(u_2, v_2), \\ g_1(u_1, v_1) &= g_1(u_2, v_2), \end{aligned}$$

получаваме последователно

$$\begin{gathered}
\varphi[f(u_1,v_1),g(u_1,v_1)] = \varphi[f(u_2,v_2),g(u_2,v_2)],\\
\psi[f(u_1,v_1),g(u_1,v_1)] = \psi[f(u_2,v_2),g(u_2,v_2)];\\
f(u_1,v_1) = f(u_2,v_2),\\
g(u_1,v_1) = g(u_2,v_2)
\end{gathered}$$

и следователно

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2.$$

Остава да покажем, че

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Това може да се види така. Правилото за диференциране на съставни функции ни дава

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial u} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},\\
\frac{\partial f_1}{\partial v} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v},\\
\frac{\partial g_1}{\partial u} &= \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},\\
\frac{\partial g_1}{\partial v} &= \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}.
\end{aligned}$$

По такъв начин получаваме с помощта на правилото за умножение на детерминанти

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial v} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial v} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Трансформация от вида

$$\begin{aligned} x &= u,\\ y &= g(u,v) \end{aligned}$$

се нарича диагонална трансформация. Диагонални също се наричат и трансформациите

$$\left|\begin{aligned} x &= v\\ y &= g(u,v), \end{aligned}\right. \qquad \left|\begin{aligned} x &= f(u,v)\\ y &= u, \end{aligned}\right. \qquad \left|\begin{aligned} x &= f(u,v)\\ y &= v. \end{aligned}\right.$$

Нека (1) е една регулярна трансформация на R и нека (u_0, v_0) е една точка от R. Ние ще покажем, че в достатъчно малка околност на (u_0, v_0) трансформацията (1) може да се представи като произведение на две регулярни диагонални трансформации. И наистина условието

$$\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

се вижда, че поне едно от числата $g'_u(u_0, v_0)$ и $g'_v(u_0, v_0)$ е различно от нула. Нека например $g'_v(u_0, v_0) \neq 0$ (случаят, когато $g'_u(u_0, v_0) \neq 0$ се разглежда по същия начин). Да изберем около (u_0, v_0) околност W, която се съдържа в R и в която $g'_v(u, v) \neq 0$. Това може да се направи, защото частната производна $g'_v(u, v)$ е непрекъсната и различна от нула в точката (u_0, v_0).

Да разгледаме диагоналната трансформация

$$\begin{aligned} \xi &= u, \\ \eta &= g(u, v). \end{aligned} \tag{21}$$

Тази трансформация е регулярна в W. И наистина множеството W е отворено, функциите u и $g(u, v)$ имат непрекъснати производни и детерминантата

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ g'_u(u, v) & g'_v(u, v) \end{vmatrix}$$

е различна от нула. Остава да се убедим, че трансформацията (21) е обратима. Това може да се види така. Нека двете точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) от W имат един и същ образ при трансформацията (21). В такъв случай

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2, \\ g(u_1, v_1) &= g(u_2, v_2) \end{aligned}$$

и следователно

$$0 = g(u_2, v_2) - g(u_1, v_1) = g(u_1, v_2) - g(u_1, v_1) = (v_2 - v_1) g'_v(u_1, v_3),$$

където v_3 е точка между v_1 и v_2. От друга страна точката (u_1, v_3) очевидно принадлежи на W, поради което $g'_v(u_1, v_3) \neq 0$ и следователно $v_2 = v_1$. С това обратимостта на (21) е установена.

Да означим с W^* образа W при трансформацията (21) и да положим

$$\xi_0 = u_0, \qquad \eta_0 = g(u_0, v_0).$$

Точката (ξ_0, η_0) очевидно принадлежи на W^*.

Нека

$$u = p(\xi, \eta), \quad v = q(\xi, \eta) \tag{22}$$

е обратна трансформация на (21). В такъв случай съгласно дефиницията на понятието обратна трансформация имаме

$$\xi = p(\xi, \eta),$$
$$\eta = g[p(\xi, \eta), q(\xi, \eta)]$$

и следователно

$$\eta = g[\xi, q(\xi, \eta)]. \tag{23}$$

Трансформацията (21) обаче е обратима, поради което

$$u = p[u, g(u, v)], \quad v = q[u, g(u, v)]. \tag{24}$$

Да разгледаме диагоналната трансформация

$$x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \eta, \tag{25}$$

където

$$\varphi(\xi, \eta) = f[\xi, q(\xi, \eta)].$$

Тази трансформация очевидно е добре дефинирана в W^*. Тя обаче е регулярна във всяка околност T на точката (ξ_0, η_0), която се съдържа в W^*. В това ние можем да се убедим с помощта на същите разсъждения, които приложихме към трансформацията (21). За тази цел достатъчно е да покажем, че

$$\varphi'_\xi(\xi, \eta) \neq 0,$$

което може да стане по следния начин. Очевидно

$$\varphi'_\xi(\xi, \eta) = f'_u + f'_v q'_\xi(\xi, \eta).$$

От друга страна, диференцирайки (23) спрямо ξ, получаваме

$$0 = g'_u + g'_v q'_\xi(\xi, \eta),$$

т. е.

$$q'_\xi = -\frac{g'_u}{g'_v},$$

и следователно

$$\varphi'_\xi = f'_u - f'_v \frac{g'_u}{g'_v} = \frac{1}{g'_v} \begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Образът на T при трансформацията (22) е някое отворено подмножество на W, което съдържа точката (u_0, v_0). Нека S е околност на (u_0, v_0), която се съдържа в това подмножество. В такъв случай (21) е регулярна трансформация на S. Образът на S при тази трансформация е едно отворено множество S^*, в което трансформацията (25) е регулярна. Да образуваме в S произведението на двете трансформации (21) и (25). След очевидни пресмятания, като се използува (24), това произведение добива вида

$$x = f[u, q(u, g(u, v))] = f(u, v),$$
$$y = g(u, v).$$

По такъв начин ние получихме трансформацията (1). С това е установено, че в достатъчно малка околност на точката (u_0, v_0) трансформацията (1) действително може да се представи като произведение на две диагонални регулярни трансформации.

Не е трудно да се установи, че ако трансформацията (1) е регулярна в R и A е *ограничено* множество, което лежи в R заедно с контура си, то контурът на A' лежи в R' и

$$[K(A)]' = K(A').$$

Ще покажем първо, че контурът на A' лежи в R'. И наистина множеството

$$A + K(A)$$

е ограничено и затворено и следователно образът му

$$[A + K(A)]' = A' + [K(A)]'$$

е ограничено и затворено подмножество на R'. Като вземем под внимание неравенството

$$A' \subset A' + [K(A)]',$$

заключаваме, че всичките контурни точки на A' също лежат в

$$A' + [K(A)]', \tag{26}$$

защото множеството (26) е затворено, а всяка контурна точка на A' е точка на сгъстяване на редица от точки на A'. От изложеното се вижда, че

$$K(A') \subset A' + [K(A)]'$$

и още повече

$$K(A') \subset R'.$$

Ще покажем, че

$$[K(A)]' = K(A').$$

И наистина нека P' е една точка от $[K(A)]'$ и нека P е образ на P' при трансформацията (4), т. е. P принадлежи на $K(A)$. В такъв случай P' не може да бъде нито вътрешна, нито външна точка за A', защото P като образ на P' при регулярната трансформация (4) би била вътрешна или съответно външна точка за A, което не е вярно. С това показахме, че

$$[K(A)]' \subset K(A').$$

Аналогично се вижда, че

$$K(A') \subset [K(A)]',$$

с което доказателството се завършва.

Ще казваме, че трансформацията (1) е *двойно регулярна* в R, ако тя е регулярна и функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ притежават непрекъснати частни производни в R поне до втори ред.

Ние вече видяхме, че щом трансформацията (1) е регулярна, то функциите (4), които определят обратната трансформация, притежават непрекъснати първи частни производни. Теорията на неявните функции ни учи, че

$$F'_x = \frac{g'_v}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}}, \quad F'_y = \frac{-f'_v}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}},$$

$$G'_x = \frac{-g'_u}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}}, \quad G'_y = \frac{f'_u}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}}.$$

От тези равенства заключаваме, че щом трансформацията (1) е двойно регулярна, то функциите

$$F'_x, \quad F'_y,$$
$$G'_x, \quad G'_y$$

притежават непрекъснати частни производни от първи ред в R', т. е. функциите (4) притежават непрекъснати частни производни поне до втори ред в R'. От това заключаваме, че обратната трансформация на една двойно регулярна трансформация е също тъй една двойно регулярна трансформация.

Понякога регулярните трансформации ще наричаме още еднократно регулярни за разлика от двойно регулярните трансформации.

§ 15. Основна теорема на интегралното смятане в равнината

Да означим с Δ правоъгълник, определен от неравенствата

$$\begin{aligned} a &\le x < b, \\ c &\le y < d. \end{aligned} \tag{1}$$

Това значи, че една точка с координати (x, y) се причислява към Δ тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата (1). Такъв правоъгълник ние ще наричаме полузатворен, без да посочваме изрично, че става дума за правоъгълник, чиито страни са успоредни на съответните координатни оси.

Нека числата a, b, c, d и p удовлетворяват неравенствата

$$a < p < b, \quad c < d.$$

Да разгледаме двата полузатворени правоъгълника, определени съответно от неравенствата

$$\begin{aligned} a \le x < p, &\quad p \le x < b, \\ c \le y < d, &\quad c \le y < d. \end{aligned}$$

Такива правоъгълници ние ще наричаме съседни по x. Аналогично правоъгълниците, определени с неравенства от вида

$$\begin{aligned} a \le x < b, &\quad a \le x < b, \\ c \le y < q, &\quad q \le y < d, \end{aligned}$$

където $c < q < d$ ще наричаме съседни по y. В бъдеще, когато говорим за съседни правоъгълници, ще имаме пред вид или полузатворени правоъгълници, съседни по x, или полузатворени правоъгълници, съседни по y. Очевидно, ако Δ_1 и Δ_2 са два съседни правоъгълника, те нямат обща точка и сумата $\Delta_1 + \Delta_2$ е полузатворен правоъгълник.

С помощта на неравенствата (1) ние можем да образуваме безбройно много полузатворени правоъгълници в зависимост от избора на числата a,

b, c и d. Нека на всеки полузатворен правоъгълник Δ съпоставим по едно число $\varphi(\Delta)$. Ще казваме, че $\varphi(\Delta)$ е полуадитивна функция на Δ, ако всеки път, когато Δ_1 и Δ_2 са два съседни полузатворени правоъгълника, имаме

$$\varphi(\Delta_1 + \Delta_2) \leq \varphi(\Delta_1) + \varphi(\Delta_2).$$

Ще казваме, че функцията $\varphi(\Delta)$ е неположителна около точката P, ако може да се намери околност $U(P)$ на точката P по такъв начин, че за всеки полузатворен правоъгълник Δ, който съдържа точка P или по контура, или във вътрешността си и който се съдържа в $U(P)$, да имаме $\varphi(\Delta) \leq 0$.

Теорема. *Нека полуадитивната функция $\varphi(\Delta)$ е неположителна около всяка точка P на равнината. В такъв случай при всеки избор на полузатворен правоъгълник Δ е в сила неравенството $\varphi(\Delta) \leq 0$.*

Доказателство. Да допуснем противното. Това значи, че има поне един полузатворен правоъгълник D_1, за който $\varphi(D_1) > 0$. Ние ще го разложим на сума от два съседни по x правоъгълника D' и D'' с помощта на неговата средна линия. В такъв случай е изпълнено поне едно от двете неравенства

$$\varphi(D') > 0, \quad \varphi(D'') > 0.$$

И наистина в противен случай ще имаме $\varphi(D') \leq 0$ и $\varphi(D'') \leq 0$ и следователно

$$\varphi(D_1) = \varphi(D' + D'') \leq \varphi(D') + \varphi(D'') \leq 0,$$

което не е вярно. Нека означим с D_2 такъв измежду двата правоъгълника D' и D'', за който

$$\varphi(D_2) > 0.$$

Разделяме D_2 с помощта на неговата средна линия на два съседни по y полузатворени правоъгълника и означаваме с D_3 такъв измежду тях, за който $\varphi(D_3) > 0$. Както по-горе се убеждаваме, че такъв сигурно има. Продължаваме този процес неограничено.

Така получаваме редицата

$$D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \cdots$$

от полузатворени правоъгълници, за които

$$\varphi(D_n) > 0. \tag{2}$$

Съгласно теоремата на Кантор[1] съществува точка P_0, която принадлежи или на вътрешността, или на контура на всеки един от тези правоъгълници. Функцията $\varphi(\Delta)$ обаче е неположителна около всяка точка на равнината и следователно тя е неположителна и около P_0. Това значи, че съществува такава

[1]Теоремата на Кантор се прилага към редицата от затворени правоъгълници, които се получават от D_n чрез присъединяване на контурните им точки.

околност $U(P_0)$ на точката P_0, че за всеки полузатворен правоъгълник Δ, който съдържа точката P_0 или по контура, или във вътрешността си и се съдържа в $U(P_0)$, имаме $\varphi(\Delta) \leq 0$. От друга страна, правоъгълниците D_n съдържат точката P_0 или във вътрешността, или по контура си, а диагоналите им клонят към нула, когато n расте неограничено. Това ни дава право да твърдим, че при достатъчно голямо n полузатвореният правоъгълник D_n се съдържа в $U(P_0)$ и следователно $\varphi(D_n) \leq 0$, което противоречи на неравенството (2). С това доказателството е завършено.

§ 16. Характеристични функции

Нека A е едно множество от точки в равнината. Характеристична функция на A се нарича функцията $\varphi(x, y)$, която има стойност единица в точки, които принадлежат на A, и стойност нула в точки, които не принадлежат на A.

Нека A е кръг, определен от неравенството

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 < r^2, \tag{1}$$

и нека $\varphi(x, y)$ е характеристичната му функция. Ние ще пресметнем израза

$$I = \int_a^b \left[\int_a^b \varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \tag{2}$$

при предположение, че квадратът, определен от неравенствата

$$\begin{aligned} a \leq x \leq b, \\ a \leq y \leq b, \end{aligned} \tag{3}$$

съдържа A, като същевременно се убедим, че (2) има смисъл.

Ако точката в координати (x, y) удовлетворява неравенството (1), то

$$|x - p| < r$$

и следователно

$$p - r < x < p + r.$$

От друга страна, имаме очевидно

$$(y-q)^2 < r^2 - (x-p)^2,$$

т. е.

$$q - \sqrt{r^2 - (x-p)^2} < y < q + \sqrt{r^2 - (x-p)^2}.$$

По такъв начин ние виждаме, че ако точката (x, y) принадлежи на кръга A, нейните координати удовлетворяват неравенствата

$$\begin{gathered} p - r < x < p + r, \\ q - \sqrt{r^2 - (x-p)^2} < y < q + \sqrt{r^2 - (x-p)^2}. \end{gathered} \tag{4}$$

Обратно, нека точката (x, y) удовлетворява неравенствата (4); в такъв случай лесно се убеждаваме, че е изпълнено и неравенството (1). Оттук заключаваме, че

$$\varphi(x, y) = 1$$

тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата (4).

Да разгледаме при фиксирано x интеграла

$$F(x) = \int_a^b \varphi(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Когато x не принадлежи на интервала $|x - p| < r$, този интеграл съществува и има стойност нула, защото в такъв случай $\varphi(x, y) = 0$. Когато $|x - p| < r$, интегралът пак очевидно има смисъл и

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^{q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}} \varphi(x, y)\,\mathrm{d}y + \int_{q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}}^{q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}} \varphi(x, y)\,\mathrm{d}y \\ &\qquad + \int_{q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}}^{b} \varphi(x, y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_a^{q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}} 0\,\mathrm{d}y + \int_{q-\sqrt{r^2-(x-p)^2}}^{q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}} 1\,\mathrm{d}y + \int_{q+\sqrt{r^2-(x-p)^2}}^{b} 0\,\mathrm{d}y \\ &= 2\sqrt{r^2 - (x-p)^2}. \end{aligned}$$

По такъв начин

$$F(x) = 0$$

при $|x - p| \geq r$ и

$$F(x) = 2\sqrt{r^2 - (x-p)^2}$$

при $|x - p| < r$. Функцията $F(x)$ е непрекъсната и следователно интегруема в разглеждания от нас интервал $[a, b]$. Очевидно имаме

$$\begin{aligned} I = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{p-r} F(x)\,\mathrm{d}x + \int_{p-r}^{p+r} F(x)\,\mathrm{d}x + \int_{p+r}^{b} F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{p-r}^{p+r} \sqrt{r^2 - (x-p)^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Да направим субституцията

$$x = p + r\cos t.$$

Това ще ни даде

$$I = 2r^2 \int_0^{\pi} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = \pi r^2.$$

Нека читателят обърне внимание върху този резултат. Ние ще имаме нужда от него.

Израз от вида (2) се нарича повторен интеграл. Ние ще имаме нужда от още един повторен интеграл.

Нека $\psi(x, y)$ е характеристичната функция на един полузатворен правоъгълник A, който се съдържа в множеството G, определено[1] от неравенствата

$$\begin{gathered} a \leq x \leq b \\ \varphi_0(x) \leq y \leq \varphi_1(x), \end{gathered} \tag{5}$$

където $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ са непрекъснати функции в компактния интервал $a \leq x \leq b$, удовлетворяващи условието $\varphi_0(x) \leq \varphi_1(x)$.

Ние ще покажем, че повторният интеграл

$$E = \int_a^b \left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y) \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

има смисъл, и ще пресметнем неговата стойност. Това ще извършим така.

Нека правоъгълникът A се определя от неравенствата

$$\begin{gathered} p \leq x < q, \\ r \leq y < s. \end{gathered}$$

В такъв случай $a \leq p < q \leq b$ и $\varphi_0(x) \leq r$, $s \leq \varphi_1(x)$. Да положим

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y) \, \mathrm{d}y. \tag{6}$$

Ако x не принадлежи на интервала $p \leq x < q$, то $\psi(x, y) = 0$ при всяко y. В този случай $\Phi(x)$ очевидно има смисъл и $\Phi(x) = 0$. Нека $p \leq x < q$. Тогава $\psi(x, y) = 1$ при $r \leq y < s$ и $\psi(x, y) = 0$ при всички останали стойности на y. По такъв начин при фиксирано x ограничената функция $\psi(x, y)$ има само две

[1] Това значи, че една точка (x, y) се причислява към G тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата (5).

точки на прекъсване и следователно е интегруема в Риманов смисъл, т. е. $\Phi(x)$ съществува и в този случай и

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi_0(x)}^{r} \psi(x, y)\,\mathrm{d}y + \int_{r}^{s} \psi(x, y)\,\mathrm{d}y + \int_{s}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\,\mathrm{d}y$$
$$= 0 + (s - r) + 0 = s - r.$$

И така $\Phi(x) = s - r$ при $p \le x < q$ и $\Phi(x) = 0$ при всички останали стойности на x. От това виждаме, че функцията $\Phi(x)$ е интегруема в Риманов смисъл във всеки краен интервал и

$$\int_a^b \Phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^p \Phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_p^q \Phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_q^b \Phi(x)\,\mathrm{d}x = (s - r)(q - p).$$

По такъв начин ние видяхме, че повторният интеграл E има смисъл и

$$E = (s - r)(q - p). \tag{7}$$

По-общо, ако L е константа, то съгласно познатите ни правила имаме

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} L\psi(x, y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_a^b L \left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \tag{8}$$
$$= L \int_a^b \left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x, y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = L(s - r)(q - p),$$

като при това можем да твърдим въз основа на същите правила, че (8) съществува.

Ние особено често ще прилагаме формулите (7) и (8) в случая, когато функциите $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ са константи, т. е. когато множеството G е правоъгълник.

Ако множеството G не съдържа A, то равенството (7) не е вярно, но ние можем да получим едно полезно неравенство по следния начин. Нека α, β, γ и δ са константи, избрани така, че правоъгълникът

$$\alpha \le x \le \beta,$$
$$\gamma \le y \le \delta$$

да съдържа A и освен това да са изпълнени неравенствата

$$\alpha \le a, \quad b \le \beta, \quad \gamma \le \varphi_0(x), \quad \varphi_1(x) \le \delta.$$

В такъв случай

$$E = \int_a^b \left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \psi(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \le \int_\alpha^\beta \left[\int_\gamma^\delta \psi(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = (s-r)(q-p).$$

С помощта на характеристични функции могат да се образуват удобно полуадитивни функции по следния начин. Нека $\psi(x,y)$ е ограничена функция, дефинирана в цялата равнина, и нека $\varphi(x,y)$ е характеристичната функция на полузатворения правоъгълник Δ, определян от неравенствата

$$\begin{aligned} p \le x < q, \\ r \le y < s. \end{aligned}$$

В такъв случай, ако a и b са произволни реални числа, свързани с неравенството $a < b$, функциите

$$\begin{aligned} I(\Delta) &= \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_a^b} \varphi(x,y)\psi(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x, \\ H(\Delta) &= -\underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_a^b} \varphi(x,y)\psi(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \end{aligned}$$

са полуадитивни. И наистина нека Δ_1 и Δ_2 са два съседни полузатворени правоъгълника. Да означим с $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ съответно техните характеристични функции. В такъв случай

$$\begin{aligned} I(\Delta_1+\Delta_2) &= \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_a^b} (\varphi_1+\varphi_2)\psi\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_a^b} \varphi_1\psi\,\mathrm{d}y + \overline{\int_a^b} \varphi_2\psi\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\ &\le \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_a^b} \varphi_1\psi\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_a^b} \varphi_2\psi\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = I(\Delta_1) + I(\Delta_2) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} H(\Delta_1+\Delta_2) &= -\underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_a^b} (\varphi_1+\varphi_2)\psi\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \le -\underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_a^b} \varphi_1\psi\,\mathrm{d}y + \underline{\int_a^b} \varphi_2\psi\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\ &\le -\underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_a^b} \varphi_1\psi\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_a^b} \varphi_2\psi\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = H(\Delta_1) + H(\Delta_2). \end{aligned}$$

Като вземем под внимание, че сума от полуадитивни функции е полуадитивна, добиване възможност да образуваме разнообразни полуадитивни функции. Ние често ще се ползуваме от това обстоятелство.

§ 17. Горна мярка

Нека A е ограничено точково множество в равнината. Покриваме множеството A със система от краен брой отворени кръгове

$$C_1, C_2, \dots, C_n. \tag{1}$$

Това значи, че кръговете C_k са избрани така, че

$$A \subset C_1 + C_2 + \cdots + C_n.$$

Такива системи съществуват, защото множеството A е ограничено. То може да бъде покрито дори с помощта на един-единствен кръг.

Означаваме с r_k радиуса на кръга C_k и разглеждаме сумата

$$S = r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2.$$

Такива суми могат да се образуват по безбройно много начини в зависимост от избора на покриващата система от кръгове (1). Множеството от тези суми обаче е ограничено отдолу, защото те са неотрицателни. Ние ще означим с $\nu(A)$ тяхната точна долна граница. Числото $\nu(A)$ се нарича горна мярка на множеството A. По такъв начин на всяко ограничено множество от точки в равнината ние съпоставихме по едно число $\nu(A)$, т. е. както често се казва, дефинирахме една функция в съвкупността от разглежданите от нас множества. Нашата цел ще бъде да изучим свойствата на тази функция. Това ние ще направим в следващите четири точки.

1. *Стойностите на функцията $\nu(A)$ са неотрицателни.*

Доказателството, което е тривиално, ние ще предоставим на читателя.

2. *Ако A и B са две ограничени точкови множества в равнината и ако $A \subset B$, то $\nu(A) \leq \nu(B)$.*

Доказателство. Да покрием B със система от краен брой отворени кръгове

$$C_1, C_2, \dots, C_n \tag{2}$$

и да означим с S сумата от квадратите на техните радиуси. Очевидно системата от кръговете (2) покрива и множеството A и следователно

$$\nu(A) \leq S,$$

както това се вижда от дефиницията на $\nu(A)$. По такъв начин $\nu(A)$ е една долна граница на множеството, което описват сумите S, когато меним по всевъзможни начини покриващата система от кръгове (2). Числото $\nu(B)$ е обаче точната долна граница на това множество, т. е. най-голямата от долните му граници и следователно

$$\nu(B) \geq \nu(A).$$

С това доказателството е завършено.

3. *Ако A и B са две ограничени множества от точки в равнината, то*

$$\nu(A+B) \leq \nu(A) + \nu(B).$$

Доказателство. Покриваме множеството A със система от кръгове

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \tag{3}$$

а множеството B — със система от кръгове

$$C_1', C_2', \ldots, C_m'. \tag{4}$$

Означаваме с S сумата от квадратите на радиусите на кръговете (3) и с S' — сумата от квадратите на радиусите на кръговете (4). Системата от кръговете

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, C_1', C_2', \ldots, C_m'$$

покрива множеството $A+B$ и следователно

$$\nu(A+B) \leq S + S', \tag{5}$$

както това се вижда от дефиницията на $\nu(A+B)$.

Фиксираме системата (3). С това не е направено никакво ограничение върху начина, по който можем да избираме кръговете (4). От неравенството (5) получаваме

$$\nu(A+B) - S \leq S',$$

което ни учи, че числото $\nu(A+B) - S$ е една долна граница на множеството от сумите S'. Числото $\nu(B)$ е обаче точната, т. е. най-голямата долна граница на тези суми, и следователно

$$\nu(A+B) - S \leq \nu(B)$$

или още

$$\nu(A+B) - \nu(B) \leq S. \tag{6}$$

Системата от кръговете (3) при нас обаче е фиксирана произволно. Това обстоятелство ни позволява да заключим от неравенството (6), че числото $\nu(A + B) - \nu(B)$ е една долна граница на множеството от сумите S от квадратите на радиусите на всевъзможните системи (3) от кръгове, които покриват A. От друга страна, числото $\nu(A)$ е най-голямата от долните граници на такива суми и следователно

$$\nu(A + B) - \nu(B) \leq \nu(A),$$

с което исканото неравенство е установено.

Забележка. Ако $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са краен брой ограничени точкови множества в равнината, то

$$\nu(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \leq \nu(A_1) + \nu(A_2) + \cdots + \nu(A_n).$$

За да се убедим в това, достатъчно е да приложим краен брой пъти неравенството, което доказахме.

4. *Нека A е ограничено множество от точки в равнината и нека τ е подобие с модул a. Ако A' е образ на A при τ, то*

$$\nu(A') = a^2\nu(A).$$

.

От това следва, разбира се, че ако τ е еднаквост, т. е. ако $a = 1$, то

$$\nu(A') = \nu(A).$$

Доказателство. Нека

$$C_1, C_2, \ldots, C_n \tag{7}$$

е произволна система от отворени кръгове, която покрива A, и нека радиусът на C_k е r_k. Нека образът на C_k при τ е C'_k. Ние знаем (вж. § 14), че C'_k е отворен кръг с радиус ar_k. Системата от кръговете $C'_1, C'_2, \ldots, C'_k$ покрива A' и следователно

$$\nu(A') \leq (ar_1)^2 + (ar_2)^2 + \cdots + (ar_n)^2,$$

или още

$$\frac{\nu(A')}{a^2} \leq r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2.$$

Системата от покриващите кръгове (7) е избрана произволно, т. е. $\dfrac{\nu(A')}{a^2}$ е една долна граница на съвкупността на всевъзможните суми

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2.$$

Числото $\nu(A)$ обаче е точната, т. е. най-голямата долна граница на тези суми и следователно

$$\frac{\nu(A')}{a^2} \leq \nu(A)$$

или още

$$\nu(A') \leq a^2 \nu(A). \tag{8}$$

Като разгледаме обратната трансформация на τ, която, както знаем (вж. § 14), е подобие с модул $\frac{1}{a}$, ще получим

$$\nu(A) \leq \frac{1}{a^2} \nu(A'),$$

което заедно с (8) ни дава

$$\nu(A') = a^2 \nu(A).$$

С това доказателството е завършено.

§ 18. Мярка на правоъгълник

Нека t и s са две положителни числа и нека Δ е правоъгълник, определен от неравенствата

$$\begin{aligned} 0 &\leq x < t, \\ 0 &\leq y < s. \end{aligned} \tag{1}$$

Това значи, че точката (x, y) се причислява към Δ тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата (1).

Ние ще фиксираме s. При всеки избор на $t > 0$ стойността на $\nu(\Delta)$ е еднозначно определена и следователно $\nu(\Delta)$ е функция на t. Ние ще я означим с $\varphi(t)$. Тази функция при нас е дефинирана при $t > 0$.

Да означим с Δ_{ik} правоъгълника, определен от неравенствата

$$\begin{aligned} (i-1)t &\leq x < it, \\ (k-1)t &\leq y < ks. \end{aligned}$$

Еднаквостта (относно терминологията вж. § 14)

$$\begin{aligned} x' &= x + (i-1)t, \\ y' &= y + (k-1)s \end{aligned}$$

преобразува Δ в Δ_{ik} и следователно, както знаем (вж. § 17),

$$\nu(\Delta_{ik}) = \nu(\Delta).$$

Да положим

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ik}.$$

В такъв случай

$$\nu(\Delta_k) \leq \sum_{i=1}^{n} \nu(\Delta_{ik}) = n\nu(\Delta)$$

и по-специално при $k = 1$ ще имаме

$$\nu(\Delta_1) \leq n\nu(\Delta).$$

Не е трудно да се види, че Δ_k е правоъгълник, определен от неравенствата

$$0 \leq x < nt,$$
$$(k-1)s \leq y < ks.$$

Ние ще предоставим доказателството на читателя.

Както се вижда съвсем просто, еднаквостта

$$x' = x,$$
$$y' = y + (k-1)s$$

преобразува Δ_1 в Δ_k и следователно

$$\nu(\Delta_k) = \nu(\Delta_1).$$

Най-сетне да разгледаме сумата

$$D = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k.$$

Както знаем,

$$\nu(D) \leq \sum_{k=1}^{n} \nu(\Delta_k)$$

и следователно

$$\nu(D) \leq n\nu(\Delta_1).$$

От друга страна, съвсем просто се вижда, че D е множеството на онези и само онези точки (x, y) от равенствата, които удовлетворяват неравенствата

$$\begin{aligned} 0 \le x < nt, \\ 0 \le y < ns. \end{aligned}$$

От друга страна, също тъй просто се вижда, че подобието

$$\begin{aligned} x' &= nx, \\ y' &= ny \end{aligned} \tag{2}$$

преобразува Δ в D. Ние ще предоставим проверката на тези прости неща на читателя. Като вземем под внимание, че модулът на подобието (2) е n, получаваме

$$\nu(D) = n^2 \nu(\Delta). \tag{3}$$

Да разгледаме неравенствата

$$\begin{aligned} \nu(D) &\le n\nu(\Delta_1), \\ \nu(\Delta_1) &\le n\nu(\Delta). \end{aligned}$$

Ако допуснем за момент, че

$$\nu(\Delta_1) < n\nu(\Delta),$$

ще получим

$$\nu(D) < n^2 \nu(\Delta),$$

което противоречи на равенството (3). По такъв начин получаваме

$$\nu(\Delta_1) = n\nu(\Delta)$$

или

$$\varphi(nt) = n\varphi(t).$$

Това равенство, което засега е установено от нас само за цели положителни стойности на n, може да се обобщи така. Нека n и m са две произволни цели положителни числа. В такъв случай

$$\varphi(mt) = m\varphi(t)$$

и

$$\varphi(mt) = \varphi\left(n\frac{mt}{n}\right) = n\varphi\left(\frac{m}{n}t\right)$$

и следователно

$$m\varphi(t) = n\varphi\left(\frac{m}{n}t\right),$$

или

$$\varphi(rt) = r\varphi(t),$$

където $r = \dfrac{m}{n}$. Специално при $t = 1$ получаваме

$$\varphi(r) = r\varphi(1),$$

където r е произволно рационално положително число.

От друга страна, функцията $\varphi(t)$ е монотонно растяща. И наистина да разгледаме двата правоъгълника Δ' и Δ'', определени съответно от неравенствата

$$0 \le x < t',$$
$$0 \le y < s,$$

и

$$0 \le x < t'',$$
$$0 \le y < s,$$

където $0 < t' \le t''$. В такъв случай, както това лесно се вижда, $\Delta' \subset \Delta''$ и следователно $\nu(\Delta') \le \nu(\Delta'')$, т. е.

$$\varphi(t') \le \varphi(t'').$$

Сега вече не е трудно да се определи $\varphi(t)$ при произволно реално и положително t. За тази цел фиксираме t и избираме две положителни рационални числа r_1 и r_2 по такъв начин, че да имаме

$$r_1 < t < r_2. \tag{4}$$

В такъв случай

$$\varphi(r_1) \le \varphi(t) \le \varphi(r_2) \tag{5}$$

и следователно

$$r_1\varphi(1) \le \varphi(t) \le r_2\varphi(1). \tag{6}$$

От друга страна, $\varphi(1) \ge 0$ и по такъв начин от (4) получаваме

$$r_1\varphi(1) \le t\varphi(1) \le r_2\varphi(1),$$

което заедно с (6) ни дава

$$|\varphi(t) - t\varphi(1)| \leq (r_2 - r_1)\varphi(1).$$

Числата r_1 и r_2 обаче могат да се изберат произволно близо до t, а t, $\varphi(t)$ и $\varphi(1)$ не зависят от избора на r_1 и r_2. Въз основа на това заключаваме, че

$$\varphi(t) = t\varphi(1).$$

Да положим $\varphi(1) = A$. По такъв начин получаваме

$$\nu(\Delta) = At,$$

където A не зависи от t.

Съвсем по същия начин се вижда, че

$$\nu(\Delta) = Bs,$$

където B не зависи от s. По такъв начин получаваме

$$At = Bs$$

и следователно

$$\frac{A}{s} = \frac{B}{t}. \tag{7}$$

Да означим със σ общата стойност на двете отношения $\frac{A}{s}$ и $\frac{B}{t}$. Тъй като лявата страна на (7) не зависи от t, а дясната не зависи от s, то σ не зависи нито от t, нито от s. По такъв начин получаваме $A = \sigma s$ и следователно

$$\nu(\Delta) = \sigma st,$$

където σ не се мени, когато изменяме s и t. Засега се вижда, че σ е неотрицателно число. Точната му стойност ние ще пресметнем по-късно (вж. § 19).

Резултатът, който получихме, може да се обобщи. Нека G е правоъгълник, определен от неравенствата

$$a \leq x < b,$$
$$c \leq y < d.$$

Не е трудно да се види, че еднаквостта

$$x' = x - a, \qquad y' = y - c$$

го преобразува в правоъгълник G', определен от неравенствата

$$0 \leq x' < b - a,$$
$$0 \leq y' < d - c,$$

и следователно

$$\nu(G) = \nu(G').$$

От друга страна, въз основа на това, което вече знаем, имаме

$$\nu(G') = \sigma(b - a)(d - c)$$

и по такъв начин намираме

$$\nu(G) = \sigma(b - a)(d - c).$$

От получения резултат се вижда, че ако Δ_1 и Δ_2 са два съседни полузатворени правоъгълника, то

$$\nu(\Delta_1 + \Delta_2) = \nu(\Delta_1) + \nu(\Delta_2). \tag{8}$$

И наистина нека Δ_1 и Δ_2 са съседни по x. Това значи, че те могат да се представят съответно с помощта на неравенства от вида

$$a \leq x < p,$$
$$c \leq y < d$$

и

$$p \leq x < b,$$
$$c \leq y < d,$$

където $a < p < b$, $c < d$. В такъв случай $\Delta_1 + \Delta_2$ е полузатворен правоъгълник, определен от неравенствата

$$a \leq x < b,$$
$$c \leq y < d$$

(нека читателят сам докаже това), и следователно съгласно доказаното ще имаме

$$\nu(\Delta_1 + \Delta_2) = \sigma(b - a)(d - c).$$

Остава да вземем под внимание, че

$$\nu(\Delta_1) = \sigma(p - a)(d - c),$$

$$\nu(\Delta_2) = \sigma(b - p)(d - c),$$

за да получим (8). Случаят, когато Δ_1 и Δ_2 са съседни по y, се разглежда по същия начин.

От доказаното се вижда, че $\nu(\Delta)$ и $-\nu(\Delta)$ са полуадитивни функции на полузатворения правоъгълник Δ. Полуадитивността на $\nu(\Delta)$ е тривиална. Тя следва от неравенството, което ние установихме в точка 3 на § 17. От това неравенство следва по-общо полуадитивността на функцията $\nu(\Delta G)$, където G е фиксирано множество. Напротив, полуадитивността на $-\nu(\Delta)$ е нова за нас. Ние ще използуваме този резултат.

§ 19. Измерими множества

Едно множество A се нарича измеримо в смисъл на Пеано—Жордан, ако то е ограничено и горната мярка на контура му е нула.

Ако A и B са измерими множества, то множествата $A + B$, AB и $A - B$ са също измерими, защото са ограничени и както знаем (вж. § 13),

$$K(A + B) \subset K(A) + K(B),$$
$$K(AB) \subset K(A) + K(B),$$
$$K(A - B) \subset K(A) + K(B).$$

За да имаме примери на измерими множества, достатъчно е да забележим, че горната мярка на всяка праволинейна отсечка L е нула. И наистина нека a е нейната дължина. Да разделим отсечката на n равни части и да построим около всяка точка на деление отворен кръг с радиус $\frac{a}{n}$. По този начин получаваме $n + 1$ кръга, чиято сума покрива L. В такъв случай

$$\nu(L) \leq (n + 1)\frac{a^2}{n^2},$$

откъдето получаваме, като оставим n да расте неограничено, $\nu(L) = 0$.

От доказаното заключаваме, че всяко ограничено множество, чийто контур е съставен от краен брой праволинейни отсечки, е измеримо, защото, както това се вижда от неравенството, което ние установихме в точка 3 на § 17, сума от краен брой множества, чиято горна мярка е нула, е множество, чиято горна мярка е също нула.

За да имаме още по-общ пример на измерими множества, ще забележим, че графиката на всяка функция $f(x)$, която е дефинирана и непрекъсната в един краен и затворен интервал $[a, b]$, представлява също тъй едно множество, чиято горна мярка е нула. И наистина да изберем едно положително число ε и да разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

по такъв начин, че осцилацията на $f(x)$ във всеки един от тези подинтервали да бъде по-малка от ε. Да означим с M_i и m_i съответно точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Нека $f(x)$ е графиката на Γ и нека Δ_i е правоъгълникът, определен от неравенствата

$$\begin{gathered} x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ m_i \leq y < M_i + \varepsilon. \end{gathered}$$

Да означим най-сетне с P множеството, съставено от единствената точка $(b, f(b))$. В такъв случай

$$\Gamma - P \subset \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

и следователно[1]

$$\begin{aligned} \nu(\Gamma - P) &\leq \sum_{i=1}^{n} \nu(\Delta_i) = \sum_{i-1}^{n} \sigma(M_i + \varepsilon - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i-1}^{n} 2\sigma\varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\ &= 2\sigma\varepsilon(b - a), \end{aligned}$$

откъдето получаваме $\nu(\Gamma - P) = 0$. Като вземем под внимание още, че $\nu(P) = 0$, получаваме $\nu(\Gamma) = 0$, както това се вижда от неравенството

$$\nu(\Gamma) \leq \nu(\Gamma - P) + \nu(P).$$

С оглед на това, което ще следва по-късно, ще отбележим, че е измеримо всяко множество G, което се дефинира от неравенства от вида[2]

$$\begin{gathered} a \leq x \leq b, \\ f(x) \leq y \leq g(x), \end{gathered} \tag{1}$$

където $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати функции в компактния интервал $a \leq x \leq b$ и удовлетворяват неравенството $f(x) \leq g(x)$. И наистина, ако за някоя точка (x_0, y_0) имаме строги неравенства

$$a < x_0 < b, \qquad f(x_0) < y_0 < g(x_0),$$

[1] Относно дефиницията на σ вж. § 18.

[2] Това значи, че една точка с координати (x, y) се причислява към G тогава и само тогава, когато са изпълнено неравенствата (1).

то около точката (x_0, y_0) може да се избере достатъчно малка околност U по такъв начин, че за всяка точка (x, y) от U да са изпълнени неравенствата (1) (нека читателят сам докаже това), и следователно такава точка (x_0, y_0) е вътрешна за G. По такъв начин, ако една точка (x, y) от G е контурна, в условията (1) трябва да имаме равенство поне на едно място, т. е. такава точка трябва да принадлежи поне на едно от четирите множества, определени в условията

$$\begin{aligned} x = a, &\quad f(a) \le y \le g(a), \\ x = b, &\quad f(b) \le y \le g(b), \\ a \le x \le b, &\quad\quad y = f(x), \\ a \le x \le b, &\quad\quad y = g(x). \end{aligned}$$

От изложеното се вижда, че контурът на G се съдържа в сумата от тези четири множества. Горната мярка обаче на всяко едно от тези множества е нула, защото първите две от тях са праволинейни отсечки, а третото и четвъртото са графики на непрекъснати функции, чийто аргумент се мени в компактен интервал. От това се вижда, че горната мярка на контура на G е нула. Остава да вземем под внимание, че множеството G е ограничено (нещо, което читателят сам може лесно да докаже, като вземе под внимание, че функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в компактен интервал и следователно ограничени), за да можем да твърдим, че то е измеримо.

В бъдеще често ще срещаме множества, дефинирани с неравенства от вида (1). Ние ще ги наричаме криволинейни трапеци, чиито основи са перпендикулярни на оста x.

След тези предварителни бележки преминаваме към главните въпроси, които имаме да разгледаме в този параграф.

Лема 1. *Нека A, B, C са измерими множества, сечението на всеки две от които е празно, и нека сумата $A + B + C$ е един полузатворен квадрат D. В такъв случай*

$$\nu(A) + \nu(B) + \nu(C) = \nu(D). \tag{2}$$

Доказателство. Засега е ясно съгласно § 17, че

$$\nu(D) \le \nu(A) + \nu(B) + \nu(C).$$

За да установим равенството (2), избираме положително число ε и покриваме сумата от контурите на A, B и C със система от краен брой отворени кръгове

$$C_1, C_2, \dots, C_n$$

по такъв начин, че сумата от квадратите на техните радиуси $r_1, r_2, \dots, r_n$ да бъде по-малка от ε.

Ще означим с $\varphi(x, y)$ характеристичната функция на полузатворения правоъгълник Δ, определен от неравенствата

$$\begin{aligned} p \le x < q, \\ r \le y < s, \end{aligned}$$

и с $\psi_k(x, y)$ — характеристичната функция на C_k.

Да образуваме спомагателната функция

$$\theta(\Delta) = \nu(\Delta A) + \nu(\Delta B) + \nu(\Delta C) - \nu(\Delta) - \lambda(\Delta), \tag{3}$$

където[1]

$$\lambda(\Delta) = 3\sigma \sum_{i=1}^{n} \underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_c^d} \varphi(x, y)\psi_k(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Ние ще изберем правоъгълника, определен от неравенствата

$$\begin{aligned} a \le x \le b, \\ c \le y \le d, \end{aligned} \tag{4}$$

по такъв начин, че да съдържа във вътрешността си всеки един от кръговете $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Функцията $\theta(\Delta)$ е очевидно полуадитивна (вж. § 16 и § 18). Ние ще покажем, че тя е неположителна около всяка точка на равнината (относно терминологията вж. § 15). И наистина нека точката P е външна за всяко едно от множествата A, B и C. В такъв случай около P може да се избере околност U, която няма общи точки с никое от множествата A, B и C. В такъв случай, ако $\Delta \subset U$, то сеченията ΔA, ΔB и ΔC са празни, поради което

$$\nu(\Delta A) = \nu(\Delta B) = \nu(\Delta C) = 0$$

и следователно $\theta(\Delta) \le 0$, както това се вижда от (3).

Остава да разгледаме случая, когато P не е външна поне за едно от множествата A, B и C. Нека например P не е външна за A (случаите, когато P не е външна за B или за C, се разглеждат по същия начин). В такъв случай P е или вътрешна, или контурна за A.

Да разгледаме случая, когато P е вътрешна за A. В такъв случай около P може да се избере околност U, която се съдържа в A и следователно няма

[1] Относно дефиницията на σ вж. § 18.

общи точки нито с B, нито с C (тук ние използуваме обстоятелството, че сечението на всеки две от множествата A, B и C е празно). В такъв случай, ако $\Delta \subset U$, ще имаме $\Delta A = \Delta$, $\Delta B = \emptyset$ и $\Delta C = \emptyset$ и следователно $\theta(\Delta) \leq 0$, както това се вижда от (3).

Остана да разгледаме случая, когато P е контурна за A. Но в такъв случай тя ще лежи поне в един от кръговете $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Нека C_k е такъв кръг, който съдържа P. Тъй като кръгът C_k е отворен, ние можем да изберем околност U около P, която да лежи в C_k. В такъв случай, ако $\Delta \subset U$, ще имаме

$$\varphi(x, y)\psi_k(x, y) = \varphi(x, y)$$

и следователно[1]

$$\lambda(\Delta) \geq 3\sigma \underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_c^d} \varphi(x, y)\psi_k(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = 3\sigma \underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_c^d} \varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = 3\nu(\Delta).$$

По такъв начин ние и в този случай получаваме $\theta(\Delta) \leq 0$, както се вижда от (3).

И така полуадитивната функция $\theta(\Delta)$ е неположителна около всяка точка на равнината. Това ни дава възможност да приложим основната теорема на интегралното смятане от § 15. По такъв начин ние можем да твърдим, че $\theta(\Delta) \leq 0$ при всеки избор на полузатворения правоъгълник Δ. Специално при $\Delta = D$ получаваме

$$\nu(A) + \nu(B) + \nu(C) - \nu(D) - \lambda(D) \leq 0. \tag{5}$$

От друга страна,

$$\varphi(x, y)\psi_k(x, y) \leq \psi_k(x, y)$$

и следователно съгласно § 16 имаме

$$\lambda(D) \leq 3\sigma \sum_{k=1}^{n} \underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_c^d} \psi_k(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = 3\sigma \sum_{k=1}^{n} \pi r_k^2 < 3\sigma\pi\varepsilon,$$

защото правоъгълникът (4) съдържа кръговете $C_1, C_2, \ldots, C_n$. По такъв начин получаваме от (5)

$$\nu(A) + \nu(B) + \nu(C) \leq \nu(D) + 3\sigma\pi\varepsilon$$

или след граничния преход $\varepsilon \to 0$

$$\nu(A) + \nu(B) + \nu(C) \leq \nu(D),$$

[1] Вж. § 16 и § 18. Тук ние използуваме обстоятелството, че правоъгълникът (4) съдържа C_k, а следователно и Δ.

което заедно с

$$\nu(A) + \nu(B) + \nu(C) \geq \nu(D)$$

ни дава (2).

Теорема 1. *Ако A и B са измерими множества без обща точка, то*

$$\nu(A + B) = \nu(A) + \nu(B). \tag{6}$$

Доказателство. Избираме полузатворен квадрат D, който да съдържа както A, така и B. Това може да се направи, защото множествата A и B са ограничени. Да положим

$$C = D - (A + B).$$

В такъв случай

$$A + B + C = D.$$

Множеството C очевидно е измеримо и сечението на всеки две от множествата A, B и C е празно. По такъв начин съгласно лема 1 имаме

$$\nu(A) + \nu(B) + \nu(C) = \nu(D).$$

От друга страна, имаме очевидно

$$(A + B) + C + \emptyset = D,$$

където $\emptyset$ е празното множество. В такъв случай пак съгласно лема 1 имаме

$$\nu(A + B) + \nu(C) + \nu(\emptyset) = \nu(D)$$

и следователно

$$\nu(A + B) = \nu(A) + \nu(B),$$

защото $\nu(\emptyset) = 0$.

Забележка. Равенството (6) е получено при предположение, че $AB = \emptyset$. Не е трудно обаче да се покаже валидността на по-общото равенство

$$\nu(A + B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(AB)$$

при единственото предположение, че множествата A и B са *измерими* без оглед на това, дали те имат общи точки или не. И наистина, като вземем пред вид лесно доказуемите равенства

$$A + B = A + \overline{A}B,$$
$$\overline{A}B + AB = B$$

и се възползуваме от обстоятелството, че както множествата A и $\overline{A}B$, така и множествата $\overline{A}B$ и AB нямат общи точки помежду си, получаваме

$$\nu(A + B) = \nu(A) + \nu(\overline{A}B),$$
$$\nu(\overline{A}B) + \nu(AB) = \nu(B)$$

и следователно

$$\nu(A + B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(AB).$$

Така полученият резултат ни учи, че равенството

$$\nu(A + B) = \nu(A) + \nu(B)$$

е валидно[1] и тогава, когато $\nu(AB) = 0$, макар сечението AB да не е празно. Така например, ако множествата A и B нямат общи вътрешни точки, то сечението им има мярка нула, защото множествата A и B (по предположение) са измерими и следователно контурите им имат мярка нула.

Теорема 2. *Ако C е отворен кръг с радиус r, то*

$$\nu(C) = r^2.$$

Доказателство. Покриваме C по произволен начин със система от отворени кръгове $C_1, C_2, \dots, C_n$. Нека радиусите им са $r_1, r_2, \dots, r_n$. Означаваме с $\varphi(x, y)$ характеристичната функция на C, а с $\varphi_k(x, y)$ характеристичната функция на C_k. В такъв случай

$$\varphi(x, y) \le \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x, y)$$

и следователно

$$\overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_c^d} \varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n} \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_c^d} \varphi_k(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x, \tag{7}$$

където $a < b$, $c < d$. Да изберем правоъгълника, определен от неравенствата

$$a \le x \le b,$$
$$c \le y \le d$$

[1] Нека припомним, че множествата A и B са измерими.

по такъв начин, че да съдържа всичките кръгове $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$. В такъв случай неравенството (7) съгласно § 16 ще приема вида

$$\pi r^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \pi r_k^2$$

или

$$r^2 \leq \sum_{k=1}^{n} r_k^2.$$

И така ние виждаме, че числото r^2 е една долна граница на всевъзможните суми $r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2$. Като вземем под внимание, че $\nu(C)$ е точната, т. е. най-голямата от такива долни граници, получаваме $r^2 \leq \nu(C)$. От друга страна, системата, съставена от единствения кръг C, покрива C и следователно съгласно дефиницията на $\nu(C)$ имаме $\nu(C) \leq r^2$, т. е. окончателно

$$\nu(C) = r^2.$$

Лема 2. *Нека A е измеримо множество и $\varphi(x, y)$ е неговата характеристична функция. Ако правоъгълникът, определен от неравенствата*

$$a \leq x \leq b,$$
$$c \leq y \leq d,$$

съдържа A, то[1]

$$\nu(A) = \sigma \underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_c^d} \varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \sigma \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_c^d} \varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x. \tag{8}$$

Доказателство. Избираме едно положително число ε и покриваме контура на A със система от краен брой отворени кръгове

$$C_1, C_2, \ldots, C_n$$

по такъв начин, че сумата от квадратите на техните радиуси да бъде по-малка от ε.

Нека Δ е произволен полузатворен правоъгълник и $\psi(x, y)$ е неговата характеристична функция. Да разгледаме двете полуадитивни функции

$$\Theta_1(\Delta) = \nu(\Delta A) - \sigma \underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_c^d} \psi(x, y)\varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \nu(\Delta C_k)$$

и

$$\Theta_2(\Delta) = \sigma \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_c^d} \psi(x, y)\varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x - \nu(\Delta A) - \sum_{k=1}^{n} \nu(\Delta C_k).$$

[1] Относно дефиницията на σ вж. § 18.

Полуадативността на тези функции следва от теорема 1 на този параграф и от § 16.

Тези две функции са неположителни около всяка точка P на равнината (относно смисъла на тези думи вж. § 15). Читателят сам може да се убеди в това, като разгледа отделно случаите, когато точката P е външна, вътрешна и контурна за A. Това ни дава право да заключим с помощта на основната теорема на интегралното смятане в равнината от § 15, че $\Theta_1(\Delta) \leq 0$, $\Theta_2(\Delta) \leq 0$ при всеки избор на полузатворения правоъгълник Δ. По такъв начин, ако изберем Δ така, че да съдържа $A + C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, ще получим

$$\nu(A) - \sigma \underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_c^d} \varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \nu(C_k) \leq 0, \tag{9}$$

$$\sigma \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_c^d} \varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x - \nu(A) - \sum_{k=1}^{n} \nu(C_k) \leq 0. \tag{10}$$

От друга страна, ако означим с r_k радиуса на C_k, ще имаме $\nu(C_k) = r_k^2$ и следователно

$$\sum_{k=1}^{n} \nu(C_k) - \sum_{k=1}^{n} r_k^2 < \varepsilon.$$

По такъв начин получаваме от неравенствата (9) и (10)

$$\nu(A) \leq \sigma \underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_c^d} \varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x + \varepsilon,$$

$$\sigma \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_c^d} \varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x - \varepsilon \leq \nu(A),$$

което след граничния преход $\varepsilon \to 0$ ни дава

$$\sigma \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_c^d} \varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \leq \nu(A) \leq \sigma \underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_c^d} \varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

От друга страна, очевидно

$$\sigma \underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_c^d} \varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \leq \sigma \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_c^d} \varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

и така получаваме окончателно (8).

Теорема 3. *Числото σ, което е дефинирано в § 18, има стойност $\frac{1}{\pi}$.*

Доказателство. Нека C е кръг с радиус r и нека $\varphi(x, y)$ е неговата характеристична функция. В такъв случай съгласно лема 2 и съгласно § 16 имаме

$$\nu(C) = \sigma \underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_c^d} \varphi(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \sigma \pi r^2,$$

стига правоъгълникът $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ да съдържа C. От друга страна, теорема 2 ни учи, че $\nu(C) = r^2$, т. е. $\sigma\pi = 1$.

Дефиниция. *Нека A е ограничено точково множество в равнината. Числото $\pi\nu(A)$ ще наричаме горна Пеано—Жорданова мярка на A и ще го означаваме със символа $\mu(A)$. Специално, ако множеството A е измеримо, ние ще наричаме това число накратко мярка или лице.*

От равенството

$$\mu(A) = \pi\nu(A)$$

се вижда, че е в сила следното.

1. Ако A е ограничено множество, то

$$\mu(A) \geq 0.$$

2. Нека A и B са две ограничени множества и $A \subset B$. В такъв случай $\mu(A) \leq \mu(B)$.

3. Ако A и B са две ограничени множества, то

$$\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

4. Нека A е ограничено множество и τ е подобие с модула a. Нека A' е образ на A при τ. В такъв случай

$$\mu(A') = a^2\mu(A).$$

   Специално, ако τ е еднаквост, то $\mu(A') = \mu(A)$.

5. Ако A и B са две *измерими* множества, то

$$\mu(A + B) + \mu(AB) = \mu(A) + \mu(B).$$

   Специално, ако $\mu(AB) = 0$, то

$$\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B).$$

6. Ако Δ е квадрат със страна 1, то

$$\mu(\Delta) = 1.$$

Читателят сам лесно ще докаже тези свойства. По-специално пресмятането на лицето на квадрата се извършва с помощта на формула (8).

§ 20. Преобразуване на измерими множества

Нека A и B са две непразни множества в равнината. Да изберем точка P от A и точка Q от B. Дължината на отсечката PQ зависи от избора на точките P и Q. Точната долна граница на тези дължини ще наричаме разстояние между множествата A и B и ще го означаваме със символа $d(A, B)$. По-специално, ако едното от множествата, например B, съдържа само една точка S, вместо $d(A, B)$ ще пишем често пъти $d(A, S)$ и ще го наричаме разстояние от точката S до множеството A. С аналогични означения ще се ползуваме и тогава, когато двете множества A и B съдържат само по една точка.

Лема 1. *Нека R е отворено точково множество в равнината и нека A е затворено и ограничено непразно подмножество на R. В такъв случай може да се избере такова положително число δ, че всяка точка, чието разстояние до A е по-малко от δ, да се съдържа в R.*

Доказателство. Да допуснем противното. Това значи, че не съществува положително число δ с исканото свойство. По-специално, ако изберем $\delta = \dfrac{1}{n}$, ще може да се намери точка P_n, която не принадлежи на R и за която имаме

$$d(A; P_n) < \frac{1}{n}.$$

Това от своя страна означава, че съществува точка Q_n от A, за която

$$d(Q_n, P_n) < \frac{1}{n}.$$

Да разгледаме редицата

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$$

Членовете ѝ принадлежат на ограниченото множество A и следователно ние можем да изберем сходяща подредица

$$Q_{m_1}, Q_{m_2}, \ldots, Q_{m_n}, \ldots$$
$$m_1 < m_2 < \cdots < m_n < \cdots$$

Множеството A обаче е затворено, поради което границата Q_0 на избраната подредица принадлежи на A. От друга страна,

$$d(Q_0, P_{m_n}) \leq d(Q_0, Q_{m_n}) + d(Q_{m_n}, P_{m_n}) \leq d(Q_0, Q_{m_n}) + \frac{1}{m_n}$$

и следователно редицата

$$P_{m_1}, P_{m_2}, \ldots, P_{m_n}, \ldots$$

клони към Q_0.

Точката Q_0 обаче принадлежи на A и следователно принадлежи на R. Да изберем околност на Q_0, която се съдържа в R. Това може да се направи, защото множеството R е отворено и следователно Q_0 е негова вътрешна точка. Тази околност ще съдържа точките P_{m_n}, когато n е достатъчно голямо, защото $P_{m_n} \to Q_0$. Това обаче не е възможно, защото никоя от точките P_n не принадлежи на R. По такъв начин ние достигнахме до противоречие, с което доказателството е завършено.

Лема 2. *Нека A е едно ограничено точково множество в равнината и δ е едно неотрицателно число. Множеството B от точките P на равнината, за които е изпълнено условието*

$$d(A, P) \leq \delta,$$

е ограничено и затворено

Доказателство. Ще покажем първо, че множеството B е ограничено. Нека O е началото на координатната система. Избираме кръг с център в O и радиус r, който съдържа всичките точки на A. Това може да се направи, защото множеството A е ограничено. Нека P е произволна точка от B. Това значи, че

$$d(A, P) \leq \delta$$

и следователно може да се избере точка Q от A, за която

$$d(Q, P) < \delta + 1.$$

В такъв случай

$$d(O, P) \leq d(O, Q) + d(Q, P) \leq r + \delta + 1,$$

с което е установено, че множеството B е ограничено.

Ще покажем сега, че множеството B е затворено. Нека P_0 е контурна точка на B и нека U_n е кръгова околност на P_0 с радиус $\frac{1}{n}$. В такъв случай в U_n ще има поне една точка P_n от B, т. е.

$$d(A, P_n) \leq \delta.$$

Числото $d(A, P_n)$ е точната (т. е. най-голямата) долна граница на множеството M от числата $d(Q, P_n)$, които получаваме, когато Q описва A. Числото

$$d(A, P_n) + \frac{1}{n}$$

е по-голямо от $d(A, P_n)$ и следователно не е долна граница на M. Това ни дава възможност да твърдим, че има точка Q_n от A, за която

$$d(Q_n, P_n) < d(A, P_n) + \frac{1}{n} \leq \delta + \frac{1}{n}.$$

От друга страна

$$d(A, P_0) \leq d(Q_n, P_0) \leq d(Q_n, P_n) + d(P_n, P_0) \leq \delta + \frac{1}{n} + \frac{1}{n},$$

т. е.

$$d(A, P_0) \leq \delta + \frac{2}{n},$$

откъдето след граничния преход $n \to \infty$ получаваме

$$d(A, P_0) \leq \delta,$$

което ни учи, че точката P_0 принадлежи на B. От тези разсъждения се вижда, че множеството B съдържа всичките си контурни точки и следователно е затворено. С това доказателството е завършено.

Лема 3. *Нека C е отворен кръг с радиус r и нека функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са дефинирани в C и притежават непрекъснати първи частни производни. Нека освен това в C са изпълнени неравенствата*

$$|f'_u(u, v)| \leq M, \qquad |f'_v(u, v)| \leq M,$$
$$|g'_u(u, v)| \leq M, \qquad |g'_v(u, v)| \leq M,$$

където M е константа. В такъв случай диаметърът на образа C' на C при трансформацията

$$x = f(u, v),$$
$$y = g(u, v)$$

не надминава $4Mr\sqrt{2}$.

Доказателство. Нека (x_1, y_1) и (x_2, y_2) са две точки от C'. Това значи, че съществуват две точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) от C, за които имаме

$$x_1 = f(u_1, v_1), \qquad x_2 = f(u_2, v_2),$$
$$y_1 = g(u_1, v_1), \qquad y_2 = g(u_2, v_2).$$

Според теоремата за крайните нараствания имаме

$$x_2 - x_1 = f(u_2, v_2) - f(u_1, v_1) = (u_2 - u_1)f'_u(u', v') + (v_2 - v_1)f'_v(u', v'),$$

$$y_2 - y_1 = g(u_2, v_2) - g(u_1, v_1) = (u_2 - u_1)g'_u(u'', v'') + (v_2 - v_1)g'_v(u'', v''),$$

където точките (u', v') и (u'', v'') са избрани по подходящ начин върху отсечката $[(u_1, v_1), (u_2, v_2)]$. По такъв начин получаваме

$$|x_2 - x_1| \leq M[|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \leq 4Mr,$$
$$|y_2 - y_1| \leq M[|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \leq 4Mr$$

и следователно
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \leq 4Mr\sqrt{2}.$$

Точките (x_1, y_1) и (x_2, y_2) обаче са избрани произволно в C' и следователно диаметърът на C' не надминава $4Mr\sqrt{2}$. С това доказателството е завършено.

Лема 4. *Нека функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са дефинирани и притежават непрекъснати първи частни производни в някое отворено множество G в равнината. Ще покажем, че образът A' на всяко затворено и ограничено подмножество A на G с мярка нула при трансформацията*

$$x = f(u, v),$$
$$y = x(u, v)$$

е също множество с мярка нула.

Доказателство. Избираме положително число η по такъв начин, че точките, чието разстояние до A е по малко от η, да се намират в G. Това може да се направи въз основа на лема 1, защото множеството G е отворено, а множеството A е ограничено и затворено. След това означаваме с δ произволно положително число, строго по-малко от η, и разглеждаме множеството B от точките P на равнината, за които

$$d(A, P) \leq \delta.$$

Съгласно лема 2 това множество е ограничено и затворено. Освен това то се съдържа изцяло в G, защото $\delta < \eta$.

След направения избор на δ избираме положително число ε, по-малко от $\frac{\delta^2}{4}$, и покриваме A със система от краен брой отворени кръгове

$$C_1, C_2, \ldots, C_n,$$

за които сумата от квадратите на радиусите е по-малка от ε. Това може да се направи, защото A е множество с мярка нула. Очевидно ние можем да предполагаме, че всеки един от кръговете $C_1, C_2, \ldots, C_n$ има обща точка с A, защото, ако това не е изпълнено, достатъчно е да премахнем онези кръгове, които нямат обща точка с A, за да получим нова система от покриващи кръгове, за която сумата от квадратите на радиусите е още по-малка и която притежава исканото свойство. Тези кръгове се съдържат изцяло в B, защото радиусите им са по-малки от $\sqrt{\varepsilon} < \dfrac{\delta}{2}$ и следователно разстоянието от коя да е точка от тях до A е по-малко от δ.

Множеството B обаче е ограничено и затворено, а производните f'_u, f'_v, g'_u, g'_v са непрекъснати. Това ни дава възможност да твърдим, че тези производни са ограничени. Да означим с M една обща горна граница на техните модули в B. В такъв случай диаметърът на образа C'_ν на C_ν при разглежданата трансформация съгласно лема 3 няма да надминава $4Mr_\nu\sqrt{2}$, където r_ν е радиусът на C_ν. Да построим отворен кръг D_ν, чийто център е коя да е точка на C'_ν и чийто радиус е $16Mr_\nu$. Този кръг съдържа всичките точки на C'_ν. По такъв начин ние получаваме система от отворени кръгове $D_1, D_2, \ldots, D_n$, която покрива A' и за която сумата от квадратите на радиусите е равна на

$$\sum_{\nu=1}^{n} 256M^2 r_\nu^2$$

и следователно не надминава $256M^2\varepsilon$. Като вземем под внимание, че положителното число ε е произволно, а M не зависи от ε, заключаваме, че A' има мярка нула. С това доказателството е завършено.

Преминаваме към изследване на някои свойства на регулярните трансформации.

Нека

$$x = f(u, v),\quad y = g(u, v) \tag{1}$$

е регулярна трансформация на някое отворено точково множество G в равнината.

Лема 5. *Ако трансформацията* (1) *е регулярна и множеството A е измеримо и лежи в G заедно с контура си, то образът му е също тъй измеримо множество.*

Доказателство. И наистина контурът на всяко множество е затворено множество. По такъв начин ние имаме в G ограничено и затворено множество $K(A)$, чиято мярка е нула. Въз основа на това, което доказахме, можем да твърдим, че мярката на образа му $[K(A)]'$ е нула. От друга страна, A лежи в G заедно с контура си и следователно контурът на образа A' съвпада с множеството $[K(A)]'$, т. е. има мярка нула. По такъв начин, за да се убедим, че множеството A' е измеримо, достатъчно е да покажем, че то е ограничено, нещо, което може да се види, като вземем под внимание, че множеството $A + K(A)$ е ограничено и затворено подмножество на G и следователно образът му

$$[A + K(A)]' = A' + [K(A)]'$$

е ограничено (и затворено) множество. Това е достатъчно, за да можем да твърдим, че множеството A' е също така ограничено. С това доказателството е завършено.

Досега ние предполагахме, че трансформацията (1) е еднократно регулярна в G. От този момент ще предполагаме, че тя е двойно регулярна в G.

Ще докажем следната лема, която ще играе важна роля в по-нататъшните разсъждения.

Нека (u_0, v_0) *е една точка от* G *и нека* Δ *е един (отворен) квадрат със страни, успоредни на съответните координатни оси с център в точката* (u_0, v_0)*, разположен заедно с контура си изцяло в* G*. Да означим с* Δ' *образа на* Δ*. Ние ще докажем следната лема: ако* D *е едно число, по голямо*[1] *от* 1*, то всеки път, когато квадратът* Δ *е достатъчно малък и вторите частни производни остават ограничени, е изпълнено неравенството*[2]

$$\mu(\Delta') \leq D \left\| \begin{matrix} f'_u(u_0, v_0) & f'_v(u_0, v_0) \\ g'_u(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0) \end{matrix} \right\| \mu(\Delta).$$

Колко малък трябва да бъде квадратът Δ*, зависи от трансформацията* (1) *и от избора на числото* D*, обаче не зависи от положението на точката* (u_0, v_0)*, стига квадратът* Δ *да остава в едно фиксирано ограничено и затворено подмножество на* G*.*

Доказателство. Нека

$$\begin{aligned} u &= F(x, y), \\ v &= G(x, y) \end{aligned} \tag{2}$$

[1] Тук се иска да имаме $D > 1$, т. е. равенството $D = 1$ се изключва.

[2] Символът

$$\left\| \begin{matrix} f'_u(u_0, v_0) & f'_v(u_0, v_0) \\ g'_u(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0) \end{matrix} \right\|$$

означава абсолютната стойност на детерминантата

$$\begin{vmatrix} f'_u(u_0, v_0) & f'_v(u_0, v_0) \\ g'_u(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}.$$

е трансформация, обратна на трансформацията (1). Полагаме за краткост

$$\begin{aligned} x_0 &= f(u_0, v_0), & y_0 &= g(u_0, v_0), \\ a_{11} &= f'_u(u_0, v_0), & a_{12} &= f'_v(u_0, v_0), \\ a_{21} &= g'_u(u_0, v_0), & a_{22} &= g'_v(u_0, v_0), \\ A_{11} &= F'_x(x_0, y_0), & A_{21} &= F'_y(x_0, y_0), \\ A_{12} &= G'_x(x_0, y_0), & A_{22} &= G'_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

В такъв случай, като вземем пред вид, че функциите (1) удовлетворяват уравненията (2), получаваме с помощта на теоремата за диференциране на съставни функции следните равенства:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} &= 1, \\ a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} &= 0, \\ a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} &= 0, \\ a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} &= 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Така например първото от тези равенства се получава, като диференцираме спрямо u равенство

$$u = F(x, y), \tag{4}$$

където

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v).$$

Второто от равенствата (3) се получава, като диференцираме равенството (4) спрямо v и пр.

Разглеждаме помощната линейна трансформация[1]

$$\begin{aligned} x - x_0 &= [a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0)]\sqrt{D}, \\ y - y_0 &= [a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0)]\sqrt{D}. \end{aligned} \tag{5}$$

Тази трансформация преобразува квадрата Δ (както това читателят знае от аналитичната геометрия) в някой успоредник Δ''.

[1]Касае се тук за една афинна трансформация. Читателят е изучавал свойствата на такива трансформации в аналитичната геометрия. В случая разглежданата от нас трансформация не е изродена, защото

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_u(u_0, v_0) & f'_v(u_0, v_0) \\ g'_u(u_0, v_0) & g'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ако решим системите (5) относно $u - u_0$ и $v - v_0$, ще получим[1]

$$u - u_0 = [A_{11}(x - x_0) + A_{21}(y - y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}},$$
$$v - v_0 = [A_{12}(x - x_0) + A_{22}(y - y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Да означим с $2d$ страната на квадрата Δ. Една точка с координати (u, v) принадлежи на Δ тогава и само тогава,когато са изпълнени неравенствата

$$|u - u_0| < d, \quad |v - v_0| < d.$$

Оттук заключаваме, че една точка с координати (x, y) принадлежи[2] на Δ'' тогава и само тогава, когато

$$|A_{11}(x - x_0) + A_{21}(y - y_0)| < d\sqrt{D},$$
$$|A_{12}(x - x_0) + A_{22}(y - y_0)| < d\sqrt{D}.$$

Ние ще докажем, че множеството Δ' лежи изцяло в Δ'', когато d е достатъчно малко. За тази цел е достатъчно да покажем, че всичките точки с координати

$$[f(u, v), g(u, v)]$$

лежат в Δ'', когато $|u - u_0| < d$ и $|v - v_0| < d$. Ние ще направим това, като покажем, че са изпълнени неравенствата

$$|A_{11}[f(u, v) - x_0] + A_{21}[g(u, v) - y_0]| < d\sqrt{D}, \tag{6}$$

---

[1] Ако умножим двете страни на равенствата (5) съответно с A_{11} и A_{21}, съберем ги и вземем пред вид зависимостите (3), ще получим

$$u - u_0 = [A_{11}(x - x_0) + A_{21}(y - y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}};$$

аналогично се получава и равенството

$$v - v_0 = [A_{12}(x - x_0) + A_{22}(y - y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}}.$$

[2] Нека припомним, че една точка (x, y) принадлежи на Δ'' тогава и само тогава, когато точката (u, v), където

$$u - u_0 = [A_{11}(x - x_0) + A_{21}(y - y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}},$$
$$v - v_0 = [A_{12}(x - x_0) + A_{22}(y - y_0)]\frac{1}{\sqrt{D}}$$

принадлежи на Δ.

$$|A_{12}[f(u,v)-x_0]+A_{22}[g(u,v)-y_0]|<d\sqrt{D}. \tag{7}$$

Формулата на Тейлор ни дава

$$\begin{aligned} f(u,v) &= f(u_0,v_0)+f'_u(u_0,v_0)(u-u_0)+f'_v(u_0,v_0)(v-v_0)\\ &\quad+\frac{1}{2}[f''_{uu}(u',v')(u-u_0)^2+2f''_{uv}(u',v')(u-u_0)(v-v_0)\\ &\quad+f''_{vv}(u',v')(v-v_0)^2], \end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned} g(u,v) &= g(u_0,v_0)+g'_u(u_0,v_0)(u-u_0)+g'_v(u_0,v_0)(v-v_0)\\ &\quad+\frac{1}{2}[g''_{uu}(u'',v'')(u-u_0)^2+2g''_{uv}(u'',v'')(u-u_0)(v-v_0)\\ &\quad+g''_{vv}(u'',v'')(v-v_0)^2], \end{aligned}\tag{9}$$

където (u',v') и (u'',v'') са точки, подходящо избрани върху отсечката $[(u,v),(u_0,v_0)]$. Равенствата (8) и (9) могат да се напишат по-кратко така:

$$f(u,v)=x_0+a_{11}(u-u_0)+a_{12}(v-v_0)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 f(u',v'),$$

$$g(u,v)=y_0+a_{21}(u-u_0)+a_{22}(v-v_0)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 f(u'',v'').$$

Като заместим оттук $f(u,v)$ и $g(u,v)$ в (6) и (7) и вземем пред вид зависимостите (3), ще получим

$$\begin{aligned} &\Bigg|u-u_0+\frac{A_{11}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 f(u',v')\\ &\qquad+\frac{A_{21}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 g(u'',v'')\Bigg|<a\sqrt{D}, \end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\Bigg|v-v_0+\frac{A_{12}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 f(u',v')\\ &\qquad+\frac{A_{22}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 g(u'',v'')\Bigg|<d\sqrt{D}. \end{aligned}\tag{11}$$

Да означим с K една горна граница на абсолютната стойност на производните f''_{uu}, f''_{uv}, f''_{vv}. В такъв случай получаваме

$$\left|u-u_0+\frac{A_{11}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 f(u',v')\right.$$

$$+\frac{A_{21}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 g(u'',v'')\Bigg|$$

$$\leq |u-u_0| + \left|\frac{A_{11}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 f(u',v')\right|$$

$$+\left|\frac{A_{21}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 g(u'',v'')\right|$$

$$< d + \frac{|A_{11}|+|A_{21}|}{2}\cdot 4Kd^2 = d + 2K[|A_{11}|+|A_{21}|]d^2$$

и аналогично

$$\Bigg|v-v_0+\frac{A_{12}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 f(u',v')$$

$$+\frac{A_{22}}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u-u_0)+\frac{\partial}{\partial v}(v-v_0)\right]^2 g(u'',v'')\Bigg| < d + 2K[|A_{12}|+|A_{22}|]d^2.$$

Оттук заключаваме, че неравенствата (10) и (11) сигурно ще бъдат изпълнени, ако

$$1 + 2K[|A_{11}|+|A_{21}|]d < \sqrt{D},$$
$$1 + 2K[|A_{12}|+|A_{22}|]d < \sqrt{D}.$$

Последните неравенства обаче наистина са изпълнени, ако d е достатъчно малко, защото $D > 1$.

По този начин ние доказахме, че при всички достатъчно малки стойности на d имаме

$$\Delta' \subset \Delta''$$

и следователно

$$\mu(\Delta') \leq \mu(\Delta''). \tag{12}$$

Читателят знае от аналитичната геометрия, че лицето на триъгълника с върхове (ξ_1,η_1), (ξ_2,η_2), (ξ_3,η_3) е равно на абсолютната стойност на детерминантата

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_1 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix},$$

която може да се преобразува още по следния начин:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1 & 1\\ \xi_2 & \eta_2 & 1\\ \xi_3 & \eta_3 & 1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\xi_1-\xi_3 & \eta_1-\eta_3 & 0\\ \xi_2-\xi_3 & \eta_2-\eta_3 & 0\\ \xi_3 & \eta_3 & 1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\xi_1-\xi_3 & \eta_1-\eta_3\\ \xi_2-\xi_3 & \eta_2-\eta_3\end{vmatrix}.$$

Ние можем да използуваме това, за да пресметнем лицето на успоредника Δ'', върховете[1] на който имат следните координати:

$$(a_{11}d\sqrt{D} - a_{12}d\sqrt{D}, a_{21}d\sqrt{D} - a_{22}d\sqrt{D},); \tag{13}$$

$$(-a_{11}d\sqrt{D} + a_{12}d\sqrt{D}, -a_{21}d\sqrt{D} + a_{22}d\sqrt{D},); \tag{14}$$

$$(-a_{11}d\sqrt{D} - a_{12}d\sqrt{D}, -a_{21}d\sqrt{D} - a_{22}d\sqrt{D},); \tag{15}$$

$$(a_{11}d\sqrt{D} + a_{12}d\sqrt{D}, a_{21}d\sqrt{D} - a_{22}d\sqrt{D}). \tag{16}$$

Оттук заключаваме, че лицето[2] на успоредника Δ'' има стойност

$$\left\|\begin{matrix}2a_{11}d\sqrt{D} & 2a_{21}d\sqrt{D}\\ 2a_{12}d\sqrt{D} & 2a_{22}d\sqrt{D}\end{matrix}\right\| = 4d^2D\left\|\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{matrix}\right\| = D\left\|\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{matrix}\right\|\mu(\Delta).$$

Този резултат ни дава възможност да представим неравенството (12) във вида

$$\mu(\Delta') \leq D\left\|\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{matrix}\right\|\mu(\Delta),$$

с което интересуващата ни лема е установена.

Ние ще използуваме доказаната лема, за да изведем следната теорема, която ще ни бъде необходима по-късно:

Ако (1) е една двойно регулярна трансформация, чиято функционална детерминанта удовлетворява неравенствата

$$m \leq \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| \leq M$$

[1]Тези върхове са образи съответно на точките

$$(u_0+d, v_0-d), \quad (u_0-d, v_0+d), \quad (u_0-d, v_0-d), \quad (u_0+d, v_0+d)$$

при трансформацията

$$x - x_0 = [a_{11}(u-u_0) + a_{12}(v-v_0)]\sqrt{D},$$
$$y - y_0 = [a_{21}(u-u_0) + a_{22}(v-v_0)]\sqrt{D}.$$

[2]Това лице е два пъти по-голямо от лицето на триъгълника, който е образуван например от точките (13), (14) и (15).

във всички точки на едно измеримо множество A, което лежи в G заедно с контура си[1], то са изпълнени неравенствата[2]

$$(17) \qquad m\mu(A) \leq \mu(A') \leq M\mu(A).$$

Доказателство. Достатъчно е да покажем валидността само на неравенството

$$\mu(A') \leq M\mu(A),$$

защото оттук ще следва вече валидността и на неравенството

$$m\mu(A) \leq \mu(A').$$

За да се убедим в това, разглеждаме обратната трансформация

$$u = F(x, y),$$
$$v = G(x, y)$$

на трансформацията (1). В такъв случай от лесно проверимото тъждество[3]

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1$$

получаваме

$$\left| \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \right| \leq \frac{1}{m}$$

и следователно

$$\mu(A) \leq \frac{1}{m}\mu(A')$$

или

$$m\mu(A) \leq \mu(A').$$

И така въпросът се свежда към доказателство на неравенството

$$\mu(A') \leq M\mu(A).$$

[1]Както казахме в началото на този параграф, с G е означено отвореното множество, в което са дефинирани функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$.

[2]Както винаги досега, в този параграф ние означаваме с A' образа на A. С $\mu(A)$ и $\mu(A')$ са означени съответните лица.

[3]Това тъждество може да се докаже така:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ние ще извършим това доказателство от противното. Да допуснем, че имаме

$$\mu(A') > M\mu(A).$$

Избираме едно число $D > 1$ толкова близо до 1, че да имаме все още

$$\mu(A') > DM\mu(A).$$

Покриваме контура на A' със сума R' от краен брой отворени квадрати, които лежат заедно с контура си в G' по такъв начин, че да имаме

$$\mu(R') + MD\mu(A) < \mu(A'). \tag{18}$$

Това може да се направи, защото множеството A' е измеримо и следователно контурът му има мярка нула.[1]

[1]Тук ние искаме всеки от покриващите квадрати да лежи в G' заедно с контура си. Това сигурно ще бъде изпълнено, ако покриващите квадрати са достатъчно малки и всеки един от тях съдържа поне една контурна точка на A', защото множеството G' е отворено и съдържа контура на A'. И наистина, ако допуснем противното, ще можем да изберем една редица от квадрати

$$C_1, C_2, C_3, \ldots,$$

размерите на които клонят към нула, като при това всеки един от тези квадрати съдържа поне една точка от контура на A' и поне една точка, която не принадлежи на G'. Тази редица от квадрати ни дава възможност да дефинираме точка, която е контурна за A' и не е вътрешна за G'. По този начин ние достигаме до исканото противоречие.

Накрая нека отбележим, че действително можем да покрием контура на A' със система от краен брой квадрати по такъв начин, че размерите на всеки един от покриващите квадрати да не надминава едно отнапред избрано положително число δ. За целта е достатъчно да изберем една каква да е система от покриващи квадрати $B_1, B_2, \ldots, B_p$, да разделим всеки един от тях на квадратчета със страни, по-малки от $\frac{\delta}{2}$ и да изхвърлим онези от тях, които нямат общи точки с контура на A'. Така получената система от квадратчета

$$D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$$

покрива целия контур на A', но може да се случи евентуално някоя от контурните точки на A' да не бъде вътрешна за някой от покриващите квадрати. За да имаме система от отворени квадрати, страните на които са по-малки от δ, която също тъй покрива контура на A', заменяме всеки един от покриващите квадрати D_ν с отворен квадрат R_ν, центърът на който съвпада с центъра на D_ν, а страните на който са успоредни на съответните страни на D_ν и два пъти по-големи от тях. При това можем да си осигурим сумата от лицата на квадратите R_ν да бъде произволно малка. И наистина, ако ε едно какво да е положително число, то избирайки квадратите $B_1, B_2, \ldots, B_p$ така, че да имаме

$$\sum_{\nu=1}^{p} \mu(B_\nu) < \frac{\varepsilon}{4},$$

Покриваме съвкупността A с квадрата Δ, страните на който са успоредни на съответните координатни оси, като към този квадрат причисляваме само онези контурни точки, които лежат върху най-долната му страна без десния ѝ край и най-лявата му страна без горния ѝ край. Делим квадрата Δ на четири равни части S_1, S_2, S_3, S_4 посредством средните линии, към които също тъй причисляваме само онези контурни точки, които лежат само върху най-долните им страни без десните им краища и най-левите им страни без горните им краища. По този начин ние си осигуряваме, че никои две от четвъртинките S_1, S_2, S_3, S_4 нямат общи точки, но сумата им представлява квадрата Δ. Из между тези четвъртинки има поне една, да я означим с Δ_1, за която е валидно неравенството

$$\mu[(R\Delta_1)'] + MD\mu(A\Delta_1) < \mu[(A\Delta_1)'],$$

където R е множеството, което се изобразява върху R' при трансформацията (1). И наистина, ако допуснем противното, получаваме

$$\begin{aligned}
\mu[(RS_1)'] + MD\mu(AS_1) &\geq \mu[(AS_1)'],\\
\mu[(RS_2)'] + MD\mu(AS_2) &\geq \mu[(AS_2)'],\\
\mu[(RS_3)'] + MD\mu(AS_3) &\geq \mu[(AS_3)'],\\
\mu[(RS_4)'] + MD\mu(AS_4) &\geq \mu[(AS_4)']
\end{aligned}$$

и като съберем тези неравенства, намираме

$$\mu(R') + MD\mu(A) \geq \mu(A'),$$

което противоречи на неравенството (18). Повтаряйки тези разсъждения, получаваме безкрайна редица от квадрати

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \cdots ,$$

страните на които клонят към нула и за които са изпълнени неравенствата

$$\mu[(R\Delta_n)'] + MD\mu(A\Delta_n) < \mu[(A\Delta_n)']. \tag{19}$$

получаваме

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mu(D_\nu) < \frac{\varepsilon}{4},$$

и следователно

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mu(R_\nu) < \varepsilon.$$

Както знаем, има една точка P, която лежи във вътрешността или по контура на всеки един от тези квадрати. Точката P не може да бъде външна за A, защото в противен случай сечението $A\Delta_n$ би било празно при всички достатъчно големи стойности на n и неравенството (19) би приело вида

$$\mu[(R\Delta_n)'] < 0,$$

което е абсурд. От друга страна, точката P не може да бъде контурна за A, защото в противен случай тя би била вътрешна[1] за R и сечението $R\Delta_n$ би се редуцирало на Δ_n при всички достатъчно големи стойности на n и в такъв случай неравенството (19) би приело вида

$$\mu(\Delta_n') + MD\mu(A\Delta_n) < \mu[(A\Delta_n)'],$$

което не е възможно, защото

$$(A\Delta_n)' \subset \Delta_n'$$

и следователно

$$\mu[(A\Delta_n)'] \leq \mu(\Delta_n').$$

От направените дотук разсъждения заключаваме, че точката P е непременно вътрешна за A. В такъв случай при достатъчно големи стойности на n сечението $A\Delta_n$ се редуцира на Δ_n и неравенството (19) приема вида

$$\mu[(R\Delta_n)'] + MD\mu(\Delta_n) < \mu(\Delta_n'),$$

откъдето следва

$$MD\mu(\Delta_n) < \mu(\Delta_n')$$

и толкова повече

$$D\left\|\begin{matrix} f_u'(u_0, v_0) & f_v'(u_0, v_0) \\ g_u'(u_0, v_0) & g_v'(u_0, v_0) \end{matrix}\right\| \mu(\Delta_n) < \mu(\Delta_n'), \tag{20}$$

където (u_0, v_0) са координати на центъра на Δ_n. Ние обаче знаем от лемата, която доказахме по-горе, че неравенството (20) е сигурно нарушено, когато размерите на квадрата Δ_n са достатъчно малки, защото вторите частни производни на $f(u, v)$ и $g(u, v)$ са ограничени поне в $A + K(A)$. Така достигнахме до исканото противоречие и завършихме доказателството на интересуващата ни теорема.

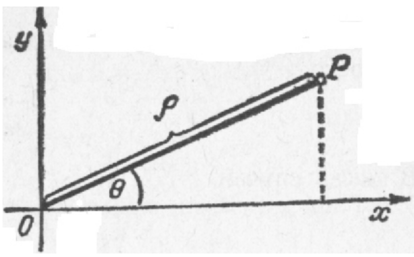
[1]Това множество е съставено само от вътрешни точки (т. е. отворено), защото множеството R' е съставено само от вътрешни точки.

§ 21. Полярни координати

Нека (x, y) са декартовите координати на една точка P. Числата ρ и θ, които са свързани с x и y посредством зависимостите[1]

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \rho \geq 0, \tag{1}$$

се наричат полярни координати на точката P. Геометричният смисъл на тези координати е прост: ρ представлява разстоянието на точката P до началото O на координатната система, а θ е така нареченият полярен ъгъл, т. е. кой да е от ъглите, на който трябва да се завърти положителната част на оста Ox, за да се слее с лъча OP (вж. черт. 8).



Черт. 8

Не е трудно да се убедим по чисто аналитичен път (т. е. без помощта на геометрични съображения), че системата (1) има наистина решение[2] при всеки избор на (x, y), като при това ρ е определено еднозначно, а полярният ъгъл θ е определен многозначно. Ние ще започнем с въпроса за единственост. Като повдигнем в квадрат и съберем почленно равенствата

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

получаваме

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

а като вземем пред вид още условието $\rho \geq 0$, намираме

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

[1] По-общо, ако ни са дадени две функции

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \tag{2}$$

то числата (u, v), които са свързани с (x, y) посредством равенството (2), се наричат криволинейни координати на точката, чиито декартови координати са (x, y). Равенствата (2) се наричат трансформачни формули, които свързват криволинейните координати (u, v) с декартовите координати (x, y).

[2] Т. е. че всяка точка има полярни координати.

При $x^2 + y^2 = 0$ можем да дадем на θ очевидно съвсем произволна стойност. При $x^2 + y^2 \neq 0$ имаме

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Като се възползуваме от този резултат и от условието $y = \rho\sin\theta$, ние ще покажем, че θ може да се представи във вида[1]

$$\theta = 2k\pi + \varepsilon \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{3}$$

където k е едно цяло число, а $\varepsilon = 1$ при $y \geq 0$ и $\varepsilon = -1$ при $y < 0$. И наистина не е трудно да се покаже, че има цяло число k (зависещо, разбира се, от θ), за което са изпълнени неравенствата

$$-\pi < \theta - 2k\pi \leq \pi$$

или, което е същото,

$$\frac{\theta - \pi}{2\pi} \leq k < \frac{\pi + \theta}{2\pi}.$$

За да се убедим в това, означаваме с k най-малкото цяло число, за което

$$\frac{\theta - \pi}{2\pi} \leq k.$$

В такъв случай

$$k - 1 < \frac{\theta - \pi}{2\pi}$$

или

$$k < \frac{\theta - \pi}{2\pi} + 1 = \frac{\theta + \pi}{2\pi}.$$

Полагаме

$$\alpha = |\theta - 2k\pi|.$$

Очевидно имаме

$$0 \leq \alpha \leq \pi,$$

$$\cos\alpha = \cos|\theta - 2k\pi| = \cos(\theta - 2k\pi) = \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

и следователно

$$\alpha = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

---

[1] При $y = 0$ това представяне не е еднозначно, защото в този случай ние бихме могли да вземем и $\varepsilon = -1$.

Оттук получаваме
$$|\theta - 2k\pi| = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
или още
$$\theta - 2k\pi = \varepsilon \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$
където $\varepsilon = \pm 1$, и най-сетне
$$\theta = 2k\pi + \varepsilon \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Като вземе пред вид уравнението $y = \rho \sin \theta$, намираме
$$\begin{aligned} y &= \varepsilon\rho \sin\left(\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \varepsilon\rho \sqrt{1 - \left[\cos\left(\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right]^2} \\ &= \varepsilon\rho \sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + y^2}} = \varepsilon|y|. \end{aligned}$$

Оттук заключаваме, че $\varepsilon = 1$, когато $y > 0$, и $\varepsilon = -1$, когато $y < 0$. При $y = 0$ имаме или
$$\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$
или
$$\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \pi$$
в зависимост от знака на x. От това заключаваме, че при $y = 0$ можем да изберем както $\varepsilon = 1$, така и $\varepsilon = -1$.

Сега вече не е трудно да се покаже, че всяка точка има полярни координати. И наистина при $x^2 + y^2 \neq 0$ числата
$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta &= 2k\pi + \varepsilon \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned} \tag{4}$$
където k е произволно цяло число, $\varepsilon = 1$ при $y \geq 0$ и $\varepsilon = -1$ при $y < 0$ са добре дефинирани, защото числото
$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

не надминава по абсолютна стойност единица и следователно принадлежи на дефиниционната област на функцията $\arccos u$. Със заместване се проверява непосредствено, че числата (4) удовлетворяват системата (1). За да получим едно решение при $x^2 + y^2 = 0$, избираме, както казахме по-горе, $\rho = 0$ и θ произволно.

Не е трудно да се покаже, че измежду полярните ъгли на една точка има (поне) един, който удовлетворява неравенствата

$$-\pi < \theta \leq \pi.$$

За да се убедим в това, достатъчно е в равенството (3) да изберем $k = 0$. Такъв полярен ъгъл има само един, когато $x^2+y^2 \neq 0$, защото равенството (3) ни учи, че в този случай разликата на два полярни ъгъла на една и съща точка представлява целочислено кратно на 2π.

Аналогично може да се покаже, че при $x^2 + y^2 \neq 0$ има един и само един полярен ъгъл, който удовлетворява неравенствата

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

и пр. Нека читателят сам си уясни геометричната страна на въпросите, които ние разгледахме сега.

Задачи

1. Да се покаже, че една различна от началото точка (x, y) лежи върху кривата (Γ) с уравнение

$$(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2) \tag{5}$$

тогава и само тогава, когато полярните ѝ координати удовлетворяват уравнението

$$\rho^2 = a\cos 2\theta. \tag{6}$$

Забележка. Уравнението (6) се нарича уравнение на кривата (Γ) в полярни координати. Това уравнение се получава от уравнението (5), като заместим x и y с равните им от трансформачните формули

$$x = \rho\cos\theta,$$
$$y = \rho\sin\theta.$$

2. Нека

$$x = x(t),$$
$$y = y(t)$$

са две диференцуеми функции на t с непрекъснати производни в интервала $a \leq t \leq b$, удовлетворяващи условието $x^2(t) + y^2(t) \neq 0$, и нека θ_0 е (кой да е) полярен ъгъл на точката $[x(a), y(a)]$. Покажете, че двете функции

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + \int_a^t \frac{x(u)y'(u) - y(u)x'(u)}{x^2(u) + y^2(u)}\,\mathrm{d}u, \\ \rho(t) &= \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \end{aligned} \tag{7}$$

удовлетворяват условията

$$
(8) \qquad \begin{aligned} x(t) &= \rho(t)\cos\theta(t),\\ y(t) &= \rho(t)\sin\theta(t),\\ \theta(a) &= \theta_0 \end{aligned}
$$

и няма други диференцуеми функции, които да удовлетворяват тези условия в същия интервал.

Упътване. За да установите единствеността, покажете, че

$$
\begin{aligned} x' &= \rho'\cos\theta - \rho\sin\theta\theta',\\ y' &= \rho'\sin\theta + \rho\cos\theta\theta' \end{aligned}
$$

и следователно

$$
\theta' = \frac{xy' - yx'}{\rho^2},
$$

където

$$
\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.
$$

За да покажете, че функциите (7) наистина удовлетворяват условията (8), образувайте помощните функции

$$
(9) \qquad \begin{aligned} u &= \cos\theta(t),\\ v &= \sin\theta(t), \end{aligned}
$$

$$
(10) \qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{x(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}},\\ \eta &= \frac{y(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} \end{aligned}
$$

и покажете, че

$$
\begin{aligned} u' &= -v\theta',\\ v' &= u\theta',\\ \xi' &= -\eta\theta',\\ \eta' &= \xi\theta'. \end{aligned}
$$

Използувайте този резултат, за да покажете, че двете функции

$$
\begin{aligned} f(t) &= u\xi + v\eta,\\ g(t) &= u\eta + v\xi \end{aligned}
$$

са константи, като покажете, че $f'(t) = g'(t) = 0$. За да пресметнете стойностите на тези константи, положете $t = a$. Това ще ви даде

$$
\begin{aligned} u\xi + v\eta &= 1,\\ u\eta - v\xi &= 0. \end{aligned}
$$

Като решите тази система относно u и v и вземете пред вид, че $\xi^2 + \eta^2 = 1$, ще получите $u = \xi$, $v = \eta$, откъдето вече лесно се доказва с помощта на равенствата (7), (9), (10), че

$$
\begin{aligned} x(t) &= \rho(t)\cos\theta(t),\\ y(t) &= \rho(t)\sin\theta(t),\\ \theta(a) &= \theta_0. \end{aligned}
$$

§ 22. Пресмятане на лица с помощта на определени интеграли

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и приема само неотрицателни стойности в него. Ние ще си поставим за задача да пресметнем лицето σ на частта G от равнината,[1] която е заградена от графиката на функцията $y = f(x)$ и от правите $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (виж черт. 9). По-точно G е множеството на точките (x, y), които удовлетворяват неравенствата

$$a \leq x \leq b,$$
$$0 \leq y \leq f(x).$$

За да пресметнем лицето σ, делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и означаваме с M_ν и m_ν съответно точната горна и точната долна граница на

[1] Нека читателят сам докаже, че множеството G е измеримо. За целта е достатъчно да се покаже, че то е ограничено и контурът му има мярка нула. Това не е трудно да се направи. Така например, за да покажем, че графиката на функцията $y = f(x)$ има мярка нула, бихме могли да постъпим по следния начин: избираме едно положително число ε и делим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

по такъв начин, че осцилацията на $f(x)$ във всеки един от тези подинтервали да бъде по-малка от ε; това, както знаем, може да се направи, защото функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$; означаваме с M_ν и m_ν съответно точната горна и точната долна граница на функцията $f(x)$ в подинтервала $[x_{\nu-1}, x_\nu]$; правоъгълниците

$$x_{\nu-1} \leq x \leq x_\nu,$$
$$m_\nu \leq y \leq M_\nu$$

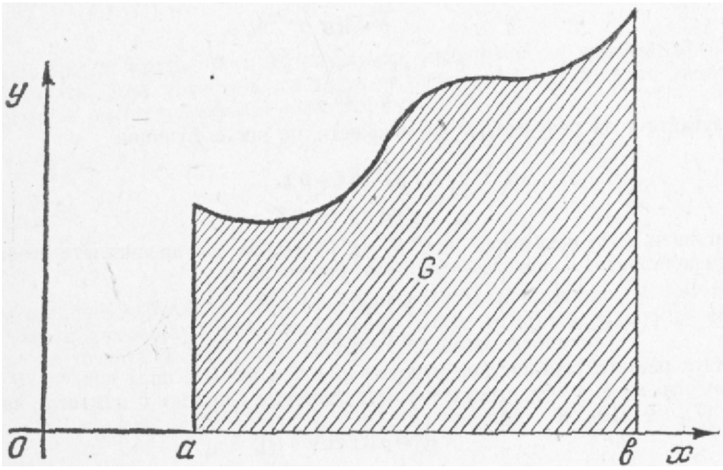
очевидно покриват цялата графика Γ на функцията $y = f(x)$ и следователно

$$\mu(\Gamma) \leq \sum_{\nu=1}^{n} (M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}), \tag{1}$$

където $\mu(\Gamma)$ означава горната мярка на Пеано—Жордан на графиката Γ на функцията $y = f(x)$. От неравенството (1) получаваме

$$\mu(\Gamma) \leq \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon(x_\nu - x_{\nu-1}) = \varepsilon(b - a).$$

Като вземем пред вид, че положителното число ε е произволно, а $\mu(\Gamma)$ е неотрицателно и не зависи от ε, получаваме $\mu(\Gamma) = 0$.



Черт. 9

$f(x)$ в подинтервала $[x_{\nu-1}, x_\nu]$. Да разгледаме съответната голяма и съответната малка сума на Дарбу

$$S = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}),$$

$$s = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Очевидно имаме

$$s \leq \sigma \leq S.$$

Неравенството

$$\sigma \leq S$$

ни учи, че лицето σ е една долна граница на множеството от големите суми S. Като вземем пред вид, че

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x$$

е точната, т. е. най-голямата долна граница на тези суми, получаваме

$$\sigma \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Аналогично намираме

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \sigma$$

или още

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \sigma \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

От друга страна, функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и следователно е интегруема в него, т. е.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Това ни дава основание да заключим, че

$$\sigma = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

или още

$$\sigma = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Пример. Да се намери лицето σ на елипсата

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ако означим с I лицето на половината от елипсата, която е разположена над оста x, имаме

$$\sigma = 2I$$

и следователно

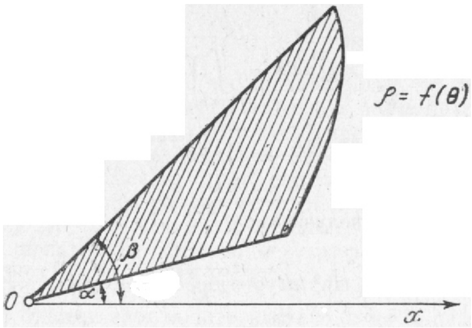
$$\sigma = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Полагаме $x = a\cos t$. Това ни дава

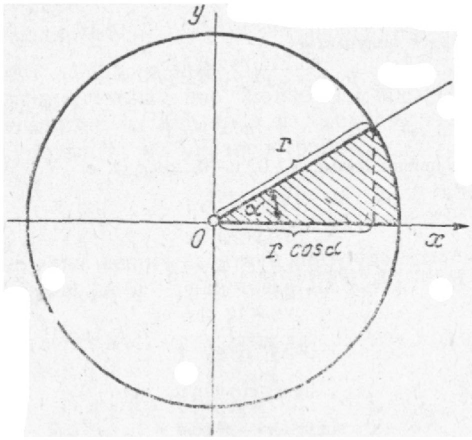
$$\sigma = 2ab\int_0^\pi \sin^2 t\,\mathrm{d}t = 2ab\int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = 2ab\left|\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right|_0^\pi = \pi ab.$$

В някои случаи е по-удобно да се търсят лицата, като си служим с полярните координати. Така с помощта на интеграли ние можем да намерим лицето на сектор, дефиниран с неравенствата

$$\alpha \le \theta \le \beta,$$
$$\rho \le f(\theta),$$



Черт. 10



Черт. 11

където ρ и θ са полярни координати, $f(\theta)$ е една непрекъсната и неотрицателна функция в затворения интервал $\alpha \leq \theta \leq \beta$, дължината на който не надминава 2π (вж. черт. 10).

Ще започнем с най-простия случай, когато имаме кръговия сектор

$$0 \leq \theta \leq \alpha,$$
$$\rho \leq r,$$

където $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ (вж. черт. 11).

В декартови координати този сектор може да се дефинира с помощта на неравенствата

$$0 \leq x \leq r,$$
$$0 \leq y \leq \varphi(x),$$

където[1]

$$\varphi(x) = x \operatorname{tg} \alpha$$

при $0 \leq x \leq r \cos \alpha$ и

$$\varphi(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

при $r \cos \alpha \leq x \leq r$. Това се вижда веднага геометрически[2] (вж. черт. 11). Този резултат ни позволява да пресметнем лицето σ на разглеждания сектор

[1]Или другояче $\varphi(x)$ е по-малкото от двете числа $x \operatorname{tg} \alpha$ и $\sqrt{r^2 - x^2}$.

[2]Но може, разбира се, да се установи чисто аналитично например по следния начин: от

по следния начин:

$$\sigma = \int_0^r \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{r\cos\alpha} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{r\cos\alpha}^r \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{r\cos\alpha} x\operatorname{tg}\alpha\,\mathrm{d}x + \int_{r\cos\alpha}^r \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha}{2} + \int_{r\cos\alpha}^r \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Полагайки $x = r\cos t$, получаваме

$$\sigma = \frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha}{2} + r^2\int_0^\alpha \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{r^2\cos\alpha\sin\alpha}{2} + \frac{r^2}{2}\int_0^\alpha \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{r^2\alpha}{2}.$$

неравенствата $0 \leq \theta \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ получаваме

$$y = \rho\sin\theta = x\operatorname{tg}\theta \leq x\operatorname{tg}\alpha,$$

а от неравенството $\rho \leq r$ получаваме

$$y = \sqrt{\rho^2 - x^2} \leq \sqrt{r^2 - x^2}$$

и следователно

$$y \leq \varphi(x).$$

От друга страна, очевидно имаме $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq r$, т. е.

$$\begin{gathered} 0 \leq x \leq r, \\ 0 \leq y \leq \varphi(x). \end{gathered} \tag{2}$$

Обратно, ако са ни дадени неравенствата (2), то

$$\begin{gathered} y \leq x\operatorname{tg}\alpha, \\ y \leq \sqrt{r^2 - x^2}, \end{gathered}$$

откъдето намираме

$$\begin{gathered} \sin\theta \leq \cos\theta\operatorname{tg}\alpha, \\ \rho\sin\theta \leq \sqrt{r^2 - \rho^2\cos^2\theta}, \end{gathered} \tag{3}$$

където можем да предполагаме, че $0 \leq \theta \leq 2\pi$. От друга страна, като вземем пред вид неравенствата $x \geq 0$, $y \geq 0$, получаваме $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Този резултат и неравенствата (3) ни дават

$$\begin{gathered} \operatorname{tg}\theta \leq \operatorname{tg}\alpha, \\ \rho^2\sin^2\theta \leq r^2 - \rho^2 cos^2\theta \end{gathered}$$

и следователно

$$\begin{gathered} \theta \leq \alpha, \\ \rho \leq r. \end{gathered}$$

След всичко направено ние можем без труд да пресметнем и лицето S на кръговия сектор

$$\alpha \leq \theta \leq \beta, \tag{4}$$

стига да имаме $\beta < \dfrac{\pi}{2}$. И наистина

$$S = \frac{r^2\beta}{2} - \frac{r^2\alpha}{2} = \frac{r^2}{2}(\beta - \alpha). \tag{5}$$

При направения извод ние предполагахме, че секторът (4) е разположен в първия квадрант. Ние можем обаче да се освободим от това предположение, като вземем пред вид, че от дефиницията, която дадохме на понятието лице, се вижда, че всеки две сходни точкови множества имат една и съща горна мярка на Пеано—Жордан (и са едновременно измерими или едновременно неизмерими). По този начин ние виждаме, че формулата (5) е валидна и тогава, когато секторът не е разположен в първия квадрант, обаче е налице условието $\beta - \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Най-сетне и това условие не е съществено, защото какъвто и да бъде секторът (4), подчинен на единственото условие да имаме $\beta - \alpha \leq 2\pi$, той може да бъде представен като сума от сектори, централните ъгли на които са по-малки от $\dfrac{\pi}{2}$. По този начин ние установихме общата валидност на формулата (5).

След тази подготовка ние можем да преминем към общата задача за пресмятане на лицето σ на сектор, зададен в полярни координати с помощта на неравенствата

$$\begin{gathered} \alpha \leq \theta \leq \beta, \\ \rho \leq f(\theta), \end{gathered}$$

където $f(\theta)$ е една непрекъсната и неотрицателна функция в затворения интервал $[\alpha, \beta]$, дължината на който не надминава 2π (вж. черт. 10).

За тази цел делим интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = \beta$$

и означаваме с R_ν и r_ν точната горна и точната долна граница на $f(\theta)$ в подинтервала $[\theta_{\nu-1}, \theta_\nu]$. Очевидно секторът

$$\begin{gathered} \theta_{\nu-1} \leq \theta \leq \theta_\nu, \\ \rho \leq f(\theta) \end{gathered} \tag{6}$$

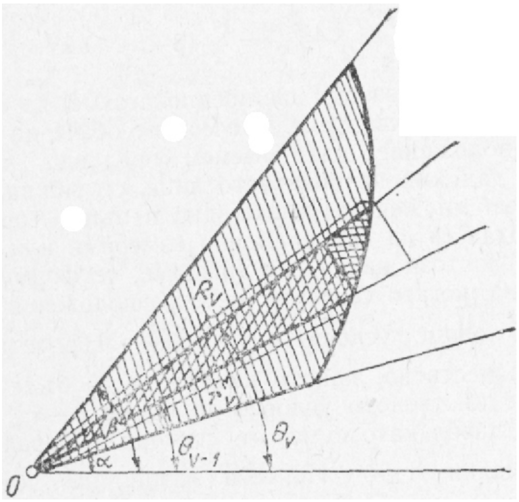
лежи изцяло в сектора

$$\theta_{\nu-1} \le \theta \le \theta_\nu, \qquad (7)$$
$$\rho \le R_\nu$$

и съдържа изцяло сектора

$$\theta_{\nu-1} \le \theta \le \theta_\nu, \qquad (8)$$
$$\rho \le r_\nu$$

(вж. черт. 12).



Черт. 12

Да означим със σ_ν лицето на сектора (6). В такъв случай, сравнявайки лицата на трите сектора (6), (7), (8), получаваме неравенствата

$$\frac{r_\nu^2}{2}(\theta_\nu - \theta_{\nu-1}) \le \sigma_\nu \le \frac{R_\nu^2}{2}(\theta_\nu - \theta_{\nu-1})$$

и следователно

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{r_\nu^2}{2}(\theta_\nu - \theta_{\nu-1}) \le \sigma \le \sum_{\nu=1}^{n} \frac{R_\nu^2}{2}(\theta_\nu - \theta_{\nu-1}). \qquad (9)$$

От друга страна, не е трудно да се види, че $\frac{R_\nu^2}{2}$ е точна горна, а $\frac{r_\nu^2}{2}$ е точна долна граница на функцията $\frac{f^2(\theta)}{2}$ в подинтервала $[\theta_{\nu-1}, \theta_\nu]$. Неравенствата (9) ни учат, че лицето σ е една долна граница на множеството на големите суми на Дарбу за функцията $\dfrac{f^2(\theta)}{2}$. Като вземем пред вид, че

$$\overline{\int_\alpha^\beta} \frac{f^2(\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

е точната, т. е. най-голямата долна граница на тези суми, получаваме

$$\sigma \leq \overline{\int_\alpha^\beta} \frac{f^2(\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta. \tag{10}$$

Аналогично намираме

$$\underline{\int_\alpha^\beta} \frac{f^2(\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta \leq \sigma. \tag{11}$$

От друга страна, функцията $\dfrac{f^2(\theta)}{2}$ е непрекъсната и следователно е интегруема, т. е.

$$\underline{\int_\alpha^\beta} \frac{f^2(\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \overline{\int_\alpha^\beta} \frac{f^2(\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Това равенство и неравенствата (10) и (11) ни дават

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Пример 1. Да се намери лицето σ на кардиоидата

$$\rho = a(1+\cos\theta), \quad a > 0$$

(вж. черт. 13).

Решение.

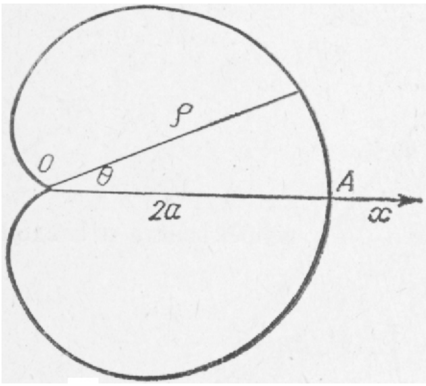
$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\Big|\theta + 2\sin\theta\Big|_0^{2\pi} + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = a^2\pi + \frac{a^2}{2}\left|\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right|_0^{2\pi} \\
&= a^2\pi + \frac{a^2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}a^2.
\end{aligned}$$

Пример 2. Уравнението на Декартовия лист

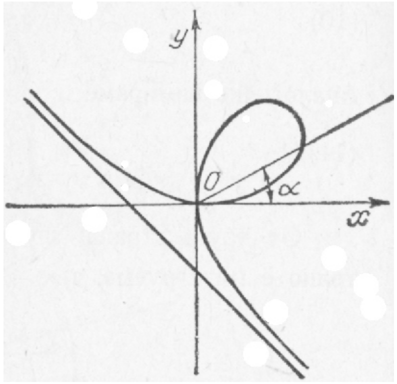
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a > 0$$

в полярна координатна система е

$$\rho = \frac{3\alpha\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$$



Черт. 13



Черт. 14

и следователно лицето σ на сектора (вж. черт. 14)

$$0 \le \theta \le \alpha,$$
$$\rho \le \frac{3a \sin\theta \cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta},$$

където $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, ще бъде

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{9a^2}{2} \int_0^\alpha \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta + \cos^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{9a^2}{2} \int_0^\alpha \frac{\mathrm{tg}^2\,\theta}{(1 + \mathrm{tg}^3\,\theta)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \frac{9a^2}{2} \int_0^\alpha \frac{\mathrm{tg}^2\,\theta\,\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,\theta}{(1 + \mathrm{tg}^3\,\theta)^2} = \frac{3a^2}{2} \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tg}^3\,\theta}{(1 + \mathrm{tg}^3\,\theta)^2} \\
&= \frac{3a^2}{2} \int_0^\alpha (1 + \mathrm{tg}^3\,\theta)^{-2}\,\mathrm{d}(1 + \mathrm{tg}^3\,\theta) = -\frac{3a^2}{2} \left| \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^3\,\theta} \right|_0^\alpha = \frac{3a^2}{2} \cdot \frac{\mathrm{tg}^3\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^3\,\alpha}.
\end{aligned}$$

Специално при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ получаваме, след като извършим граничен преход,

$$\sigma = \frac{3a^2}{2}.$$

Задачи

1. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от параболата $y^2 = 2px$, $p > 0$, и от правата $y = ax$, $a > 0$.

Отговор. $\dfrac{2}{3}\dfrac{p^2}{\alpha^3}$.

2. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от параболата $y^2 = 2px$, $p > 0$, и кривата $y^2 = \dfrac{8(x-p)^3}{27p}$.

Отговор. $\dfrac{88}{15}p^2\sqrt{2}$.

3. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от астроидата

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a > 0.$$

Отговор. $\frac{3}{8}a^2\pi$.

4. Да се пресметне лицето на частта от равнината, заградена от верижката

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}), \quad a > 0,$$

от абсцисната ос и от правите $x = 0$, $x = p$, където $p > 0$.

Отговор. $a^2\frac{e^{\frac{p}{a}} + e^{-\frac{p}{a}}}{2}$.

5. Да се пресметне лицето на частта от равнината, заградена от лемнискатата на Бернули (Bernoulli):

$$p^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Отговор. a^2.

6. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от кривата $p = a \sin 2\theta$, $a > 0$.

Отговор. $\frac{a^2\pi}{4}$.

7. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от елипсата

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и от кривата

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0, \quad a > 0, \ b > 0.$$

Упътване. Въведете полярни координати.

Отговор. $\frac{\pi}{2}(a - b)^2$.

8. Да се намери лицето на частта от равнината, заградена от един свод на циклоидата

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t),$$

където $0 \le t \le 2\pi$, и оста x.

Отговор. $3\pi a^2$.

§ 23. Дефиниция на понятието дъга

Двойка функции

$$x = f(t), \quad y = g(t), \tag{1}$$

които са дефинирани и непрекъснати в един и същ интервал $\alpha \le t \le \beta$, се нарича дъга. Множеството от точките с координати $[f(t), g(t)]$, където t описва интервала $\alpha \le t \le \beta$, се нарича графика на дъгата (1). Точката с координати $[f(\alpha), g(\alpha)]$ се нарича начало на дъгата(1), а точката $[f(\beta), g(\beta)]$ се нарича неин край. Дъгата(1) се нарича гладка, ако функциите $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми и производните им са непрекъснати в интервала $\alpha \le t \le \beta$.

Пример 1. Графиката на дъгата

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1),$$
$$y = y_1 + t(y_2 - y_1),$$
$$0 \leq t \leq 1$$

е праволинейна отсечка, която съединява точките (x_2, y_2) и (x_1, y_1).

Пример 2. Графиката на дъгата

$$x = a + r\cos t,$$
$$y = b + r\sin t,$$
$$0 \leq t \leq \pi$$

е полуокръжност с център в точката (a, b) и радиус r.

Пример 3. Графиката на дъгата

$$x = t,$$
$$y = f(t),$$
$$a \leq t \leq b$$

съвпада с графиката на функцията $f(x)$, където x се мени в интервала $[a, b]$.

Пример 4. Възможно е две различни дъги да имат една и съща графика. Така дъгата

$$x = \cos t,$$
$$y = \sin t,$$
$$0 \leq t \leq 2\pi$$

и дъгата

$$x = \cos t,$$
$$y = \sin t,$$
$$0 \leq t \leq 4\pi$$

имат една и съща графика. Също тъй графиката на дъгата

$$x = \cos t,$$
$$y = \sin t,$$
$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

съвпада с графиката на дъгата

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$
$$y = \frac{2t}{1 + t^2},$$
$$0 \leq t \leq 1.$$

§ 24. Дължина на дъга

Нека

$$
\begin{aligned}
x &= f(t), \\
y &= g(t),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

където $\alpha \le t \le \beta$ е една дъга Γ. Делим интервала $[\alpha, \beta]$ с помощта на точките

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta.$$

На всяка една от делящите точки t_i отговаря една точка P_i с координати

$$
\begin{aligned}
x_i &= f(t_i), \\
y_i &= g(t_i).
\end{aligned}
$$

Съединявайки всеки две съседни точки от редицата

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$$

с праволинейни отсечки, получаваме една начупена линия, за която ще казваме, че е вписана в дъгата Γ. Дължината на разглежданата начупена линия е равна на

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$

Ако се случи множеството от дължините на всичките вписани (в изяснения по-горе смисъл) начупени линии да е ограничено отгоре, ние казваме, че дъгата Γ може да бъде ректифицирана (изправена). Под дължина на дъга, която може да бъде ректифицирана, ще разбираме точната горна граница на дължините на вписаните в нея начупени линии. По този начин ние дефинирахме понятието дължина *само за ректифицируемите криви*.

Нека (1) е една ректифицируема дъга и нека l е нейната дължина. Да изберем един подинтервал $[\lambda, \mu]$ на интервала $[\alpha, \beta]$. Дъгата, която се получава от параметричните уравнения (1), когато t се мени в подинтервала $[\lambda, \mu]$, е също тъй ректифицируема. И наистина нека разделим подинтервала $[\lambda, \mu]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\lambda = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n = \mu$$

и да означим с P_i точката $[f(\tau_i), g(\tau_i)]$. Ако означим още с Q и R съответно точките $[f(\alpha), g(\alpha)]$, $[f(\beta), g(\beta)]$, то очевидно[1]

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} \le \overline{QP_0} + \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} + \overline{P_nR} \le l,$$

[1] С $\overline{AB}$ означаваме дължината на отсечката между точките A и B.

което показва, че множеството от сумите $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}$ е ограничено, т. е. че разглежданата дъга е наистина ректифицируема.

Да означим с l_λ^μ дължината на дъгата

$$x = f(t),\quad y = g(t), \tag{2}$$

където $\lambda \le t \le \mu$. Не е трудно да се покаже, че при $\lambda < \nu < \mu$ имаме

$$l_\lambda^\nu + l_\nu^\mu = l_\lambda^\mu.$$

И наистина да разделим по произволен начин подинтервала $[\lambda, \mu]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\lambda = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \mu.$$

Винаги може да се избере измежду тези точки на деление такава точка t_k, че да имаме

$$t_{k-1} \le \nu \le t_k.$$

Да означим с P_i точката $[f(t_i), g(t_i)]$, а с Q точката $[f(\nu), g(\nu)]$. Очевидно имаме[1]

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{k-1} \overline{P_{i-1}P_i} + \overline{P_{k-1}P_k} + \sum_{i=k+1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}.$$

Като вземем пред вид, че

$$\overline{P_{k-1}P_k} \le \overline{P_{k-1}Q} + \overline{QP_k},$$

получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} \le \left(\sum_{i=1}^{k-1} \overline{P_{i-1}P_i} + \overline{P_{k-1}Q} \right) + \left(\overline{QP_k} + \sum_{i=k+1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} \right) \le l_\lambda^\nu + l_\nu^\mu.$$

С това ние показваме, че числото $l_\lambda^\nu + l_\nu^\mu$ е една горна граница на дължините на начупените линии, вписани в дъгата (2). Като вземем пред вид, че l_λ^μ е точната, т. е. най-малката горна граница на тези дължини, получаваме

$$l_\lambda^\mu \le l_\lambda^\nu + l_\nu^\mu. \tag{3}$$

[1]При $k = 1$ трябва да се чете $\sum\limits_{i=1}^{k-1} \overline{P_{i-1}P_i} = 0$, а при $k = n$ трябва да се чете $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = 0$.

По подобен начин може да се установи неравенството

$$l_\lambda^\mu \geq l_\lambda^\nu + l_\nu^\mu.$$

За тази цел ще разделим подинтервалите $[\lambda, \nu]$ и $[\nu, \mu]$ по произволен начин на подинтервали с помощта на точките

$$\lambda = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_p = \nu, \tag{4}$$

$$\nu = v_0 < v_1 < v_2 < \cdots < v_p = \mu \tag{5}$$

и ще означим с P_i и Q_i съответно точките $[f(u_i), g(u_i)]$ и $[f(v_i), g(v_i)]$. В такъв случай имаме

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{P_{i-1}P_i} + \sum_{i=1}^{q} \overline{Q_{i-1}Q_i} \leq l_\lambda^\mu$$

и следователно

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{P_{i-1}P_i} \leq l_\lambda^\mu - \sum_{i=1}^{q} \overline{Q_{i-1}Q_i}.$$

Като фиксираме точките (5) и оставим точките (4) да се менят, заключаваме, че числото

$$l_\lambda^\mu - \sum_{i=1}^{q} \overline{Q_{i-1}Q_i}$$

е една горна граница на сумите $\sum\limits_{i=1}^{p} \overline{P_{i-1}P_i}$. Като вземем пред вид, че l_λ^ν е точната, т. е. най-малката от горните граници на тези суми, намираме

$$l_\lambda^\nu \leq l_\lambda^\mu - \sum_{i=1}^{q} \overline{Q_{i-1}Q_i}$$

или още

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{Q_{i-1}Q_i} \leq l_\lambda^\mu - l_\lambda^\nu. \tag{6}$$

Ние фиксирахме точките (5) произволно. Това обстоятелство и неравенството (6) ни позволяват да твърдим, че числото $l_\lambda^\mu - l_\lambda^\nu$ е една горна граница на сумите

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{Q_{i-1}Q_i}.$$

Като вземем пред вид още, че l_ν^μ е точната, т. е. най-малката горна граница на тези суми, получаваме

$$l_\nu^\mu \leq l_\lambda^\mu - l_\lambda^\nu$$

или

$$l_\nu^\mu + l_\lambda^\nu \leq l_\lambda^\mu. \tag{7}$$

Неравенствата (3) и (7) ни учат, че

$$l_\lambda^\nu + l_\nu^\mu = l_\lambda^\mu.$$

§ 25. Пресмятане дължините на дъгите с помощта на интеграли

Нека

$$\begin{aligned} x &= f(t), \\ y &= g(t), \end{aligned} \tag{1}$$

където $\alpha \leq t \leq \beta$ е една дъга. Ако функциите $f(t)$ и $g(t)$ имат ограничени първи производни в интервала $\alpha \leq t \leq \beta$, то дъгата (1) е ректифицируема. И наистина функцията

$$F(u, v) = \sqrt{f'^2(u) + g'^2(v)}$$

е ограничена в затворения квадрат

$$\begin{aligned} \alpha \leq u \leq \beta, \\ \alpha \leq v \leq \beta. \end{aligned}$$

Да означим с M една нейна горна граница и да разделим по произволен начин интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta.$$

Теоремата за крайните нараствания ни дава

$$\begin{aligned} f(t_i) - f(t_{i-1}) &= (t_i - t_{i-1}) f'(\tau_i), \\ g(t_i) - g(t_{i-1}) &= (t_i - t_{i-1}) g'(\tau_i^*), \end{aligned}$$

където

$$t_{i-1} < \tau_i < t_i, \quad t_{i-1} < \tau_i^* < t_i$$

и следователно

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'^2(\tau_i) + g'^2(\tau_i^*)}(t_i - t_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M(t_i - t_{i-1}) = M(\beta - \alpha).$$

С това ние показахме, че множеството от дължините на вписаните начупени линии в дъгата (1) е ограничено, т. е. тази дъга е ректифицируема.

Неравенството (2) ни учи, че константата

$$M(\beta - \alpha)$$

е една горна граница на дължините на начупените линии, които са вписани в дъгата (1). С това е доказано, че дъгата (1) е ректифицируема. Като вземем пред вид, че дължината l на разглежданата дъга е точната, т. е. най-малката горна граница на тези дължини, получаваме

$$(3)\qquad l \le M(\beta - \alpha).$$

Ако означим с m една долна граница на $F(u, v)$, получаваме аналогично

$$(4)\qquad m(\beta - \alpha) \le l.$$

Неравенствата (3) и (4) могат да се използуват, за да се докаже следната теорема.

Ако функциите $f(t)$ и $g(t)$ имат непрекъснати първи производни в интервала $\alpha \le t \le \beta$, то дължината l на дъгата

$$x = f(t),$$
$$y = g(t),$$

където $\alpha \le t \le \beta$, се дава с формулата

$$(5)\qquad l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(u) + g'^2(u)}\,\mathrm{d}u.$$

Доказателство. Да означим с $l(t)$ дължината на дъгата

$$x = f(u),$$
$$y = g(u),$$

където $\alpha \leq u \leq t$, и да изберем t_0 произволно в интервала $(\alpha,\beta]$. Нека ε е едно произволно положително число. Ние ще изберем числата t' и t'', които удовлетворяват неравенствата $t' \leq t_0 \leq t''$, $t' \neq t''$, толкова близо до t_0, че да имаме[1]

$$F(t_0,t_0) - \varepsilon \leq F(u,v) \leq F(t_0,t_0) + \varepsilon$$

при

$$t' \leq u \leq t'', \quad t' \leq v \leq t''.$$

Това може да се направи поради непрекъснатостта на функцията $F(u,v)$.

От доказаното по-горе имаме

$$[F(t_0,t_0) - \varepsilon](t'' - t') \leq l(t'') - l(t') \leq [F(t_0,t_0) + \varepsilon](t'' - t')$$

или

$$-\varepsilon \leq \frac{l(t'') - l(t')}{t'' - t'} - F(t_0,t_0) \leq \varepsilon.$$

Този резултат ни учи, че функцията $l(t)$ е диференцуема в точката t_0 и

$$l'(t_0) = F(t_0,t_0) = \sqrt{f'^2(t_0) + g'^2(t_0)}, \tag{6}$$

т. е. функцията $l(t)$ е една примитивна функция на непрекъснатата функция

$$\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}.$$

Това ни дава възможност да пишем

$$l(t) = C + \int_\alpha^t \sqrt{f'^2(u) + g'^2(u)}\,\mathrm{d}u,$$

където C е константа. За да пресметнем константата C, извършваме граничния преход $t \to \alpha$. Като вземем предвид неравенствата $0 \leq l(t) \leq M(t-\alpha)$, където M е една горна граница на функцията $F(u,v)$, заключаваме, че $\lim\limits_{l\to\alpha} l(t) = 0$ и следователно $C = 0$. По този начин намираме

$$l(t) = \int_\alpha^t \sqrt{f'^2(u) + g'^2(u)}\,\mathrm{d}u$$

и следователно

$$l = l(\beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'^2(u) + g'^2(u)}\,\mathrm{d}u.$$

[1] Нека припомним, че с $F(u,v)$ ние сме означили функцията

$$\sqrt{f'^2(u) + g'^2(v)}.$$

Забележка. Внимателният читател вероятно е забелязал, че от разсъжденията, които ние направихме, може да се извлече повече, защото от тях се вижда, че функцията $l(t)$ е диференцуема и равенството (6) е валидно във всяка точка, в която и двете производни $f'(t)$ и $g'(t)$ са непрекъснати. Да допуснем, че тези производни са интегруеми в Риманов смисъл в интервала $[\alpha,\beta]$. В такъв случай те ще бъдат непрекъснати почти навсякъде и следователно равенството (6) ще бъде валидно почти навсякъде. От друга страна, функциите

$$l(t) \text{ и } \int_\alpha^t \sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}\,\mathrm{d}u$$

удовлетворяват условието на Липшиц. Това ни дава възможност да приложим теоремата от § 10 и да заключим, че

$$l(t) = C + \int_\alpha^t \sqrt{f'^2(u)+g'^2(u)}\,\mathrm{d}u,$$

където C не зависи от t.

По такъв начин виждаме, че в разглежданата от нас теорема условието за непрекъснатост на $f'(t)$ и $g'(t)$ може да бъде заменено с по-общото условие за интегруемост в Риманов смисъл.

Ние често ще пишем формулата (5) във вида

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}.$$

Изразът $\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ обикновено се означава със знака $\mathrm{d}s$ и се нарича елемент на дъга.

В специалния случай, когато имаме дъгата

$$y = f(x), \quad \alpha \le x \le \beta,$$

или по-точно дъгата

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= f(t), \end{aligned}$$

където $\alpha \le t \le \beta$, формулата (5) добива вида

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + f'^2(u)}\,\mathrm{d}u.$$

Накрая нека отбележим, че под дъга, зададена в полярни координати с уравнение

$$\rho = f(\theta),$$

където $\alpha \le \theta \le \beta$, се разбира дъгата, дефинирана в декартови координати със следните уравнения[1]:

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\sin\theta, \tag{7}$$

където $\alpha \le \theta \le \beta$.

От (6) получаваме

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta,$$
$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta.$$

Това ни дава:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{f'^2(\theta) + f^2(\theta)} = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}$$

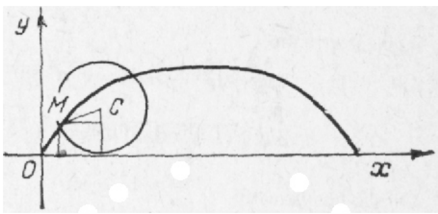
и следователно изразът за дължината l на дъгата (7) добива следния вид:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta.$$

Пример 1. Да се намери дължината l на дъгата от циклоидата[2]

$$x = r(t - \sin t), \qquad y = r(1 - \cos t), \qquad r > 0,$$

където $0 \le t \le 2\pi$ (вж. черт. 15).



Черт. 15

[1]Ние получаваме тези уравнения от трансформачните формули

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta,$$

като заместим ρ с $f(\theta)$.

[2]Циклоида се нарича крива, описана от една точка, свързана с окръжност, която се търкаля без хлъзгане по една права.

Решение. Очевидно имаме

$$x' = r(1 - \cos t),$$
$$y' = r\sin t$$

и следователно

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2\sin^2}\,\mathrm{d}t = r\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t = 2r\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t.$$

Оттук получаваме

$$l = 2r\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \left|-4r\cos\frac{t}{2}\right|_0^{2\pi} = 8r.$$

Пример 2. Да се намери дължината на дъгата от параболата

$$x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t, \quad p > 0,$$

където $0 \leq t \leq a$.

Решение. Очевидно имаме

$$x' = \frac{t}{p},$$
$$y' = 1$$

следователно

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{p}\sqrt{t^2 + p^2}\,\mathrm{d}t,$$

т. е.

$$l = \frac{1}{p}\int_0^a \sqrt{t^2+p^2}\,\mathrm{d}t.$$

Като интегрираме по части, ще получим

$$\begin{aligned}
l &= \left|\frac{t}{p}\sqrt{t^2+p^2}\right|_0^a - \frac{1}{p}\int_0^a \frac{t^2}{\sqrt{t^2+p^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{p}\sqrt{a^2+p^2} - \frac{1}{p}\int_0^a \frac{t^2+p^2-p^2}{\sqrt{t^2+p^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{a}{p}\sqrt{a^2+p^2} - l + p\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+p^2}} = \frac{a}{p}\sqrt{a^2+p^2} - l + \left|p\ln(t+\sqrt{t^2+p^2})\right|_0^a \\
&= \frac{a}{p}\sqrt{a^2+p^2} - l + p\ln(a+\sqrt{a^2+p^2}) - p\ln p.
\end{aligned}$$

Оттук

$$2l = \frac{a}{p}\sqrt{a^2+p^2} + p\ln\frac{a+\sqrt{a^2+p^2}}{p}$$

и следователно

$$l = \frac{a}{2p}\sqrt{a^2+p^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+p^2}}{p}.$$

Пример 3. Да се намери дължината l на кардиоидата

$$\rho = a(1+\cos\theta), \quad a > 0,$$

където $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (черт. 13).

Решение. Очевидно имаме

$$\rho' = -a\sin\theta$$

и следователно

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s &= \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{a^2 \sin^2\theta + a^2(1+\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta = a\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta = 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

Оттук получаваме

$$
\begin{aligned}
l &= 2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\,\mathrm{d}\theta = 2a\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\,\mathrm{d}\theta + 2a\int_{\pi}^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta - 2a\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \left|4a\sin\frac{\theta}{2}\right|_0^{\pi} - 4a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|_{\pi}^{2\pi} = 8a.
\end{aligned}
$$

Задачи

1. Да се намери дължината на астроидата

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a > 0.$$

Отговор. $6a$.

2. Да се намери дължината на дъгата от семикубичната парабола $ay^2 = x^3$, $a > 0$, за която $0 \le x \le p$.

Отговор.

$$\frac{(4a+9p)^{\frac{3}{2}} - (4a)^{\frac{3}{2}}}{27\sqrt{a}}.$$

3. Да се намери дължината на епициклоидата

$$
\begin{aligned}
x &= (a+b)\cos t + b\cos\frac{a+b}{b}t, \\
y &= (a+b)\sin t + b\sin\frac{a+b}{b}t,
\end{aligned}
$$

където $a > 0$, $b > 0$, $2a < b$, $0 \le t \le 2\pi$.

Отговор. $\dfrac{8b(a+b)}{a}$.

4. Да се намери дължината на кривата

$$x^{\frac{2}{5}} + y^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}}, \quad a > 0.$$

Отговор. $5a\left[1 + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]$.

5. Да се намери дължината на дъгата от Архимедовата спирала

$$\rho = a\theta, \quad a > 0,$$

където $0 \le \theta \le \alpha$.

Отговор. $\dfrac{a}{2}\left[\ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}) + \alpha\sqrt{1+\alpha^2}\right]$.

6. Да се намери дължината на дъгата от логаритмичната спирала

$$\rho = e^{a\theta}, \quad a > 0,$$

където $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$.

Отговор. $\dfrac{e^{a\theta_2} - e^{a\theta_1}}{a}\sqrt{1+a^2}$.

7. Да се намери дължината на дъгата

$$\rho = \frac{1}{\cos^3 \frac{\theta}{3}},$$

където $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Отговор. $12\sqrt{3}$.

8. Да се намери дължината на дъгата от трактрисата

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x},$$

където $0 < p \leq x \leq q \leq a$.

Отговор. $a \ln \frac{q}{p}$.

§ 26. Криволинейни интеграли

Нека Γ е дъга, дефинирана с уравненията

$$x = f(t),$$
$$y = g(t),$$

където $\alpha \leq t \leq \beta$. Ние ще разделим интервала $[\alpha, \beta]$ на подинтервали с помощта на точките

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta,$$

ще означим с τ_i едно число от i-тия подинтервал $[t_{i-1}, t_i]$ и ще положим за краткост

$$x_i = f(t_i), \qquad y_i = g(t_i);$$
$$\xi_i = f(\tau_i), \qquad \eta_i = g(\tau_i).$$

Ако функцията $F(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната върху графиката на Γ, а функцията $f(t)$ има непрекъсната производна в интервала $[\alpha, \beta]$, то сумите

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} F(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1})$$

клонят към някаква граница I, когато дължините на подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ клонят към нула. Това значи, че при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ по такъв начин, че ако дължините на всички подинтервали $[t_{i-1}, t_i]$ са по-малки от δ, да имаме

$$|I - S| < \varepsilon.$$

За да се убедим, че сумите S наистина имат граници, когато дължините на подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ клонят към нула, преобразуваме разликата $x_i - x_{i-1}$ с помощта на теоремата за крайните нараствания по следния начин:

$$x_i - x_{i-1} = f(t_i) - f(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-})f'(\theta_i),$$

където θ_i е някое число, избрано по подходящ начин в интервала (t_{i-1}, t_i). По този начин ние добиваме възможност да представим сумата S във вида

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} F[f(\tau_i), g(\tau_i)]f'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}).$$

От друга страна, функцията $F[f(t), g(t)]$ е непрекъсната в интервала $[\alpha, \beta]$ и следователно сумите

$$S^* = \sum_{i=1}^{n} F[f(\tau_i), g(\tau_i)]f'(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

клонят към интеграла

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} F[f(t), g(t)]f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

когато дължините на подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ клонят към нула. Това значи, че при всеки избор на положителното число ε имаме

$$|I - S^*| < \varepsilon,$$

когато подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ са достатъчно малки.

Да разгледаме разликата

$$S - S^* = \sum_{i=1}^{n} F[f(\tau_i), g(\tau_i)](f'(\theta_i) - f'(\tau_i))(t_i - t_{i-1})$$

и да означим с M една горна граница на непрекъснатата функция $|F[f(t), g(t)]|$. Ако разглежданите подинтервали $[t_{i-1}, t_i]$ са достатъчно малки, то

$$|f'(\theta_i) - f'(\tau_i)| < \varepsilon,$$

защото $f'(t)$ е равномерно непрекъсната[1] функция, и следователно

$$|S - S^*| \leq \sum_{i=1}^{n} M\varepsilon(t_i - t_{i-1}) = M(\beta - \alpha)\varepsilon.$$

[1]Функцията $f'(t)$ е равномерно непрекъсната, защото е непрекъсната в затворения интервал $[\alpha, \beta]$.

Оттук, като вземем пред вид неравенството

$$|S - I| \leq |S - S^*| + |S^* - I|,$$

получаваме

$$|S - I| < \varepsilon[M(\beta - \alpha) + 1].$$

С това ние показахме, че сумите S наистина имат граница, когато дължините на подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ клонят към нула, и дори показахме, че тя има стойност

$$I = \int_\alpha^\beta F[f(t), g(t)]f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Тази граница се означава със символа

$$\int_\Gamma F(x, y)\,\mathrm{d}x$$

и се нарича криволинеен интеграл на функцията $F(x, y)$, разпространен върху кривата Γ.

От изложението по-горе е ясно, че

$$\int_\Gamma F(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta F[f(t), g(t)]f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Този резултат може да се използува за пресмятане на криволинейните интеграли.

Аналогично може да се дефинира криволинейният интеграл

$$\int_\Gamma F(x, y)\,\mathrm{d}y$$

като граница на сумите

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i)(y_i - y_{i-1}),$$

когато дължините на подинтервалите $[t_{i-1}, t_i]$ клонят към нула. Най-сетне под

$$\int_\Gamma [P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y]$$

се разбира

$$\int_\Gamma P(x, y)\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma Q(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Пример 1. Да се пресметне криволинейният интеграл

$$\int_A \frac{y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

разпространен върху дъгата A, дефинирана с параметричните уравнения

$$x = r\cos t,\qquad y = r\sin t,\quad r>0, \tag{1}$$

където $0 \le t \le \pi$.

Решение. Очевидно имаме

$$\mathrm{d}x = -r\sin t\,\mathrm{d}t.$$

Според установеното по-горе правило за пресмятане на криволинейни интеграли имаме

$$\int_A \frac{y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \int_0^\pi \frac{r\sin t(-r\sin t)\,\mathrm{d}t}{(r\cos t)^2+(r\sin t)^2} = -\int_0^\pi \sin^2 t\,\mathrm{d}t = -\int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Да се пресметне криволинейният интеграл $\int_B \frac{y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, разпространен върху кривата B, дефинирана с параметричните уравнения

$$x = -r\cos t,\qquad y = r\sin t,\quad r>0, \tag{2}$$

където $0 \le t \le \pi$.

(Обърнете внимание върху това, че уравненията (1) и (2) представляват дъга от една и съща окръжност. По какво се различава разглежданият сега пример от предния?)

Решение.

$$\int_B \frac{y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \int_0^\pi \frac{r\sin t\,\mathrm{d}(-r\cos t)}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} = \int_0^\pi \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

§ 27. Криволинеен интеграл от тотален диференциал

Нека са дадени краен брой гладки дъги Γ_ν

$$x = f_\nu(t),\qquad y = g_\nu(t),\qquad \alpha_\nu \le t \le \beta_\nu, \tag{1}$$

всяка една от които има номер. Нека броят на дъгите е n. Ще казваме, че дъгите Γ_ν образуват път, ако началото на всяка дъга $\Gamma_{\nu+1}$, където $\nu \le n-1$, съвпада с края на Γ_ν, т. е.

$$\begin{aligned} f_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1}) &= f_\nu(\beta_\nu),\\ g_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1}) &= g_\nu(\beta_\nu), \end{aligned}\qquad \nu = 1,2,\dots,n-1.$$

Началото на Γ_1 ще наричаме начало на пътя, а края на Γ_n ще наричаме край на пътя. Ако началото и краят на пътя съвпадат, ще казваме, че той е затворен. Да означим с Γ пътя, определен от дъгите (1). Нека $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са две функции, които са дефинирани и непрекъснати върху графиката на всяка една от дъгите Γ_ν. По дефиниция ще положим

$$\int_\Gamma P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\Gamma_\nu} P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Нека е едно отворено множество G в равнината е дефинирана една функция $F(x, y)$, която в G притежава непрекъснати първи частни производни. Нека множеството G съдържа графиките на всичките дъги Γ_ν. Нека най-сетне (x_0, y_0) е началото, (x_1, y_1) е краят на пътя Γ, който е определен от дъгите Γ_ν. В такъв случай

$$\int_\Gamma F'_x\,\mathrm{d}x + F'_y\,\mathrm{d}y = F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0). \tag{2}$$

И наистина

$$\begin{aligned}\int_\Gamma F'_x\,\mathrm{d}x + F'_y\,\mathrm{d}y &= \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\Gamma_\nu} F'_x\,\mathrm{d}x + F'_y\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} [F'_x(f_\nu(t), g_\nu(t))f'_\nu(t) + F'_y(f_\nu(t), g_\nu(t))g'_\nu(t)]\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} [F(f_\nu(\beta_\nu), g_\nu(\beta_\nu)) - F(f_\nu(\alpha_\nu), g_\nu(\alpha_\nu))] \\ &= F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Специално, ако пътят Γ е затворен, равенството (2) приема вида

$$\int_\Gamma F'_x\,\mathrm{d}x + F'_y\,\mathrm{d}y = 0.$$

Нека в едно отворено множество G са дадени две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Ако съществува функция $F(x, y)$ с непрекъснати частни производни до втори ред, за която

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$$

в G, то функциите $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ имат непрекъснати първи частни производни и

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},$$

а следователно

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3}$$

Когато множеството G е звездообразно относно някоя негова точка (x_0, y_0), т. е. когато заедно с всяка своя точка (x, y) то съдържа и праволинейната отсечка, която съединява точките (x, y) и (x_0, y_0), обратното на горното твърдение е също тъй вярно. Това значи, че ако в едно отворено множество G, което е звездообразно относно някоя негова точка (x_0, y_0), са дефинирани две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, които имат непрекъснати частни производни от първи ред и удовлетворяват условието

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

съществува функция $F(x, y)$ в G, която притежава непрекъснати частни производни от втори ред и удовлетворява условията

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y).$$

И наистина да положим[1]

$$\begin{aligned} F(x, y) = (x - x_0) &\int_0^1 P(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))\, \mathrm{d}t \\ + (y - y_0) &\int_0^1 Q(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ние можем да направим това, защото точката $(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$ описва отсечката, която съединява точките (x_0, y_0) и (x, y), когато t се мени в интервала $0 \leq t \leq 1$, и следователно не напуска G поради условието за звездообразност.

---

[1] С други думи,

$$F(x, y) = \int_L P(\xi, \eta)\, \mathrm{d}\xi + Q(\xi, \eta)\, \mathrm{d}\eta,$$

където криволинейният интеграл е разпространен върху отсечката L с уравнения $\xi = x_0 + t(x - x_0)$, $\eta = y_0 + t(y - y_0)$, $0 \leq t \leq 1$.

Очевидно

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^1 P\,\mathrm{d}t + (x - x_0)\int_0^1 tP'_x\,\mathrm{d}t + (y - y_0)\int_0^1 tQ'_x\,\mathrm{d}t.$$

Като интегрираме по части, получаваме

$$\int_0^1 P\,\mathrm{d}t = P(x,y) - \int_0^1 \left[tP'_x\,.\,(x - x_0) + tP'_y\,.\,(y - y_0)\right]\,\mathrm{d}t$$

и следователно

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) + (y - y_0)\int_0^1 t(Q'_x - P'_y)\,\mathrm{d}t = P(x,y).$$

Аналогично намираме

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y).$$

От изложеното се вижда, че ако в едно звездообразно множество G, съдържащо графиките на гладките дъги Γ_ν, които съставят затворен път Γ, имаме две функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ с непрекъснати първи частни производни, удовлетворяващи условието

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0.$$

Това е едно важно равенство, което има многобройни приложения.

Предложението за звездообразност на G може да се замени с по-общо. Достатъчно е да се иска множеството G да бъде просто свързано, т. е. да съдържа всяко компактно множество, чийто контур принадлежи на G. На това обобщение няма да се спираме, защото няма да го използуваме.

§ 28. Приблизително пресмятане на интеграли

При някои задачи от приложната математика и физика се налага да познаваме поне приблизително (с една или с друга точност) стойността на даден интеграл. Обаче методите, които ние разгледахме, не ни дават на ръка средство за точното пресмятане на всякакви интеграли. Ето защо става нужда да прибягваме до приблизителни методи. Ние ще изложим в този параграф няколко такива метода.

Ние можем да пресметнем интеграла

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

с всякаква точност, като изхождаме от дефиницията на понятието определен интеграл. Така, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, то каквото и да е положително число ε, ние можем да изберем точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

по такъв начин, че осцилацията на функцията $f(x)$ да бъде по-малка[1] от ε във всеки един от подинтервалите $[x_{i-1}, x_i]$. Да означим с M_i и m_i точната горна и точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ и да разгледаме голямата и малката сума на Дарбу:

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$
$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Ние знаем, че при $a < b$

$$s \le I \le S.$$

От друга страна, като вземем пред вид неравенството $M_i - m_i < \varepsilon$, получаваме

$$S - s = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a).$$

Този резултат ни учи, че като вземем било S, било s за приблизителна стойност на интеграла I, ние можем да постигнем всяка желана точност.

Но съществуват други методи, които се оказват по-удобни за практически цели. Така например, ако функцията $f(x)$ е два пъти диференцуема и

[1] Това ние може да направим за всяка непрекъсната функция. Специално, ако функцията $f(x)$ удовлетворява условието на Липшиц

$$|f(x') - f(x'')| \le k|x' - x''|,$$

достатъчно е да вземем $x_i - x_{i-1} < \dfrac{\varepsilon}{k}$, за да сме сигурни, че осцилацията на $f(x)$ е по-малка от ε във всеки един от подинтервалите $[x_{i-1}, x_i]$.

има ограничена втора производна в интервала $[a, b]$, то целесъобразно е за приблизителна стойност на I да се вземе сумата

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}),$$

като при това интервалът $[a, b]$ се дели на равни части.[1]

Като имаме пред вид неравенствата

$$m_i \leq \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \leq M_i,$$

получаваме

$$s \leq \sigma \leq S,$$

откъдето е ясно, че сумите σ също както сумите s и S могат да се използуват за приблизително пресмятане на интеграла I.

По-прецизна оценка на грешката може да се направи така. Полагаме за удобство

$$\frac{x_{i-1} + x_i}{2} = c,$$
$$\frac{x_i - x_{i-1}}{2} = h,$$

разглеждаме двете функции

$$\psi(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)\,\mathrm{d}x - t\left[f(c+t) + f(c-t)\right],$$
$$\varphi(t) = \psi(t) - \frac{t^3}{h^3}\psi(h)$$

при $0 \leq t \leq h$. Очевидно имаме

$$\varphi'(t) = \left[\int_{c-t}^{c+t} f(x)\,\mathrm{d}x\right]' - \left[f(c+t) + f(c-t)\right] - t\left[f'(c+t) - f'(c-t)\right] - \frac{3t^2}{h^3}\psi(h).$$

Като вземем пред вид, че

$$\left[\int_{c-t}^{c+t} f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = \left[\int_{c-t}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{c+t} f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = f(c-t) + f(c+t),$$

[1] В този случай грешката намалява особено бързо с растенето на n. Както ще видим след малко, тази грешка при най-неблагоприятни обстоятелства е от порядъка на $\frac{1}{n^2}$.

получаваме

$$\varphi'(t) = -t\left[f'(c+t) - f'(c-t)\right] - \frac{3t^2}{h^3}\psi(h)$$

или прилагайки теоремата за крайните нараствания,

$$\varphi'(t) = -2t^2 f''(\xi_i) - \frac{3t^2}{h^3}\psi(h), \tag{1}$$

където ξ_i е число между $c - t$ и $c + t$ и следователно между x_{i-1} и x_i.

От друга страна, имаме $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$ и следователно има точка τ във вътрешността на интервала $(0, h)$, за която $\varphi'(\tau) = 0$. Специално, ако в равенството (1) поставим $t = \tau$, ще получим

$$\psi(h) = -\frac{2h^3}{3} f''(\xi_i),$$

откъдето

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_i).$$

Като дадем на i стойностите $1, 2, \ldots, n$ и съберем получените равенства, ще намерим

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a^3)}{12n^3} f''(\xi_i). \tag{2}$$

Нека M е една горна граница на $|f''(x)|$ в интервала $[a, b]$. В такъв случай от равенството (2) получаваме

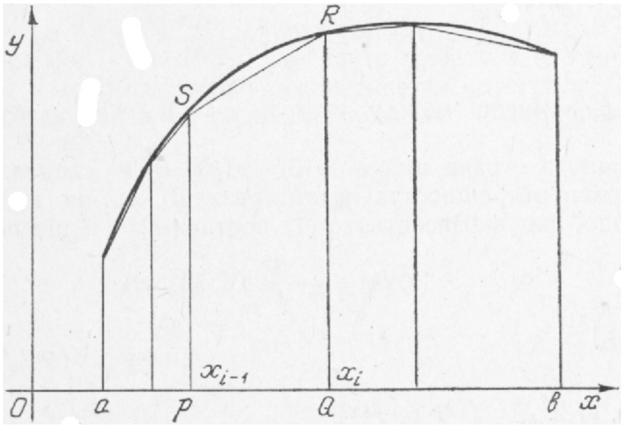
$$\left|\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})\right| \leq \frac{(b-a)^3 Mn}{12n^3} = \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}.$$

Оттук виждаме, че грешката, която правим при този метод, в най-неблагоприятния случай е от порядъка на $\dfrac{1}{n^2}$.

При $f(x) \geq 0$ може да се даде едно просто геометрично тълкуване на разгледания метод: изразът

$$\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})$$

представлява лицето на трапеца $PQRS$, който е изобразен на черт. 16; по



Черт. 16

този начин в приложения метод интегралът

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

който представлява лицето на „криволинейния трапец"

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i,$$
$$0 \leq y \leq f(x),$$

се заменя с лицето на съответния праволинеен трапец $PQRS$. Поради това разгледания метод се нарича често правило на трапеците.

Има методи, при които грешката намалява още по-бързо.[1] Такова е например правилото на Симпсон (Simpson), което ще разгледаме сега. При това правило делим интервала $[a, b]$ на четен брой равни части с помощта на точките

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

и заменяме функцията $f(x)$ във всеки един от подинтервалите $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ с полином (най-много) от втора степен $P_i(x)$, стойностите на който съвпадат със стойностите на функцията $f(x)$ в точките x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}. Както знаем, такъв полином има и той е само един (касае се за една съвсем специална интерполационна задача).

Ние ще представим за удобство полинома $P_i(x)$ във вида

$$P_i(x) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}(x - x_{2i-1}) + \alpha_{i2}(x - x_{2i-1})^2$$

[1]Поне когато подинтегралната функция $f(x)$ е диференцуема достатъчен брой пъти.

(което, както знаем, е възможно). Коефициентите α_{i0}, α_{i1}, α_{i2} се определят от условията

$$P_i(x_{2i-2}) = f(x_{2i-2}), \quad P_i(x_{2i-1}) = f(x_{2i-1}), \quad P_i(x_{2i}) = f(x_{2i})$$

или

$$y_{2i-2} = \alpha_{i0} - \alpha_{i1}h + \alpha_{i2}h^2, \quad y_{2i-1} = \alpha_{i0}, \quad y_{2i} = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}h + \alpha_{i2}h^2,$$

където сме положили $f(x_\nu) = y_\nu$ и $\dfrac{b-a}{2n} = h$. Очевидно имаме

$$\begin{aligned}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P_i(x)\,\mathrm{d}x &= \alpha_{i0}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} \mathrm{d}x + \alpha_{i1}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (x - x_{2i-1})\,\mathrm{d}x + \alpha_{i2}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (x - x_{2i-1})^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{h}{3}(6\alpha_{i0} + 2\alpha_{i2}h^2) = \frac{b-a}{6n}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i});\end{aligned}$$

така получаваме следната приблизителна стойност I^* за интересуващия ни интеграл:

$$\begin{aligned}I^* &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P_i(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) \\ &= \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})].\end{aligned}$$

За да оценим грешката $|I - I^*|$, която правим, когато прилагаме формулата на Симпсон, полагаме $x_{2i-1} = c$ разглеждаме двете помощни функции

$$\psi(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{t}{3}[f(c+t) + 4f(c) + f(c-t)],$$

$$\varphi(t) = \psi(t) - \frac{t^5}{h^5}\psi(h)$$

при $0 \le t \le h$. Като диференцираме три пъти $\varphi(t)$ и след третото диференциране приложим теоремата за крайните нараствания, ще получим

$$\varphi'(t) = \frac{2}{3}[f(c+t) - 2f(c) + f(c-t)] - \frac{1}{3}t[f'(c+t) - f'(c-t)] - \frac{5t^4}{h^5}\psi(h),$$

$$\varphi''(t) = \frac{1}{3}[f'(c+t) - f'(c-t)] - \frac{1}{3}t[f''(c+t) + f''(c-t)] - \frac{20t^3}{h^5}\psi(h),$$

$$(3)\quad \varphi'''(t) = -\frac{1}{3}t[f'''(c+t) - f'''(c-t)] - \frac{60t^2}{h^5}\psi(h) = -\frac{2}{3}t^2 f^{IV}(\xi_i) - \frac{60t^2}{h^5}\psi(h).$$

Като вземем пред вид, че $\varphi(0) = \varphi(h) = 0$, заключаваме с помощта на теоремата на Рол, че има число τ_1 в отворения интервал $(0, h)$, за което $\varphi'(\tau_1) = 0$. Като вземем пред вид още, че $\varphi'(0) = 0$, заключаваме, че има число τ_2 в отворения интервал $(0, \tau_1)$, за което $\varphi''(\tau_1) = 0$. Най-сетне, като вземем пред вид, че $\varphi''(0) = 0$, заключаваме, че има число τ в отворения интервал $(0, \tau_2)$, за което $\varphi'''(\tau) = 0$. Като поставим $t = \tau$ в равенството (3), ще получим

$$\psi(h) = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi_i)$$

или

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6n}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^5} f^{IV}(\xi_i). \tag{4}$$

Давайки на i стойностите $1, 2, \ldots, n$ и събирайки получените неравенства, намираме

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^{n} (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^5} \sum_{i=1}^{n} f^{IV}(\xi_i).$$

Нека K е една горна граница на $|f^{IV}(x)|$ в интервала $[a, b]$. В такъв случай равенството (4) ни дава

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^{n} (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) \right| \leq \frac{(b-a)^5 K}{2880n^4}.$$

Оттук ние виждаме, че грешката, която правим при метода на Симпсон, в най-неблагоприятния случай е от порядъка на $\frac{1}{n^4}$.

Накрая ще разгледаме метода на Котес (Cotes). При този метод избираме произволно n различни точки

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{5}$$

от дефиниционната област на функцията $f(x)$ и заменяме подинтегралната функция $f(x)$ с полином $\varphi(x)$ от възможно най-ниска степен, който съвпада с функцията $f(x)$ в избраните точки (5). Такъв полином ние можем да конструираме например с помощта на интерполационната формула на Лагранж

$$\begin{aligned}\varphi(x) = f(x_1)&\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} \\ &+ f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} + \ldots\end{aligned}$$

$$+ f(x_n)\frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})}.$$

В такъв случай, разглеждайки $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ като приближената стойност на интересуващия ни интеграл I, получаваме приблизителното равенство

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_n f(x_n), \tag{6}$$

където сме положили за краткост

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_a^b \frac{(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots(x_1 - x_n)}\,\mathrm{d}x, \\ a_2 &= \int_a^b \frac{(x - x_1)(x - x_3)\dots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_n)}\,\mathrm{d}x, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n &= \int_a^b \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})}\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{7}$$

Пресмятането на коефициентите $a_1, a_2, \dots, a_n$ не е свързано с никаква принципиална трудност, защото в десните страни на равенствата (7) имаме интеграли от полиноми. Тези коефициенти не зависят от функцията $f(x)$, обаче зависят от избора на точките (5). Приближеното равенство (6) е напълно точно, когато $f(x)$ е полином, чиято степен не надминава $n - 1$. И наистина в такъв случай полиномът $f(x) - \varphi(x)$, чиято степен не надминава $n-1$, се анулира в n различни точки и следователно се анулира тъждествено. Оттук получаваме при всички стойности на x

$$f(x) = \varphi(x)$$

и следователно

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_n f(x_n).$$

§ 29. Несобствени интеграли

I. Интеграли от неограничени функции

Ние дефинирахме понятието определен интеграл за ограничени функции. В известни случаи обаче се оказва възможно да се разшири по един целесъобразен начин това понятие. Така например да разгледаме функцията

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

дефинирана с това условие при $0 \leq x < 1$. Тази функция не е интегруема в интервала $[0, 1]$, защото не е ограничена. Напротив, каквото и да е числото α, принадлежащо към отворения интервал $(0, 1)$, интегралът

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{(\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$$

е добре дефиниран, защото подинтегралната функция е непрекъсната в интервала $[0, \alpha]$. Очевидно имаме

$$F(\alpha) = | -2(1-x)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^\alpha = 2 - 2\sqrt{1-\alpha}.$$

В разглеждания специален случай функцията $F(\alpha)$ има граница, когато α клони към единица чрез стойности, по-малки от единица, и

$$\lim_{\alpha \to 1} F(\alpha) = 2.$$

Ние обикновено изразяваме този резултат, като казваме, че интегралът

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$$

съществува в несобствен смисъл, и пишем

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = 2.$$

Изобщо, ако функцията $f(x)$ е интегруема[1] във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a < \alpha < b$, и интегралът

$$F(\alpha) = \int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a < \alpha < b,$$

има граница, когато α клони към b чрез стойности, по-малки от b, то ние наричаме тази граница несобствен[2] интеграл от $f(x)$, разпространен върху интервала $[a, b]$, и я означаваме със символа

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

[1]Тази функция може да бъде неограничена в интервала $a \leq x < b$.

[2]За разлика от определените интеграли, които ние разглеждахме досега и които се наричат понякога интеграли в собствен смисъл. Нека припомним, че понятието интеграл в собствен смисъл се дефинира за ограничени функции и за крайни интеграционни интервали.

така че
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to b}\int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Вместо да казваме, че съществува границата
$$\lim_{\alpha\to b} F(\alpha),$$
ние често казваме, че интегралът (1) съществува в несобствен смисъл или още, че този интеграл е сходящ. В противен случай казваме, че интегралът е разходящ.

Много от свойствата на несобствените интеграли приличат на съответните свойства на безкрайните редове. Така, ако интегралите
$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$$
са сходящи, то интегралите
$$I_1 = \int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,\mathrm{d}x$$
са също сходящи, като при това
$$I_1 = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

И наистина нека двете функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са интегруеми във всеки подинтервал $[a,\alpha]$, където $a<\alpha<b$. Полагайки
$$F_1(\alpha) = \int_a^\alpha f_1(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$F_2(\alpha) = \int_a^\alpha f_2(x)\,\mathrm{d}x,$$
имаме
$$\int_a^\alpha [f_1(x)+f_2(x)]\,\mathrm{d}x = F_1(\alpha)+F_2(\alpha),$$
$$\int_a^\alpha [f_1(x)-f_2(x)]\,\mathrm{d}x = F_1(\alpha)-F_2(\alpha).$$
От съществуването на границите
$$\lim_{\alpha\to b} F_1(\alpha), \qquad \lim_{\alpha\to b} F_2(\alpha)$$

обаче следва съществуването и на границите

$$\lim_{\alpha\to b}[F_1(\alpha)+F_2(\alpha)] = \lim_{\alpha\to b}F_1(\alpha)+\lim_{\alpha\to b}F_2(\alpha),$$
$$\lim_{\alpha\to b}[F_1(\alpha)-F_2(\alpha)] = \lim_{\alpha\to b}F_1(\alpha)-\lim_{\alpha\to b}F_2(\alpha),$$

с което твърдението е доказано.

Ние ще дадем няколко достатъчни условия за сходимост на несобствени интеграли. За целта ще забележим предварително, че ако функцията $F(x)$ е дефинирана, монотонно растяща и ограничена при $a \leq x < b$, то тя има граница, когато x клони към b (чрез стойности, по-малки от b). И наистина нека l е точната горна граница на $F(x)$. Избираме едно произволно положително число ε. Като вземем под внимание, че l е най-малката горна граница на $F(x)$, заключаваме, че $l-\varepsilon$ вече не е горна граница и следователно има поне една точка x_0, за която $F(x_0) > l-\varepsilon$. Като вземем под внимание, че $F(x)$ монотонно расте, получаваме при $x \geq x_0$

$$F(x) \geq F(x_0)$$

и следователно

$$F(x) > l-\varepsilon.$$

От друга страна, l е една горна граница на $F(x)$ и следователно

$$F(x) \leq l,$$

т. е.

$$0 \leq l - F(x) < \varepsilon$$

при $x \geq x_0$. С това ние показахме, че $F(x)$ клони към l, когато x клони към b.

На това място ние ще отбележим още следното: ако функцията $F(x)$ е дефинирана при $a \leq x < b$, монотонно расте и клони към l при $x \to b$, то $F(x) \leq l$. И наистина да допуснем, че в някоя точка x_0 имаме $F(x_0) > l$. От друга страна, имаме $\lim\limits_{x\to b}F(x) = l$ и следователно, като изберем едно положително число ε, ще имаме

$$|F(x) - l| < \varepsilon$$

при всички стойности на x, които са достатъчно близко до b (и, разбира се, по-малки от него). Специално, ако изберем

$$\varepsilon = F(x_0) - l,$$

ще получим

$$|F(x) - l| < F(x_0) - l$$

и толкова повече

$$F(x) - l < F(x_0) - l,$$

откъдето

$$F(x) < F(x_0),$$

което противоречи на условието за монотонното растене на $F(x)$.

Получените по този начин резултати ни позволяват да установим следния принцип за сравняване на несобствени интеграли (аналогичен на принципа за сравняване на редовете): ако двете функции $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a < \alpha < b$, ако

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

и ако интегралът

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

е сходящ, то интегралът

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

е също сходящ.

И наистина функциите

$$F(\alpha) = \int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$G(\alpha) = \int_a^\alpha g(x)\,\mathrm{d}x$$

са монотонно растящи при $a < \alpha < b$, защото имаме

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$
$$G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta g(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

когато $\alpha \leq \beta$. От друга страна, неравенството $f(x) \leq g(x)$ ни дава

$$F(\alpha) \leq G(\alpha)$$

и следователно

$$F(\alpha) \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

защото

$$G(\alpha) \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

С това ние показахме, че монотонно растящата функция $F(\alpha)$ е ограничена и следователно има граница, когато α клони към b (чрез стойности, по-малки от b).

Нека функцията $f(x)$ е интегруема във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a < \alpha < b$. Току-що установеният резултат ни позволява да покажем, че от сходимостта на интеграла

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

следва сходимостта на интеграла[1]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

За да покажем това, разглеждаме двата интеграла

$$\int_a^b \frac{|f(x)| + f(x)}{2}\,\mathrm{d}x \quad \text{и} \quad \int_a^b \frac{|f(x)| - f(x)}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Те са сходящи, защото

$$0 \le \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \le |f(x)|,$$
$$0 \le \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \le |f(x)|.$$

Като вземем пред вид, че

$$f(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} - \frac{|f(x)| - f(x)}{2},$$

заключаваме, че интересуващият ни интеграл (2) е също сходящ.

[1] В случая, когато интегралът $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ е сходящ, ние казваме, че интегралът $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ е абсолютно сходящ.

В много случаи е от полза следното достатъчно условие за сходимост или разходимост на несобствени интеграли. Нека функцията $f(x)$ е интегруема във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a < \alpha < b$. Ако тази функция удовлетворява неравенството

$$|f(x)| \leq \frac{A}{(b-x)^{\lambda}}, \tag{3}$$

където $\lambda < 1$ (A и λ са константи), то интегралът

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

е сходящ; ако ли пък

$$f(x) \geq \frac{A}{b-x}, \tag{5}$$

където $A > 0$, то интегралът (4) е разходящ.

И наистина интегралът

$$\int_a^b \frac{A}{(b-x)^{\lambda}}\,\mathrm{d}x$$

е сходящ при $\lambda < 1$, защото при $a < \alpha < b$ имаме

$$\int_a^b \frac{A}{(b-x)^{\lambda}}\,\mathrm{d}x = \left| \frac{-A}{(1-\lambda)(b-x)^{-1+\lambda}} \right|_a^{\alpha} = \frac{A}{(1-\lambda)(b-a)^{-1+\lambda}} - \frac{A}{(1-\lambda)(b-\alpha)^{-1+\lambda}}$$

и следователно границата

$$\lim_{\alpha \to b} \int_a^{\alpha} \frac{A}{(b-x)^{\lambda}}\,\mathrm{d}x$$

съществува. Като вземем пред вид неравенството (3), заключаваме с помощта на принципа за сравняване на интегралите, че интегралът (4) е абсолютно сходящ и следователно е сходящ.

От друга страна, интегралът

$$\int_a^b \frac{A\,\mathrm{d}x}{b-x}, \quad A > 0, \tag{6}$$

е разходящ, защото при $a < \alpha < b$ имаме

$$\int_a^{\alpha} \frac{A\,\mathrm{d}x}{b-x} = \Big| -A\ln(b-x) \Big|_a^{\alpha} = A\ln(b-a) - A\ln(b-\alpha)$$

и следователно интегралът

$$\int_a^\alpha \frac{A\,\mathrm{d}x}{b-x}$$

расте неограничено при $\alpha \to b$. Оттук заключаваме, че интегралът (4) също не може да бъде сходящ, защото в противен случай от неравенството (5) и от принципа за сравняване на интегралите би следвала сходимостта на интеграла (6), което, както видяхме, не е вярно.

Дотук ние предполагахме, че ни е дадена функция, която е дефинирана (поне) в интервала $a \leq x < b$ и е интегруема във всеки подинтервал $[a, \alpha]$, където $a < \alpha < b$. В такъв случай ще казваме, че тази функция няма друга особеност освен евентуално около b. Ние ще предоставим на читателя сам да дефинира по този образец понятието функция, която няма други особености в даден интервал освен евентуално около краен брой негови точки, и да обобщи за този случай понятието несобствен интеграл.

II. Интеграли с безкрайни интеграционни граници

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана при $x \geq a$ и интегруема в собствен или несобствен смисъл във всеки интервал $[a, p]$, където $p > a$. Ние можем да образуваме интеграла

$$F(p) = \int_a^p f(x)\,\mathrm{d}x$$

при $p > a$, колкото и голямо да е числото p. Ако съществува границата

$$\lim_{p\to\infty} F(p), \tag{7}$$

то тази граница се нарича несобствен интеграл на $f(x)$, разпространен върху безкрайния интервал $a \leq x$, и се означава със символа

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Аналогично се дефинира интегралът

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{9}$$

като

$$\lim_{q\to-\infty} \int_q^a f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Най-сетне под

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

се разбира сумата

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

И тук, вместо да казваме, че съществува границата (7) или (10), ние често казваме съответно, че интегралът (8) или (9) е сходящ.

Пример. Очевидно имаме

$$\int_0^p e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left| -e^{-x} \right|_0^p = 1 - e^{-p}$$

и следователно

$$\lim_{p\to\infty} \int_0^p e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Използувайки въведената по-горе терминология, можем да кажем, че интегралът

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

е сходящ и има стойност 1.

Не е трудно да се установи, че и тук е валиден принципът за сравняване на несобствени интеграли, който може да се формулира по следния начин: ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани при $x \geq a$ и са интегруеми във всеки интервал $a \leq x \leq p$, колкото и голямо да бъде числото p, ако $0 \leq f(x) \leq g(x)$ и ако интегралът

$$\int_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$$

е сходящ, то интегралът

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

е сходящ. Ние ще предоставим този път доказателството на читателя.

Ако интегралът

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

е сходящ, казваме, че интегралът

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11}$$

е абсолютно сходящ. Нека читателят сам докаже, че всеки абсолютно сходящ несобствен интеграл от вида (11), където функцията $f(x)$ е интегруема във всеки интервал $a \leq x \leq p$, е сходящ.

В много случаи е от полза следното достатъчно условие за сходимост или разходимост на интеграли: ако функцията $f(x)$ е дефинирана при $x \geq a$, интегруема е във всеки интервал $a \leq x \leq p$ и удовлетворява неравенството

$$|f(x)| \leq \frac{A}{x^{\lambda}} \tag{12}$$

при всички достатъчно големи стойности на x, където $\lambda > 1$, то интегралът

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

е сходящ; ако ли пък при достатъчно големи стойности на x е изпълнено неравенството

$$f(x) \geq \frac{A}{x}, \tag{14}$$

където $A > 0$, то интегралът (13) е разходящ.

И наистина при $c > 0$ и $\lambda > 1$ интегралът

$$\int_c^{\infty} \frac{A\,\mathrm{d}x}{x^{\lambda}}$$

е сходящ, защото

$$\int_c^{p} \frac{A\,\mathrm{d}x}{x^{\lambda}} = \left|\frac{A}{(1-\lambda)x^{\lambda-1}}\right|_c^p = \frac{A}{(1-\lambda)p^{\lambda-1}} - \frac{A}{(1-\lambda)c^{\lambda-1}}$$

и следователно границата

$$\lim_{p\to\infty} \int_c^{p} \frac{A\,\mathrm{d}x}{x^{\lambda}}$$

съществува. Оттук и от неравенството (12) заключаваме с помощта на принципа за сравняване на интегралите, че интегралът

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

а оттук и интегралът (13) е сходящ.

При $A > 0$ интегралът

$$\int_c^{\infty} \frac{A\,\mathrm{d}x}{x} \tag{15}$$

е разходящ, защото интегралът

$$\int_c^p \frac{A\,\mathrm{d}x}{x} = A\ln p - A\ln c, \quad c > 0,$$

расте неограничено заедно с p. Ако допуснем за момент, че интегралът (13) е сходящ, бихме могли да заключим от неравенството (14), че интегралът (15) е също сходящ, което, както видяхме, не е вярно.

Пример 1. Да се покаже, че интегралът[1]

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

е сходящ.

Решение. Разглеждаме функцията

$$F(p) = \int_0^p \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Очевидно имаме

$$F(p) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^p \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Интегрирайки по части, получаваме

$$\int_1^p \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_1^p \frac{\mathrm{d}\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \cos 1 - \frac{\cos p}{p} - \int_1^p \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Границата

$$\lim_{p\to\infty} \int_1^p \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

съществува, защото

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$$

и следователно интегралът

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

е сходящ. Като вземем предвид, че границата

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\cos p}{p}$$

също съществува, заключаваме, че съществува и границата $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)$, т. е. интегралът (16) е сходящ.

Пример 2. Да се покаже, че интегралът:

$$\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x$$

е сходящ.

---

[1]При $x = 0$ под $\dfrac{\sin x}{x}$ разбираме 1.

Упътване. Разгледайте функцията

$$F(p) = \int_0^p \sin x^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sin x^2 \, \mathrm{d}x + \int_1^p \sin x^2 \, \mathrm{d}x.$$

Направете в интеграла

$$\int_1^p \sin x^2 \, \mathrm{d}x$$

субституцията $x = \sqrt{t}$ и интегрирайте по части.

III. Интегрален критерий на Коши за сходимост

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана, монотонно намаляваща и неотрицателна при $x \geq 0$. В такъв случай редът

$$f(0) + f(1) + f(2) + \cdots$$

е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ интегралът

$$\int_0^\infty f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Доказателство. При $k - 1 \leq x \leq k$ имаме очевидно

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$$

и следователно

$$\int_{k-1}^k f(k) \, \mathrm{d}x \leq \int_{k-1}^k f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_{k-1}^k f(k-1) \, \mathrm{d}x$$

или още

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) \, \mathrm{d}x \leq f(k-1).$$

Давайки на k стойностите $1, 2, \ldots, n$ и събирайки получените неравенства, намираме

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leq \int_0^n f(x) \, \mathrm{d}x \leq f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1).$$

Ако допуснем, че интегралът

$$\int_0^\infty f(x) \, \mathrm{d}x$$

е сходящ, то от неравенството

$$\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

получаваме

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leq \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

или още

$$f(0) + f(1) + \cdots + f(n) \leq f(0) + \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x,$$

откъдето заключаваме, че редът

$$f(0) + f(1) + f(2) + \cdots \tag{17}$$

е сходящ, защото членовете му са неотрицателни и редицата от частичните му суми е ограничена.

Обратно, нека редът (17) е сходящ и S е неговата сума. Каквото и да е положителното число p, ние можем да изберем цяло число n, по-голямо от p. В такъв случай имаме

$$\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

и следователно

$$\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(0) + f(1) + \cdots + f(n-1) \leq S,$$

нещо, което е достатъчно да твърдим, че интегралът

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

е сходящ.

Пример. Редът

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu \ln \nu}$$

е разходящ. И наистина функцията

$$\frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$$

е неотрицателна и монотонно намаляваща при $x \geq 0$, а функцията

$$F(p) = \int_0^p \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\ln(x+2)} = \int_0^p \frac{\mathrm{d}\ln(x+2)}{\ln(x+2)} = \ln\ln(p+2) - \ln\ln 2$$

расте неограничено заедно с p, т. е. интегралът

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\ln(x+2)}$$

е разходящ.

§ 30. Граничен преход под знака на интеграла

Да разгледаме редицата

(1) $$f_1(x), f_2(x), \ldots$$

с общ член

$$f_n(x) = n(n+1)(1-x)x^{n-1}.$$

Очевидно имаме

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = n(n+1)\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x - n(n+1)\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = 1$$

и следователно

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

От друга страна, не е трудно да се види, че редицата (1) клони към нула при $0 \leq x \leq 1$. И наистина при $x = 0$ и $x = 1$ това е очевидно. За да се убедим в това и при $0 < x < 1$, образуваме реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

и установяваме, като си послужим например с критерия на Даламбер, че този ред е сходящ. По такъв начин получаваме

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

От този пример виждаме, че може да се случи да имаме

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Толкова по-интересно е, че е в сила следната теорема:

Ако функциите $f_n(x)$ са непрекъснати в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и ако редицата

(2) $$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$$

е *равномерно* сходяща, то границата

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

съществува и

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Доказателство. Ние ще пишем за краткост

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, защото функциите $f_n(x)$ са непрекъснати и редицата (2) е равномерно сходяща. Това обстоятелство ни позволява да образуваме интеграла

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Избираме едно произволно положително число ε. В такъв случай ние можем да намерим число ν по такъв начин, че при $n > \nu$ и при всички стойности на x от интервала $[a, b]$ да имаме

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Така получаваме при $n > \nu$ следните неравенства:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right| &= \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)]\,\mathrm{d}x \right| \\ &\le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x \le \varepsilon(b-a), \end{aligned}$$

с което интересуващата ни теорема е доказана.

Нека обърнем внимание върху това, че при безкраен интеграционен интервал равномерната сходимост не е достатъчна за валидността на равенството (3). Така например редицата с общ член

$$f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}}$$

равномерно клони към нула при $x \ge 0$, защото

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{n};$$

въпреки това

$$\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty} \int_0^p \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to\infty} \left| -e^{-\frac{x}{n}} \right|_0^p = \lim_{p\to\infty} \left(1 - e^{-\frac{p}{n}} \right) = 1$$

и следователно

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

Теоремата, която доказахме в този параграф, може да се редактира още и така:

Нека редът

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots ,$$

членовете на който са непрекъснати функции на x в интервала $[a, b]$, е равномерно сходящ в този интервал. В такъв случай редът

$$\int_a^b u_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u_2(x)\,\mathrm{d}x + \cdots \tag{4}$$

е сходящ и

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u_2(x)\,\mathrm{d}x + \cdots$$

За да докажем това, полагаме

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x),$$

откъдето получаваме чрез почленно интегриране

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u_2(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

От друга страна, редицата с общ член $f_n(x)$ равномерно клони към $f(x)$ и следователно

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\int_a^b u_\nu(x)\,\mathrm{d}x,$$

което означава, че редът (4) е сходящ и

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{\infty}\int_a^b u_\nu(x)\,\mathrm{d}x.$$

Във връзка с разглеждания в този параграф въпрос за граничен преход под знака на интеграла ние ще докажем следната теорема, върху която може да се изгради едно важно обобщение на понятието интеграл:

Нека

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots$$

е една почти навсякъде сходяща в интервала $a \leq x \leq b$ редица от интегруеми в Риманов смисъл функции, за която съответната редица от интеграли

$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x, \ \int_a^b f_2\,\mathrm{d}x, \ldots$$

е ограничена; ако почти при всички стойности на x от интервала $[a, b]$ тази редица от функции монотонно намалява и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \leq 0.$$

Доказателство. Ние ще извършим доказателството от противното. Нека G е множеството от точките от интервала $[a, b]$, където е нарушено поне едно от условията:

1) Всичките функции $f_n(x)$ са непрекъснати.

2) $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ при всички цели положителни стойности на n.

3) $\lim f_n(x)$ съществува.

4) $\lim f_n(x) \leq 0$.

Очевидно множеството G има мярка нула в смисъл на Лебег—Борел.

Нека $[c, d]$, където $c < d$, е кой да е подинтервал на интервала $[a, b]$. Очевидно

$$\begin{aligned}\int_c^d f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_d^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \lim \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_d^b f_1(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

т. е. монотонно намаляващата редица

$$\int_c^d f_1(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_c^d f_2(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_c^d f_3(x)\,\mathrm{d}x, \ \ldots$$

е сходяща. Да положим

$$\lim \int_c^d f_n(x)\,\mathrm{d}x = I_c^d.$$

Според нашето допускане имаме

$$I_a^b > 0.$$

Да покрием множеството G с такава редица от *отворени* интервали (p_ν, q_ν), където $p_\nu < q_\nu$, че да имаме

$$M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}x < I_a^b,$$

където M е една положителна горна граница на $f_1(x)$, а $\varphi_\nu(x)$ е характеристична[1] функция на интервала (p_ν, q_ν). Това е възможно да се направи, защото множеството G има мярка нула и

$$\int_a^b \varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{p_\nu} \varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}x + \int_{p_\nu}^{q_\nu} \varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}x + \int_{q_\nu}^{b} \varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}x = \int_{p_\nu}^{q_\nu} \mathrm{d}x = q_\nu - p_\nu.$$

По такъв начин, ако положителното число ε е достатъчно малко, ще имаме

$$I_a^b > \varepsilon(b-a) + M\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_a^b \varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}x.$$

Делим интервала $[a, b]$ на две равни части и означаваме с $[a_1, b_1]$ онази половина, за която

$$I_{a_1}^{b_1} > \varepsilon(b_1-a_1) + M\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{a_1}^{b_1} \varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}x.$$

Такава половина сигурно съществува, защото в противен случай, полагайки $c = \dfrac{a+b}{2}$, ще имаме

$$I_a^c \leq \varepsilon(c-a) + M\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_a^c \varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$I_c^b \leq \varepsilon(b-c) + M\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_c^b \varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}x,$$

откъдето чрез почленно събиране ще получим

$$I_a^b \leq \varepsilon(b-a) + M\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_a^b \varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}x,$$

което не е вярно.

По-нататък делим интервала $[a_1, b_1]$ на две равни части и означаваме с $[a_2, b_2]$ сигурно съществуващата половина, за която

$$I_{a_2}^{b_2} > \varepsilon(b_2-a_2) + M\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{a_2}^{b_2} \varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}x.$$

[1]Относно дефиницията вж. § 11 на тази глава.

Продължавайки този процес неограничено, получаваме една Канторова система от интервали $[a_n, b_n]$, подчинени на условието

$$I_{a_n}^{b_n} > \varepsilon(b_n - a_n) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \varphi_\nu(x)\,\mathrm{d}x.$$

Нека x_0 е точката, която принадлежи на всички интервали от системата. Ще покажем, че x_0 не принадлежи на G. И наистина в противен случай точката x_0 ще бъде вътрешна за някой покриващ интервал (p_k, q_k) и следователно при достатъчно голяма стойност на n интервалът $[a_n, b_n]$ ще се съдържа изцяло в (p_k, q_k), поради което

$$\int_{a_n}^{b_n} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a_n}^{b_n} \mathrm{d}t = b_n - a_n,$$

откъдето

$$I_{a_n}^{b_n} > M(b_n - a_n)$$

и толкова повече

$$\int_{a_n}^{b_n} f_1(x)\,\mathrm{d}x > M(b_n - a_n);$$

а това не е възможно, защото

$$f_1(x) \leq M.$$

И така точката x_0 не принадлежи на G и следователно $\lim f_n(x_0) \leq 0$. Оттук заключаваме, че при достатъчно голяма стойност на m ще имаме $f_m(x_0) < \varepsilon$. Нека n е толкова голямо, че при всяко x от интервала $[a_n, b_n]$ да имаме $f_m(x) < \varepsilon$. Това е възможно, защото функцията $f_m(x)$ е непрекъсната в точката x_0, а дължината на интервала $[a_n, b_n]$ клони към нула, когато n расте неограничено. По такъв начин получаваме

$$\int_{a_n}^{b_n} f_m(x)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon(b_n - a_n)$$

и следователно

$$I_{a_n}^{b_n} \leq \varepsilon(b_n - a_n),$$

което противоречи на неравенството

$$I_{a_n}^{b_n} > \varepsilon(b_n - a_n) + M \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \varphi_\nu(t)\,\mathrm{d}t.$$

С това доказателството е завършено.

Преминаваме към обобщението на понятието интеграл, за което споменахме по-горе. За тази цел ще дадем някои дефиниции.

Интеграла

$$\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

ще наричаме първа[1] интегрална норма на функцията $f(x)$.

Ще казваме, че една редица

$$f_1(x), f_2(x), \ldots$$

от интегруеми в интервала (a, b) функции удовлетворява условието на Коши относно първата интегрална норма в този интервал, ако при всеки избор на положителното число ε е изпълнено неравенството

$$\int_a^b |f_n(x) - f_m(x)| \, \mathrm{d}x < \varepsilon$$

при всички достатъчно големи цели стойности на n и m.

Ако редицата (3) от интегруеми в интервала (a, b) функции удовлетворява условието на Коши относно първата интегрална норма, то редицата

$$\int_a^b f_1(x) \, \mathrm{d}x, \ \int_a^b f_2(x) \, \mathrm{d}x, \ldots$$

е сходяща, защото

$$\left| \int_a^b f_n(x) \, \mathrm{d}x - \int_a^b f_m(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f_m(x)| \, \mathrm{d}x$$

и следователно каквото и да бъде положителното число ε, неравенството

$$\left| \int_a^b f_n(x) \, \mathrm{d}x - \int_a^b f_m(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon$$

е изпълнено при всички достатъчно големи цели стойности на n и m.

---

[1] По-общо n-та интегрална норма на функцията $f(x)$ се нарича изразът

$$\sqrt[n]{\int_a^b |f(x)|^n \, \mathrm{d}x}, \text{ където } n \geq 1.$$

Една функция $f(x)$, дефинирана почти навсякъде в един интервал (a, b), ще наричаме сумируема, ако съществува редица от непрекъснати функции

$$f_1(x), f_2(x), \dots, \tag{5}$$

която удовлетворява условието на Коши относно първата интегрална норма и клони почти навсякъде към $f(x)$ в този интервал. В такъв случай границата на редицата

$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x, \dots$$

(която, както видяхме, сигурно съществува) *ще наричаме Лебегов интеграл на функцията $f(x)$ върху интервала (a, b).*

За да се убедим в еднозначността на така дадената дефиниция, разглеждаме още една редица

$$g_1(x), g_2(x), \dots \tag{6}$$

от непрекъснати функции, която удовлетворява условието на Коши относно първата интегрална норма и клони почти навсякъде към $f(x)$.

Избираме редица от цели положителни числа

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

по такъв начин, че да имаме

$$\int_a^b \left|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right| \mathrm{d}x \le \frac{1}{2^i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$
$$\int_a^b \left|g_{n_{i+1}}(x) - g_{n_i}(x)\right| \mathrm{d}x \le \frac{1}{2^i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Това е възможно да се направи, защото редиците (5) и (6) удовлетворяват условието на Коши относно първата интегрална норма. Очевидно имаме почти при всяко x

$$f_{n_p}(x) + \sum_{i=p}^{\infty} \left[f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right] = g_{n_p}(x) + \sum_{i=p}^{\infty} \left[g_{n_{i+1}}(x) - g_{n_i}(x)\right]$$

и следователно

$$f_{n_p}(x) - g_{n_p}(x) - \sum_{i=p}^{\infty} \left|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right| - \sum_{i=p}^{\infty} \left|g_{n_{i+1}}(x) - g_{n_i}(x)\right| \le 0.$$

По такъв начин, като вземем под внимание, че редицата от непрекъснати функции с общ член

$$\varphi_m(x) = f_{n_p}(x) - g_{n_p}(x) - \sum_{i=p}^{p+m} \left| f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x) \right| - \sum_{i=p}^{p+m} \left| g_{n_{i+1}}(x) - g_{n_i}(x) \right|$$

почти при всяко x, монотонно намаляйвайки, клони към граница, която е по-малка или равна на нула, а редицата от интегралите

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f_{n_p}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g_{n_p}(x)\,\mathrm{d}x - 2\sum_{i=p}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

е ограничена, заключаваме, че

$$\lim \int_a^b \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x \leq 0,$$

т. е.

$$\int_a^b f_{n_p}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g_{n_p}(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=p}^{\infty} \int_a^b \left| f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x) \right| \,\mathrm{d}x$$
$$- \sum_{i=p}^{\infty} \int_a^b \left| g_{n_{i+1}}(x) - g_{n_i}(x) \right| \,\mathrm{d}x \leq 0$$

и следователно

$$\int_a^b f_{n_p}(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g_{n_p}(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=p}^{\infty} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=p}^{\infty} \frac{1}{2^i},$$

откъдето

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b f_{n_p}(x)\,\mathrm{d}x \leq \lim_{p\to\infty} \int_a^b g_{n_p}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Аналогично получаваме

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b g_{n_p}(x)\,\mathrm{d}x \leq \lim_{p\to\infty} \int_a^b f_{n_p}(x)\,\mathrm{d}x,$$

което ни дава окончателно

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

§ 31. Интеграли, зависещи от параметри. Диференциране под знака на интеграла

Нека функцията $f(x, \alpha)$ е дефинирана в правоъгълника[1]

$$a \leq x \leq b, \qquad c \leq \alpha \leq d. \tag{1}$$

Ако $f(x, \alpha)$ е интегруема функция на x в интервала $[a, b]$ при всяко фиксирано α от интервала $[c, d]$, можем да образуваме интеграла

$$\int_a^b f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x.$$

Стойността на този интеграл може евентуално да се мени, когато α се изменя. Тя обаче е еднозначно дефинирана, когато α е дадено, и следователно представлява една функция на α, добре дефинирана в интервала $[c, d]$. Ние ще означим тази функция с $F(\alpha)$, така че

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Пример. Интегралът

$$\int_0^\pi \cos(\alpha + x)\,\mathrm{d}x = \Big|\sin(\alpha + x)\Big|_0^\pi = \sin(\alpha + \pi) - \sin\alpha = -2\sin\alpha$$

представлява една функция на α (нека обърнем внимание обаче, че и *неопределеният* интеграл

$$\int \cos(\alpha + x)\,\mathrm{d}x = \sin(\alpha + x)$$

зависи не само от α, но и от x).

Ако $f(x, \alpha)$ е непрекъсната функция на двата си аргумента в правоъгълника (1), интегралът (2) е непрекъсната функция на α. И наистина нека α_0 е коя да е точка от интервала $[c, d]$ и ε е едно произволно положително число. Избираме положителното число δ по такъв начин, че при $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ и $c \leq \alpha \leq d$ да имаме

$$|f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)| < \varepsilon$$

за всички стойности на x от интервала $[a, b]$. Това може да се направи, защото функцията $f(x, \alpha)$ е непрекъсната в крайния и затворен правоъгълник (1) и следователно е равномерно непрекъсната в същия правоъгълник.

[1] Тук се иска правоъгълникът да бъде затворен и краен.

При тези предположения очевидно

$$|F(\alpha)-F(\alpha_0)| = \left|\int_a^b [f(x,\alpha) - f(x,\alpha_0)]\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)|\,\mathrm{d}x \le \varepsilon(b-a),$$

с което е установена непрекъснатостта на функцията $F(\alpha)$ в точката α_0.

Не е трудно да се докаже и следната теорема, която има многобройни приложения:

Нека функцията $f(x,\alpha)$ е дефинирана в правоъгълника

$$\begin{aligned} a &\le x \le b, \\ c &\le \alpha \le d, \end{aligned} \tag{3}$$

интегруема в интервала $[a,b]$ при всяко фиксирано α и диференцуема частно спрямо α при всяко фиксирано x; нека освен това частната производна $f'_\alpha(x,\alpha)$ е непрекъсната в правоъгълника (3). При тези предположения функцията

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$$

е диференцуема в интервала $[c,d]$ и при всяко α_0 от този интервал

$$F'(\alpha_0) = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha_0)\,\mathrm{d}x.$$

И наистина при $h \neq 0$ и $c \le \alpha_0 + h \le d$ имаме

$$\frac{F(\alpha_0+h) - F(\alpha_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_a^b [f(x,\alpha_0+h) - f(x,\alpha_0)]\,\mathrm{d}x.$$

От друга страна, според теоремата за крайните нараствания

$$f(x,\alpha_0+h) - f(x,\alpha_0) = hf'_\alpha(x,\alpha+\theta h),$$

където числото θ се намира в отворения интервал $(0,1)$ и може да се мени заедно с x и h. Оттук получаваме

$$\frac{F(\alpha_0+h) - F(\alpha_0)}{h} - \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha_0)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [f'_\alpha(x,\alpha_0+\theta h) - f'_\alpha(x,\alpha_0)]\,\mathrm{d}x$$

и следователно

$$\left|\frac{F(\alpha_0+h) - F(\alpha_0)}{h} - \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha_0)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b \left|f'_\alpha(x,\alpha_0+\theta h) - f'_\alpha(x,\alpha_0)\right|\mathrm{d}x.$$

От друга страна, функцията $f'_\alpha(x, \alpha)$ е непрекъсната в крайния и затворен правоъгълник (3) и следователно е равномерно непрекъсната. Това обстоятелство ни позволява да твърдим, че при всеки избор на положителното число ε може да се намери положително число δ по такъв начин, че при $|k| < \delta$, $c \leq \alpha_0 + k \leq d$ и при $a \leq x \leq b$ да имаме

$$\left| f'_\alpha(x, \alpha_0 + k) - f'_\alpha(x, \alpha_0) \right| < \varepsilon$$

и следователно при $|h| < \delta$

$$\left| \frac{F(\alpha_0 + h) - F(\alpha_0)}{h} - \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon(b - a),$$

с което доказателството е завършено.

Доказаната теорема може да се обобщи. Така, ако функцията $f(x, \alpha)$ е непрекъсната в правоъгълника (3), притежава непрекъсната частна производна $f'_\alpha(x, \alpha)$ и функциите $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ са дефинирани, диференцуеми в интервала $[c, d]$ и удовлетворяват условията

$$a < \varphi(\alpha) < b, \quad \alpha < \psi(\alpha) < b,$$

функцията

$$\Phi(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x$$

е диференцуема в интервала (c, d) и

$$\Phi'(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha)\,\mathrm{d}x + f[\psi(\alpha), \alpha]\psi'(\alpha) - f[\varphi(\alpha), \alpha]\varphi'(\alpha).$$

И наистина функцията

$$F(\alpha, u, v) = \int_v^u f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x$$

на трите независими променливи α, u, v притежава *непрекъснати* частни производни

$$F'_u(\alpha, u, v) = f(u, \alpha),$$
$$F'_v(\alpha, u, v) = -f(v, \alpha),$$
$$F'_\alpha(\alpha, u, v) = \int_v^u f'_\alpha(x, \alpha)\,\mathrm{d}x.$$

Непрекъснатостта на производните F'_u и F'_v е очевидна, а непрекъснатостта на производната F'_α може да се установи лесно. За тази цел избираме едно произволно положително число ε и означаваме с R една горна граница на $\left|f'_\alpha(x,\alpha)\right|$. Ние можем да изберем положителното число δ толкова малко, че при $|h| < \delta$, $c \le \alpha + h \le d$, $a \le x \le b$ да имаме

$$\left|f'_\alpha(x,\alpha+h) - f'_\alpha(x,\alpha)\right| < \varepsilon.$$

В такъв случай получаваме при $|h| < \delta$, $|k| < \varepsilon$, $|l| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} &a \le u \le b, \quad a \le u+k \le b,\\ &a \le v \le b, \quad a \le v+l \le b \end{aligned}$$

следните неравенства:

$$\begin{aligned} &\left|F'_\alpha(\alpha+h, u+k, v+l) - F'_\alpha(\alpha,u,v)\right| = \left|\int_{v+l}^{u+k} f'_\alpha(x,\alpha+h)\,\mathrm{d}x - \int_v^u f'_\alpha(x,\alpha)\,\mathrm{d}x\right|\\ &= \left|\int_v^u [f'_\alpha(x,\alpha+h) - f'_\alpha(x,\alpha)]\,\mathrm{d}x + \int_{v+l}^{v} f'_\alpha(x,\alpha+h)\,\mathrm{d}x + \int_u^{u+k} f'_\alpha(x,\alpha+h)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\qquad \le \varepsilon|u-v| + |l|R + |k|R \le \varepsilon[b-a+2R], \end{aligned}$$

с което непрекъснатостта на производната е доказана.

Този резултат ни позволява да приложим теоремата за диференциране на съставни функции. И така функцията $\Phi(\alpha)$ е наистина диференцуема и

$$\Phi'(\alpha) = F'_\alpha + F'_u\psi'(\alpha) + F'_v\varphi'(\alpha)$$

или още

$$\Phi'(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\,\mathrm{d}x + f[\psi(\alpha),\alpha]\psi'(\alpha) - f[\varphi(\alpha),\alpha]\varphi'(\alpha).$$

Пример. Видяхме в § 21 на тази глава, че интегралът

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

е сходящ. Сега ще пресметнем неговата стойност. За тази цел разглеждаме помощната функция

$$F(\alpha,p) = \int_0^p e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Доказаната по-горе теорема за диференциране под знака на интеграла ни дава

$$F'_\alpha(\alpha,p) = -\int_0^p e^{-\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}x = \left|\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin x + \cos x)}{\alpha^2+1}\right|_0^p = \frac{e^{-\alpha p}(\alpha \sin p + \cos p)}{\alpha^2+1} - \frac{1}{\alpha^2+1}$$

и следователно

$$F(\alpha, p) = C - \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-tp}(t\sin p + \cos p)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \operatorname{arctg}\alpha, \tag{4}$$

където C не зависи от α. Като вземем пред вид неравенството

$$|F(\alpha, p)| \le \int_0^p e^{-\alpha x}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \le \int_0^p e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{1-e^{-\alpha p}}{\alpha} < \frac{1}{\alpha},$$

заключаваме, че $F(\alpha, p)$ клони към нула, когато α расте неограничено. Извършвайки в неравенството (4) граничния преход $\alpha \to \infty$, получаваме

$$0 = C - \frac{\pi}{2}$$

и следователно $C = \dfrac{\pi}{2}$, откъдето

$$F(\alpha, p) = \frac{\pi}{2} - \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-tp}(t\sin p + \cos p)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \operatorname{arctg}\alpha.$$

Специално при $\alpha = 0$

$$F(0, p) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-tp}(t\sin p + \cos p)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Според дефиницията на понятието несобствен интеграл

$$I = \lim_{p\to\infty} F(0, p).$$

По този начин въпросът за пресмятането на I се сведе към въпроса за намирането на границата

$$l = \lim_{p\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-tp}(t\sin p + \cos p)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t,$$

което може да стане по следния начин:

$$\left|\int_0^{\infty} e^{-tp}\frac{t\sin p + \cos p}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{\infty} e^{-tp}\frac{t|\sin p| + |\cos p|}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \le \int_0^{\infty} e^{-pt}\frac{t+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$
$$\le 2\int_0^{\infty} e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{p},$$

и следователно интересуващата ни граница l е равна на нула. По такъв начин получаваме окончателно

$$l = \frac{\pi}{2}.$$

Общи задачи

1. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

клони към $\ln 2$.

Упътване. Покажете, че редицата клони към определения интеграл

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}.$$

2. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2}.$$

3. Намерете границата с общ член

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}.$$

4. Покажете, че несобственият интеграл

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

е сходящ и пресметнете неговата стойност.

Упътване. Покажете предварително, че

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{\sin 2x}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Отговор. $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

5. Пресметнете интеграла

$$F(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,\mathrm{d}x.$$

Упътване. Покажете, че функцията $F(x)$ е четна, като преобразувате интеграла

$$F(-\alpha) = \int_0^{\pi} \ln(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\,\mathrm{d}x$$

с помощта на субституцията

$$x = \pi - y.$$

Покажете след това, че

$$2F(\alpha) = F(\alpha)+F(-\alpha) = \int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,\mathrm{d}x$$
$$+\int_0^{\pi} \ln(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha^2\cos 2x+\alpha^4)\,\mathrm{d}x,$$

и направете субституцията $2x = y$. Това ще ви даде

$$2F(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \ln(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,\mathrm{d}y.$$

Ако в последния интеграл направите субституцията $y = 2\pi - z$, ще получите

$$\int_{\pi}^{2\pi} \ln(1-2\alpha^2\cos y+\alpha^4)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha^2\cos z+\alpha^4)\,\mathrm{d}z$$

и следователно

$$2F(\alpha) = \frac{1}{2}F(\alpha^2) + \frac{1}{2}F(\alpha^2) = F(\alpha^2).$$

Използувайте този резултат, за да покажете, че

$$F(\alpha) = \frac{F(\alpha^{2^n})}{2^n}.$$

От друга страна, очевидно

$$1 - 2|\lambda| + \lambda^2 \leq 1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2 \leq 1 + 2|\lambda| + \lambda^2$$

и следователно при $\alpha \neq \pm 1$

$$\pi \ln(1 - \alpha^{2^n})^2 \leq F(\alpha^{2^n}) \leq \pi \ln(1 + \alpha^{2^n})^2.$$

Използувайте този резултат, за да покажете, че при $|\alpha| < 1$ имаме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(\alpha^{2^n})}{2^n} = 0$$

и следователно $F(\alpha) = 0$. За да пресметнете стойността на $F(\alpha)$ при $|\alpha| > 1$, положете $\alpha = \dfrac{1}{\beta}$ и използувайте равенството

$$F(\alpha) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\beta\cos x + \beta^2)\,\mathrm{d}x - \pi\ln\beta^2.$$

Това ще ви даде

$$F(\alpha) = \pi\ln\alpha^2.$$

За да пресметнете интеграла при $\alpha = \pm 1$, използувайте по-предната задача. Това ще ви даде $F(1) = F(-1) = 0$.

6. Нека $\varphi(x)$ е функция, дефинирана при $0 < x \leq 1$ по следния начин: $\varphi = \dfrac{1}{q}$, когато $x = \dfrac{p}{q}$, където p и q са цели взаимно прости числа; $\varphi(x) = 0$, когато x е ирационално число. Докажете, че функцията $\varphi(x)$ е интегруема в Риманов смисъл в интервала $[0, 1]$ (при все че тя е прекъсната за всички рационални стойности на x от дефиниционния си интервал). Покажете, че функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната за всички ирационални стойности на x от интервала $0 < x \leq 1$.

7. Нека функцията $f(x)$ е неотрицателна и непрекъсната в интервала $[a, b]$. Покажете, че равенството

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

е изпълнено само ако $f(x) = 0$ за всички стойности на x от интервала $[a, b]$.

Упътване. Нека $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Покажете, че

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{1}$$

като си послужите с равенството

$$\int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\beta^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

и неравенствата

$$\int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$
$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$
$$\int_\beta^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Приложете за равенството (1) теоремата за средните стойности и покажете по този начин, че функцията $f(x)$ се анулира поне веднъж във всеки подинтервал $[\alpha,\beta]$ на интервала $[a,b]$. Използувайте този резултат, за да покажете, че непрекъснатата функция $f(x)$ се анулира тъждествено.

8. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в интервала $[a,b]$. Покажете, че е в сила неравенството

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

При това равенството

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 = \left[\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

е изпълнено тогава и само тогава, когато

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = 0$$

при подходящ избор на константите λ и μ, от които поне едната е различна от нула (Буняковски—Шварц).

Упътване. Квадратичната форма

$$\int_a^b \left[\lambda f(x) + \mu g(x)\right]^2\,\mathrm{d}x = \lambda^2\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2\lambda\mu\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \mu^2\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$$

е способна да приема само неотрицателни стойности, когато $a \leq b$, и следователно дискриминантата ѝ не е положителна.

9. Нека функцията $F(x,y)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения триъгълник

$$a \leq x \leq b,$$
$$a \leq y \leq x.$$

Покажете, че

$$\int_a^b \left[\int_a^x F(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_y^b F(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

(Дирихле — Dirichlet).

Упътване. Сравнете производните на двете функции

$$f(t) = \int_a^t \left[\int_a^x F(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$
$$g(t) = \int_a^t \left[\int_y^t F(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

където $a \leq t \leq b$.

10. Да се пресметне интегралът

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x,$$

където n е цяло положително число.

Упътване. Установете предварително следната редукционна формула:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Отговор. Ако n е четно, т. е. $n = 2m$, където m е цяло,

$$I_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3 \,.\, 1}{2m(2m-2)\ldots 4 \,.\, 2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

Ако n е нечетно, т. е. $n = 2m + 1$, където m е цяло,

$$I_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)\ldots 4 \,.\, 2}{(2m+1)(2m-1)\ldots 5 \,.\, 3}.$$

11. Докажете, че

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 6 \ldots 2n \,.\, 2n}{1 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots (2n-1)(2n+1)} \cdots \tag{2}$$

(Формула на Джон Валис — J. Wallis).

Забележка. Често формулата (2) се записва във вида

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \,.\, 2}{1 \,.\, 3} \cdot \frac{4 \,.\, 4}{3 \,.\, 5} \cdot \frac{6 \,.\, 6}{5 \,.\, 7} \cdots \frac{2n \,.\, 2n}{(2n-1)(2n+1)} \cdots$$

Упътване. Послужете си с неравенствата

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \,\mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \,\mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \,\mathrm{d}x$$

и използувайте предната задача.

12. Да се докаже, че

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

(Л. Ойлер — L. Euler).

Упътване. Използувайте развитието

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

което е равномерно сходящо при $-1 \le x \le 1$.

Положете $\arcsin x = t$. По такъв начин ще получите развитието

$$t = \sin t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots 2n} \cdot \frac{\sin^{2n+1} t}{2n+1} \tag{3}$$

при $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, което е също тъй равномерно сходящо. Интегрирайте двете части на равенството (3) от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и използувайте задача 10.

13. Докажете, че

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(Ойлер).

Упътване. Използувайте предната задача, като покажете, че

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right]$$
$$+ \frac{1}{4}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right] + \frac{1}{4^2}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right] + \cdots$$

14. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана при $x \geq 0$, има непрекъсната производна и нека интегралът

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

е сходящ. Докажете, че

$$\int_0^\infty \frac{f(x) - f(\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x = f(0)\ln\alpha,$$

където $\alpha > 0$.

Упътване. Разгледайте функцията

$$F(\alpha, p) = \int_0^p \frac{f(x) - f(\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

където $p > 0$. Покажете, че

$$F'_\alpha(\alpha, p) = \frac{f(0)}{\alpha} - \frac{f(\alpha p)}{\alpha},$$

и използувайте този резултат, за да получите равенството

$$F(\alpha, p) = f(0)\ln\alpha - \int_1^\alpha \frac{f(tp)}{t}\,\mathrm{d}t,$$

което след субституцията $tp = u$ ще ви даде

$$F(\alpha, p) = f(0)\ln\alpha - \int_p^{p\alpha} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Извършете в последното равенство граничния преход $p \to \infty$.

15. Да се покаже, че

$$\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}}\,\mathrm{d}x = e^{-2\alpha}\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha \geq 0$$

(Лаплас — Laplace).

Упътване. Разгледайте функцията

$$F(\alpha, p) = \int_{\frac{\alpha}{p}}^p e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

където $p > 0$, $\alpha > 0$, и използувайте равенството

$$F'_\alpha(\alpha, p) = -2\alpha\int_{\frac{\alpha}{p}}^p e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{1}{p}e^{-\frac{\alpha^2}{p^2} - p^2},$$

което след субституцията $x = \dfrac{\alpha}{t}$ ще ви даде при $\alpha > 0$

$$F'_\alpha(\alpha, p) + 2F(\alpha, p) = -\frac{1}{p} e^{-\frac{\alpha^2}{p^2} - p^2}.$$

Покажете, че при $\alpha \geq 0$

$$e^{2\alpha} F(\alpha, p) = C - \frac{e^{-p^2}}{p} \int_0^\alpha e^{\frac{t^2}{p} + 2t}\, \mathrm{d}t, \tag{4}$$

където C не зависи от α. За да пресметнете стойността на C, положете $\alpha = 0$. Извършете граничен преход $p \to \infty$ в равенството (4).

16. Да се покаже, че

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\alpha x\, \mathrm{d}x = e^{-\alpha^2} \int_0^\infty e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$$

(Лаплас).

Упътване. Разгледайте функцията

$$F(\alpha, p) = \int_0^p e^{-x^2} \cos 2\alpha x\, \mathrm{d}x$$

и покажете ,че

$$F'_\alpha(\alpha, p) = -2 \int_0^p e^{-x^2} x \sin 2\alpha x\, \mathrm{d}x = e^{-p^2} \sin 2\alpha p - 2\alpha \int_0^p e^{-x^2} \cos 2\alpha x\, \mathrm{d}x$$

или още

$$F'_\alpha(\alpha, p) + 2\alpha F(\alpha, p) = e^{-p^2} \sin 2\alpha p.$$

Използувайте този резултат, за да покажете, че

$$e^{\alpha^2} F(\alpha, p) = C + e^{-p^2} \int_0^\alpha e^{t^2} \sin 2pt\, \mathrm{d}t, \tag{5}$$

където C не зависи от α. Пресметнете стойността на C, като поставите $\alpha = 0$. Извършете в равенството (5) граничния преход $p \to \infty$.

Дефиниция. Казваме, че две функции $f(x)$ и $g(x)$ са ортогонални помежду си в интервала $[a, b]$, когато

$$\int_a^b f(x) g(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Разбира се, понятието ортогоналност има смисъл само когато произведението $f(x)g(x)$ представлява *интегруема* (в собствен или несобствен смисъл) функция.

Казваме, че редицата от функциите

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots \tag{6}$$

образува една ортогонална система в интервала $[a, b]$, когато всеки две (различни по номер) функции от тази редица са ортогонални помежду си. Казваме, че ортогоналната система (6) е нормирана, когато квадратът на всяка една от функциите е интегруем в интервала $[a, b]$ и

$$\int_a^b f_k^2(x)\, \mathrm{d}x = 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

17. Покажете че функциите

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

образуват ортогонална и нормирана система в интервала $[0, 2\pi]$.

18. Покажете, че функциите

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \dots$$

образуват ортогонална и нормирана система в интервала $[0, \pi]$.

19. Покажете, че функциите

$$\frac{T_n(x)}{\sqrt[4]{1 - x^2}},$$

където

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x]$$

е n-ти полином на Чебишев, образуват ортогонална система в интервала $[-1, 1]$.

20. Покажете, че n-тият полином на Лежандър

$$P_n(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2 - 1)^n$$

е ортогонален в интервала $[-1, 1]$ на всички полиноми, чиято степен е по-ниска от n.

Упътване. Покажете предварително чрез интегриране по части, че при $k < n$

$$\int_{-1}^{1} x^k \frac{\mathrm{d}^n(x^2 - 1)^n}{\mathrm{d}x^n}\, \mathrm{d}x = (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n \frac{\mathrm{d}^n x^k}{\mathrm{d}x^n} dx = 0.$$

21. Покажете, че полиномите

$$\frac{1}{n!2^n} \sqrt{\frac{2n + 1}{2}} P_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

където

$$P_n(x) = \frac{\mathrm{d}^n(x^2 - 1)^n}{\mathrm{d}x^n}$$

(вж. предната задача), образуват ортогонална и нормирана система.

22. Нека непрекъснатите функции

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots \tag{7}$$

образуват ортогонална и нормирана система в крайния интервал $[a, b]$ и нека редът

$$\varphi(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + \cdots \tag{8}$$

е равномерно сходящ. Покажете, че

$$a_k = \int_a^b \varphi(x) f_k(x)\, \mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \dots$$

Упътване. Умножете двете части на равенството (8) с $f_k(x)$ и интегрирайте от a до b.

23. Нека функциите

(9) $$f_1(x), f_2(x), \ldots$$

образуват ортогонална и нормирана система в интервала $[a, b]$ и нека $f(x)$ е една функция, за която интегралите

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x, \int_a^b f(x)f_k(x)\,\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

имат смисъл. Да се докаже, че при всички цели положителни стойности на n е в сила неравенството

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

където

$$a_k = \int_a^b f(x)f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

(Бесел — Bessel).

Упътване. Покажете, че

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f_\nu(x) \right]^2 \mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2.$$

24. Нека функцията $f(x)$ и функциите (9) удовлетворяват условията на предната задача. Покажете, че интегралът[1]

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu(x) \right]^2 \mathrm{d}x$$

има най-малка стойност, когато

$$c_\nu = \int_a^b f(x)f_\nu(x)\,\mathrm{d}x.$$

Упътване. Положете[2]

$$a_\nu = \int_a^b f(x)f_\nu(x)\,\mathrm{d}x$$

[1]Стойността на този интеграл зависи от избора на константите

$$c_1, c_2, \ldots, c_n.$$

[2]Числата

$$a_\nu = \int_a^b f(x)f_\nu(x)\,\mathrm{d}x$$

се наричат Фуриерови коефициенти на функцията $f(x)$ по отношение на ортогоналната и нормирана система (9).

Редът

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x) + \cdots$$

независимо от това, дали е сходящ, или не и независимо от стойността на неговата сума, се нарича Фуриеров ред на функцията $f(x)$ по отношение на ортогоналната и нормирана система (9).

и използувайте тъждеството

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f_\nu(x)\right]^2 \mathrm{d}x + \sum_{\nu=1}^{n}(c_\nu - a_\nu)^2.$$

25. Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ са нулите на n-тия полином на Лежандър

$$P_n(x) = \frac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n}.$$

Покажете, че:

а) формулата на Котс

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_n f(x_n), \tag{10}$$

където коефициентите $a_1, a_2, \dots, a_n$ се определят от равенствата (7) от § 28 на тази глава, е вярна, когато $f(x)$ е полином, чиято степен не надминава $2n-1$;

б) коефициентите $a_1, a_2, \dots, a_n$ са положителни;

в) не е възможно да се изберат точките $x_1, x_2, \dots, x_n$ и коефициентите $a_1, a_2, \dots, a_n$ така, че равенството (10) да бъде вярно при всички полиноми, чиято степен не надминава $2n$. (Гаус — C. F. Gauss). *Упътване.* а) Както е известно от алгебрата, полиномът $f(x)$, чиято степен не надминава $2n-1$, може да се представи във вида

$$f(x) = \varphi(x)P_n(x) + R(x),$$

където $\varphi(x)$ и $R(x)$ са полиноми, чиято степен не надминава $n-1$. Използувайте задача 20 и докажете, че

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \varphi(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} R(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} R(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu R(x_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f(x_\nu).\end{aligned}$$

б) Разгледайте полиномите

$$\varphi_i(x) = \frac{P_n^2(x)}{(x-x_i)^2},$$

чиято степен е равна на $2n-2$, и използувайте тъждеството

$$\int_{-1}^{1} \varphi_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_i(x_\nu) = a_i\varphi_i(x_i) = a_i P_n'^2(x_i).$$

в) Разгледайте полинома

$$F(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)^2\dots(x-x_n)^2.$$

В такъв случай формулата (10) приема вида

$$\int_{-1}^{1} F(x)\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f_\nu(x_\nu) = 0,$$

което не е възможно, защото полиномът $F(x)$ приема само неотрицателни стойности, но не се анулира тъждествено.

26. Да разгледаме редицата от полиномите

$$B_1(x), B_1(x), B_1(x), \dots,$$

дефинирани с условията

$$B_1(x) = x - 1,$$
$$B_{n+1}(x) = n\int_0^x B_n(t)\,\mathrm{d}t - nx\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \dots$$

(полиноми на Бернули), и да положим

$$B_n = B'_{n+1}(1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(числа на Бернули).

Докажете, че

1) $B_n(0) = 0$, $n = 2, 3, 4, \dots$, $B_n(1) = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$
2) $B'_{n+1}(x) = nB_n(x) - n\displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t$, $n = 1, 2, 3, \dots$
3) $[B_n(x+1) - B_n(x)]' = (n-1)[B_{n-1}(x+1) - B_{n-1}(x)]$, $n = 2, 3, \dots$
4) $B_n(x+1) - B_n(x) = x^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$
Извършете доказателството индуктивно и използувайте равенствата $B_n(0) = B_n(1) = 0$ (при $n = 2, 3, \dots$).
5) $B_n(2) = 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$
6) $[B_{2n+2}(x) - B_{2n+2}(2-x)]'' = (2n+1)2n[B_{2n}(x) - B_{2n}(2-x)]$, $n = 1, 2, 3, \dots$
7) $B_{2n}(x) - B_{2n}(2-x) = (x-1)^{2n-1}$, $n = 1, 2, \dots$
(Пресметнете стойността на разликата $B_{2n}(x) - B_{2n}(2-x)$ при $x = 0$ и $x = 1$ и извършете доказателството индуктивно.)
8) $B'_{2n}(x) + B'_{2n}(2-x) = (2n-1)(x-1)^{2n-2}$, $n = 1, 2, \dots$
9) $B_{2n-1} = 0$, $n = 2, 3, 4, \dots$
10) $B'_2(1) = -B'_2(0) = \dfrac{1}{2}$, $B'_{n+1}(0) = B'_{n+1}(1)$, $n = 0, 2, 3, 4, \dots$
11) $B_n = -n\displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t$, $n = 1, 2, \dots$
12) $B''_n(x) = (n-1)B'_{n-1}(x)$, $n = 2, 3, 4, \dots$
13) $B_n^{(k)}(x) = (n-1)B_{n-1}^{(k-1)}(x)$, $n = 2, 3, 4, \dots$; $k = 2, 3, 4, \dots$
14) $B_n^{(k)}(x) = (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)B'_{n-k+1}(x)$, $2 \le k \le n$.
15) $B_n^{(k)}(1) = (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)B_{n-k}$, $2 \le k \le n$.
16) $B_n^{(k)}(1) = \dfrac{k!}{n}\dbinom{n}{k}B_{n-k}$, $1 \le k \le n$.
17)

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}(x-1)^k. \tag{11}$$

18) $n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$

(положете $x = 2$ в равенството (11)).

19) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} B_{n-k} = 0, \; n = 1, 2, 3, \ldots$

(положете в тъждеството (11) $x = 0$).

20) $1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = B_{k+1}(n + 1)$.

21) $|B_n(x)| \le (n - 1)!\, 2^{n-1}, \; 0 \le x \le 1$.

22) $|B_n| \le n!\, 2^{n-1}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$

23) $\dfrac{xe^x}{e^x - 1} = B_0 + \dfrac{B_1}{1!}x + \dfrac{B_2}{2!}x^2 + \dfrac{B_3}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{B_n}{n!}x^n + \cdots$

при достатъчно малки значения на $|x|$. *Упътване*. Покажете, че редът $\sum_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{B_\nu}{\nu!} x^\nu$ е сходящ при достатъчно малки значения на $|x|$ и

$$(e^x - 1) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu x^\nu}{\nu!} = xe^x.$$

27. Нека $B_n(x)$ е n-тият полином на Бернули[1], а B_n е n-тото Бернулиево[1] число. Нека $P_n(x)$ са периодични функции с период 1, дефинирани при $0 \le x < 1$ с условието

$$P_n(x) = \frac{nB_n(x) + B_n}{n!}.$$

Покажете, че[2]

1) $P_1(x) = x - [x] - \dfrac{1}{2}$.

2) Функциите $P_n(x)$, $n = 2, 3, \ldots$, са непрекъснати дори тогава, когато x е цяло число.

Упътване. Покажете, че

$$\lim_{x \to 1} P_n(x) = P_n(0).$$

3) Покажете, че функциите $P_n(x)$, $n = 3, 4, 5, \ldots$, са диференцуеми дори тогава, когато x е цяло число.

4) $P'_{n+1}(x) = P_n(x), \; n = 2, 3, \ldots$

5) $P_n(1) = P_n(0) = \dfrac{B_n}{n!}, \; n = 2, 3, \ldots$

28. Нека функцията $f(x)$ диференцуема и има непрекъсната първа производна при $x \le 0$. Покажете, че[3]

$$f(0) + f(1) + \cdots + f(n) = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{f(0) + f(n)}{2} + \int_0^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

[1] Вижте предната задача.

[2] Символът $[x]$ означава най-голямото цяло число, което не надминава x.

[3] Символът $[x]$ означава най-голямото цяло число, което не надминава x.

(сумационна формула на Ойлер—Маклорен). *Упътване*. Използувайте равенството

$$\int_0^n \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right) f'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(x-k-\frac{1}{2}\right) f'(x)\,\mathrm{d}x$$

и интегрирайте по части.

29. Нека функцията $f(x)$ диференцуема $2k+1$ пъти при $x \geq 0$ и производната ѝ от ред $2k+1$ е непрекъсната. Да се докаже, че при означенията в задачи 26 и 27 имаме

$$f(0)+f(1)+\cdots+f(n) = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{f(0)+f(n)}{2}$$
$$+\frac{B_2}{2!}[f'(n)-f'(0)] + \frac{B_4}{4!}[f'''(n)-f'''(0)] + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n)-f^{(2k-1)}(0)] + R_k,$$

където

$$R_k = \int_0^n P_{2k+1}(x) f^{(2k+1)}(x)\,\mathrm{d}x$$

(сумационна формула на Ойлер—Маклорен; обобщение на сумационната формула от предната задача.)

Упътване. Извършете във формулата (12) неколкократно интегриране по части и използувайте задача 27.

30. Нека функцията $f(x)$ е положителна и монотонно намаляваща при $x \geq 0$. Ако при всички достатъчно големи стойности на x имаме

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \leq q < 1, \tag{13}$$

то редът

$$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots \tag{14}$$

е сходящ. Ако при всички достатъчно големи стойности на x имаме

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \geq 1, \tag{15}$$

то редът (14) е разходящ (критерий на Ермаков).

Упътване. Ако е изпълнено условието (13), то при $x \geq x_0$, където x_0 е достатъчно голямо, имаме

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} e^t f(e^t)(\mathrm{d}t) \leq q \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

и следователно

$$(1-q)\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t \leq q\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$
$$\leq q\left[\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x}^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t\right] \leq q\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Заключете оттук, че интегралът $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ е сходящ и приложете интегралния критерий на Коши.

Ако е изпълнено условието (15), то при $x \geq x_1$, където x_1 е достатъчно голямо, имаме

$$\int_{e^{x_1}}^{e^x} t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x} e^t f(e^t)\,\mathrm{d}t \geq \int_{x_1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

и следователно

$$\int_{x}^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_{x_1}^{e^{x_1}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Заключете оттук, че интегралът $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ е разходящ и приложете интегралния критерий на Коши.

31. Нека дефинираме функцията $\Gamma(x)$ (четете — гама икс) при $x > 0$ по следния начин:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t. \tag{16}$$

Наричаме интеграла (16) сходящ, когато двата интеграла

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

са сходящи, и полагаме по дефиниция

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Забележка. Означенията, които ще въвеждаме в някои от точките, ще използваме и в следните точки.

Да се докаже следното:

1) Интегралът

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

е сходящ при $x > 0$.

2) Ако x е цяло положително число, то

$$\Gamma(x) = (x-1)!\ .$$

3) Функцията $\Gamma(x)$ е диференцуема безбройно много пъти.

4) Ако една функция $\psi(x)$ е диференцуема два пъти в някой интервал Δ и втората ѝ производна е неотрицателна, то при фиксирано x отношението

$$\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h}$$

е монотонно растяща функция на h, когато x и $x+h$ принадлежат към Δ.

5) Функцията $\Gamma(x)$ притежава следните свойства при всички положителни стойности на x:

а) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;

б) $\Gamma(x) > 0$;

в) $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big[\ln\Gamma(x)\Big] > 0$;

г) $\Gamma(1) = 1$.

Тези условия ще наричаме кратко условия на Бор—Моллеруп.

6) Ако една функция $f(x)$ е дефинирана при $x > 0$, два пъти е диференцуема и удовлетворява при всички положителни стойности на x условията

а) $f(x+1) = xf(x)$;

б) $f(x) > 0$;

в) $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Big[\ln f(x)\Big] > 0$;

г) $f(1) = 1$,

то $f(x) = \Gamma(x)$.
(H. Bohr и J. Mollerup; E. Artin).
Упътване. Като използуваме неравенствата

$$\frac{\ln f(-1+n) - \ln f(n)}{(-1+n)-n} \le \frac{\ln f(x+n) - \ln f(n)}{(x+n)-n} \le \frac{\ln f(1+n) - \ln f(n)}{(1+n)-n}$$

при цели, по-големи от 1 стойности на n и при $0 < x \le 1$, покажете, че

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \le f(x) \le \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\,\frac{x+n}{n}$$

и заключете оттук, че

$$\frac{n}{x+n} f(x) \le \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \le f(x).$$

Използувайте тези неравенства, за да установите, че

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

и следователно $f(x) = \Gamma(x)$ при $0 < x \le 1$. Разпространете този резултат за всички положителни стойности на x, като използувате равенствата $\Gamma(x{+}1) = x\Gamma(x)$ и $f(x{+}1) = xf(x)$.
Забележка. Представянето

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

произхожда от Гаус.

7) Нека при $x > 0$ положим

$$g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1.$$

Покажете, че

$$0 < g(x) < \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)}.$$

Упътване. Очевидно

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^4} + \frac{1}{7(2x+1)^6} + \cdots \\ &< \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{3(2x+1)^4} + \frac{1}{3(2x+1)^6} + \cdots = \frac{1}{12(x+1)} = \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)}. \end{aligned}$$

8) Да се докаже, че редът
$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n)$$
е сходящ при $x > 0$ и $0 < \mu(x) < \dfrac{1}{12x}$.

9) Да се покаже, че
$$\Gamma(x) = x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\frac{\theta}{12x}} \sqrt{2\pi},$$
където $0 < \theta < 1$ (θ изобщо зависи от x) (Стирлинг — Stirling).

Упътване. Покажете, че функцията
$$f(x) = Ax^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\mu(x)}$$
удовлетворява условията на Бор—Молеруп при подходящ избор на константата A. Пресметнете A от формулата на Валис, която може да се напише във вида
$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^4}{(2n!)^2 n}$$
(вж. задача 11).

10) Да се покаже, че
$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x)$$
(Лежандр).

11) Покажете, че дефиницията на $\Gamma(x)$ може еднозначно да се продължи и за отрицателни стойности на x, които не са цели, по такъв начин, че да имаме
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

12) Покажете, че при всички стойности на x, които не са цели, имаме
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Упътване. Разгледайте функцията $\varphi(x)$, дефинирана с условието
$$\varphi(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin \pi x,$$
при нецели стойности на x и с условието $\varphi(x) = \pi$, когато x е цяло. Покажете че
$$\varphi(x+1) = \varphi(x) \text{ и } \varphi(x) > 0.$$
Покажете, че функцията $\varphi(x)$ е безбройно много пъти диференцуема, включително и в целочислените точки, като вземете под внимание, че при $-1 < x < 1$ е валидно представянето
$$\varphi(x) = \Gamma(1+x)\Gamma(1-x)\left(\pi - \frac{\pi^3 x^2}{3!} + \frac{\pi^5 x^4}{5!} - \cdots\right)$$
и като използувате периодичността на $\varphi(x)$. Покажете с помощта на формулата на Лежандр от т. 10, че
$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = C\varphi(x),$$

където C е константа. Положете

$$g(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln \varphi(x)$$

и покажете, че

$$\frac{1}{4}\left[g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = g(x). \tag{17}$$

Установете, че функцията $g(x)$ е периодична и непрекъсната и следователно е ограничена. Нека L е точната горна граница на $|g(x)|$. Покажете с помощта на (17), че

$$|g(x)| \leq \frac{1}{2}L$$

и следователно $L \leq \frac{1}{2}L$, т. е. $L = 0$. Установете с помощта на този резултат, че функцията $\ln \varphi(x)$ е линейна. Покажете, че тя е константа, като използувате нейната периодичност. Покажете, че при всяко x имаме $\varphi(x) = \pi$.

13) Покажете, че при всяко x имаме

$$\sin \pi x = \lim_{n\to\infty}\left[\pi x\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right]$$

(Ойлер).

Забележка. Често тази формула се записва във вида

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right).$$

Упътване. Използувайте, че при всяко x, което не е цяло,

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{-x\Gamma(x)\Gamma(-x)},$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

По този начин ще получите исканото представяне на $\sin \pi x$ при нецели стойности на x. Когато x е цяло, направете директна проверка.

14) Да се покаже, че при $x > 0$ и $y > 0$

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Упътване. Покажете, че функцията

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

при фиксирано y удовлетворява условията на Бор—Молеруп.

32. Да се покаже, че Неперовото число е трансцендентно, т. е. че то не удовлетворява никое алгебрично уравнение с цели коефициенти (Ермит — Hermite).

Упътване. Допуснете, че числото e удовлетворява уравнението

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0,$$

чиито коефициенти са цели; положете

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(m)}(x),$$

където $f(x)$ е полином от m-та степен, и като използувате, че

$$F(x) = e^x F(0) - e^x \int_0^x f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

установете тъждеството

$$a_0 F(0) + a_1 F(1) + \cdots + a_n F(n) + \sum_{k=0}^{n} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Изберете полинома $f(x)$ по следния начин:

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p \ldots (n-x)^p.$$

Като вземете под внимание, че произведение на p последователни цели числа винаги се дели на $p!$, покажете, че коефициентите на полиномите

$$f^{(p)}(x), f^{(p+1)}(x), \ldots, f^{(pn+p-1)}(x)$$

цели числа, които се делят на p. Като използувате това обстоятелство и обстоятелството, че

$$f^{(s)}(1) = f^{(s)}(2) = \cdots = f^{(s)}(n) = 0$$

при $s = 0, 1, \ldots, p-1$, покажете, че числата

$$F(1), F(2), \ldots, F(n)$$

са цели и се делят на p. От друга страна, като вземем под внимание, че

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(p-2)}(0) = 0$$

и

$$f^{(p-1)}(0) = (n!)^p,$$

покажете, че числото

$$F(0) = f(0) + f'(0) + \cdots + f^{(p-2)}(0) + f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \cdots + f^{(pn+n-1)}(0)$$

е цяло, но не се дели на p, ако p е просто число, по-голямо от n. Използувайте този резултат и обстоятелството, че $a_0 \neq 0$, за да покажете, че числото

$$a_0 F(0) + a_1 F(1) + \cdots + a_n F(n)$$

е цяло и различно от нула, когато p е достатъчно голямо.

След всичко това използувайте оценката

$$\left| \int_0^k f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{(p-1)!} n^{np+p-1} \int_0^k e^{-t}\,\mathrm{d}t < \frac{1}{(p-1)!} n^{np+p-1},$$

валидна при $0 \leq k \leq n$, за да покажете, че числото p може да се избере толкова голямо, че да имаме

$$|a_0 F(0) + a_1 F(1) + \cdots + a_n F(n)| < 1,$$

което не е възможно.

Част II

ДВОЙНИ И ТРОЙНИ ИНТЕГРАЛИ

Глава I

ДВОЙНИ ИНТЕГРАЛИ

§ 1. Дефиниция на понятието двоен интеграл

Нека ни е дадена една функция $f(x, y)$, дефинирана и ограничена в едно измеримо точково множество R. Делим множеството R на краен брой измерими подмножества

$$R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n \tag{1}$$

по такъв начин, че мярката на сечението на всеки две от тях да бъде нула и сумата

$$R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

да представлява точно множеството R. Нека σ_i е лицето на множеството R_i и нека M_i и m_i са съответно точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството на R_i. Сумата

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i$$

се нарича голяма, а сумата

$$S = \sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i$$

се нарича малка сума на Дарбу, която отговаря на избрания начин на деление на множеството R на измерими подмножества (1). Не е трудно да се установят неравенствата

$$m\sigma \leq s \leq S \leq M\sigma, \tag{2}$$

където M и m означават съответно една горна и една долна граница на $f(x, y)$ в множеството R, а σ е лицето на R.

И наистина неравенствата

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M$$

ни дават

$$m\sigma_i \le m_i\sigma_i \le M_i\sigma_i \le M\sigma_i$$

и следователно

$$m\sum_{i=1}^{n}\sigma_i \le \sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i \le M\sum_{i=1}^{n}\sigma_i,$$

откъдето получаваме веднага неравенствата (2), като вземем пред вид, че

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i = \sigma.$$

Неравенствата (2) ни учат, че както множеството на малките, така и множеството на големите суми на Дарбу е ограничено (и отгоре, и отдолу). Точната горна граница на множеството на малките суми се означава със символа

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

и се нарича долен интеграл на функцията $f(x,y)$, разпространен върху множеството R, а точната долна граница на големите суми се означава със символа

$$\overline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

и се нарича горен интеграл на функцията $f(x,y)$, разпространен върху множеството R.

Не е трудно да се установи неравенството

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \overline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

За тази цел делим множеството R по два произволни начина на измерими подмножества

$$A_1, A_2, \dots, A_p$$

и

$$B_1, B_2, \dots, B_q$$

така, че да имаме

$$R = A_1 + A_2 + \cdots + A_p,$$
$$R = B_1 + B_2 + \cdots + B_q$$

и

$$\mu(A_iA_k) = 0, \quad \mu(B_iB_k) = 0$$

при $i \neq k$.

Да означим с M_i точната горна граница на $f(x, y)$ в A_i, а с m_k — точната долна граница на $f(x, y)$ в B_k. Ще покажем, че между голямата сума

$$S = \sum_{i=1}^{p} M_i\mu(A_i)$$

и малката сума

$$s = \sum_{k=1}^{q} m_k\mu(B_k)$$

на Дарбу е в сила неравенството

$$s \leq S. \tag{3}$$

За да покажем това, означаваме с M_{ik} и m_{ik} съответно точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството[1] A_iB_k и разглеждаме двете суми на Дарбу

$$S^* = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} M_{ik}\mu(A_iB_k),$$
$$s^* = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} m_{ik}\mu(A_iB_k).$$

Не е трудно да се види, че

$$m_k\mu(A_iB_k) \leq m_{ik}\mu(A_iB_k) \leq M_{ik}\mu(A_iB_k) \leq M_i\mu(A_iB_k). \tag{4}$$

И наистина, ако сечението A_iB_k не е празно, очевидно

$$m_k \leq m_{ik} \leq M_{ik} \leq M_i$$

и следователно в този случай неравенството (4) е вярно. Ако ли пък сечението A_iB_k е празно, $\mu(A_iB_k) = 0$ и следователно неравенствата (4) са верни и в този случай, както и да избираме числата M_{ik} и m_{ik}.

Като съберем почленно неравенствата (4), получаваме

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} m_k\mu(A_iB_k) \leq s^* \leq S^* \leq \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} M_i\mu(A_iB_k). \tag{5}$$

[1] Ако сечението A_iB_k е празно, то с M_{ik} и m_{ik} означаваме кои да са две числа.

От друга страна, като вземем пред вид, че

$$A_iB_k \,.\, A_sB_k \subset A_iA_s$$

и следователно при $i \neq s$

$$\mu(A_iB_k \,.\, A_sB_k) = 0,$$

намираме

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} m_k\mu(A_iB_k) = \sum_{k=1}^{q} m_k \sum_{i=1}^{p}\mu(A_iB_k) = \sum_{k=1}^{q} m_k\mu(B_k) = s.$$

Аналогично получаваме

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} M_i\mu(A_iB_k) = \sum_{i=1}^{p} M_i \sum_{k=1}^{q}\mu(A_iB_k) = \sum_{i=1}^{p} M_i\mu(A_i) = S.$$

По такъв начин неравенствата (5) приемат вида

$$s \leq s^* \leq S^* \leq S.$$

С това е установена валидността на неравенството (3).

След всичко изложено не е трудно да се покаже, че

$$\underline{\iint}_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \overline{\iint}_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

И наистина, като фиксираме в неравенството (3) една голяма сума S и оставим малката сума s да се мени, заключаваме, че S е една горна граница на множеството на малките суми. Като вземем пред вид, че

$$\underline{\iint}_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

е точната, т. е. най-малката им горна граница, получаваме

$$\underline{\iint}_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq S. \tag{6}$$

Така полученото неравенство (6) ни учи, че

$$\underline{\iint}_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

е една долна граница на множеството от големите суми на Дарбу. Като вземем пред вид, че

$$\overline{\iint_R} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

е точната, т. е. най-голямата от долните граници на тези суми, получаваме

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \overline{\iint_R} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Сега вече сме в състояние да дадем следната обща дефиниция на понятието двоен Риманов интеграл:

Една ограничена функция $f(x, y)$, дефиниционната област R на която е едно измеримо точково множество, ще наричаме интегруема в Риманов смисъл в R, когато

$$\underline{\iint_R} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \overline{\iint_R} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Общата стойност на горния и долния интеграл ще наричаме двоен Риманов интеграл и ще я означаваме със символа[1]

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Тук ще изброим по-важните основни свойства на двойните интеграли, които са съвсем аналогични на съответните свойства на простите интеграли. Доказателства този път обаче няма да даваме, защото те могат да се дадат по същия начин, както при простите интеграли.

1. Ако функциите $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ са интегруеми в едно измеримо точково множество R, сумата

$$f_1(x, y) + f_2(x, y)$$

е също тъй интегруема в R и

$$\iint_R [f_1(x, y) + f_2(x, y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R f_1(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_R f_2(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

[1]Понякога двойният интеграл се означава по-кратко така:

$$\int_R f(x, y) d\sigma.$$

2. Ако функцията $f(x, y)$ е интегруема в измеримото точково множество R и a е константа, функцията $af(x, y)$ е също тъй интегруема в R и

$$\iint_R af(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = a\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3. Ако A и B са две измерими точкови множества, ако мярката на сечението AB е равна на нула и ако функцията $f(x, y)$ е интегруема както в A, така и в B, тази функция е интегруема и в множеството $A + B$, като при това

$$\iint_{A+B} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_B f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4. Ако функцията $f(x, y)$ е интегруема в измеримото точково множество R и удовлетворява неравенствата

$$m \le f(x, y) \le M,$$

то

$$m\mu(R) \le \iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le M\mu(R).$$

Следствие 5. Ако $f(x, y) \ge 0$, то

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ge 0.$$

Следствие 6. Ако $\mu(R) = 0$, то

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Следствие 7. Ако

$$R_1, R_2, R_3, \ldots$$

е една редица от измерими подмножества на R, за които

$$\lim_{n\to\infty} \mu(R_n) = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Следствие 8.

$$\iint_R 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mu(R).$$

5. Всяка функция $f(x, y)$, която е дефинирана и непрекъсната в едно измеримо и *затворено* точково множество R, е интегруема.

Доказателствата на горните твърдения протичат така, както при простите интеграли. Ще докажем за пример само петото твърдение.

Функцията $f(x, y)$ е ограничена, защото тя е непрекъсната в едно ограничено и затворено точково множество. Поради това можем да говорим за горен и долен интеграл на тази функция. Нашата задача е да покажем, че тези два интеграла са равни помежду си. За тази цел избираме едно произволно положително число ε и делим множеството R на подмножества

$$R_1, R_2, \ldots, R_n, \tag{7}$$

подчинени на условието $\mu(R_i R_k) = 0$ при $i \neq k$ по такъв начин, че осцилацията на $f(x, y)$ във всяко от тези подмножества да бъде по-малка от ε. Това, както знаем, да се постигне, стига диаметрите на подмножествата (7) да бъдат достатъчно малки.[1]

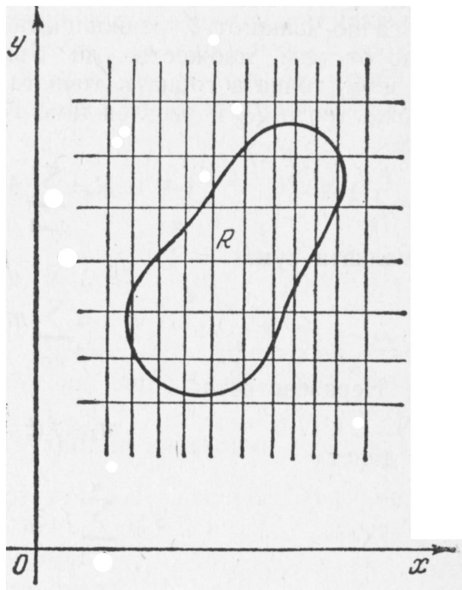
Означаваме с M_i и m_i точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множествата R_i и разглеждаме съответната голяма и малка сума на Дарбу:

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(R_i),$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(R_i).$$

Както знаем, неравенствата

$$s \leq \underline{\iint_R} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \overline{\iint_R} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq S$$



Черт. 17

[1]Ние можем винаги да разделим множеството R на измерими подмножества с произволно малки диаметри, например с помощта на хоризонтални и вертикални прави, както това е показано на черт. 17. Подмножествата, на които се разпада по този начин R, са измерими, защото те представляват сечения на измеримото множество R с правоъгълници (т. е. пак с измерими множества).

са в сила и следователно

$$
\begin{aligned}
0 \le \overline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \underline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le S - s \\
= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\mu(R_i) \le \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \mu(R_i) = \varepsilon\mu(R).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

От друга страна, положителното число ε е произволно, а $\mu(R)$ и разликата

$$\overline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \underline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ни най-малко не зависят от ε. Това ни позволява да заключим,[1] че

$$\overline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \underline{\iint_R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

По този начин ние доказахме, че непрекъснатата функция $f(x,y)$ е интегруема. Доказателството запазва валидността си и в случая, когато измеримото множество R не е непременно затворено, стига да знаем, че функцията $f(x,y)$ е равномерно непрекъсната в него.

Нека функцията $f(x,y)$ е дефинирана в едно измеримо точково множество R. Да разделим множеството R на краен брой измерими подмножества

$$R_1, R_2, \ldots, R_n,$$

подчинени на условието $\mu(R_i R_k) = 0$ при $i \neq k$, и да изберем във всяко едно от тези подмножества R_i по една точка (ξ_i, η_i). Сумите от вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\mu(R_i) \tag{9}$$

се наричат Риманови интегрални суми на функцията $f(x,y)$. Разбира се, когато множеството R съдържа безбройно много точки, ние можем за дадена функция $f(x,y)$ да образуваме безбройно много[2] Риманови интегрални суми в зависимост от начина на деление на множеството R на подмножества и в зависимост от избора на точките (ξ_i, η_i). Нека отбележим още, че за да образуваме сумите от вида (9), няма нужда да предполагаме нищо за ограничеността на функцията $f(x,y)$.

[1] В противен случай неравенството (8) сигурно би било нарушено, ако ε е достатъчно малко.

[2] Ние не твърдим обаче, че стойностите на тези суми са непременно различни.

Специално, ако функцията $f(x, y)$ е интегруема, сумите (9) клонят към интеграла[1]

$$I = \iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

когато диаметрите на подмножествата R_i клонят към нула. Това трябва да се разбира така: каквото и да е положителното число ε, можем да изберем такова положително число δ, че ако диаметрите на множествата R_i са по-малки от δ, да имаме

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\mu(R_i) \right| < \varepsilon.$$

Ние няма да даваме общото доказателство на това твърдение, а ще се задоволим (с оглед на конкретните задачи, които ни предстоят) само със случая, когато множеството R е затворено, а функцията $f(x, y)$ е непрекъсната. В такъв случай тази функция и е равномерно непрекъсната[2] и можем да изберем положителното число δ по такъв начин, че ако диаметрите на подмножествата R_i са по-малки от δ, осцилацията на функцията $f(x, y)$ във всяко едно от тези множества да бъде по-малка от ε. Означаваме с M_i и m_i точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в подмножеството R_i и разглеждаме голямата сума

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(R_i)$$

и малката сума

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(R_i).$$

Неравенствата

$$m_i \leq f(\xi_i, \eta_i) \leq M_i$$

ни дават

$$s \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\mu(R_i) \leq S.$$

[1]Често Римановият интеграл се дефинира с помощта на суми от вида (9) по следният начин: казваме, че една функция $f(x, y)$, дефинирана и *ограничена* в едно измеримо множество R, е интегруема в Риманов смисъл, ако сумите (9) имат граница I, когато диаметрите на R_i клонят към нула; числото I се нарича интеграл на $f(x, y)$. Тази дефиниция е еквивалентна на дефиницията, която ние дадохме в текста, обаче ние няма да се спираме по-подробно върху този въпрос. Трудолюбивият читател нека сам го осмисли. Ние ще обърнем внимание само върху обстоятелството, че за разлика от едноизмеримия случай тук от съществуване на границата на Римановите суми на една функция не следва ограничеността на тази функция.

[2]Нека припомним, че множеството R е измеримо и следователно е ограничено.

Като вземем пред вид още и неравенствата

$$s \leq I \leq S,$$

получаваме

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\mu(R_i) \right| \leq S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\mu(R_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\mu(R_i) = \varepsilon\mu(R),$$

с което доказателството е завършено.

Разбира се, доказателството запазва валидността си в случая, когато измеримото множество R не е непременно затворено, стига функцията $f(x, y)$ да е равномерно непрекъсната в него.

Целесъобразно е дефиницията на понятието двоен интеграл малко да се разшири, като се съгласим под символа

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

когато A е празното множества, да разбираме нула, каквато и да бъде функцията $f(x, y)$. Свойствата 1, 2, 3, 4 и 5, които ние формулирахме в този параграф, запазват валидността си при така разширената дефиниция. Читателят, разбира се, сам може да провери това. Така например свойството 2 може да се установи така: ако множеството A е празно, то, каквото и да бъде измеримото множество B, ще имаме

$$\iint_{A+B} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_B f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_B f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Ние често ще използуваме интеграли, разпространени върху празното множество. Това ще облекчи нашата работа.

§ 2. Пресмятане на двойни интеграли

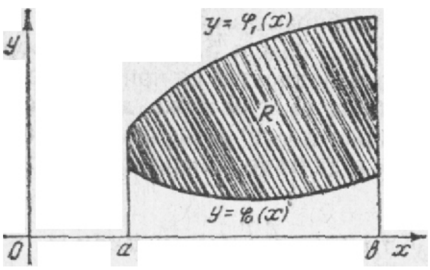
Нека R е едно множество от точки в равнината, дефинирано с неравенствата

(1)
$$\begin{gathered} a \leq x \leq b, \\ \varphi_0(x) \leq y \leq \varphi_1(x), \end{gathered}$$

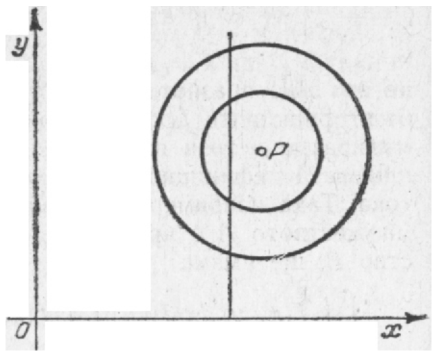
където $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ са две непрекъснати функции на x в компактния интервал $a \leq x \leq b$, удовлетворяващи условието

$$\varphi_0(x) \leq \varphi_1(x).$$

Това значи, че една точка (x, y) се причислява към R тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват неравенствата (1). Тук се касае за едно точково множество от твърде специален вид[1] (вж. черт. 18). Такова множество, както вече имахме случай да споменем по-рано, се нарича криволинеен трапец, чиито основи са перпендикулярни на оста x. Ние знаем, че такова множество е измеримо (вж. част I, глава II, § 19). Лесно се вижда, че то е и затворено, защото границата на редица от точки, които удовлетворяват неравенствата (1), също удовлетворява тези неравенства.



Черт. 18



Черт. 19

Нека $f(x, y)$ е функция, която е дефинирана и непрекъсната в R. В такъв случай, както знаем, тя е интегруема, защото множеството R е затворено и измеримо. Това ни дава възможност да образуваме интеграла

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Да фиксираме x в интервала $a \leq x \leq b$. В такъв случай $f(x, y)$ ще бъде функция на единствената променлива y, дефинирана и непрекъсната, а следователно и интегруема в интервала $[\varphi_0(x), \varphi_1(x)]$. Това ни дава възможност да образуваме

$$F(x) = \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

[1]Ако областта R е дефинирана с неравенства от вида (1) , то всяка права, успоредна на оста y, или не съдържа повече от две контурни точки на R, или съдържа безкрайно много такива точки. Ако следователно едно точково множество не удовлетворява това условие, то сигурно не представлява криволинеен трапец с вертикални основи. Така например кръговият венец, който е изобразен на черт. 19, не представлява такъв трапец, защото има прави, успоредни на оста y, които секат контура му в 4 точки.

Теорема. *Функцията $F(x)$ е интегруема*[1] *в интервала $[a,b]$ и*

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1'}$$

Доказателство. Делим интервала $[a,b]$ на подинтервали с помощта на точките

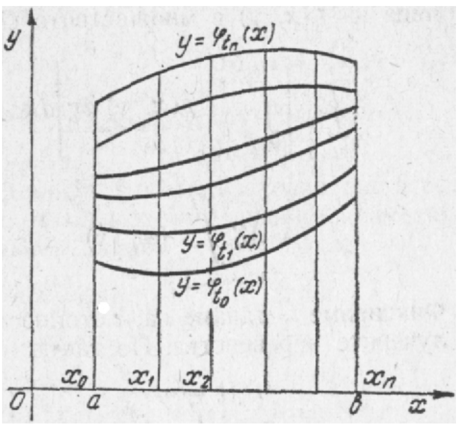
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

и разглеждаме кривите

$$\varphi_t(x) = \varphi_0(x) + t[\varphi_1(x) - \varphi_0(x)],$$

където на t даваме стойностите

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1.$$



Черт. 20

Правите $x = x_i$, $i = 0,1,2,3,\dots,n$ и кривите $y = \varphi_{t_k}(x)$, $k = 0,1,2,\dots,n$, разделят криволинейния трапец R, определен с неравенствата

$$a \le x \le b,$$
$$\varphi_0(x) \le y \le \varphi_1(x),$$

на по-малки трапеци G_{ik}, дефинирани с неравенствата

$$x_{i-1} \le x \le x_i,$$
$$\varphi_{t_{k-1}}(x) \le y \le \varphi_{t_k}(x)$$

(вж. черт. 20) в смисъл, че $R = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} G_{ik}$, както това лесно се доказва.

Не е трудно да се види, че функциите

$$F_k(x) = \int_{\varphi_{t_{k-1}}(x)}^{\varphi_{t_k}(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

[1]Тя дори е непрекъсната. Нека читателят сам обмисли доказателството.

са ограничени в интервала $a \leq x \leq b$. И наистина, ако означим с M една горна граница на $|f(x,y)|$, ще получим

$$|F_k(x)| \leq M[\varphi_{t_k}(x) - \varphi_{t_{k-1}}(x)] = M(t_k - t_{k-1})(\varphi_1(x) - \varphi_0(x)).$$

Функциите $\varphi_1(x)$ и $\varphi_0(x)$ обаче са непрекъснати в компактния интервал $a \leq x \leq b$ и следователно ограничени. С това е установена и ограничеността на $F_k(x)$. По такъв начин добиваме възможност да образуваме горния и долния интеграл от $F_k(x)$ във всеки подинтервал на интервала $a \leq x \leq b$.

Означавайки с M_{ik} и m_{ik} точната горна граница и точната долна граница на $f(x,y)$ в множеството G_{ik}, получаваме[1]

$$\begin{aligned}\overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} \left[\int_{\varphi_{t_{k-1}}(x)}^{\varphi_{t_k}(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x &\leq M_{ik} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{\varphi_{t_{k-1}}(x)}^{\varphi_{t_k}(x)} \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \\ &= M_{ik} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\varphi_{t_k}(x) - \varphi_{t_{k-1}}(x)\right] \mathrm{d}x = M_{ik}\mu(G_{ik}).\end{aligned}$$

Фиксираме i, даваме на k стойности $1, 2, \ldots, n$ и събираме получените неравенства. По такъв начин намираме

$$\overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} \left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} M_{ik}\mu(G_{ik})$$

или още

$$\overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}} F(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} M_{ik}\mu(G_{ik}).$$

Като дадем на i в последното неравенство стойностите $1, 2, \ldots, n$ и съберем получените неравенства, ще намерим

$$\overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{ik}\mu(G_{ik}).$$

Аналогично получаваме

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ik}\mu(G_{ik}) \leq \underline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x.$$

[1] Лицето на множеството G_{ik} е равно на разликата на двата интеграла

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{t_k}(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{t_{k-1}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_{t_k}(x) - \varphi_{t_{k-1}}(x)]\,\mathrm{d}x.$$

От друга страна, сечението на всеки два различни трапеца G_{ik} има мярка нула, както това лесно се доказва. Въз основа на това заключаваме, че

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ik}\mu(G_{ik}) \le \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{ik}\mu(G_{ik}),$$

и следователно

$$\left| \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (M_{ik} - m_{ik})\mu(G_{ik}).$$

Функцията $f(x,y)$ е обаче непрекъсната и следователно при всеки избор на положителното число ε можем да направим диаметрите на подмножествата G_{ik} толкова малки,[1] че да имаме

$$M_{ik} - m_{ik} < \varepsilon.$$

Оттук получаваме следното неравенство:

$$\left| \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon\mu(G_{ik}) = \varepsilon\mu(R).$$

Положителното число ε обаче е произволно, а константите $\mu(G)$ и

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x$$

не зависят от него. Това ни позволява да заключим, че

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

По аналогичен път получаваме

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x.$$

[1] За тази цел избираме както точките

$$x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n,$$

така и точките

$$t_0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$$

достатъчно близо една до друга.

От това следва, че

$$\underline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x,$$

т. е. функцията $F(x)$ е интегруема в интервала $a \leq x \leq b$ и

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

С това доказателството е завършено.

Ние можем да получим същия резултат и с помощта на основната теорема на интегралното смятане в равнината по следния начин.

Нека Δ е полузатворен правоъгълник и $\psi(x,y)$ е неговата характеристична функция. Избираме произволно положително число ε и покриваме контура на R със система от краен брой *отворени* кръгове $C_1, C_2, \ldots, C_n$ по такъв начин, че сумата от квадратите на техните радиуси да бъде по-малка от ε.

Образуваме двете спомагателни полуадитивни функции:

(2)
$$\theta_1(\Delta) = \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)}} f(x,y)\psi(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x - \iint_{\Delta R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2M\sum_{k=1}^{n}\mu(\Delta C_k) - 2\varepsilon\mu(\Delta R),$$

(3)
$$\theta_2(\Delta) = \iint_{\Delta R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \underline{\int_a^b} \left[\underline{\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)}} f(x,y)\psi(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x - 2M\sum_{k=1}^{n}\mu(\Delta C_k) - 2\varepsilon\mu(\Delta R),$$

където M е една горна граница на $|f(x,y)|$. Полуадитивността на тези функции е очевидна (вж. част I, глава II, § 16). Също тъй не е трудно да се види, че те са неположителни около всяка точка P на равнината (относно смисъла на тези думи вж. част I, глава II, § 15). Ние ще покажем това за функцията $\theta_1(\Delta)$. Читателят ще може сам да извърши проверката за функцията $\theta_2(\Delta)$.

Нека точката P е външна за R. В такъв случай, ако Δ се намира в достатъчно малка околност на P, сечението на Δ с R ще бъде празно и следователно в R ще имаме $\psi(x,y) = 0$. По такъв начин получаваме в този случай

$$\theta_1(\Delta) = -2M\sum_{k=1}^{n}\mu(\Delta C_k) - 2\varepsilon\mu(\Delta R) \leq 0.$$

Нека точката P е вътрешна за R. Да означим (x_0, y_0) нейните координати. В такъв случай около P може да се избере достатъчно малка околност U, която се съдържа в R и в която са изпълнени неравенствата

$$f(x_0,y_0) - \varepsilon \leq f(x,y) \leq f(x_0,y_0) + \varepsilon,$$

защото функцията $f(x,y)$ е непрекъсната. По този начин всеки път, когато Δ се съдържа в U, ще имаме

$$\theta_1(\Delta) \leq \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)}} (f(x_0,y_0)+\varepsilon)\psi(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$
$$- \iint_\Delta (f(x_0,y_0)-\varepsilon)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2M\sum_{k=1}^{n}\mu(\Delta C_k) - 2\varepsilon\mu(\Delta)$$
$$\leq (f(x_0,y_0)+\varepsilon)\,\mu(\Delta) - (f(x_0,y_0)-\varepsilon)\,\mu(\Delta) - 2\varepsilon\mu(\Delta) = 0,$$

защото, както знаем (вж. част I, глава II, § 16),

$$\overline{\int_a^b} \left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} (f(x_0,y_0)+\varepsilon)\,\psi(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = (f(x_0,y_0)+\varepsilon)\,\mu(\Delta).$$

Остана да разгледаме случая, когато точка P е контурна за R. В такъв случай P е вътрешна за някой от покриващите кръгове $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Нека U е околност на P, която се съдържа в $C_1 + C_2 + \cdots + C_n$. В такъв случай всеки път, когато Δ се съдържа в U, ще имаме

$$\theta_1(\Delta) \leq M \overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)}} \psi(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$
$$+ M \iint_{\Delta R} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2M\mu(\Delta) - 2\varepsilon\mu(\Delta R)$$
$$\leq M\mu(\Delta) + M\mu(\Delta) - 2M\mu(\Delta) - 2\varepsilon\mu(\Delta R) \leq 0,$$

защото, както знаем,
$$\overline{\int_a^b} \left[\overline{\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)}} \psi(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \leq \mu(\Delta)$$
(вж. част I, глава II, § 16).

Този резултат ни дава възможност да приложим основната теорема на интегралното смятане в равнината (вж. част I, глава II, § 15). По такъв начин имаме

$$\theta_1(\Delta) \leq 0$$

при всеки избор на полузатворения правоъгълник Δ. Специално, ако изберем Δ така, че да съдържа R, ще получим

$$\overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x - \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2M\sum_{k=1}^{n}\mu(C_k) - 2\varepsilon\mu(R) \leq 0.$$

От друга страна, $\sum_{k=1}^{n}\mu(C_k) < \varepsilon$ и следователно

$$\overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \leq \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2M\varepsilon + 2\varepsilon\mu(R)$$

или след граничния преход $\varepsilon \to 0$

$$\overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \le \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{4}$$

Като изучим по аналогичен начин функцията $\theta_2(\Delta)$, ще получим

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \underline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

От друга страна, очевидно

$$\underline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x,$$

което заедно с (4) и (5) ни дава

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x.$$

По такъв начин ние виждаме, че функцията $F(x)$ е интегруема и

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

С това доказателството е завършено.

Аналогично, ако интеграционната област R представлява криволинеен трапец с хоризонтални основи, т. е. ако тази област се определя с неравенства от вида

$$\begin{gathered} c \le y \le d, \\ g_0(y) \le x \le g_1(y), \end{gathered}$$

където функциите $g_0(y)$ и $g_1(y)$ са дефинирани и непрекъснати в интервала $[c,d]$ и удовлетворяват неравенството

$$g_0(y) \le g_1(y),$$

имаме формулата

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{g_0(y)}^{g_1(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y. \tag{6}$$

Ще изясним с няколко примера как се използват формулите (1′), респ. (6).

Пример 1. Да се пресметне двойният интеграл

$$I = \iint_R x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

разпрострян върху трапеца R, ограден от правите $x = 1$, $x = 2$, $y = \dfrac{x+2}{2}$, $y = \dfrac{3-x}{2}$ (вж. черт. 21).

Решение. Една точка (x, y) принадлежи на R тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват неравенствата

$$1 \le x \le 2,$$
$$\frac{3-x}{2} \le y \le \frac{x+2}{2}.$$

Оттук получаваме с помощта на формулата (1′)

$$I = \int_1^2 \left[\int_{\frac{3-x}{2}}^{\frac{x+2}{2}} x^2 \,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_1^2 x^2 \left[\int_{\frac{3-x}{2}}^{\frac{x+2}{2}} \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_1^2 x^2 \Big| y \Big|_{\frac{3-x}{2}}^{\frac{x+2}{2}} \mathrm{d}x = \int_1^2 x^2 \frac{2x-1}{2} \,\mathrm{d}x$$
$$= \left| \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} \right|_1^2 = \frac{31}{12}.$$

Пример 2. Да се пресметне двойният интеграл

$$I = \iint_R \sqrt{x+y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

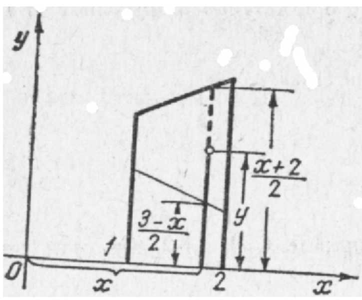
разпространен върху триъгълника R, ограден от правите

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1$$

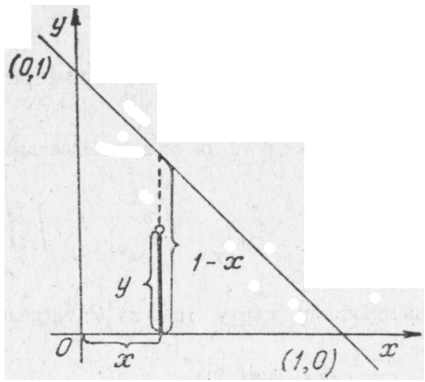
(вж. черт. 22).

Решение. Една точка (x, y) принадлежи на интеграционната област R тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват неравенствата

$$0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1 - x.$$



Черт. 21



Черт. 22

Оттук получаваме въз основа на формулата (2)

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^1 \left|(x+y)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{1-x} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left|x - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right|_0^1 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}.$$

Пример 3. Да се пресметне двойният интеграл

$$I = \iint_R y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

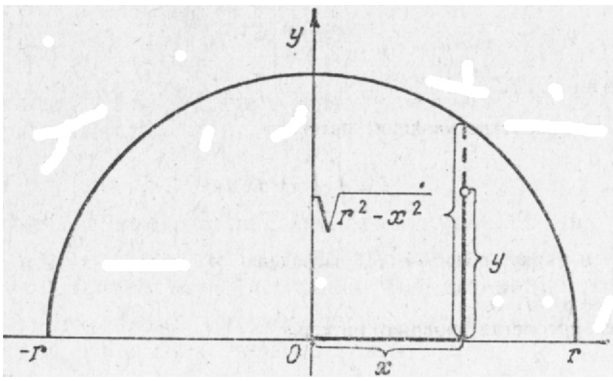
разпространен върху полукръга R, който се намира над оста x и се загражда от окръжността $x^2 + y^2 = r^2$ и оста x.

Решение. В този случай интеграционната област R представлява криволинеен трапец, определен от неравенствата

$$-r \le x \le r,$$
$$0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}$$

(вж. черт. 23). Това ни позволява да пишем

$$I = \int_{-r}^{r} \left[\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \left|\frac{y^2}{2}\right|_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \frac{r^2 - x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \left|\frac{r^2 x}{2} - \frac{x^3}{6}\right|_{-r}^{r} = \frac{2}{3}r^3.$$



Черт. 23

Задачи

1. Да се пресметне двойният интеграл

$$I = \iint_R (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

разпространен върху областта R, заградена от правите $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

Отговор. $I = \dfrac{8}{3}$.

2. Да се пресметне двойният интеграл

$$I = \iint_R (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

разпространен върху областта R, заградена от правите $y = 0$, $x = y$, $x = 1$.

Отговор. $I = \frac{1}{3}$.

3. Да се пресметне двойният интеграл

$$I = \iint_R (x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

разпространен върху областта R, заградена от правата $x = y$ и от параболата $y^2 = x$.

Отговор. $I = \frac{3}{20}$.

4. Да се пресметне двойният интеграл

$$I = \iint_R x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

разпространен върху областта R, дефинирана с неравенството

$$|x| + |y| \leq 1.$$

Отговор. $I = \frac{1}{3}$.

5. Да се пресметне двойният интеграл

$$I = \iint_R xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

разпространен върху областта R, заградена от правата $x = 2$ и от параболата $y^2 = 2x$.

Отговор. $I = 0$.

6. Да се пресметне двойният интеграл

$$I = \iint_R y\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

разпространен върху областта R, определена от неравенствата

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Отговор. $I = \frac{3\pi a^2 b^2}{32}$.

§ 3. Смяна на променливите при двойните интеграли

Нека двойно регулярната[1] трансформация

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v) \tag{1}$$

[1] Срв. с част I, глава II, § 14 и 20.

изобразява едно отворено точково множество R от равнината u, v върху едно точково множество R' в равнината x, y. Знаем, че всяко измеримо множество A, което лежи заедно с контура си в R, се изобразява върху *измеримо* точково множество A'. Ще докажем, че

$$\mu(A') = \iint_A \Delta \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v, \tag{2}$$

където Δ означава абсолютната стойност на функционалната детерминанта

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v}. \end{vmatrix}.$$

Доказателство. Делим множеството A на краен брой измерими подмножества

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

по такъв начин, че мярката на сечението на всеки две от тях да бъде нула. Нека A_i' е образът на A_i при трансформацията (1) и нека M_i и m_i са съответно точната горна и точната долна граница на Δ в множеството A_i'. В такъв случай, както знаем (вж. § 20, глава II, част I), са в сила неравенствата

$$m_i \mu(A_i) \leq \mu(A_i') \leq M_i \mu(A_i)$$

и следователно

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mu(A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i') \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(A_i)$$

или още

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mu(A_i) \leq \mu(A') \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(A_i).$$

От друга страна, имаме

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mu(A_i) \leq \iint_A \Delta \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(A_i)$$

и следователно

$$\left| \iint_A \Delta \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v - \mu(A') \right| \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \mu(A_i).$$

Избираме едно произволно положително число ε. Можем да направим диаметрите на подмножествата A_i толкова малки,[1] че да имаме

$$M_i - m_i \leq \varepsilon$$

и следователно

$$\left| \iint_A \Delta \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v - \mu(A') \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \mu(A_i) = \varepsilon \mu(A). \tag{3}$$

От това неравенство заключаваме, че

$$\iint_A \Delta \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v - \mu(A') = 0,$$

защото в противен случай неравенството (3) сигурно би било нарушено при достатъчно малки стойности на ε. С това равенството (2) е доказано.

Ние ще използуваме този резултат, за да установим следната важна формула:

$$\iint_{A'} F(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_A F[f(u, v), g(u, v)] \Delta \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v, \tag{4}$$

която е сигурно валидна поне когато функцията $F(x, y)$ е непрекъсната в A' и измеримото множество A е затворено (това са, разбира се, само достатъчни условия за валидността на формулата (4)).

Доказателство. Делим множеството A' на краен брой измерими подмножества

$$A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$$

така, че сечението на всеки две от тях да има мярка нула. Означаваме с A_i образа на A'_i при обратната трансформация на трансформацията (1) и с M_i и m_i съответно точната горна и точната долна граница на функцията

$$F[f(u, v), g(u, v)]$$

в множеството A_i. В такъв случай

$$m_i \iint_{A_i} \Delta \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \leq \iint_{A_i} F[f(u, v), g(u, v)] \Delta \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \leq M_i \iint_{A_i} \Delta \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

[1] Това може да се направи, защото A лежи в R заедно с контура си и следователно непрекъснатата функция Δ е равномерно непрекъсната в A.

или още

$$m_i\mu(A_i') \leq \iint_{A_i} F[f(u,v), g(u,v)]\Delta \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \leq M_i\mu(A_i').$$

Като дадем на i стойностите $1, 2, \ldots, n$ и съберем получените неравенства, намираме

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\mu(A_i') \leq \iint_{A} F[f(u,v), g(u,v)]\Delta \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\mu(A_i').$$

От друга страна, не е трудно да се види, че M_i и m_i са точната горна и точната долна граница на $F(x, y)$ в множеството A_i' и следователно

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\mu(A_i') \leq \iint_{A'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\mu(A_i'),$$

откъдето

$$\left|\iint_{A'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{A} F[f(u,v), g(u,v)]\Delta \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right| \leq \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\mu(A_i').$$

Избираме произволно положително число ε. Ние можем да направим диаметрите на множеството A_i' толкова малки, че да имаме

$$M_i - m_i \leq \varepsilon$$

и следователно

$$\left|\iint_{A'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{A} F[f(u,v), g(u,v)]\Delta \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon\mu(A_i') = \varepsilon\mu(A'), \tag{5}$$

откъдето заключаваме, че

$$\iint_{A'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{A} F[f(u,v), g(u,v)]\Delta \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0,$$

защото в противен случай неравенството (5) сигурно би било нарушено при достатъчно малки стойности на ε. С това формулата (4) е доказана.

*

*　　*

Сега ще изведем формулата (4) по друг път, като предполагаме, че трансформацията(1) е еднократно регулярна (относно терминологията вж. част I, глава II, § 14 и § 20).

Да разгледаме първо специалния случай, когато трансформачните формули (1) имат вида

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= g(u, v), \end{aligned} \tag{6}$$

т. е. разглежданата трансформация е диагонална. Освен това нека A е правоъгълник, определен от неравенствата

$$\begin{aligned} p \le u \le q, \\ r \le v \le s, \end{aligned} \tag{7}$$

който лежи в R, и нека

$$g'_v(u, v) > 0 \tag{8}$$

в A. В такъв случай A' е криволинеен трапец, определен от неравенствата

$$\begin{aligned} p \le x \le q, \\ g(x, r) \le y \le g(x, s). \end{aligned} \tag{9}$$

И наистина нека (u_0, v_0) е точка от A и (x_0, y_0) е нейният образ. Това значи, че

$$\begin{aligned} p \le u_0 \le q, \\ r \le v_0 \le s \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x_0 &= u_0, \\ y_0 &= g(u_0, v_0). \end{aligned}$$

В такъв случай

$$g(u_0, r) \le y_0 \le g(u_0, s),$$

защото функцията $g(u_0, v)$ монотонно расте, както това следва от условието (8). Като вземем под внимание още равенството $x_0 = u_0$, заключаваме, че точката (x_0, y_0) удовлетворява неравенствата (9). И така образът на всяка точка от A удовлетворява неравенствата (9).

Обратно, нека една точка (x_1, y_1) удовлетворява неравенствата (9). Ще покажем, че тя е образ на някоя точка от A. И наистина от неравенствата

$$g(x_1, r) \leq y_1 \leq g(x_1, s)$$

заключаваме, че има число v_1 в интервала $[r, s]$, за което

$$g(x_1, v_1) = y_1,$$

защото функцията $g(x_1, v)$ е непрекъсната в разглеждания интервал $[r, s]$. Да положим $u_1 = x_1$. В такъв случай

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1, \\ y_1 &= g(u_1, v_1) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} p &\leq u_1 \leq q, \\ r &\leq v_1 \leq s, \end{aligned}$$

т. е. точката (x_1, y_1) е образ на точката (u_1, v_1) от A. С това е показано, че образът на (A) при трансформацията (6) е криволиненият трапец (9).

Сега вече не е трудно да проверим верността на равенството (4) в разглеждания от нас специален случай. И наистина

$$\iint_{A'} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_p^q \left[\int_{g(x,r)}^{g(x,s)} F(x, y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$$

Да разгледаме интеграла

$$\Phi(x) = \int_{g(x,r)}^{g(x,s)} F(x, y)\,\mathrm{d}y$$

и да направим смяна на интеграционната променлива y с помощта на субституцията

$$y = g(x, v),$$

където x е фиксирано. Това ще ни даде

$$\Phi(x) = \int_r^s F[x, g(x, v)]g'_v(x, v)\,\mathrm{d}v$$

и следователно

$$\iint_{A'} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_p^q \Phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_p^q \left[\int_r^s F[x, g(x, v)]g'_v(x, v)\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}x$$
$$= \iint_A F[x, g(x, v)]g'_v(x, v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x.$$

По такъв начин ние установихме равенството (4), когато трансформацията (1) има вида (6), защото в този специален случай

$$\Delta = g'_v(u, v).$$

Със същата леснина се установява формулата (4) и в случая, когато трансформацията (6) удовлетворява условието

$$g'_v(u, v) < 0$$

в A. Тогава A' е криволинеен трапец, определен от неравенствата

$$p \leq x \leq q,$$
$$g(x, s) \leq y \leq g(x, r),$$

а

$$\Delta = -g'_v(u, v).$$

Нека читателят сам обмисли подробностите.

Също така не е съществено предположението, че нашата диагонална трансформация има точно вида (6). Направените разсъждения са приложими и в случая, когато трансформацията (1) има вида

$$x = f(u, v),$$
$$y = v,$$

стига $f'_u(u, v)$ да не си мени знака в A. Този случай не е съществено различен от разгледания и се свежда към него със смяна в означенията.

От доказаното следва също, че формулата (4) е валидна и тогава, когато трансформацията (1) е диагонална и A е *полузатворен* правоъгълник, стига Δ да не си мени знака в A. И наистина да положим

$$B = K(A) - A.$$

В такъв случай мярката на B е нула (защото $B \subset K(A)$), множеството $A + B$ е затворен правоъгълник и $AB = 0$. От доказаното имаме

$$\iint_{(A+B)'} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{(A+B)} F[f(u, v), g(u, v)]\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

защото $A + B$ е затворен правоъгълник. От друга страна,

$$\iint_{(A+B)'} F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{A'+B'} F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{A'} F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{B'} F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{A'} F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

тъй като B' е подмножество на множеството $[K(A)]'$, чиято мярка е нула и следователно $\mu(B') = 0$. Аналогично имаме

$$\iint_{A+B} F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{A} F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \iint_{B} F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$= \iint_{A} F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

защото $\mu(B) = 0$ и по такъв начин получаваме

$$\iint_{A'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{A} F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Сега ще установим, че формулата (4) е валидна и тогава, когато (1) е диагонална регулярна трансформация (от кой да е вид), и A е *произволно затворено и измеримо подмножество на* R. За тази цел избираме положително число δ_0 толкова малко, че всяка точка, която се намира на разстояние, по-малко от δ_0 до A, да лежи в R. Това може да се направи съгласно лема 1 от § 20, глава II, част I. Означаваме с δ положително число, по-малко от δ_0. В такъв случай множеството L на точките, чието разстояние до A не надминава δ, ще бъде ограничено и затворено (вж. лема 2, § 20, глава II, част I) и ще се съдържа изцяло в R, защото $\delta < \delta_0$. Избираме положително число ε, по-малко от $\dfrac{\delta^2}{4}$, и покриваме контура на A със система от *отворени* кръгове $C_1, C_2, \ldots, C_n$ по такъв начин, че сумата от квадратите на техните радиуси да бъде по-малка от ε. Това може да се направи, защото контурът на A има мярка нула. Освен това ние можем да смятаме, че всеки един от кръговете $C_1, C_2, \ldots, C_n$ съдържа поне една точка от контура на A, защото, ако това не е изпълнено, ние можем да премахнем онези кръгове, които нямат обща точка с $K(A)$, и по такъв начин ще получим нова система от кръгове, които покриват $K(A)$, притежават исканото свойство, а сумата от квадратите на техните радиуси е още по-малка. Радиусите на кръговете C_ν са по-малки от

$$\sqrt{\varepsilon} < \frac{\delta}{2}$$

и следователно всяка тяхна точка се намира на разстояние, по-малко от δ до A. От това заключаваме, че кръговете C_ν се съдържат в L, а следователно и в R.

Да образуваме спомагателната полуадитивна функция

$$(10)\quad \theta(D) = \left| \iint_{(DA)'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{AD} F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \right| \\ - M\sum_{k=1}^{n} \mu\left((ADC_k)'\right) - N\sum_{k=1}^{n}\mu(ADC_k)$$

на полузатворения правоъгълник D, където M е една горна граница на $|F(x,y)|$ в A', а N е една горна граница на

$$|F[f(u,v), g(u,v)]|\Delta$$

в A.

Не е трудно да се види, че функцията $\theta(D)$ е неположителна около всяка точка P на равнината (относно смисъла на тези думи вж. част I, глава II, § 15).

Да разгледаме първо случая, когато точката P е външна за A. В такъв случай, ако D се намира в достатъчно малка околност на P, сечението AD ще бъде празно и следователно $\theta(D) = 0$.

Нека точката P е контурна за A. В такъв случай тя е вътрешна за някой от кръговете $C_1, C_2, \ldots, C_n$, защото тези кръгове са отворени. Нека C_ν е кръг, който съдържа P и нека U е околност на P, която се съдържа в C_ν. В такъв случай всеки път, когато $D \subset U$, ще имаме $DC_\nu = D$, т. е.

$$M\sum_{k=1}^{n} \mu\left((ADC_k)'\right) + N\sum_{k=1}^{n}\mu(ADC_k) \geq M\mu((ADC_\nu)') - N\mu(ADC_\nu) \\ = M\mu\left((AD)'\right) + N\mu(AD)$$

и следователно

$$\theta(D) \leq \left|\iint_{(DA)'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| + \left|\iint_{DA} F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right| - M\mu\left((AD)'\right) - N\mu(AD) \leq 0.$$

Остава да разгледаме случая, когато точката P е вътрешна за A. Тогава ние можем да изберем околност U на точката P, която лежи изцяло в A. Нека $D \subset U$. В такъв случай $DA = D$ и следователно

$$\theta(D) = \left| \iint_{D'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_D F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \right| - M\sum_{k=1}^{n} \mu\left((ADC_k)'\right) - N\sum_{k=1}^{n} \mu(ADC_k).$$

Множеството D обаче е правоъгълник, а трансформацията (1) е диагонална по предложение. Този случай ние вече разгледахме и знаем, че

$$\iint_{D'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

По такъв начин получаваме

$$\theta(D) = -M\sum_{k=1}^{n} \mu\left((DC_k)'\right) - N\sum_{k=1}^{n} \mu(DC_k) \leq 0.$$

С това е установено, че функцията $\theta(D)$ е неположителна около всяка точка на равнината. Тази функция удовлетворява всичките условия, при които ние доказахме основната теорема на интегралното смятане в равнината (вж. част I, глава II, § 15). Това ни дава възможност да твърдим, че при всеки избор на полузатворения правоъгълник D имаме $\theta(D) \leq 0$. Специално, ако изберем D така, че да съдържа A, ще получим

$$\left| \iint_{A'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_A F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \right| - M\sum_{k=1}^{n} \mu\left((AC_k)'\right) - N\sum_{k=1}^{n} \mu(AC_k) \leq 0$$

и толкова повече

$$\left| \iint_{A'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_A F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \right| \leq M\sum_{k=1}^{n} \mu(C_k') + N\sum_{k=1}^{n} \mu(C_k).$$

Да означим с r_k радиуса на кръга C_k и с H една обща горна граница на $|f_u'|$, $|f_v'|$, $|g_u'|$, $|g_v'|$ в L. В такъв случай съгласно лема 3 от § 20 на глава II, част I, диаметърът на C_k' няма да надминава $4Hr_k\sqrt{2}$. Да построим кръг G_k, чийто център се намира в коя да е точка C_k', а радиусът е $4Hr_k\sqrt{2}$. Този кръг съдържа всичките точки на C_k', поради което

$$\mu(C_k') \leq \mu(G_k) = 32\pi H^2 r_k^2$$

и следователно

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(C_k') \leq 32\pi H^2 \sum_{k=1}^{n} r_k^2 < 32\pi H^2 \varepsilon.$$

Като вземем под внимание още, че

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(C_k) = \pi \sum_{k=1}^{n} r_k^2 < \pi\varepsilon,$$

получаваме

$$\left| \iint_{A'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{A'} F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \right| \le (32\pi H^2 M + \pi N)\varepsilon,$$

което след граничния преход $\varepsilon \to 0$ ни дава

$$\left| \iint_{A'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{A} F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \right| \le 0 \tag{11}$$

и следователно

$$\iint_{A'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{A} F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{12}$$

Тук ще направим следната забележка. Предположението, че множеството A е затворено, може да се изостави, ако функцията $F(x,y)$ е дефинирана и непрекъсната в $A + K(A)$, стига множеството A да бъде измеримо и да лежи в R заедно с контура си. И наистина множеството $A + K(A)$ е затворено и измеримо. Следователно съгласно с това, което доказахме, ще имаме

$$\iint_{[A+K(A)]'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{A+K(A)} F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Да положим

$$B = K(A) - A.$$

В такъв случай $\mu(B) = 0$, защото $B \subset K(A)$ и $\mu(B') = 0$, защото $B' \subset [K(A)]'$. От друга страна, $A + K(A) = A + B$, $AB = 0$ и следователно

$$\begin{aligned}
\iint_{A'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{A'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{B'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{A'+B'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{(A+B)'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{A+B} F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \iint_{A} F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \iint_{B} F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \iint_{A} F(f,g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Преминаваме към разглеждане на общия случай.

Нека (1) е регулярна трансформация на отвореното множество R и A е затворено и измеримо негово подмножество. Ще покажем, че равенството (4) е вярно и в този случай. За тази цел пак ще разгледаме спомагателната полуадитивна функция (10). Тази функция и сега е неположителна около всяка точка P на равнината. Случаят, когато точката P е външна или контурна за A, се разглежда по същия начин, както в случая, когато трансформацията (1) е диагонална. По-интересен е случаят, когато точката P е вътрешна за A. В такъв случай ние знаем, че в достатъчно малка околност W на точката P трансформацията (1) може да се представи като произведение на две диагонални регулярни трансформации (вж. § 14, глава II, част I). Нека тези трансформации са

$$\xi = u, \quad \eta = \varphi(u, v) \tag{13}$$

и

$$x = \psi(\xi, \eta), \quad y = \eta. \tag{14}$$

По такъв начин имаме

$$\psi(u, \varphi(u, v)) = f(u, v), \quad \varphi(u, v) = g(u, v)$$

и следователно

$$\psi(u, g(u, v)) = f(u, v). \tag{15}$$

Нека околността W е толкова малка, че да се съдържа в A. Това може да се постигне, тъй като точката P е вътрешна за A. В такъв случай, ако $D \subset W$, ще имаме $AD = D$ и следователно

$$\theta(D) = \iint_{D'} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_D F(f, g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - M\sum_{k=1}^{n}\mu\left((DC_k)'\right) - N\sum_{k=1}^{n}\mu(DC_k).$$

Да разгледаме диагоналната трансформация (13) в W. Тя преобразува W в някое отворено множество W^*, а D в някое измеримо множество D^*, което се съдържа W^*. Трансформацията (14) преобразува W^* в отворено множество W', а D^* в D'. Съгласно с това, което доказахме за диагоналните трансформации, ще имаме

$$\iint_{D'} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D^*} F[\psi(\xi, \eta), \eta]|\psi'_\xi(\xi, \eta)|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

и

$$\iint_{D^*} F[\psi(\xi, \eta), \eta]|\psi'_\xi|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \iint_{D} F[f(u, v), g(u, v)]|\psi'_\xi\varphi'_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

От друга страна, ако диференцираме равенството (15) частно по u и по v, ще получим

$$\psi'_\xi + \psi'_\eta g'_u = f'_u,$$
$$\varphi'_\eta g'_v = f'_v$$

и следователно

$$\psi'_\xi = f'_u - \frac{g'_u f'_v}{g'_v} = \frac{f'_u g'_v - g'_u f'_v}{g'_v}.$$

Като вземем под внимание още, че $\varphi(u, v) = g(u, v)$, намираме

$$\psi'_\xi\varphi'_v = f'_u g'_v - g'_u f'_v,$$

т. е.

$$\iint_{D'} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D} F(f, g)\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

По такъв начин получаваме

$$\theta(D) = -M\sum_{k=1}^{n}\mu\left[(DC_k)'\right] - N\sum_{k=1}^{n}\mu(DC_k).$$

И така функцията $\theta(D)$ е неположителна около всяка точка на равнината. Това ни дава възможност да приложим основната теорема на интегралното смятане в равнината. По-нататък разсъжденията се извършват по същия начин, както в случая на диагонална трансформация.

*
* *

Формулата (4) намира многобройни и важни приложения. Особено често се използува трансформацията

$$x = \rho\cos\theta, \qquad (16)$$
$$y = \rho\sin\theta,$$

която е двойно регулярна в безкрайния правоъгълник, лежащ в равнината на правоъгълната декартова координатна система θ, ρ, определен от неравенствата

$$-\pi < \theta < \pi, \ \rho > 0.$$

В такъв случай

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

и формулата (4) добива вида

$$\iint_{A'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{A} F[\rho\cos\theta, \rho\sin\theta]\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta.$$

Трансформачните формули (16) могат да се използват с успех например в случай, когато интеграционната област A' е дефинирана в полярни координати с помощта на неравенствата

$$\begin{aligned} &\alpha \le \theta \le \beta, \\ &f(\theta) \le \rho \le g(\theta), \end{aligned} \tag{17}$$

където $-\pi < \alpha < \beta < \pi$, а функциите $f(\theta)$ и $g(\theta)$ са непрекъснати в затворения интервал $[\alpha,\beta]$ и удовлетворяват неравенствата

$$0 < f(\theta) \le g(\theta).$$

В този случай ще казваме, че интеграционната област A' е сектор, който няма общи точки с неположителната част на оста OX. Трансформачните формули (16) преобразуват този сектор в криволинеен трапец с основи, перпендикулярни на оста θ, лежащ в равнината на правоъгълната декартова координатна система θ, ρ, и следователно

$$\iint_{A'} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{f(\theta)}^{g(\theta)} F[\rho\cos\theta, \rho\sin\theta]\rho\,\mathrm{d}\rho\right] \mathrm{d}\theta. \tag{18}$$

Пример. Да се пресметне интегралът

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Решение. Полагаме

$$I(p) = \int_0^{p} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

и разглеждаме двойния интеграл

$$\iint_R e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

разпространен върху квадрата R, определен от неравенствата

$$0 \le x \le p,$$
$$0 \le y \le p.$$

Очевидно имаме

$$\iint_R e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^p \left[\int_0^p e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_0^p e^{-x^2}\left[\int_0^p e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^p e^{-x^2} I(p)\,\mathrm{d}x = I(p)\int_0^p e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = I^2(p).$$

Въвеждаме полярни координати

$$x = \rho\cos\theta,$$
$$y = \rho\sin\theta.$$

Функционалната детерминанта ρ се анулира при $x = y = 0$. Поради това ние изолираме началото с кръгова област $\rho < r$, където $r < p$, и разглеждаме интеграла

$$\iint_{A(r)} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

където $A(r)$ е частта от квадрата R, която се намира вън от кръга $\rho < r$. В такъв случай, полагайки

$$\rho(\theta) = \frac{p}{\cos\theta} \text{ при } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \text{ и } \rho(\theta) = \frac{p}{\sin\theta} \text{ при } \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$

получаваме[1]

$$\iint_{A(r)} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_r^{\rho(\theta)} e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{-e^{-\rho^2}}{2}\right|_r^{\rho(\theta)}\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-r^2} - e^{-\rho^2(\theta)}}{2}\,\mathrm{d}\theta = e - r^2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta,$$

тъй като $A(r)$ няма общи точки с неположителната част на оста OX. От друга страна, като означим с $B(r)$ сектора $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, $\rho < r$, получаваме

$$I^2(p) - \iint_{A(r)} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{B(r)} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

и следователно

$$\left|I^2(p) - \iint_{A(r)} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \le \mu(B(r)) = \frac{\pi r^2}{4}$$

[1]Областта $A(r)$ може да се дефинира в полярни координати с помощта на неравенствата

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$
$$r \le \rho \le \rho(\theta).$$

или още

$$\left| I^2(p) - e^{-r^2}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \right| \le \frac{\pi r^2}{4},$$

откъдето

$$\left| I^2(p) - e^{-r^2}\frac{\pi}{4} \right| \le \frac{\pi r^2}{4} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

и следователно[1]

$$\left| I^2(p) - e^{-r^2}\frac{\pi}{4} \right| \le \frac{\pi r^2}{4} + \frac{1}{2}e^{-p^2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Като извършим граничния преход $r \to 0$, намираме

$$\left| I^2(p) - \frac{\pi}{4} \right| \le \frac{\pi}{4}e^{-p^2},$$

откъдето

$$\lim_{p\to\infty}\left[I^2(p) - \frac{\pi}{4} \right] = 0$$

и следователно

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Не е трудно да се убедим, че формулата (18) запазва своята валидност и тогава, когато интеграционната област A' се определя в полярни координати с неравенствата (17), където α и β удовлетворяват неравенствата

$$-\pi \le \alpha < \beta \le \pi,$$

функциите $f(\theta)$ и $g(\theta)$ са непрекъснати в затворения интервал $[\alpha,\beta]$ и удовлетворяват неравенствата

$$0 \le f(\theta) \le g(\theta)$$

и функцията $F(x, y)$ е непрекъсната в A'.

Тези условия са по-общи от разгледаните по-горе, защото сега не се иска да имаме $a \ne -\pi$; $\beta \ne \pi$ и $f(\theta) \ne 0$. Читателят ще може сам да установи валидността на това обобщение, като проучи упътването на задача 1 към този параграф.

В разглежданията, които направихме, интервалът $[-\pi, \pi]$ може очевидно да се замени с произволен интервал, чиято дължина е 2π.

Задачи

1. Нека A е едно измеримо и затворено множество от точки в безкрайния правоъгълник

$$\begin{aligned} &0 \le u \le 2\pi, \\ &v \ge 0, \end{aligned} \tag{19}$$

---

[1] Тъй като $\rho(\theta) \ge p$.

който лежи в равнината с декартови координати u и v. Нека A' е образ на A при трансформацията

$$x = v\cos u, \quad y = v\sin u. \tag{20}$$

В такъв случай, ако $F(x, y)$ е функция, която е непрекъсната в A', е валидно равенството

$$\iint_{A'} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{A} F(v\cos u, v\sin u)v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{21}$$

Забележка. По такъв начин равенството (21) е валидно и в този случай, въпреки че трансформацията (20) не е регулярна в (19).

Упътване. Изберете едно положително число r толкова голямо, че правоъгълникът

$$0 \le u \le 2\pi,$$
$$0 \le v \le r$$

да покрива A. Нека B е сумата от правоъгълниците

$$0 \le u \le \varepsilon, \quad 0 \le v \le r; \quad 2\pi - \varepsilon \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le r; \quad 0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le \varepsilon, \tag{22}$$

и нека C е сумата от секторите в равнината XOY, които в полярни координати се определят от същите неравенства (22) (тук u е полярният ъгъл, а v е полярното разстояние).

Използувайте, че

$$\iint_{A'} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{A'-C} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{A'C} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$\iint_{A} F(v\cos u, v\sin u)v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{A-B} F(v\cos u, v\sin u)v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \iint_{AB} F(v\cos u, v\sin u)v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$
$$\iint_{A'-C} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{A-B} F(v\cos u, v\sin u)v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Нека M е една горна граница на $|F(x, y)|$ в A'. В такъв случай

$$\left|\iint_{A'C} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \le M\mu(A'C) \le M(\varepsilon r^2 + \pi\varepsilon^2),$$
$$\left|\iint_{AB} F(v\cos u, v\sin u)v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right| \le Mr\mu(AB) \le Mr(2\varepsilon r + 2\pi\varepsilon),$$

и следователно

$$\begin{aligned}
&\left|\iint_{A'} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{A} F(v\cos u, v\sin u)v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right| \\
&\qquad \le \left|\iint_{A'C} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| + \left|-\iint_{AB} F(v\cos u, v\sin u)v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right| \\
&\qquad \le M(\varepsilon r^2 + \pi\varepsilon^2) + Mr(2\varepsilon r + 2\pi\varepsilon).
\end{aligned}$$

Извършете в така полученото неравенство граничния преход $\varepsilon \to 0$.

2. Да се пресметне двойният интеграл

$$I = \iint_{R} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

разпространен върху областта R, определена от неравенствата

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq a^2.$$

Упътване. Въведете поляни координати.

Отговор. $I = \dfrac{\pi a^4}{8}$.

3. Да се пресметне двойният интеграл

$$I = \iint_R \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

разпространен във вътрешността R на елипсата

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Упътване. Направете смяната на променливите

$$x = au,$$
$$y = bv$$

и след това въведете полярни координати.

Отговор. $I = \dfrac{2\pi ab}{3}$.

4. Да се пресметне двойният интеграл

$$I = \iint_R (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

взет във вътрешността R на кръга

$$x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

Упътване. Въведете полярни координати.

Отговор. $I = \dfrac{3\pi}{2}$.

5. Да се пресметне двойният интеграл

$$I = \iint_R \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

разпространен върху частта R от първия квадрант, заградена от оста x и от кривата

$$\rho^2 = 4\cos^2\theta - 1.$$

Отговор. $I = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{9}$.

§ 4. Несобствени двойни интеграли от неотрицателни функции

Нека G е едно измеримо множество от точки в равнината и S е негово подмножество с мярка нула. Нека $f(x, y)$ е функция, дефинирана в $G - S$, която приема само неотрицателни стойности. Нека най-сетне функцията $f(x, y)$ е интегруема върху всяко измеримо подмножество A на G, чието разстояние до S е различно от нула. Ще казваме, че функцията $f(x, y)$ е интегруема в несобствен смисъл върху G, ако интегралът

(1) $$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

остава ограничен отгоре, когато A се мени. Точната горна граница на (1) ще означаваме със символа

(2) $$\iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Нека

$$A_1, A_2, \ldots$$

е редица от измерими подмножества на G, за които

$$d(A_n, S) \neq 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mu(G - A_n) = 0.$$

Не е трудно да се покаже, че ако редицата

$$\iint_{A_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \iint_{A_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \ldots$$

е сходяща, то функцията $f(x, y)$ е интегруема в несобствен смисъл върху G и

$$\iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

И наистина нека A е произволно измеримо подмножество на G, чието разстояние до S е различно от нула. Очевидно имаме

$$A \subset A_n + (A - A_n).$$

Оттук, като вземем под внимание, че функцията $f(x, y)$ е неотрицателна, получаваме

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint_{A_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{A-A_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Да означим с M една горна граница на $f(x, y)$ върху A. В такъв случай

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint_{A_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + M\mu(A - A_n)$$

и толкова повече

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint_{A_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + M\mu(G - A_n).$$

Като извършим граничен преход в последното неравенство, получаваме

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

което ни учи, че функцията $f(x, y)$ е интегруема върху G и

$$\iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

От друга страна, съгласно дефиницията на (2) имаме

$$\iint_{A_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

което след граничен преход ни дава

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

и следователно

$$\iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

С това доказателството е завършено.

Глава II

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ДВОЙНИТЕ ИНТЕГРАЛИ

§ 1. Дефиниция на понятието обем

Въвеждането на понятието обем може да стане строго, като се следва пътят, по който въведохме понятието лице. Тук няма да се спираме на подробностите, а ще покажем само в общи черти как това може да се направи.

1. Нека Δ е правоъгълен паралелепипед с измерения a, b и c. Ние ще означаваме произведението abc накратко със символа $m(\Delta)$.

2. Ако A е едно ограничено множество точки в пространството, можем (по безбройно много начини) да изберем система от краен брой отворени кубове $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ по такъв начин, че да имаме

$$A \subset \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n.$$

Точната долна граница на числата

$$m(\Delta_1) + m(\Delta_2) + \cdots + m(\Delta_n)$$

ще наричаме горна Пеано—Жорданова мярка на множеството A и ще я означаваме със символа $\mu(A)$.

3. Специално, ако A е едно ограничено точково множество и контурът му има мярка нула, ще казваме, че множеството A е измеримо в смисъл на Пеано—Жордан.

Доказва се (по същия начин, както и в двуизмеримия случай), че:

1. Каквото и да е ограниченото точково множество A в пространството, имаме $\mu(A) \geq 0$.

2. Ако двете точкови множества A и B в пространството са измерими и мярката на сечението им е нула, то

$$\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B).$$

3. Ако A и B са две сходни помежду си ограничени множества от точки в пространството, то

$$\mu(A) = \mu(B).$$

4. Ако Δ е куб, чийто ръб има дължина 1, то

$$\mu(\Delta) = 1$$

без оглед на това, дали към този куб са причислени или не едни или други точки от контура му.

Специално, ако едно множество A от точки в пространството е измеримо, то неговата горна Пеано—Жорданова мярка се нарича негов обем. Често измеримите точкови множества, за които ние говорим в този параграф (т. е. за които е дефинирано понятието обем), се наричат още кубируеми за разлика от измеримите точкови множества, за които е дефинирано понятието лице и които се наричат квадрируеми.

2. Нека читателят сам докаже следното:

1. Ако A и B са ограничени точкови множества в пространството и $A \supset B$, то $\mu(A) \geq \mu(B)$.

Нека $OXYZ$ е една произволна ортогонална координатна система и нека R е едно квадрируемо множество от точки в равнината OXY. Нека G е едно изправено цилиндрично тяло с височина $h > 0$, за основа на което служи множеството R. Това значи, че една точка (x, y, z) е причислена към G тогава и само тогава, когато (x, y) е точка, принадлежаща на R, и $0 \leq z \leq h$. В такъв случай множеството G е кубируемо и обемът му V се определя от формулата

$$V = Sh,$$

където S е лицето на R и h, както казахме по-горе, е височината на G.

§ 2. Пресмятане на обеми с помощта на двойни интеграли

Нека функцията $z = f(x, y)$ е дефинирана, непрекъсната и неотрицателна в едно затворено и квадрируемо точково множество R в равнината XOY. Да разгледаме изправеното цилиндрично тяло G, което е заградено отгоре с повърхнината $z = f(x, y)$, а долната основа на което представлява множеството R. Това цилиндрично тяло G може по-точно да се дефинира така: една точка с координати (x, y, z) се причислява към G тогава и само тогава, когато точката с координати (x, y) принадлежи на R и

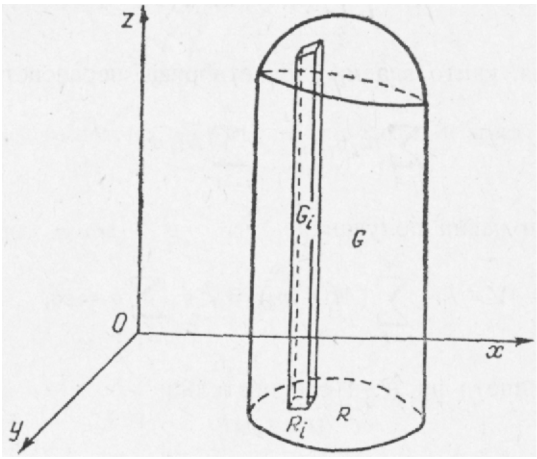
$$0 \leq z \leq f(x, z)$$

(вж. черт. 24).

Не е трудно да се види, че множеството G е кубируемо.[1] Тук ще си поставим за задача да пресметнем обема V на тялото G. За тази цел избираме едно произволно положително число ε и делим множеството на R на измерими подмножества

$$R_1, R_2, \ldots, R_n$$

[1] Т. е. то е ограничено и контурът му има мярка нула. Ние ще представим доказателството на читателя.



Черт. 24

без общи точки по такъв начин, че осцилацията на $f(x, y)$ във всяко едно от тези подмножества да бъде по-малка от ε. Това може да се направи (стига да изберем диаметрите на R_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, достатъчно малки), защото функцията $f(x, y)$ е непрекъсната, а множеството R е ограничено и затворено. По такъв начин тялото G се разпада на по-малки цилиндрични тела $G_1, G_2, \ldots, G_n$ с основи $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Да означим с M_i и m_i точната горна и точната долна граница на $f(x, y)$ в множеството R_i, със σ_i лицето на R_i и с v_i обема на G_i. В такъв случай очевидно са в сила неравенствата

$$m_i\sigma_i \leq v_i \leq M_i\sigma_i,$$

защото $m_i\sigma_i$ представлява обемът на цилиндър, вписан в G_i, а $M_i\sigma_i$ представлява обемът на цилиндър, описан около G_i. Оттук получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} v_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i$$

или още

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\sigma_i \leq V \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\sigma_i.$$

От друга страна, функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в квадрируемото и затворено точково множество R и следователно е интегруема в това множество. Това ни дава право да образуваме двойния интеграл

$$I = \iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Този интеграл, както знаем, удовлетворява неравенствата

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \sigma_i \leq I \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \sigma_i.$$

По такъв начин получаваме

$$|V - I| \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\sigma_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \varepsilon\sigma, \tag{1}$$

където σ е лицето на R, и следователно

$$V - I = 0,$$

защото в противен случай неравенството (1) сигурно би било нарушено при достатъчно малки стойности на ε. По такъв начин получихме

$$V = \iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

или по-кратко

$$V = \iint_R z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Пример. Да се пресметне обемът на триосния елипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0. \tag{2}$$

Решение. Да означим с V обема на елипсоида. Този обем е два пъти по-голям от обема на частта на този елипсоид, която е разположена над равнината $z = 0$. По такъв начин получаваме

$$V = 2\iint_R z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

където R означава вътрешността на елипсата

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Уравнението на частта от елипсоида (2), която е разположена над равнината $z = 0$, е

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

По такъв начин намираме

$$V = 2c\iint_R \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

За да пресметнем този двоен интеграл, правим смяна на променливите

$$\begin{aligned} x &= au, \\ y &= bv. \end{aligned} \tag{4}$$

Като вземем пред вид, че

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = ab,$$

намираме

$$V = 2abc \iint_A \sqrt{1-u^2-v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{5}$$

където контурът на интеграционната област A представлява окръжността

$$u^2 + v^2 = 1 \tag{6}$$

(интеграционната област A е образът на интеграционната област R при трансформацията (4); уравнението (6) се получава от уравнението (3) с помощта на субституцията (4)).

Пресмятането на интеграла (5) може да се извърши с помощта на полярни координати по следния начин:

$$\begin{aligned}\iint_A \sqrt{1-u^2-v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 \sqrt{1-p^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\left|-\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 \mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

По такъв начин получаваме

$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

В специалния случай, когато $a = b = c$, получаваме познатата от елементарната геометрия формула за обема на сферата

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

§ 3. Обеми на ротационни тела

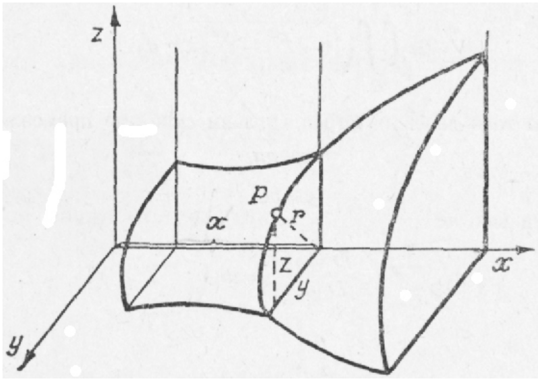
В предния параграф показахме как поне в някои случаи можем да намираме обемите на телата с помощта на двойни интеграли. Има обаче някои специални случаи, когато обемът може да се изрази с прост интеграл. Такъв случай имаме например при ротационните тела.

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана, непрекъсната и неотрицателна в интервала $a \leq x \leq b$. Ако завъртим тази крива около оста x, ще получим една ротационна повърхнина S (вж. черт. 25). Очевидно една точка P с абсциса x лежи върху повърхнината S тогава и само тогава, когато разстоянието ѝ r до оста x е равно на $f(x)$. Когато вземем пред вид, че

$$r = \sqrt{y^2 + z^2},$$

получаваме, че точка P лежи върху повърхнината S тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват уравнението

$$f(x) = \sqrt{y^2 + z^2}.$$



Черт. 25

Когато решим така полученото уравнение относно z, заключаваме че уравнението на частта от повърхнината S, която е разположена над равнината $z = 0$, е

$$z = \sqrt{f^2(x) - y^2}.$$

След всичко казано не е трудно да се намери обемът V на ротационното тяло, което е заградено от повърхнината S и от равнините $x = a$ и $x = b$. Очевидно този обем е четири пъти по-голям от обема на частта от разглежданото ротационно тяло, която е разположена в първия октант. По такъв начин получаваме

$$V = 4 \iint_R z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 4 \iint_R \sqrt{f^2(x) - y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

където интеграционната област R се определя от неравенствата

$$a \le x \le b,$$
$$0 \le y \le f(x),$$

откъдето

$$V = 4 \int_a^b \left[\int_0^{f(x)} \sqrt{f^2(x) - y^2} \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

Като положим

$$y = f(x) \cos t,$$

намираме

$$\int_0^{f(x)} \sqrt{f^2(x) - y^2} \, \mathrm{d}y = f^2(x) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = f^2(x) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, \mathrm{d}t = f^2(x) \frac{\pi}{4},$$

откъдето

$$V = 4\frac{\pi}{4}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

т. е.

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Пример. В предния параграф пресметнахме обема на сферата, като използувахме двойни интеграли. Ние обаче можем да пресметнем обема на сферата с помощта на прости интеграли, като използуваме формулата (1). И наистина сферата

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{2}$$

може да се получи от завъртване на окръжността

$$x^2 + y^2 = R^2$$

около оста x. Това обстоятелство ни позволява да пресметнем обема V на сферата (2) по следния начин:

$$V = \pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \pi\left|R^2x - \frac{x^3}{3}\right|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Задачи

1. Да се намери обемът на тялото, получено от въртенето на овала на строфоидата

$$(x^2 + y^2)x - a(x^2 - y^2) = 0; \quad a > 0$$

около оста x.

Отговор. $2a^3\pi\left(\ln 2 - \frac{2}{3}\right)$.

2. Да се намери обемът на тялото, получено от въртенето на дъгата от циклоидата

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t),\\ y &= a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi;\ a > 0, \end{aligned}$$

около оста x.

Отговор. $5a^3\pi^2$.

3. Да се намери обемът на тялото, получено от въртенето на кардиоидата

$$\rho = a(1 + \cos\theta), \quad a > 0,$$

около оста x.

Отговор. $\frac{8\pi a^3}{3}$.

4. Да се намери обемът на триосния елипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0,$$

с помощта само на прости интеграли.

Отговор. $\frac{4}{3}\pi abc$.

5. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$x^2 + y^2 = cz,\ c > 0, \quad x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2), \quad z = 0.$$

Отговор. $\dfrac{3\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{a^4}{c}$.

6. Да се намери обемът на тялото, определено от неравенствата

$$x^2 + y^2 + z^2 \le a^2, \quad \left(x^2 + y^2\right)^2 \le a^2\left(x^2 - y^2\right); \quad a > 0.$$

Отговор. $\dfrac{2}{3}\pi a^3 - \dfrac{8}{9}\left(4\sqrt{2} - 5\right)a^3$.

7. Да се намери обемът на тялото, определено от неравенствата

$$x^2 + y^2 + z^2 \le a^2, \quad x^2 + y^2 \le ax; \quad a > 0$$

(задача на Вивиани).

Отговор. $\dfrac{2}{3}\pi a^3 - \dfrac{8}{9}a^3$.

8. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнината

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Отговор. $\dfrac{\pi^2}{2}abc$.

9. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \quad \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad z = 0; \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Отговор. $\dfrac{3\pi}{2\sqrt{2}}abc$.

10. Да се намери обемът на тялото, определено от неравенствата

$$x^2 + y^2 + z^2 \le a^2, \quad y^2 + z^2 \le ax; \quad a > 0.$$

Отговор. $\dfrac{5\pi a^3}{4}\left(1 - \dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

11. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$y^2 + z^2 = 2p(x + aq), \quad y^2 + z^2 = -2q(x - ap); \quad a > 0,\ p > 0,\ q > 0.$$

Отговор. $\pi a^2(p + q)pq$.

12. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$\frac{x^2}{3} + y^2 - 2z = 0, \quad \frac{2x^2}{3} + 3y^2 + 2z - 4 = 0.$$

Отговор. 2π.

13. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}, \quad 2z = ab\frac{bx^2 + ay^2}{b^2x^2 + a^2y^2}; \quad a > 0,\ b > 0.$$

Отговор. $\dfrac{ab(a + b)}{8}\pi$.

14. Да се намери обемът на тялото, заградено от повърхнините

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}; \quad a > 0.$$

Отговор. $\dfrac{4\pi a^3}{35}$.

§ 4. Допирателна равнина

Нека функцията

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

е дефинирана в някоя околност на точката (x_0, y_0) и притежава непрекъснати първи частни производни в тази околност. Равнината с уравнение

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{2}$$

където

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

се нарича допирателна (тангенциална) равнина към повърхнината (1) в точката (x_0, y_0, z_0).

На читателя е известно от аналитичната геометрия, че числата

$$f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1$$

представляват директорните параметри[1] на нормалата на равнината (2). Оттук заключаваме, че директорните косинуси на тази нормала са или

$$\frac{f'_x(x_0, y_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0, y_0) + f'^2_y(x_0, y_0) + 1}}, \quad \frac{f'_y(x_0, y_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0, y_0) + f'^2_y(x_0, y_0) + 1}},$$
$$\frac{-1}{\sqrt{f'^2_x(x_0, y_0) + f'^2_y(x_0, y_0) + 1}},$$

или

$$\frac{-f'_x(x_0, y_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0, y_0) + f'^2_y(x_0, y_0) + 1}}, \quad \frac{-f'_y(x_0, y_0)}{\sqrt{f'^2_x(x_0, y_0) + f'^2_y(x_0, y_0) + 1}},$$

[1] Т. е. това са числа, пропорционални на косинусите (тези косинуси се наричат директорни косинуси) на ъглите, които сключва коя да е от посоките на разглежданата права с посоките на координатните оси.

$$\frac{1}{\sqrt{f_x'^2(x_0, y_0) + f_y'^2(x_0, y_0) + 1}}$$

в зависимост от посоката, която сме избрали за положителна върху разглежданата нормала.

§ 5. Лица на повърхнини

Нека функцията

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

е дефинирана и има равномерно непрекъснати първи частни производни в едно квадрируемо и отворено точково множество G чиято мярка е различна от нула. Делим множеството G на квадрируеми подмножества

$$G_1, G_2, \dots, G_n \tag{2}$$

с различни от нула мерки по такъв начин, че мярката на сечението на всеки две от тях да бъде нула, и избираме във всяко от тези подмножества G_i по една вътрешна точка (ξ_i, η_i). Разглеждаме допирателната равнина

$$z - f(\xi_i, \eta_i) = f_x'(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f_y'(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i) \tag{3}$$

и точката

$$[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)]$$

към повърхнината (1) (вж. предния параграф). Не е трудно да се покаже, че частта H_i от допирателната равнина (3), която се проектира върху G_i, е квадрируема (ние ще предоставим доказателството на читателя). Нека σ_i е нейното лице. Ще покажем, че сумите

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \tag{4}$$

притежават граница, когато диаметрите на подмножествата (2) клонят към нула. За да установим това, означаваме с S_i лицето на множеството G_i. Като вземем пред вид, че G_i е ортогонална проекция на H_i върху равнината (3), получаваме

$$S_i = \sigma_i \left|\cos \gamma_i\right|,$$

където γ_i е кой да е от ъглите, които нормалата на равнината (3) сключва с оста OZ. От предния параграф имаме

$$\cos\gamma_i = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}}$$

и следователно

$$\sigma_i = \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}S_i,$$

откъдето

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_i, \eta_i) + f_y'^2(\xi_i, \eta_i)}S_i.$$

По този начин ние представихме σ като Риманова интегрална сума на функцията

$$\varphi(x, y) = \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}.$$

От друга страна, лесно се доказва, че тази функция е равномерно непрекъсната в G и следователно сумите σ клонят към интеграла

$$\iint_G \varphi(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_G \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

когато диаметрите на подмножествата G_i клонят към нула. С това ние не само установихме съществуването на интересуващата ни граница, но дори можахме да изразим тази граница с помощта на един двоен интеграл.

След тези предварителни бележки ще дефинираме понятието лице на повърхнината (1) така: границата на сумите (4), когато диаметрите на подмножествата (2) на G клонят към нула, се нарича лице на повърхнината (1).

Да означим с S лицето на повърхнината (1). От изложеното по-горе се вижда, че

$$S = \iint_G \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{5}$$

Целесъобразно е да се обобщи понятието лице по следния начин: нека функцията $z = f(x, y)$ е дефинирана и притежава частни производни f_x' и f_y' навсякъде в едно измеримо точково множество G с евентуално изключение на едно подмножество с мярка нула в смисъл на Пеано—Жордан; в такъв случай ние под лице на повърхнината $z = f(x, y)$ ще разбираме стойността на интеграла (5) всеки път, когато този интеграл съществува (в собствен или несобствен смисъл).

§ 6. Лица на ротационни повърхнини

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана, положителна и има непрекъснатa производна в интервала $a \leq x \leq b$. Ако завъртим тази крива около оста x, ще получим една ротационна повърхнина S (вж. черт. 25). Видяхме в § 3 на тази глава, че уравнението на частта S' от повърхнината S, която е разположена над равнината $z = 0$, е

$$z = \sqrt{f^2(x) - y^2}.$$

Тук оставяме точката (x, y) да се мени в отвореното множество G, определено от неравенствата

$$\begin{gathered} a < x < b, \\ -f(x) < y < f(x). \end{gathered}$$

Ще пресметнем лицето σ' на частта S'. Очевидно имаме

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f^2(x) - y^2}}, \\ z'_y &= \frac{-y}{\sqrt{f^2(x) - y^2}}. \end{aligned}$$

По такъв начин формулата (5) от предния параграф ни дава

$$\begin{aligned} \sigma' &= \iint_G \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_G \sqrt{1 + \frac{f^2(x)f'^2(x)}{f^2(x) - y^2} + \frac{y^2}{f^2(x) - y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= \iint_G \frac{f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x) - y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

където интегралът трябва да се разбира в несобствен смисъл.

Означаваме с G^* произволно измеримо и затворено подмножество на G, което няма общи точки с контура на G. В такъв случай при всички достатъчно малки положителни стойности на ε имаме

$$\iint_{G^*} \frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \int_a^b \left[f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\int_{-f(x)+\varepsilon}^{f(x)-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \left[f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\int_{-f(x)+\varepsilon}^{f(x)-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\dfrac{y}{f(x)}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{f(x)}\right)^2}}\right]\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\arcsin\frac{f(x)-\varepsilon}{f(x)}\,\mathrm{d}x < \pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x,$$

защото $\arcsin\dfrac{f(x)-\varepsilon}{f(x)} < \dfrac{\pi}{2}$. Така получената оценка ни позволява да твърдим, че интегралът

$$\iint_{G} \frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

съществува в несобствен смисъл и

$$\iint_{G} \frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

От друга страна, горната граница

$$\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

на интегралите

$$\iint_{G^*} \frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

е точна, защото

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \left[f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\int_{-f(x)+\varepsilon}^{f(x)-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\arcsin\frac{f(x)-\varepsilon}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

От това следва, че

(1) $$\iint_{G} \frac{f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Понятието лице може малко да се обобщи, като под лице σ на цялата повърхнина S се условим да разбираме $2\sigma^2$. Обръщаме още веднъж вниманието на читателя върху това, че тук се касае за едно малко обобщение на формула (5) от предния параграф, а не за едно нейно следствие. По такъв начин получаваме

$$\sigma = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

или по-кратко

$$\sigma = 2\pi \int_a^b y\,\mathrm{d}s, \tag{3}$$

където

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad \mathrm{d}s = \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Целесъобразно е да се обобщи още повече понятието лице на ротационна повърхнина по следния начин: нека двете функции

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned} \tag{4}$$

където $a \le t \le b$, са диференцуеми в интервала $[a, b]$ с евентуално изключение на краен брой точки и нека $y(t) \ge 0$; уравненията (4) представят параметрично някоя крива (Γ), върху която няма точки, лежащи под оста x, ще наричаме лице на ротационната повърхнина S, която се получава от въртенето на кривата (Γ) около оста x, стойността на интеграла

$$\sigma = 2\pi \int_a^b y\,\mathrm{d}s,$$

където

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}t$$

всеки път, когато този интеграл има (собствен или несобствен) смисъл.

Пример. Да се намери лицето σ на сферата

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad r > 0.$$

Решение. Тази сфера може да се получи чрез завъртане на полуокръжността

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \le x \le r,$$

около оста x. Очевидно имаме

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \mathrm{d}s = \frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

и следователно

$$\sigma = 2\pi \int_{-r}^{r} y\,\mathrm{d}s = 2\pi \int_{-r}^{r} r\,\mathrm{d}y = 4\pi r^2.$$

Задачи

1. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на дъгата

$$y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi,$$

около оста x.

Отговор. $2\pi \left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\right]$.

2. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на дъгата от циклоидата

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1-\cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \; a > 0,$$

около оста x.

Отговор. $\dfrac{64\pi a^2}{3}$.

3. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на трактрисата

$$a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} = |x| + \sqrt{a^2-y^2},$$
$$a > 0, \; 0 < y \le a,$$

около оста x.

Забележка. Тази ротационна повърхнина се нарича псевдосфера.

Отговор. $4\pi a^2$.

4. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на астроидата

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a > 0,$$

около абсцисната ос.

Отговор. $\dfrac{12}{5}\pi a^2$.

5. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на кардиоидата

$$\rho = 2a(1+\cos\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi,$$

около оста x.

Отговор. $\dfrac{128}{5}\pi a^2$.

6. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на кривата

$$\rho = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad a^2 > b^2 > 0,$$

около оста x.

Отговор. $2\pi\left[a^2 + \dfrac{b^4}{a^2+b^2}\ln\dfrac{a^2+\sqrt{a^4-b^4}}{b^2}\right]$.

7. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на кривата

$$\rho^2 = a^2\cos 2\theta$$

около оста x.

Отговор. $4\pi a^2\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

8. Да се намери лицето на повърхнината, образувана от въртенето на окръжността

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$

където $q > r > 0$, около оста x.

Забележка. Тази ротационна повърхнина се нарича тор.

Отговор. $4\pi^2 qr$.

9. Да се намери лицето на частта от параболоида

$$z = \frac{xy}{a}, \quad a > 0,$$

която се проектира върху равнината XOY в областта, ограничена от оста x и от частта от кривата

$$\rho^2 = a^2(4\cos^2\theta - 1),$$

която се намира в първия квадрант.

Отговор. $a^2\sqrt{3} - \dfrac{\pi a^2}{9}$.

10. Да се намери лицето на частта от параболоида

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}, \quad a > 0,\ b > 0,$$

която се намира във вътрешността на цилиндъра

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2.$$

Отговор. $\dfrac{2}{3}\pi ab\left[(1+c^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$.

11. Да се намери лицето на частта от параболоида

$$x^2 + y^2 = 2az, \quad a > 0,$$

която се намира във вътрешността на цилиндъра

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right).$$

Отговор. $\dfrac{a^2}{9}(20 - 3\pi)$.

12. Да се намери лицето на частта от параболоида

$$az = xy, \quad a > 0,$$

която се намира във вътрешността на цилиндъра

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy.$$

Отговор. $\dfrac{a^2}{9}(20 - 3\pi)$.

13. Да се намери лицето на повърхнината

$$z = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

където

$$1 < x^2 + y^2 < 4, \quad x > 0,\ y > 0.$$

Отговор. $\dfrac{\pi}{4}\left[\sqrt{18} - \sqrt{3} + \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) - \dfrac{\ln 2}{\sqrt{2}}\right]$.

14. Да се намери лицето на частта от параболоида

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}, \quad a > 0,\ b > 0,$$

която се намира във вътрешността на цилиндъра

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Отговор. $\dfrac{20 - 3\pi}{9}ab.$

Глава III

ТРОЙНИ ИНТЕГРАЛИ

§ 1. Тройни интеграли

Нека ни е дадена една функция $f(x, y, z)$, която е дефинирана и ограничена в едно кубируемо точково множество R. Делим множеството R на краен брой кубируеми подмножества

$$R_1, R_2, \ldots, R_n \tag{1}$$

по такъв начин, че мярката на сечението на всеки две от тях да бъде нула. Нека v_i е обемът на множеството R_i и нека M_i и m_i са съответно точната горна и точната долна граница на $f(x, y, z)$ в множеството R_i. Сумата

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i v_i$$

се нарича голяма, а сумата

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i$$

се нарича малка сума на Дарбу, която отговаря на избрания начин на деление на множеството R на измерими подмножества (1). Не е трудно да се установят неравенствата

$$mv \leq s \leq S \leq Mv, \tag{2}$$

където M и m означават една горна и една долна граница на $f(x, y, x)$ в множеството R, а v е обемът на R.

И наистина неравенствата

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M$$

ни дават

$$mv_i \leq m_i v_i \leq M_i v_i \leq Mv_i$$

и следователно

$$m \sum_{i=1}^{n} v_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i v_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i v_i \leq M \sum_{i=1}^{n} v_i,$$

откъдето получаваме веднага неравенствата (2), като вземем пред вид, че

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = v.$$

Неравенствата (2) ни учат, че както множеството на малките, така и множеството на големите суми на Дарбу е ограничено (и отгоре, и отдолу). Точната горна граница на множеството от малките суми се означава със символа

$$\underline{\iiint_R} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

и се нарича долен интеграл на функцията $f(x, y, z)$, разпространен върху множеството R, а точната долна граница на големите суми се означава със символа

$$\overline{\iiint_R} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

и се нарича горен интеграл на функцията $f(x, y, z)$, разпространен върху множеството R.

Не е трудно да се установи неравенството

$$\underline{\iiint_R} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \leq \overline{\iiint_R} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Това може да стане по същия начин, както при двойните интеграли. Този път ние ще предоставим доказателството на читателя.

Една ограничена функция $f(x, y, z)$, чиято дефиниционна област R е едно кубируемо точково множество, се нарича интегруема в Риманов смисъл в R, когато

$$\underline{\iiint_R} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \overline{\iiint_R} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

В такъв случай общата стойност на горния и долния интеграл се нарича троен Риманов интеграл на функцията $f(x, y, z)$, разпространен върху множеството R, и се означава със символа[1]

$$\iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

[1]Понякога тройният интеграл се означава по-кратко така:

$$\int_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}v.$$

Тук ние ще изброим по-важните основни свойства на тройните интеграли, които са съвсем аналогични на съответните свойства на простите и на двойните интеграли. Доказателствата ние няма да даваме, защото те могат да се дадат по същия начин, както при простите интеграли.

1. Ако функциите $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ са интегруеми в едно кубируемо точково множество R, то сумата

$$f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)$$

е също интегруема в R и

$$\iiint_R \left[f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_R f_1(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_R f_2(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

2. Ако функцията $f(x, y, z)$ е интегруема в кубируемото точково множество R и a е една константа, то функцията $af(x, y, z)$ е също тъй интегруема в R и

$$\iiint_R af(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = a \iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

3. Ако A и B са две кубируеми точкови множества, ако мярката на сечението AB е нула и ако функцията $f(x, y, z)$ е интегруема както в A, така и в B, то тази функция е интегруема и в множеството $A + B$, то

$$\iiint_{A+B} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_A f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_B f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

4. Ако функцията $f(x, y, z)$ е интегруема в кубируемото точково множество R и удовлетворява неравенствата

$$m \leq f(x, y, z) \leq M,$$

то

$$mv \leq \iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \leq Mv,$$

където v е обемът на R.

5. Всяка функция $f(x, y, z)$, която е дефинирана и непрекъсната в едно кубируемо и *затворено* точково множество R, е интегруема.

Ние бихме могли да продължим и по-нататък списъка на свойствата на тройните интеграли, които са аналогични на съответните свойства на простите и двойните интеграли, но ще се ограничим с изброените дотук.

Накрая ще отбележим още, че понятието интеграл може да се дефинира без труд в пространство с произволен брой измерения. Ние обаче няма да навлизаме в подробностите, още повече, че е ясно как това може да стане.

§ 2. Пресмятане на тройни интеграли

Нека G е едно затворено квадрируемо точково множество в равнината XOY и нека $\varphi_0(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ са две функции, които са дефинирани, непрекъснати и удовлетворяват неравенството

$$\varphi_0(x, y) \leq \varphi_1(x, y)$$

във всички точки на G. Да разгледаме точковото множество R, което е съставено от онези и само онези точки (x, y, z), за които точката (x, y) принадлежи на G и

$$\varphi_0(x, y) \leq z \leq \varphi_1(x, y).$$

Не е трудно да се покаже, че множеството R е измеримо. Ние обаче ще изоставим доказателството.

Нека $f(x, y, z)$ е една функция, която е дефинирана и непрекъсната в R. Функцията $f(x, y, z)$ е интегруема в R, защото е непрекъсната и защото множеството R е не само кубируемо, но и затворено. В разглеждания случай обаче интеграционната област R има твърде специален вид. Благодарение на това обстоятелство тройният интеграл

$$\iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

може да се изрази с помощта на един двоен и един прост интеграл по следния начин:

$$(1) \qquad \iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_G \left[\int_{\varphi_0(x,y)}^{\varphi_1(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Доказателството може да се извърши по същия начин, както доказахме съответната формула за пресмятане на двойните интеграли с помощта на прости. Ние няма да се спираме на доказателството, а ще се задоволим само с един пример, който ще ни илюстрира как се използува формулата (1).

Пример. Да се пресметне тройният интеграл

$$I = \iiint_R z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

разпространен в частта R от пространството, която е заградена от сферата

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Решение. Да означим с G кръга, който се ограничава от окръжността

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Една точка с координати (x, y, z) принадлежи на R тогава и само тогава, когато точката с координати (x, y) принадлежи на G и освен това

$$-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}.$$

Този резултат ни позволява да пишем

$$\iiint_R z^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iint_G \left\{ \int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} z^2 \, \mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

и следователно

$$\iiint_R z^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \frac{2}{3} \iint_G (r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y.$$

По този начин изразихме интересуващия ни интеграл I с помощта на един двоен интеграл. Пресмятането на този двоен интеграл може да се извърши по познати пътища. Въвеждаме полярни координати

$$x = \rho \cos \theta,$$
$$y = \rho \sin \theta.$$

Това ни дава

$$I = \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \left[\int_0^r (r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \rho \, \mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\theta = \frac{4}{15} r^5 \pi.$$

§ 3. Смяна на променливите при тройни интеграли

Нека

$$\begin{aligned} x &= f(u, v, w), \\ y &= g(u, v, w), \\ z &= h(u, v, w) \end{aligned} \tag{1}$$

е една двойно регулярна трансформация на едно отворено точково множество R. Това значи, че функциите (1) удовлетворяват следните условия:

1. Функциите (1) са дефинирани в R и притежават непрекъснати частни производни поне до втори ред включително.

2. Различните точки от R се изобразяват върху различни точки при трансформацията (1).

3. Функционалната детерминанта

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \end{vmatrix}$$

не се анулира никъде в R.

При тези предположения може да се покаже по същия начин, както в двуизмеримия случай, че всяко *кубируемо* точково множество A, което лежи в R заедно с контура си, се изобразява върху някое кубируемо точково множество A'.

Нека A е едно кубируемо и затворено точково множество, което лежи в R, и нека $F(x, y, z)$ е една непрекъсната функция в A', където A' е образът на A. В такъв случай е валидна следната важна формула:

(2)
$$\iiint_{A'} F(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{A} F[f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)]\Delta\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w,$$

където Δ е абсолютната стойност на функционалната детерминанта

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}.$$

Ние няма да се спираме върху доказателството, защото то може да се извърши така, както в двуизмеримия случай.

Специално, ако (ρ, θ, φ) са сферични координати (или, както се казва понякога, пространствени полярни координати) на точката P, чиито декартови координати са (x, y, z), то

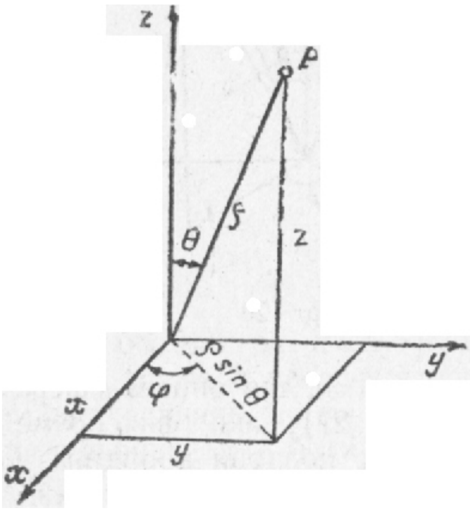
$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= \rho\cos\theta, \end{aligned} \tag{3}$$
$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

(вж. черт. 26). В такъв случай функционалната детерминанта $\dfrac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)}$ има стойност

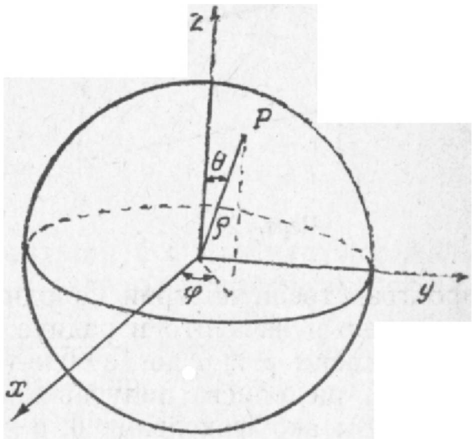
$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2\sin\theta.$$

В специалния случай, когато извършваме смяна на променливите с помощта на трансформачните формули (3), равенството (2) добива следния вид:

$$\iiint_{A'} F(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_{A} F[\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta]\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$



Черт. 26



Черт. 27

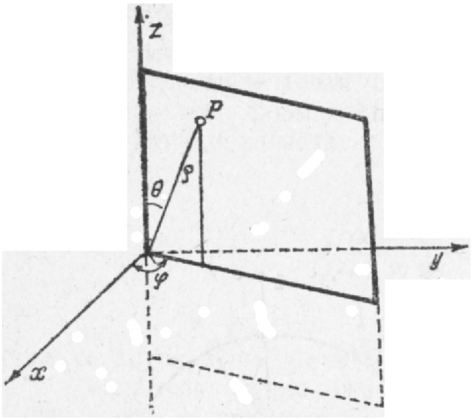
Изразът $\rho^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$ се нарича елемент на обем в полярни координати. Ние ще дадем едно просто геометрично тълкуване на този израз.

За тази цел да отбележим предварително следното: когато фиксираме ρ и оставим φ и θ да се менят, то точката P, чиито пространствени полярни координати са (ρ, φ, θ), ще описва сфера с център в началото и радиус ρ (вж. черт. 27); ако фиксираме φ, а оставим ρ и θ да се менят, точката P с полярни координати (ρ, φ, θ), ще описва полуравнина, която минава през оста z (вж. черт. 28); ако фиксираме θ, а оставим ρ и φ да се менят, точката P, чиито полярни координати са (ρ, φ, θ), ще описва ротационен конус с връх в началото, чиято ротационна ос е оста z (вж. черт. 29).

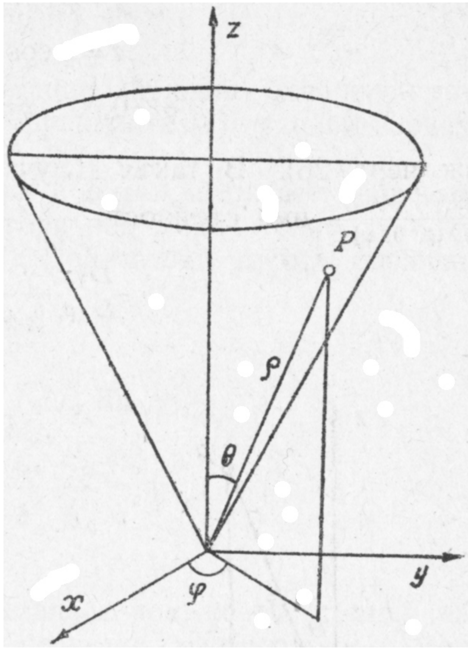
Трите системни повърхнини

$$\rho = \text{const},$$
$$\varphi = \text{const},$$
$$\theta = \text{const}$$

се наричат координатни повърхнини при сферична координатна система. Не е трудно да се види, че всеки две координатни повърхнини от различни системи се пресичат под прав ъгъл. Това значи, че когато и да изберем една точка P върху пресечната крива Γ на две координатни повърхнини S_1 и S_2, които принадлежат на различни системи, допирателните равнини в точката P съответно към S_1 и към S_2 са перпендикулярни помежду си. Няма да доказваме това твърдение, защото читателят е запознат с него от геометрията.



Черт. 28



Черт. 29

В бъдеще за краткост ще си служим със следната терминология: сфера с център в началото и радиус ρ ще наричаме сфера ρ; полуравнина, която минава през оста z и сключва ъгъл φ с полуравнината $+XOZ$, ще наричаме полуравнина φ; ротационен конус с връх в началото, чиито образуващи сключват ъгъл θ с положителната посока на оста z, ще наричаме конус θ.

Да разгледаме частта от пространството, заградена от сферите ρ и $\rho + \mathrm{d}\rho$, полуравнините φ и $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ и конусите θ и $\theta + \mathrm{d}\theta$ (вж. черт. 30).

Тук $AB = \mathrm{d}\rho$; страната AD като дъга от окръжност с радиус ρ, чийто централен ъгъл е $\mathrm{d}\theta$, е равен на $\rho\,\mathrm{d}\theta$; най-сетне AE е дъга от окръжност с радиус

$$PA = \rho \sin\theta$$

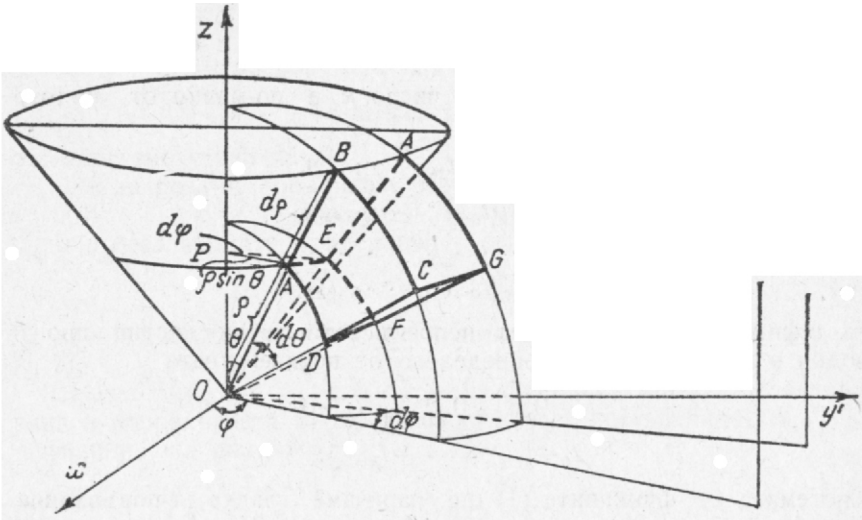
и тъй като

$$\sphericalangle APE = \mathrm{d}\varphi,$$

то

$$AE = \rho \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Ръбовете AB, AD и AE са взаимно перпендикулярни. Разглеждайки тялото $ABCDEFGH$ (приближено) като правоъгълен паралелепипед, получаваме за



Черт. 30

обема му dv следния приблизителен израз:

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}\rho \,.\, \rho \,\mathrm{d}\theta \,.\, \rho \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi = \varphi^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi.$$

§ 4. Формули на Грин, Остроградски и Стокс

Нека цялото неотрицателно число k е по-малко от цялото число n и нека функциите

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_0, t_1, \ldots, t_k), \\ x_2 &= f_2(t_0, t_1, \ldots, t_k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= f_n(t_0, t_1, \ldots, t_k) \end{aligned} \tag{1}$$

са дефинирани и притежават непрекъснати първи частни производни в множеството G, определено от неравенствата

$$t_0 \geq 0, \; t_1 \geq 0, \; \ldots, \; t_k \geq 0, \quad t_0 + t_1 + \cdots + t_k \leq 1.$$

Системата от функциите (1) ще наричаме гладка k-повърхнина. При $k = 0$ така дефинираната k-повърхнина ще наричаме дъга, а при $k = 1$ накратко ще я наричаме повърхнина.

Да означим с Γ определената от (1) k-повърхнина. Множеството, което се описва от точката с координати

$$[f_1(t_0, t_1, \dots, t_k), f_2(t_0, t_1, \dots, t_k), \dots, f_n(t_0, t_1, \dots, t_k)],$$

когато точката $(t_0, t_1, \dots, t_k)$ описва G, ще наричаме графика на k-повърхнината Γ. Ако всяка от независимите променливи $t_0, t_1, \dots, t_k$ е снабдена с номер, както това е направено при нас, ще казваме, че повърхнината Γ е ориентирана. Ако функциите (1) притежават непрекъснати частни производни и от втори ред, ще казваме, че Γ е (двукратно) гладка k-повърхнина. Гладките $(k-1)$-повърхнини $\Gamma_{\nu+1}$ при $\nu \geq 0$, определени от

$$\begin{gathered}
x_1 = f_1(t_0, t_1, \dots, t_{\nu-1}, 0, t_{\nu+1}, \dots, t_k),\\
x_2 = f_2(t_0, t_1, \dots, t_{\nu-1}, 0, t_{\nu+1}, \dots, t_k),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_n = f_n(t_0, t_1, \dots, t_{\nu-1}, 0, t_{\nu+1}, \dots, t_k),\\
t_0 \geq 0,\ t_1 \geq 0,\ \dots,\ t_{\nu-1} \geq 0,\ t_{\nu+1} \geq 0,\ \dots,\ t_k \geq 0,\\
t_0 + t_1 + \dots + t_{\nu-1} + t_{\nu+1} + \dots + t_k \leq 1,
\end{gathered}$$

както и $(k-1)$-повърхнината Γ_0, определена от

$$\begin{gathered}
x_1 = f_1(1 - t_1 - t_2 - \dots - t_k, t_1, t_2, \dots, t_k),\\
x_2 = f_2(1 - t_1 - t_2 - \dots - t_k, t_1, t_2, \dots, t_k),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_n = f_n(1 - t_1 - t_2 - \dots - t_k, t_1, t_2, \dots, t_k),\\
t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0,\ \dots,\ t_k \geq 0, \quad t_1 + t_2 + \dots + t_k \leq 1,
\end{gathered}$$

ще наричаме стени на Γ.

За да получим по-прости резултати, ще превърнем $\Gamma_{\nu+1}$ при $\nu = 0, 1, \dots, k$ в ориентирана $(k-1)$-повърхнина, като номерираме независимите променливи в следния ред:

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_{\nu-1}, t_{\nu+1}, \dots, t_k.$$

За $(k-1)$-повърхнината Γ_0 ще извършим номерирането в реда $t_1, t_2, \dots, t_k$.

Нека $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е една функция, която е дефинирана и непрекъсната върху графиката на k-повърхнината Γ. По дефиниция ще пишем[1]

[1] Тук знакът $\int_G$ в дефиниционния израз на (2) представлява съкратено означение на интеграл в пространство с $k + 1$ измерения.

$$(2)\qquad \int_{\Gamma} F(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_{\alpha_0}\,\mathrm{d}x_{\alpha_1}\dots\mathrm{d}x_{\alpha_k}$$

$$= \int_G F(f_1, f_2, \dots, f_n) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial t_0} & \dfrac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial f_{\alpha_0}}{\partial t_k} \\ \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} \end{vmatrix} \mathrm{d}t_0\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_k.$$

По такъв начин стойността на интеграла (2) зависи от реда, в който пишем диференциалите $\mathrm{d}x_{\alpha_0}, \mathrm{d}x_{\alpha_1}, \dots, \mathrm{d}x_{\alpha_k}$. Ако разменим местата на два диференциала, интегралът си сменя знака.

При тази дефиниция се позволява някои от индексите $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ да съвпадат. В такъв случай стойността на интеграла (2) ще бъде нула, защото някои редове в детерминантата от дефиниционния му израз ще съвпадат.

Интегралът (2) зависи от ориентировката на Γ, т. е. от начина, по който са номерирани променливите на функциите (1), защото от това зависи в какъв ред ще бъдат написани стълбовете на детерминантата, която ни интересува.

С оглед на нашите цели ще намерим някои изрази за интеграли върху стените $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k, \Gamma_{k+1}$ на една функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, която е дефинирана и непрекъсната върху графиките им. Поради това ще означим с Γ_ν множеството на точките

$$(t_0, t_1, \dots, t_{\nu-1}, t_{\nu+1}, \dots, t_k),$$

които удовлетворяват неравенствата

$$\begin{gathered} t_0 \ge 0,\ t_1 \ge 0,\ \dots,\ t_{\nu-1} \ge 0,\ t_{\nu+1} \ge 0,\ \dots,\ t_k \ge 0, \\ t_0 + t_1 + \dots + t_{\nu-1} + t_{\nu+1} + \dots + t_k \le 1. \end{gathered}$$

Очевидно имаме

$$\int_{\Gamma_0} F(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_{\alpha_1}\,\mathrm{d}x_{\alpha_2}\dots\mathrm{d}x_{\alpha_k} = \int_{G_0} (F\Delta)_{t_0 = v_0}\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\dots\mathrm{d}t_k,$$

където

$$(3)\qquad v_0 = 1 - t_1 - t_2 - \dots - t_k$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_1} - \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \cdots & \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} - \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_1} - \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \cdots & \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} - \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} \end{vmatrix}.$$

Да положим

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \cdots & \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_{s-1}} & \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_{s+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} \\ \dfrac{\partial f_{\alpha_2}}{\partial t_0} & \cdots & \dfrac{\partial f_{\alpha_2}}{\partial t_{s-1}} & \dfrac{\partial f_{\alpha_2}}{\partial t_{s+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{\alpha_2}}{\partial t_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \cdots & \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_{s-1}} & \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_{s+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

В такъв случай

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_1} - \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \cdots & \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} - \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_1} - \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \cdots & \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} - \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} \end{vmatrix} = \sum_{s=0}^{k}(-1)^s \Delta_s.$$

Така получаваме

$$\int_{\Gamma_0} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_{\alpha_1}\, \mathrm{d}x_{\alpha_2} \ldots \mathrm{d}x_{\alpha_k} = \sum_{s=0}^{k}(-1)^s \int_{G_0} (F\Delta_s)_{t_0=v_0}\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_k,$$

където

$$v_0 = 1 - t_1 - t_2 - \cdots - t_k.$$

Да направим в интеграла

$$\int_{G_0} (F\Delta_s)_{t_0=v_0}\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_k, \quad s = 1, \ldots, k,$$

смяната на променливите

$$t_1 = u_1$$
$$\ldots$$

$$
\begin{aligned}
t_{s-1} &= u_{s-1}\\
t_s &= 1 - u_0 - u_1 - \dots - u_{s-1} - u_{s+1} - \dots - u_k\\
t_{s+1} &= u_{s+1}\\
t_k &= u_k.
\end{aligned}
$$

По такъв начин, след като се върнем към старото означение на променливите, получаваме

$$\int_{G_0} (F\Delta_s)_{t_0=v_0}\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \dots \mathrm{d}t_k = \int_{G_s} (F\Delta_s)_{t_s=v_s}\, \mathrm{d}t_0 \dots \mathrm{d}t_{s-1}\, \mathrm{d}t_{s+1} \dots \mathrm{d}t_k,$$

където сме положили

$$1 - t_0 - \dots - t_{s-1} - t_{s+1} - \dots - t_k = v_s. \tag{5}$$

Това ни дава

$$\int_{\Gamma_0} F(x_1, x_2, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_{\alpha_1}\, \mathrm{d}x_{\alpha_2} \dots \mathrm{d}x_{\alpha_k} = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \int_{G_s} (F\Delta_s)_{t_s=v_s}\, \mathrm{d}t_0 \dots \mathrm{d}t_{s-1}\, \mathrm{d}t_{s+1} \dots \mathrm{d}t_k. \tag{6}$$

При $0 \le s \le k$ получаваме непосредствено от дефиницията

$$\int_{\Gamma_{s+1}} F(x_1, x_2, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_{\alpha_1}\, \mathrm{d}x_{\alpha_2} \dots \mathrm{d}x_{\alpha_k} = \int_{G_s} (F\Delta_s)_{t_s=0}\, \mathrm{d}t_0 \dots \mathrm{d}t_{s-1}\, \mathrm{d}t_{s+1} \dots \mathrm{d}t_k. \tag{7}$$

Теорема. *Нека в някое отворено множество R в пространство с n измерения е дефинирана една функция $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, която притежава непрекъснати първи частни производни. Нека Γ е една двукратно гладка k-повърхнина, определена от* (1)*, чиято графика лежи в R. В такъв случай при $1 \le k < n$ е валидна формулата*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial x_\nu}\, \mathrm{d}x_\nu\, \mathrm{d}x_{\alpha_1} \dots \mathrm{d}x_{\alpha_k} = \sum_{\nu=0}^{k+1} (-1)^{\nu-1} \int_{\Gamma_\nu} P\, \mathrm{d}x_{\alpha_1}\, \mathrm{d}x_{\alpha_2} \dots \mathrm{d}x_{\alpha_k}. \tag{8}$$

Доказателство. Очевидно

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial x_\nu}\, \mathrm{d}x_\nu\, \mathrm{d}x_{\alpha_1} \dots \mathrm{d}x_{\alpha_k} = \sum_{\nu=1}^{n} \int \frac{\partial P}{\partial x_\nu} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_\nu}{\partial t_0} & \dfrac{\partial f_\nu}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial f_\nu}{\partial t_k} \\ \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_0} & \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial f_{\alpha_1}}{\partial t_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_0} & \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial f_{\alpha_k}}{\partial t_k} \end{vmatrix} \mathrm{d}t_0\, \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_k.$$

Като развием детерминантите по първия ред и използваме означението (4), ще получим

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n}\int_\Gamma \frac{\partial P}{\partial x_\nu}\,\mathrm{d}x_\nu\,\mathrm{d}x_{\alpha_1}\cdots\mathrm{d}x_{\alpha_k} &= \int_G \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial P}{\partial x_\nu}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\frac{\partial f_\nu}{\partial t_s}\Delta_s\,\mathrm{d}t_0\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k\\ &= \sum_{s=0}^{k}(-1)^s\int_G \Delta_s\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial P}{\partial x_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial t_s}\right)\mathrm{d}t_0\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k\\ &= \sum_{s=0}^{k}(-1)^s\int_G \Delta_s\frac{\partial P}{\partial t_s}\,\mathrm{d}t_0\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k.\end{aligned}$$

От друга страна

$$\int_G \Delta_s\frac{\partial P}{\partial t_s}\,\mathrm{d}t_0\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k = \int_{G_s}\left[\int_0^{v_s}\Delta_s\frac{\partial P}{\partial t_s}\,\mathrm{d}t_s\right]\mathrm{d}t_0\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{s-1}\,\mathrm{d}t_{s+1}\cdots\mathrm{d}t_k,$$

където v_s се определят от (3) и (5). Следователно, като интегрираме по части, ще получим

$$\begin{aligned}\int_G \Delta_s\frac{\partial P}{\partial t_s}\,\mathrm{d}t_0\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k &= \int_{G_s}\Big|\Delta_s P\Big|_{t_s=0}^{t_s=v_s}\mathrm{d}t_0\cdots\mathrm{d}t_{s-1}\,\mathrm{d}t_{s+1}\cdots\mathrm{d}t_k\\ &\quad-\int_{G_s}\left[\int_0^{v_s}P\frac{\partial\Delta_s}{\partial t_s}\,\mathrm{d}t_s\right]\mathrm{d}t_0\cdots\mathrm{d}t_{s-1}\,\mathrm{d}t_{s+1}\cdots\mathrm{d}t_k\\ =\int_{G_s}[(\Delta_s P)_{t=v_s}-(\Delta_s P)_{t_s=0}]\,\mathrm{d}t_0\cdots\mathrm{d}t_{s-1}\,\mathrm{d}t_{s+1}\cdots\mathrm{d}t_k &- \int_G P\frac{\partial\Delta_s}{\partial t_s}\,\mathrm{d}t_0\,\mathrm{d}t_1\cdots\,\mathrm{d}t_k.\end{aligned}$$

Така получаваме

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=1}^{n}\int_\Gamma\frac{\partial P}{\partial x_\nu}\,\mathrm{d}x_\nu\,\mathrm{d}x_{\alpha_1}\cdots\mathrm{d}x_{\alpha_k}\\ &\qquad=\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\int_{G_s}[(P\Delta_s)_{t_s=v_s}-(P\Delta_s)_{t_s=0}]\,\mathrm{d}t_0\cdots\mathrm{d}t_{s-1}\,\mathrm{d}t_{s+1}\cdots\mathrm{d}t_k-\\ &\qquad\qquad-\int_G P\left(\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\frac{\partial\Delta_s}{\partial t_s}\right)\mathrm{d}t_0\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k.\end{aligned}$$

От друга страна,

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\frac{\partial\Delta_s}{\partial t_s}=0,$$

както това се вижда, след като извършим групиране по вторите производни. Това ни дава

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\Gamma}\frac{\partial P}{\partial x_\nu}\,\mathrm{d}x_\nu\,\mathrm{d}x_{\alpha_1}\cdots\mathrm{d}x_{\alpha_k}=\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\int_{G_s}(P\Delta_s)_{t_s=\nu_s}\,\mathrm{d}t_0\cdots\mathrm{d}t_{s-1}\,\mathrm{d}t_{s+1}\cdots\mathrm{d}t_k$$
$$+\sum_{s=0}^{k}(-1)^{s-1}\int_{G_s}(P\Delta_s)_{t_s=0}\,\mathrm{d}t_0\cdots\mathrm{d}t_{s-1}\,\mathrm{d}t_{s+1}\cdots\mathrm{d}t_k$$

и като вземем под внимание формулите (6) и (7), получаваме

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\Gamma}\frac{\partial P}{\partial x_\nu}\,\mathrm{d}x_\nu\,\mathrm{d}x_{\alpha_1}\cdots\mathrm{d}x_{\alpha_k}=\sum_{s=0}^{k+1}(-1)^{s-1}\int_{\Gamma_s}P\,\mathrm{d}x_{\alpha_1}\cdots\mathrm{d}x_{\alpha_k}.$$

С това доказателството е завършено.

При $n = 2$ и $k = 1$ формулата (8) се нарича *формула на Грин*. При $n = 3$ и $k = 2$ тя се нарича *формула на Остроградски*. При $n = 3$ и $k = 1$ тази формула се нарича *формула на Стокс*. Тези три частни случая се използуват в хидродинамиката, електродинамиката и на много други места.

Общи задачи

1. Нека G е едно квадрируемо точково множество в равнината XOY. Да се докаже, че лицето на G има стойност

$$\iint_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2. Нека R е едно кубируемо точково множество в пространството. Да се покаже, че обемът на R има стойност

$$\iiint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

3. Да се пресметне обемът на елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

като се пресметне тройният интеграл

$$\iiint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

разпространен във вътрешността R на разглеждания елипсоид.

4. Да се намери обемът на частта от първия октант, която е заградена от повърхнината

$$(x^2+y^2+z^2)^3=a^3xyz,\quad a>0.$$

Отговор. $\dfrac{a^3}{24}$.

5. Нека функцията $p(x)$ е дефинирана и неотрицателна при всички стойности на x, нека интегралите

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$b = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$c = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

имат смисъл и нека $a = 1$. В такъв случай е валидно неравенството

$$c - b^2 \geq 0.$$

Забележка. Тази и следващите две задачи изясняват, че е възможно да се изгради теорията на вероятностите, без да се въвежда понятието вероятност. Читателят, който е изучавал теорията на вероятностите, ще разпознае в следващите две задачи две теореми на Чебишев.

Упътване. Използвайте равенството

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-b)^2 p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,\mathrm{d}x - 2b \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x + b^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = c - b^2$$

или пък си послужете с неравенството на Буняковски—Шварц.

6. Нека функцията $p(x)$ е дефинирана и неотрицателна при всички стойности на x, нека интегралите

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$b = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$c = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

имат смисъл и нека $a = 1$. В такъв случай при всеки избор на положителното число ε е валидно неравенството

$$\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} p(x)\,\mathrm{d}x \geq 1 - \frac{c - b^2}{\varepsilon^2}$$

(Чебишев).

Упътване. Използвайте неравенството

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-b)^2 p(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{-\infty}^{b-\varepsilon} (x-b)^2 p(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+\varepsilon}^{\infty} (x-b)^2 p(x)\,\mathrm{d}x \geq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{b-\varepsilon} p(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon^2 \int_{b+\varepsilon}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x$$

или, което е същото,

$$c - b^2 \geq \varepsilon^2 \left[\int_{-\infty}^{b-\varepsilon} p(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b+\varepsilon}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x \right].$$

7. Нека е дадена една редица от функции

$$p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), \dots,$$

които са дефинирани, непрекъснати и неотрицателни при всички стойности на x, нека интегралите

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$b_n = \int_{-\infty}^{\infty} x p_n(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_n(x)\,\mathrm{d}x$$

имат смисъл и нека най-сетне са изпълнени следните условия:

$$a_1 = a_2 = \cdots = 1,$$
$$b_1 = b_2 = \cdots = b,$$
$$c_n - b_n^2 \le k,$$

където k е константа, която не зависи от n. Разглеждаме функциите

$$P_n(t) = n\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1)p_2(x_2)\cdots p_{n-1}(x_{n-1})p_n(nt - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1},$$

които по този начин са добре дефинирани, когато многократният несобствен интеграл е сходящ при всички стойности на t.

В такъв случай при всеки избор на положителното число ε имаме

$$\lim_{n\to\infty}\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} P_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Упътване. Направете смяната на променливите

$$x_1 = \xi_1,$$
$$x_2 = \xi_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n-1} = \xi_{n-1},$$
$$nt - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1} = \xi_n$$

и покажете следното:

1) $P_n(t) \ge 0$;
2) интегралите
$$A_n = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(t)\,\mathrm{d}t$$
имат смисъл и тяхната стойност е равна на единица;
3) интегралите
$$B_n = \int_{-\infty}^{\infty} tP_n(t)\,\mathrm{d}t$$
имат смисъл и тяхната стойност е равна на b;
4) интегралите
$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^2P_n(t)\,\mathrm{d}t$$
имат смисъл и
$$C_n - B_n^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}(c_\nu - b_\nu^2);$$

5) $C_n - B_n^2 \leq \dfrac{k}{n}$. След тази предварителна работа използувайте неравенството на Чебишев

$$\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} P_n(t)\,\mathrm{d}t \geq 1 - \frac{C_n - B_n^2}{\varepsilon^2}$$

и очевидното неравенство

$$\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} P_n(t)\,\mathrm{d}t \leq 1.$$

8. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати и монотонно растящи при $a \leq x \leq b$. В такъв случай е валидно неравенството

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geq \left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

(Чебишев).

Упътване. Използувайте тъждеството

$$\iint_R [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - 2\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right],$$

където R е квадрат, определен от неравенствата

$$a \leq x \leq b,$$
$$a \leq y \leq b.$$

9. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$. Да се покаже, че при $a \leq x \leq b$

$$\int_a^x \mathrm{d}t_1 \int_a^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(t)(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

и

$$\int_a^x t_1\,\mathrm{d}t_1 \int_a^{t_1} t_2\,\mathrm{d}t_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} t_n\,\mathrm{d}t_n \int_a^{t_n} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!2^n}\int_a^x f(t)(x^2-t^2)^n\,\mathrm{d}t.$$

10. Да се покаже, че интегралите

$$\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^\infty \cos x^2\,\mathrm{d}x$$

са сходящи, и да се пресметне тяхната стойност (интеграли на Френел — Fresnel).

Упътване. Разгледайте двете функции

$$u = e^{y^2-x^2}\cos 2xy,$$
$$v = -e^{y^2-x^2}\sin 2xy$$

и покажете, че

$$u'_x = v'_y,$$
$$u'_y = -v'_x.$$

Да означим с D триъгълника

$$0 \leq x \leq R, \qquad 0 \leq y \leq x.$$

Пресметнете интегралите

$$I_1 = \iint_D u'_x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$I_2 = \iint_D v'_x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

при постоянно y и интегралите

$$I_3 = \iint_D v'_y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$I_4 = \iint_D u'_y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

при постоянно x. Използувайте равенствата

$$I_1 = I_3,$$
$$I_2 = -I_4.$$

Това ще ви даде

$$\text{(A)} \qquad \int_0^R e^{y^2-R^2}\cos 2Ry\,\mathrm{d}y - \int_0^R \cos 2y^2\,\mathrm{d}y = -\int_0^R \sin 2x^2\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{(B)} \qquad -\int_0^R e^{y^2-R^2}\sin 2Ry\,\mathrm{d}y + \int_0^R \sin 2y^2\,\mathrm{d}y = -\int_0^R \cos 2x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Покажете, че

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{y^2-R^2}\cos 2Ry\,\mathrm{d}y = 0,$$
$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{y^2-R^2}\sin 2Ry\,\mathrm{d}y = 0.$$

За целта си послужете с неравенствата

$$\left|\int_0^R e^{y^2-R^2}\cos 2Ry\,\mathrm{d}y\right| \le \int_0^R e^{y^2-R^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\int_0^R e^{y^2}\,\mathrm{d}y}{e^{R^2}},$$

$$\left|\int_0^R e^{y^2-R^2}\sin 2Ry\,\mathrm{d}y\right| \le \int_0^R e^{y^2-R^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\int_0^R e^{y^2}\,\mathrm{d}y}{e^{R^2}}$$

и използувайте например правилото на Лопитал. Докажете с помощта на равенствата (A) и (B), че интегралите

$$\int_0^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^\infty \sin t^2\,\mathrm{d}t$$

са сходящи. Извършете граничния преход $R \to \infty$ в равенствата (A) и (B) и докажете, че

$$\int_0^\infty \sin t^2\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^\infty \sin t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Това ще ви даде

$$\int_0^\infty \sin t^2\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

11. Нека R е едно затворено и измеримо точково множество в пространство с n измерения и нека $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е една непрекъсната в R функция. Да се покаже, че могат да се намерят две неотрицателни числа p и q, подчинени на условието $p + q = 1$, и две точки $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ от R, всички зависещи от избора на $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, по такъв начин, че да е изпълнено равенството

$$\int\cdots\int_R f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n = \left[pf(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) + qf(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)\right]\mu(R).$$

Забележка. В случай, че множеството R е свързано, т. е. че всеки две негови точки могат да се съединят с непрекъсната дъга, лежаща в R, то валидна е едночленната формула за средните стойности

$$\int\cdots\int_R f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\mu(R),$$

където $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ е точка от R. В общия случай такава едночленна формула за средните стойности не съществува, както читателят лесно може сам да се убеди с пример.

Упътване. Нека M е най-голямата, а m е най-малката стойност на

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ в } R.$$

Да положим

$$l = \int\cdots\int_R f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \dots\ \mathrm{d}x_n.$$

Покажете, че

$$m\mu(R) \le l \le M\mu(R).$$

След това разгледайте двете неотрицателни числа

$$\alpha_1 = M\mu(R) - l, \quad \alpha_2 = l - m\mu(R)$$

и покажете,че

$$l = \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}M + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}m\right]\mu(R),$$

стига да имаме $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. Ако $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, то $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$, откъдето

$$l = M\mu(R) = m\mu(R)$$

и случаят е тривиален.

Част III

ПРИЛОЖЕНИЯ

Глава I

ПРИЛОЖЕНИЯ КЪМ ГЕОМЕТРИЯТА

§ 1. Тангента и нормала

Нека е дадена кривата

$$\begin{aligned} x &= f(t), \\ y &= g(t), \end{aligned} \tag{1}$$

където двете функции $f(t)$ и $g(t)$ са дефинирани в някой интервал Δ. Нека t_0 и t са две точки от Δ. Очевидно уравнението на правата, която съединява двете точки

$$[f(t_0), g(t_0)] \quad \text{и} \quad [f(t), g(t)],$$

стига те да са различни, може да се напише във вида

$$\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}[x-f(t_0)] - \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}[y-g(t_0)] = 0. \tag{2}$$

Ако двете функции $f(t)$ и $g(t)$ са диференцуеми в точката t_0, можем да извършим граничен преход в равенството (2), като оставим t да клони към t_0. След този граничен преход намираме

$$g'(t_0)[x-f(t_0)] - f'(t_0)[y-g(t_0)] = 0. \tag{3}$$

Така полученото уравнение представлява една права, ако от двете производни $f'(t_0)$ и $g'(t_0)$ поне едната е различна от нула. Тази права се нарича допирателна или тангента към кривата (1) в точката $[f(t_0), g(t_0)]$. Очевидно тази права може да се представи параметрично по следния начин:

$$\begin{aligned} \xi &= f(t_0) + uf'(t_0), \\ \eta &= g(t_0) + ug'(t_0). \end{aligned} \tag{4}$$

Дефиницията на понятието допирателна, която даваме сега, може да се разглежда като обобщение на познатата ни от по-рано дефиниция. И наистина ние знаем, че на функцията

$$y = F(x) \tag{5}$$

могат да се съпоставят параметричните уравнения

$$x = t,$$
$$y = F(t).$$

В този специален случай уравненията (4) добиват вида

$$\xi = x_0 + u,$$
$$\eta = F(x_0) + uF'(x_0)$$

при $t_0 = x_0$ и следователно декартовото уравнение на тангентата в разглежданата точка е

$$\eta - F(x_0) = F'(x_0)(\xi - x_0).$$

Двете дефиниции на понятието допирателна обаче не са напълно еквивалентни. Сега ние даваме една по-обща дефиниция. При тая дефиниция не се изключва случаят, когато тангентата е успоредна на оста y.

Нека функциите (1) удовлетворяват уравнението

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{6}$$

когато t се мени в интервала Δ. Тук предполагаме, че функцията $\varphi(x, y)$ е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни в някоя околност на точката (x_0, y_0), където $x_0 = f(t_0)$, $y_0 = g(t_0)$. В такъв случай, като диференцираме равенството

$$\varphi[f(t), g(t)] = 0,$$

при $t = t_0$ получаваме съгласно правилото за диференциране на съставни функции

$$\varphi'_x(x_0, y_0)f'(t_0) + \varphi'_y(x_0, y_0)g'(t_0) = 0$$

и следователно всички точки от тангентата (4) удовлетворяват уравнението

$$(\xi - x_0)\varphi'_x + (\eta - y_0)\varphi'_y = 0, \tag{7}$$

което лесно се вижда, като заместим ξ и η с равните им от (4).

Ако поне едната от частните производни $\varphi'_x(x_0, y_0)$ и $\varphi'_y(x_0, y_0)$ е различна от нула, уравнението (7) представлява една права. Тази права не е нищо друго освен тангентата (4), защото видяхме, че всички точки от правата (4) лежат на правата (7).

Понякога уравнение от вида (6) се нарича крива. Това понятие е различно от понятието дъга, което въведохме в § 16, глава II, част IV. Казваме, че една точка (x_1, y_1) лежи на кривата $\varphi(x, y) = 0$, когато $\varphi(x_1, y_1) = 0$. След всичко изложено досега е естествено да дефинираме понятието тангента (допирателна) към кривата $\varphi(x, y) = 0$ в точката (x_0, y_0) като права с уравнение

$$(\xi - x_0)\varphi'_x(x_0, y_0) + (\eta - y_0)\varphi'_y(x_0, y_0) = 0,$$

стига точката (x_0, y_0) да лежи върху кривата $\varphi(x, y) = 0$, обаче поне една от частните производни $\varphi'_x(x_0, y_0)$ и $\varphi'_y(x_0, y_0)$ да е различна от нула.

В специалния случай, когато

$$\varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad \varphi'_y(x_0, y_0) = 0, \tag{8}$$

точката (x_0, y_0) се нарича особена. Нека припомним, че точката (x_0, y_0) лежи върху кривата (6), т. е. че

$$\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

По този начин понятието особена точка се дефинира с помощта на три уравнения

$$\varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \quad \varphi'_y(x_0, y_0) = 0, \quad \varphi(x_0, y_0) = 0,$$

а не само с помощта на двете уравнения (8). По-късно ще изучим особените точки по-подробно.

Права, която минава през точката M от една крива Γ и е перпендикулярна към тангентата на кривата Γ в тази точка, се нарича нормала към кривата Γ в точката M. Специално, ако кривата има уравнение

$$y = F(x),$$

където функцията $F(x)$ е дефинирана в някоя околност на точката x_0 и притежава различна от нула първа производна в тази точка, ъгловият коефициент на нормалата е $-\dfrac{1}{F'(x_0)}$ и следователно уравнението на нормалата е

$$\eta - y_0 = \frac{-1}{F'(x_0)}(\xi - x_0),$$

където $y_0 = F(x_0)$.

Нека

$$\rho = f(\theta), \quad f(\theta) > 0, \quad \alpha \le \theta \le \beta$$

е уравнение на една крива в полярни координати. По-точно тук се касае за дъга, дефинирана с параметричните уравнения

$$x = f(\theta)\cos\theta,$$
$$y = f(\theta)\sin\theta.$$

Да разгледаме точката M върху тази крива, чиито полярни координати са $(\theta_0, f(\theta_0))$. Ако функцията $f(\theta)$ е диференцуема при $\theta = \theta_0$, кривата има дефинирана тангента. Тази тангента може да се представи в параметричен вид по следния начин:

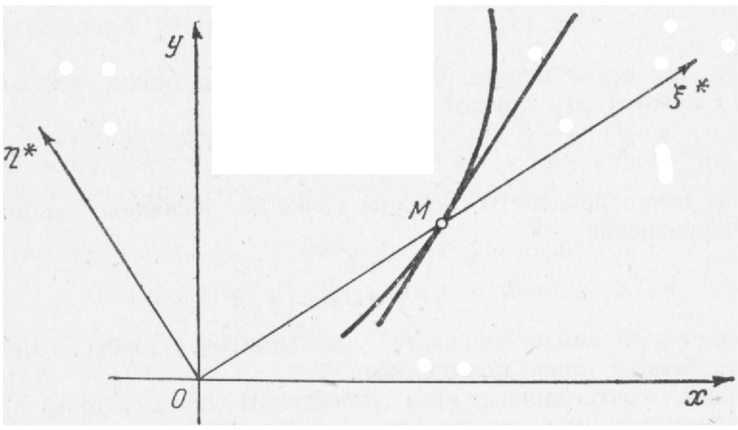
$$\begin{aligned} x &= f(\theta_0)\cos\theta_0 + u[f'(\theta_0)\cos\theta_0 - f(\theta_0)\sin\theta_0], \\ y &= f(\theta_0)\sin\theta_0 + u[f'(\theta_0)\sin\theta_0 + f(\theta_0)\cos\theta_0]. \end{aligned} \tag{9}$$

Тук не можем да имаме едновременно

$$\begin{aligned} f'(\theta_0)\cos\theta_0 - f(\theta_0)\sin\theta_0 &= 0, \\ f'(\theta_0)\sin\theta_0 + f(\theta_0)\cos\theta_0 &= 0, \end{aligned}$$

защото от тези равенства би следвало $f(\theta_0) = 0$, което не е вярно.

Уравненията (9) добиват особено прост вид, ако ги отнесем към ортогоналната координатна система $\xi^* O \eta^*$, която е еднакво ориентирана с координатната система xOy и за която лъчът $O\xi^*$ съвпада с лъча OM (вж. черт. 31).



Черт. 31

За да се убедим в това, ще използуваме трансформачните формули

$$\begin{aligned} \xi^* &= x\cos\theta_0 + y\sin\theta_0, \\ \eta^* &= -x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0, \end{aligned}$$

които читателят познава от аналитичната геометрия. По такъв начин ние получаваме

$$\begin{aligned} \xi^* &= f(\theta_0) + uf'(\theta_0), \\ \eta^* &= uf(\theta_0). \end{aligned}$$

Елиминирайки параметъра u, намираме уравнението на тангентата в следния вид:

$$f'(\theta_0)\eta^* = f(\theta_0)\xi^* - f^2(\theta_0).$$

Ако $f'(\theta_0) \neq 0$, ние можем да представим това уравнение в декартов вид

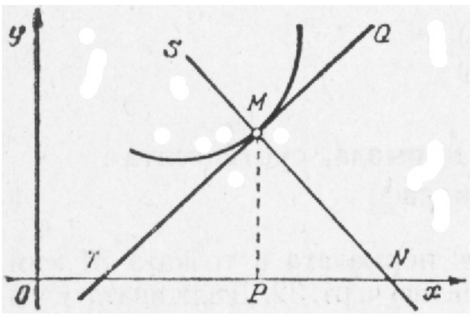
$$\eta^* = \frac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)}\xi^* - \frac{f^2(\theta_0)}{f'(\theta_0)}$$

и следователно ъгловият коефициент m на тангентата в избраната координатна система има стойността

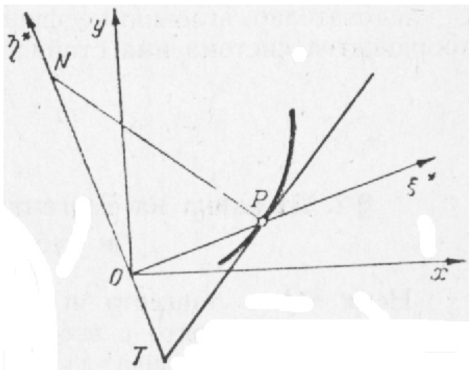
$$m = \frac{f(\theta_0)}{f'(\theta_0)}.$$

§ 2. Дължина на тангента, нормала, субтангента и субнормала

Нека TQ е тангента и NS е нормалата в точката M към кривата $y = f(x)$, която е изобразена на черт. 32. Дължината τ на отсечката[1] MT се нарича дължина на тангентата, а дължината ν на отсечката[2] MN се нарича дължина на нормалата. Сегментът[3] $S_\tau = PT$ се нарича субтангента, а сегментът $S_\nu = PN$ се нарича субнормала.



Черт. 32



Черт. 33

[1]Т. е. на отсечката между допирната точка M и пресечната точка T на тангентата с оста x.

[2]Т. е. между допирната точка M на тангентата и пресечната точка на нормалата с оста x.

[3]Нека припомним тук, че сегментът е дефиниран не само по абсолютна стойност, но и по знак.

Нека (x, y) са координати на точката M. Уравненията на тангентата и нормалата могат да се напишат съответно във вида

$$\eta - y = y'(\xi - x),$$
$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x)$$

(разбира се, ако $y' \neq 0$) и следователно координатите на точка T са $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$, а на точка N са $(x + yy', 0)$. Оттук намираме

$$\tau = \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}},$$
$$\nu = \sqrt{y^2 + y^2 y'^2},$$
$$S_\tau = PT = \left(x - \frac{y}{y'}\right) - x = -\frac{y}{y'},$$
$$S_\nu = PN = (x + yy') - x = yy'.$$

Нека е дадена кривата

$$\rho = f(\theta), \quad f(\theta) > 0 \tag{1}$$

в полярните координати (вж. черт. 33). Дължините[1] на отсечките $\tau = TP$ и $\nu = NP$ се наричат съответно дължина на тангентата и нормалата в полярни координати, а сегментите $S_\tau = TO$ и $S_\nu = ON$ се наричат съответно субтангента и субнормала в полярни координати. Видяхме, че уравнението на тангентата в координатната система $\xi^* 0 \eta^*$ може да се напише във вида

$$\eta^* = \frac{\rho}{\rho'}\xi^* - \frac{\rho^2}{\rho'}$$

(разбира се, когато $\rho' \neq 0$). Като вземем пред вид, че координатите на P са $(\rho, 0)$, заключаваме, че уравнението на нормалата е

$$\eta^* = -\frac{\rho'}{\rho}(\xi^* - \rho).$$

[1] Правата PT е тангента в точката P към кривата (1); правата PN е нормала към тази крива. Координатната система $\xi^* 0 \eta^*$ е ортогонална и еднакво ориентирана с координатната система XOY.

Координатите на точката T са $\left(0, -\dfrac{\rho^2}{\rho'}\right)$, а на точката N са $(0, \rho')$. Като вземем пред вид още, че координатите на точката P са $(\rho, 0)$, получаваме

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^4}{\rho'^2}} = \rho\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\rho'^2}}, \\ \nu &= \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}, \\ S_\tau &= TO = \frac{\rho^2}{\rho'}, \\ S_\nu &= ON = \rho'. \end{aligned}$$

§ 3. Директорни косинуси на тангентата и нормалата

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана и диференцуема в някой интервал Δ. Ще положим

(1) $$\alpha = \operatorname{arctg} f'(x).$$

По този начин ъгълът α е еднозначно определен (когато x е дадено) и удовлетворява неравенствата

(2) $$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Като вземем пред вид неравенствата (2), не е трудно да се убедим, че

(3) $$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}},$$

(4) $$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Ще изведем например формулата (3):

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha}}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} = |\cos\alpha| = \cos\alpha.$$

Като вземем пред вид, че

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x),$$

получаваме

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}, \tag{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}. \tag{6}$$

Числата $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, където α е определено от (1), се наричат директорни косинуси на тангентата. Като вземем пред вид, че $f'(x)$ е ъгловият коефициент на тангентата, заключаваме, че тези директорни косинуси представляват точно косинусите на ъглите, които сключва една подходящо избрана посока върху тангентата с положителните посоки на координатните оси. Тази посока върху тангентата се нарича положителна.

За положителна посока на нормалата се избира онази посока, която сключва с положителните посоки съответно на абсцисната и ординатната ос ъгли, чиито косинуси са

$$-\sin\alpha, \quad \cos\alpha.$$

Тези косинуси се наричат директорни косинуси на нормалата.

Накрая ще отбележим, че ако дефинираме s като функция на x посредством

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x,$$

получаваме

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha.$$

§ 4. Асимптоти

Нека функцията

$$y = f(x) \tag{1}$$

е дефинирана при $x > a$. Ще казваме, че правата

$$y = mx + l \tag{2}$$

е асимптота на кривата (1), ако разстоянието на точката $(x, f(x))$ до правата (2) клони към нула, когато x расте неограничено. Да означим с $\delta(x)$ това разстояние. За да пресметнем $\delta(x)$, представяме уравнението на правата (2) в нормален вид:

$$\frac{y - mx - l}{\sqrt{1 + m^2}} = 0.$$

В такъв случай, както това е известно от аналитичната геометрия,

$$\delta(x) = \frac{|f(x) - mx - l|}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Нека допуснем, че правата (2) е асимптота на кривата (1). В такъв случай

$$\lim_{x\to\infty} \delta(x) = 0 \tag{3}$$

и следователно

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx - l) = 0$$

и най-сетне

$$l = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx). \tag{4}$$

И така, за да притежава кривата (1) асимптота, необходимо е да съществува границата (4) при някой избор на константата m. Не е трудно да се види, че константата m е еднозначно определена от обстоятелството, че границата

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) \tag{5}$$

съществува. И наистина от съществуването на границата следва, че

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - mx}{x} = 0$$

или

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m \right) = 0$$

и най-сетне

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Съществуването на границата (4) е не само необходимо, но и достатъчно за съществуването на асимптота. И наистина от условието (4) получаваме

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx - l) = 0$$

и следователно

$$\lim_{x\to\infty} \delta(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - mx - l}{\sqrt{1 + m^2}} = 0.$$

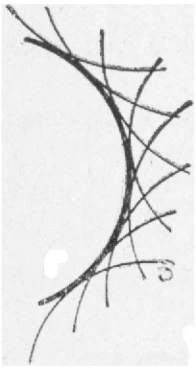
По такъв начин не само получихме на ръка средство да познаем дали дадена крива (1) има асимптота, или не, но добихме възможност да намерим уравнението на асимптотата (разбира се, в случай че тя съществува). Така ъгловият коефициент m в уравнението (2) се определя от формулата

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

След като сме намерили m, определяме l от зависимостта

$$l = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx).$$

§ 5. Обвивки



Черт. 34

Нека функцията $F(x, y, \alpha)$ е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни до втори ред в някоя околност на точката (x_0, y_0, α_0). При всяко фиксирано α уравнението

$$F(x, y, \alpha) = 0 \tag{1}$$

представлява една крива. Когато оставим α да се мени, получаваме една фамилия L от криви.

Една дъга Γ с уравнения

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

където t се мени в достатъчно малка околност Δ на α_0, се нарича *обвивка* на фамилията L (когато α се мени в Δ), ако във всяка точка P от Γ се допира[1] към Γ по някоя крива от L (вж. черт. 34) и всяка крива от L се допира в някоя точка до Γ.

Ще докажем следната теорема: ако

$$F(x_0, y_0, \alpha_0) = 0, \tag{2}$$

$$F'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0) = 0, \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} F'_x(x_0, y_0, \alpha_0) & F'_y(x_0, y_0, \alpha_0) \\ F''_{\alpha x}(x_0, y_0, \alpha_0) & F''_{\alpha y}(x_0, y_0, \alpha_0) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{4}$$

$$F''_{\alpha\alpha}(x_0, y_0, \alpha_0) \neq 0, \tag{5}$$

[1] Това значи, че Γ и кривата от L имат обща тангента в точката P.

фамилията криви, която се получава от (1), когато α се мени в някоя достатъчно малка околност на α_0, има обвивка, която може да се представи в параметричен вид

$$x = f(\alpha),\quad y = g(\alpha), \tag{6}$$

където функциите $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ се определят от системата

$$F(x, y, \alpha) = 0,\quad F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \tag{7}$$

Функциите $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ са диференцуеми и производните им не се анулират едновременно.

Доказателство. Като вземем пред вид условията (2), (3) и (4), заключаваме с помощта на теоремата за съществуване на неявни функции, че във всяка достатъчно малка околност на точката α_0 има един и само един чифт непрекъснати функции

$$x = f(\alpha),\quad y = g(\alpha),$$

които удовлетворяват системата (7) и за които

$$x_0 = f(\alpha_0),\quad y_0 = g(\alpha_0).$$

Като вземем пред вид още веднъж условието (4) и обстоятелството, че функциите $F(x, y, \alpha)$ и $F'_\alpha(x, y, \alpha)$ притежават непрекъснати частни производни, заключаваме, че функциите $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ са диференцуеми.

Прилагаме правилото за диференциране на съставни функции към равенството

$$F'_\alpha[f(\alpha), g(\alpha), \alpha] = 0. \tag{8}$$

Това ни дава

$$f'(\alpha)F''_{\alpha x} + g'(\alpha)F''_{\alpha y} + F''_{\alpha\alpha} = 0. \tag{9}$$

Сега не е трудно да се покаже, че $f'(\alpha)$ и $g'(\alpha)$ не се анулират едновременно, когато α се мени в някоя достатъчно малка околност на точката α_0.

И наистина в противен случаи, като изхождаме от уравнението (9), бихме получили

$$F''_{\alpha\alpha}(f(\alpha), g(\alpha), \alpha) = 0.$$

Това обаче не е вярно, когато α е достатъчно близо до α_0, защото функциите $F''_{\alpha\alpha}(x, y, \alpha)$, $f(\alpha)$ и $g(\alpha)$ са непрекъснати и

$$F''_{\alpha\alpha}(x_0, y_0, \alpha_0) \neq 0.$$

Ние ще покажем, че дъгата

$$\begin{aligned} x &= f(\alpha), \\ y &= g(\alpha) \end{aligned} \tag{10}$$

и кривата

$$F(x, y, \alpha_1) = 0,$$

където α_1 е коя да е константа, достатъчно близка до α_0, се допират[1] в точката

$$[f(\alpha_1), g(\alpha_1)].$$

И наистина, като вземем пред вид, че $f'(\alpha_1)$ и $g'(\alpha_1)$ не са едновременно нули, заключаваме, че допирателната към дъгата (10) може да се представи във вида

$$\begin{aligned} \xi &= f(\alpha_1) + uf'(\alpha_1), \\ \eta &= g(\alpha_1) + ug'(\alpha_1), \end{aligned} \tag{11}$$

където u е параметър. От друга страна, уравнението на допирателната към кривата $F(x, y, \alpha_1) = 0$ може да се представи във вида

$$[\xi - f(\alpha_1)]F'_x + [\eta - g(\alpha_1)]F'_y = 0. \tag{12}$$

(Тук двете частни производни F'_x и F'_y не могат да се анулират едновременно, когато α_1 е достатъчно близо до α_0, защото в противен случай би било нарушено условието (4).)

За да се убедим, че тангентите (11) и (12) се сливат, достатъчно е да покажем, че всичките точки на правата (11) лежат върху правата (12). За целта заместваме в уравнението (12) текущите координати с

$$[f(\alpha_1) + uf'(\alpha_1), g(\alpha_1) + ug'(\alpha_1)].$$

[1] Това значи, че те имат обща тангента в тази точка.

Това ни дава

$$u[f'(\alpha_1)F'_x + g'(\alpha_1)F'_y] = 0.$$

За да се убедим, че полученото равенство е удовлетворено, прилагаме правилото за диференциране на съставни функции към тъждеството

$$F[f(\alpha), g(\alpha), \alpha] = 0.$$

Това ни дава

$$f'(\alpha)F'_x + g'(\alpha)F'_y + F'_\alpha = 0.$$

Като вземем пред вид още зависимостта

$$F'_\alpha[f(\alpha), g(\alpha), \alpha] = 0,$$

получаваме

$$f'(\alpha)F'_x + g'(\alpha)F'_y = 0.$$

§ 6. Център на кривината, радиус на кривината, кривина, еволюта, еволвента

Нека ни е дадена кривата

$$y = f(x). \tag{1}$$

Ще предполагаме, че функцията $f'(x)$ притежава производни до втори ред в някой интервал Δ, като при това $f'(x) \neq 0$ и $f''(x) \neq 0$. Да разгледаме нормалите

$$\eta - f(x) = -\frac{1}{f'(x)}(\xi - x) \tag{2}$$

и

$$\eta - f(x+h) = -\frac{1}{f'(x+h)}(\xi - x - h) \tag{3}$$

в двете различни точки $(x, f(x))$ и $(x+h, f(x+h))$. Пресечната точка на тези нормали има координати

$$\xi = x - f'(x)\frac{1 + f'(x+h)\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}{\dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}},$$

$$\eta = f(x) + \frac{1 + f'(x+h)\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}{\dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}}.$$

Като извършим граничния преход $h \to 0$, получаваме

$$\begin{aligned} \xi &= x - f'(x)\frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)}, \\ \eta &= f(x)\frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Точката с така получените координати се нарича пресечна точка на нормалата (2) с безкрайно близката ѝ съседна нормала или по-кратко — център на кривината на кривата (1), която отговаря на точката $[x, f(x)]$.

Разликата между точката $[x, f(x)]$ и съответния ѝ център на кривината се нарича радиус на кривината на кривата (1) в разглежданата точка. Очевидно за радиуса на кривината получаваме следния израз:

$$\sqrt{(\xi - x)^2 + [\eta - f(x)]^2} = \frac{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}.$$

По този начин ние дефинирахме понятието радиус на кривината само по абсолютна стойност. Целесъобразно е обаче да се разглежда радиусът на кривината като насочена отсечка, чиято алгебрична мярка представлява релативно число. Това може да стане, като по дефиниция под радиус на кривината R разбираме

$$R = \frac{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}. \tag{5}$$

Реципрочната стойност на радиуса на кривината в дадена точка на кривата се нарича кривина в същата точка. Означавайки кривината с k, получаваме

$$k = \frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}. \tag{6}$$

Формулите

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}, \\ \sin\alpha &= \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} \end{aligned} \tag{7}$$

от § 3 от тази глава (значението на буквите е дадено там) и формулата (5) ни позволяват да представим уравненията (4) в следния по-прост вид:

$$\begin{aligned} \xi &= x - R\sin\alpha, \\ \eta &= y + R\cos\alpha. \end{aligned} \tag{8}$$

На това място ние ще дадем една проста зависимост, която свързва кривината k с ъгъла α. За да получим тази зависимост, диференцираме равенството

$$\sin\alpha = \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}}$$

спрямо x. Това ни дава

$$\cos\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} = \frac{f''(x)}{[1+f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}$$

или

$$k = \cos\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}. \tag{9}$$

Като вземем пред вид, че

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \quad \text{където} \quad \mathrm{d}s = \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

(вж. § 3 от тази глава), можем да запишем този резултат по-кратко така:

$$k = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}.$$

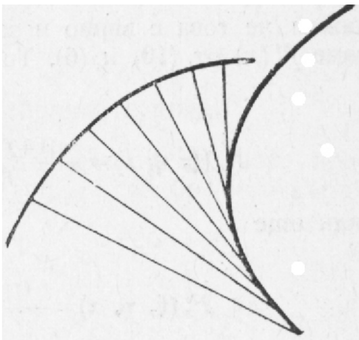
Диференцирайки спрямо s равенствата

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} &= \cos\alpha, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} &= \sin\alpha, \end{aligned}$$

получаваме така наречените формули на Френе за равнинните криви

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} &= -k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2} &= k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}. \end{aligned}$$

Геометрично място на центровете на кривините, т. е. кривата с параметричните уравнения (4), се нарича еволюта на кривата (1), а кривата (1) се нарича еволвента на кривата (4).



Черт. 35

Нека функцията $f(x)$ е три пъти диференцуема и третата ѝ производна е непрекъсната в някоя околност на точката x_0; нека освен това $f'(x_0) \neq 0$, $f''(x_0) \neq 0$ и найсетне нека производната на кривината k е различна от нула при $x = x_0$. В такъв случай еволютата е обвивка за фамилията нормали, когато x се мени в достатъчно малка околност на x_0 (вж. черт. 35).

За да се убедим в това, разглеждаме функцията

$$F(\xi, \eta, x) = \eta - f(x) + \frac{\xi - x}{f'(x)}.$$

Очевидно

$$F'_x(\xi, \eta, x) = -f'(x) - \frac{f'(x) + (\xi - x)f''(x)}{f'^2(x)}. \tag{10}$$

Решавайки относно ξ и η системата

$$\eta - f(x) + \frac{\xi - x}{f'(x)} = 0,$$
$$-f'(x) - \frac{f'(x) + (\xi - x)f''(x)}{f'^2(x)} = 0,$$

получаваме

$$\begin{aligned} \xi &= x - f'(x)\frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)}, \\ \eta &= f(x) + \frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Така получените уравнения съвпадат точно с уравненията на еволютата (4). За да се убедим, че тези параметрични уравнения дават една обвивка на нормалите (2), достатъчно[1] е да вземем пред вид, че функционалната детер-

[1]Ако положим

$$\xi_0 = x_0 - f'(x_0)\frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)},$$
$$\eta_0 = f(x_0) + \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)},$$

очевидно ще имаме

$$F(\xi_0, \eta_0, x_0) = 0, \quad F'_x(\xi_0, \eta_0, x_0) = 0.$$

минанта

$$\begin{vmatrix} F'_\xi & F'_\eta \\ F''_{x\xi} & E''_{x\eta} \end{vmatrix} = \frac{f''(x)}{f'^2(x)}$$

и производната

$$F''_{xx}(\xi, \eta, x)$$

приемат стойности, различни от нула, когато на ξ и η даваме стойности, определени от уравненията (11).

За функционалната детерминанта това е очевидно. За да покажем, че това е вярно и за производната $F''_{xx}(\xi, \eta, x)$, елиминираме $f''(x)$ от (10) и (6). Това ни дава

$$F'_x(\xi, \eta, x) = -\frac{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)} \left[\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} + (\xi - x)k \right]$$

или още

$$F'_x(\xi,\ \eta,\ x) = -\frac{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)} [\sin\alpha + (\xi - x)k].$$

Оттук получаваме

$$\begin{aligned} F''_{xx}(\xi, \eta, x) = &- [\sin\alpha + (\xi - x)k] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)} \\ &- \left[\cos\alpha \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} - k + (\xi - x) \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} \right] \frac{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)} \end{aligned}$$

или като вземем пред вид формулата (9),

$$F''_{xx}(\xi, \eta, x) = -[\sin\alpha + (\xi - x)k] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)} - (\xi - x) \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{[1 + f'^2(x)]^{\frac{3}{2}}}{f'^2(x)}.$$

При

$$\xi = x - f'(x) \frac{1 + f'^2(x)}{f''(x)} = x - R\sin\alpha$$

получаваме

$$F''_{xx}(\xi, \eta, x) = \frac{(1 + f'^2(x))^{\frac{5}{2}}}{f'(x)\,.\,f''(x)} \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} \neq 0.$$

С това доказателството е завършено.

§ 7. Особени точки на алгебричните криви

Нека $F(x, y)$ е един полином от n-та степен на двете променливи x и y. Казваме, че (x_0, y_0) е една особена точка върху кривата

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

когато са изпълнени следните условия:

$$\begin{gathered} F(x_0, y_0) = 0, \\ F'_x(x_0, y_0) = F'_y(x_0, y_0) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Теорема 1. *Ако са изпълнени условията* (2) *и ако*

$$F''^2_{xy}(x_0, y_0) - F''_{xx}(x_0, y_0)F''_{yy}(x_0, y_0) > 0, \quad F''_{yy}(x_0, y_0) \neq 0,$$

то във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 *има две и само две*[1] *диференцуеми функции на* x, *които, поставени на мястото на* y, *удовлетворяват уравнението* (1) *и приемат стойност* y_0 *при* $x = x_0$.

Доказателство. Да положим за краткост

$$\frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} F(x_0, y_0) = a_{ik}.$$

Като вземем пред вид условията (2), добиваме възможност да напишем Тейлоровото развитие

$$\begin{aligned} F(x, y) = F(x_0, y_0) &+ \frac{1}{1!}[(x - x_0)F'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F'_y(x_0, y_0)] \\ &+ \frac{1}{2!}[(x - x_0)^2 F''_{xx}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0)F''_{xy}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 F''_{yy}(x_0, y_0)] \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}\left[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n F(x_0, y_0) \end{aligned}$$

във вида

$$\begin{aligned} F(x, y) = &\frac{1}{2!}[a_{20}(x - x_0)^2 + 2a_{11}(x - x_0)(y - y_0) + a_{02}(y - y_0)^2] \\ &+ \frac{1}{3!}[a_{30}(x - x_0)^3 + 3a_{21}(x - x_0)^2(y - y_0)] + 3a_{12}(x - x_0)(y - y_0^2) + a_{03}(y - y_0)^3] \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}[a_{n0}(x - x_0)^n + na_{n-11}(x - x_0)^{n-1}(y - y_0) + \cdots + a_{0n}(y - y_0)^n]. \end{aligned}$$

[1] Точката (x_0, y_0) се нарича в този случай двойна точка.

Полагаме

$$y = y_0 + u(x - x_0).$$

В такъв случай уравнението $F(x, y) = 0$ добива вида

$$a_{20} + 2a_{11}u + a_{02}u^2 + (x - x_0)p(x, u) = 0,$$

където $p(x, u)$ е полином на x и u. Да означим с α кой да е от двата корена на уравнението

(3) $$a_{20} + 2a_{11}u + a_{02}u^2 = 0$$

и да разгледаме функцията

$$G(x, u) = a_{20} + 2a_{11}u + a_{02}u^2 + (x - x_0)p(x, u).$$

Очевидно имаме

$$G(x_0, \alpha) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}G(x_0, \alpha) = 2a_{11} + 2a_{02}\alpha = \pm 2\sqrt{a_{11}^2 - a_{02}a_{20}} \neq 0.$$

Този резултат ни позволява да приложим към уравнението

(4) $$G(x, u) = 0$$

теоремата за съществуване на неявни функции. И тъй във всяка околност на точката x_0 има една (и само една) непрекъсната функция

$$u = \varphi(x),$$

която удовлетворява уравнението

$$G(x, u) = 0$$

и приема стойност α в точката x_0. Теоремата за диференциране на неявни функции ни учи, че функцията $\varphi(x)$ е диференцуема. След като функцията $\varphi(x)$ е дефинирана, разглеждаме функцията

$$f(x) = y_0 + (x - x_0)\varphi(x).$$

С непосредствена проверка се вижда, че функцията

$$y = f(x)$$

удовлетворява уравнението (1), тъй като функцията $\varphi(x)$ удовлетворява уравнението (4). Не е трудно да се убедим също така, че функцията $f(x)$ е диференцуема, като вземем пред вид, че функцията $\varphi(x)$ е диференцуема. Найсетне нека отбележим, че $f'(x_0) = \alpha$. За да установим това, разглеждаме отношението

$$\frac{f(x) - y_0}{x - x_0} = \varphi(x),$$

което клони към $\varphi(x_0) = \alpha$ (поради непрекъснатостта на $\varphi(x)$), когато $x \to x_0$.

Използувайки втория корен β на уравнението (3), можем да дефинираме още една диференцуема функция $g(x)$, която удовлетворява уравнението (1) и приема стойност y_0 в точката x_0. Тази функция $g(x)$ е различна от функцията $f(x)$, защото $f'(x_0) = \alpha$, докато $g'(x_0) = \beta$.

Не е трудно да се убедим, че в достатъчно малка околност на точката x_0 не може да да има трета диференцуема функция $h(x)$, която да удовлетворява уравнението $F(x, y) = 0$ и за която $h(x_0) = y_0$. И наистина да допуснем противното. В такъв случай функцията $\psi(x)$, дефинирана с условието

$$\psi(x) = \frac{h(x) - y_0}{x - x_0}$$

при $x \neq x_0$ и

$$\psi(x_0) = h'(x_0)$$

е непрекъсната дори при $x = x_0$. Не е трудно да се види, че функцията $u = \psi(x)$ удовлетворява уравнението

$$G(x, u) = 0. \tag{5}$$

И наистина при $x \neq x_0$ това се вижда непосредствено, а при $x = x_0$ това се получава с граничния преход $x \to x_0$ от равенството

$$G(x, \psi(x)) = 0$$

поради непрекъснатостта на $\psi(x)$. Извършвайки този граничен преход, получаваме

$$a_{20} + 2a_{11}\psi(x_0) + a_{02}\psi^2(x_0) = 0.$$

Оттук заключаваме, че или

$$\psi(x_0) = \alpha, \tag{6}$$

или

$$\psi(x_0) = \beta. \tag{7}$$

Непрекъснатата функция $\psi(x)$ обаче е еднозначно определена с помощта на условието (5) и едното от условията (6) или (7). От това следва, че функцията $h(x)$ съвпада или с $f(x)$, или с $g(x)$.

Пример. Да разгледаме функцията

$$F(x,y) = 6x^2 - 5xy + y^2 + x^3 - x^2y + y^3.$$

Тук имаме

$$F(0,0) = F'_x(0,0) = F'_y(0,0) = 0,$$
$$F''^{\,2}_{xy}(0,0) - F''_{xx}(0,0)F''_{yy}(0,0) = 1 > 0, \quad F''_{yy}(0,0) = 2 \neq 0$$

следователно през точката $(0,0)$ минават два клона от кривата

$$6x^2 - 5xy + y^2 + x^3 - x^2y + y^3 = 0.$$

Теорема 2. *Ако са изпълнени условията* (2) *и ако*

$$F''^{2}_{xy}(x_0,y_0) - F''_{xx}(x_0,y_0)F''_{yy}(x_0,y_0) < 0,$$

то (x_0,y_0) *е една изолирана точка на кривата* $F(x,y) = 0$. *Това значи, че около точката* (x_0,y_0) *може да се построи околност, която да не съдържа друга точка от кривата освен точката* (x_0,y_0).

Доказателство. Като вземем пред вид условията (2), добиваме възможност да напишем формулата на Тейлор

$$\begin{aligned}F(x,y) = F(x_0,y_0) &+ \frac{1}{1!}[(x-x_0)F'_x(x_0,y_0) + (y-y_0)F'_y(x_0,y_0)]\\ &+ \frac{1}{2!}[(x-x_0)^2F''_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + 2(x-x_0)(y-y_0)F''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\\ &\qquad + (y-y_0)^2F''_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)],\end{aligned}$$

където

$$h = x - x_0, \quad k = y - y_0, \quad 0 < \theta < 1,$$

във вида

$$\begin{aligned}F(x,y) = \frac{1}{2!}&[(x-x_0)^2F''_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\\ &+ 2(x-x_0)(y-y_o)F''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + (y-y_0)^2F''_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)].\end{aligned}$$

Ако точката (x,y) се намира достатъчно близо до точката (x_0,y_0), очевидно

$$F''^{2}_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) - F''_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)F''_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) < 0$$

и следователно квадратичната форма

$$\lambda^2 F''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2\lambda\mu F''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + \mu^2 F''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

е дефинитна. Оттук заключаваме, че равенството

$$(x - x_0)^2 F''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2(x - x_0)(y - y_0) F''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \\ + (y - y_0)^2 F''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = 0$$

е изпълнено само когато $x = x_0$ и $y = y_0$.

Пример. Да разгледаме функцията

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

Тук очевидно имаме

$$F(0, 0) = F'_x(0, 0) = F'_y(0, 0) = 0,$$
$$F''^2_{xy}(0, 0) - F''_{xx}(0, 0)F''_{yy}(0, 0) = -4a^2b^2 < 0.$$

Оттук заключаваме,че $(0, 0)$ е една изолирана точка на кривата

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0.$$

Ако

$$F''^2_{xy}(x_0, y_0) - F''_{xx}(x_0, y_0)F''_{yy}(x_0, y_0) = 0,$$

могат да се представят различни случаи.

Така например при

$$F(x, y) = y^2 - x^3$$

имаме

$$F(0, 0) = F'_x(0, 0) = F'_y(0, 0) = 0$$

и

$$F''^2_{xy}(0, 0) - F''_{xx}(0, 0)F''_{yy}(0, 0) = 0.$$

Видът на кривата $y^2 - x^3 = 0$ е изобразен на черт. 36. В този случай казваме, че в началото имаме рог от първи вид (двата клона, които образуват ро̀га, са разположени от различни страни на общата си тангента).

Като втори пример ще разгледаме функцията

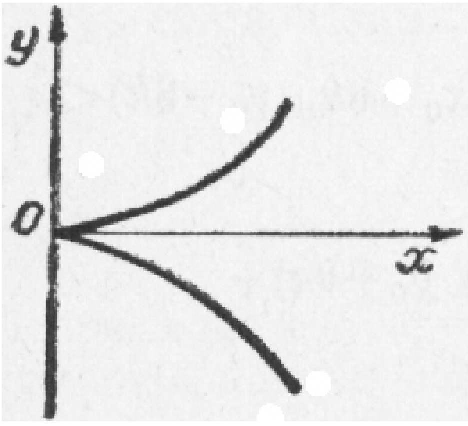
$$F(x, y) = (y - x^2)^2 - x^5.$$

И тук имаме

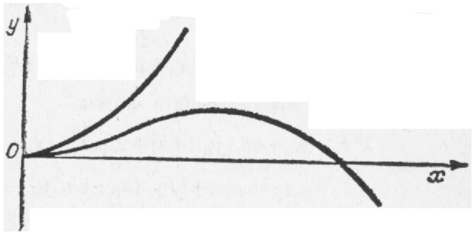
$$F(0, 0) = F'_x(0, 0) = F'_y(0, 0) = 0,$$
$$F''^2_{xy}(0, 0) - F''_{xx}(0, 0)F''_{yy}(0, 0) = 0.$$

Изследването на кривата $F(x, y) = 0$ е удобно да се извърши, като се реши уравнението относно y. Това ще ни даде

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}.$$



Черт. 36



Черт. 37

Тази крива е изобразена на черт. 37.

В началото имаме така наречен рог от втори вид (двата клон, които образуват рòга, са от една и съща страна на общата си тангента в съседство на допирната точка).

Като трети пример ще разгледаме функцията

$$F(x, y) = x^4 + x^2y^2 - 6x^2y + y^2.$$

И тук имаме

$$F(0,0) = F'_x(0,0) = F'_y(0,0) = 0,$$
$$F''^2_{xy}(0,0) - F''_{xx}(0,0)F''_{yy}(0,0) = 0.$$

Кривата $F(x, y) = 0$ се разпада на два клона

$$y = \frac{3x^2 + x^2\sqrt{8 - x^2}}{1 + x^2}$$

и

$$y = \frac{3x^2 - x^2\sqrt{8 - x^2}}{1 + x^2},$$

които се допират в началото.

Като четвърти пример ще разгледаме функцията

$$F(x, y) = y^2 - 2xy + x^2 + x^4 - x^6.$$

И тук имаме

$$F(0,0) = F'_x(0,0) = F'_y(0,0) = 0,$$
$$F''^2_{xy}(0,0) - F''_{xx}(0,0)F''_{yy}(0,0) = 0.$$

В този специален случай началото е една изолирана точка за кривата $F(x, y) = 0$. За да се убедим в това, представяме уравнението във вида

$$(y - x)^2 + x^4(1 - x^2) = 0.$$

Това уравнение е удовлетворено при $|x| < 1$ само когато $y - x = 0$, $x = 0$ и следователно $x = 0$, $y = 0$.

Повече няма да се задълбочваме в изследването на различните случаи, които могат да се представят.

Накрая ще отбележим, че само за простота се ограничихме със случая на алгебрични криви. Методът, с който си послужихме, може да се използва при много по-общи предположения.

Задачи

Да се построят следните криви:

1) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}$.

2) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

3) $y = x \ln x$.

4) $y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

5) $y^2 = \dfrac{x+1}{x-1}$.

6) $y^2 = \dfrac{x-1}{1+x}$.

7) $y^2 = \dfrac{x^2}{x+1}$.

8) $y^2 = x^3(1-x)$.

9) $y^2 = x(x-1)^2$.

10) $y^2 = x^2\dfrac{1+x}{1-x}$.

11) $y^2 = x^2\dfrac{1-x}{x+1}$.

12) $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$, $c \le b \le a$.

13) $\rho = \operatorname{tg}\theta$.

14) $\rho = a\theta$.

15) $\rho = e^{a\theta}$.

16) $\rho^2 = \cos 2\theta$.

17) $\rho = \operatorname{tg}\theta$.[1]

18) $\rho = \dfrac{1}{\theta}$, $\theta > 0$.

19) $\rho = \dfrac{1}{4\theta-\pi}$, $\theta > \dfrac{\pi}{4}$.

20) $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$.

21) $x^4 + y^4 = 8xy^2$.

22) $(x^2+y^2)^2 = 2xy$.

23) $y^2 = 2x^2y + x^5$.

24) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

25) $x = \dfrac{t-t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t^2-t^3}{1+t^2}$.

26) $x = \dfrac{t}{1-t^2}$, $y = \dfrac{t-2t^3}{1-t^2}$.

27) $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t}{t^2-1}$.

28) $x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $y = \dfrac{t^2-1}{t^3+t}$.

[1] Това е задача 13.

Глава II

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Дефиниции

Уравнение от вида

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

където y е неизвестна функция на x, се нарича обикновено[1] диференциално уравнение от n-ти ред.

Решенията на едно диференциално уравнение се наричат негови интеграли.

Не всяко диференциално уравнение има решение. И наистина нека $f(x)$ е функция, която приема както положителни, така и отрицателни стойности в един интервал Δ, но не се анулира.[2] В такъв случай уравнението

$$y' = f(x)$$

не притежава решение, защото в противен случай съгласно теоремата на Дарбу (вж. задача 59 в края на част II на учебника по Диференциално смятане) би съществувала в Δ поне една точка x_0, в която y', а следователно и $f(x)$ се анулира, което не е вярно.

Има диференциални уравнения, които имат само едно решение. И наистина нека Δ е произволен интервал. Дефинираме една функция $\varphi(x)$ в Δ по следния начин: ако x е рационално, то $\varphi(x) = 1$; ако x е ирационално, $\varphi(x) = -1$. Разглеждаме уравнението

$$y' = \varphi(x)y.$$

Очевидно константата нула е едно негово решение. Ще покажем, че това уравнение няма друго решение. За тази цел ще установим, че във всеки подинтервал на интервала Δ функцията y се анулира поне един път. И наистина, ако допуснем, че в Δ има подинтервал (p, q), където y не се анулира, ще имаме в този под интервал

$$\frac{y'}{y} = \varphi(x)$$

[1] За разлика от диференциалните уравнения, които съдържат частни производни. Така например диференциалното уравнение $y' - y = 0$ е едно обикновено диференциално уравнение, а уравнението $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ е едно диференциално уравнение с частни производни.

[2] Тази функция, разбира се, притежава поне една точка на прекъсване.

или още
$$\frac{\mathrm{d}\ln|y|}{\mathrm{d}x} = \varphi(x).$$
От друга страна, функцията $\varphi(x)$ приема в интервала (p, q) както положителни, така и отрицателни стойности и следователно съгласно теоремата на Дарбу (вж. задача 59 в края на част II) трябва да се анулира поне един път, което не е вярно. С това ние доказахме, че функцията y се анулира във всеки подинтервал на Δ и следователно се анулира тъждествено, защото е непрекъсната.

Не е трудно да се покажат примери за диференциални уравнения, които имат безбройно много решения. Така, ако функцията $g(x)$ е непрекъсната в някой интервал Δ, уравнението
$$y' = g(x)$$
има безбройно много решения в Δ и, както знаем, те се изчерпват от формулата
$$y = G(x) + C,$$
където $G(x)$ е една примитивна функция на $g(x)$ в разглеждания интервал.

Последният пример, както ще се види от това, което следва, може да се разглежда в известен смисъл като типичен. Към това ще прибавим още, че могат да се дадат твърде общи достатъчни условия, при които може да се твърди съществуването на безбройно много решения на диференциалните уравнения.

§ 2. Уравнение, в което променливите се отделят

Уравнение от вида

$$f(x) + g(y)y' = 0 \tag{1}$$

се нарича диференциално уравнение, в което променливите се отделят.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в някоя околност на точката x_0, а $g(t)$ е дефинирана и непрекъсната в някоя околност на точката y_0. Ако $g(y_0) \neq 0$, то във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 съществува една и само една диференцуема функция $y(x)$, която удовлетворява диференциалното уравнение (1) и за която $y(x_0) = y_0$.

За да докажем това, разглеждаме двете функции
$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u,$$

$$G(t) = \int_{y_0}^{t} g(u)\,\mathrm{d}u$$

и образуваме уравнението

$$F(x) + G(y) = 0. \tag{2}$$

Като вземем пред вид, че функциите $F(x)$ и $G(t)$ притежават непрекъснати производни и че

$$F(x_0) + G(y_0) = 0,$$
$$G'(y_0) = g(y_0) \neq 0,$$

заключаваме с помощта на теоремата за съществуване на неявни функции, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 съществува функция $y = \varphi(x)$, която удовлетворява уравнението (2) и условието $\varphi(x_0) = y_0$, и че тази функция е диференцуема. Чрез диференциране намираме, че функцията $\varphi(x)$ удовлетворява уравнението

$$F'(x) + G'(\varphi(x))\varphi'(x) = 0$$

или, което е същото,

$$f(x) + g(\varphi(x))\varphi'(x) = 0.$$

По такъв начин ние намерихме функция $y = \varphi(x)$ в достатъчно малка околност на точката x_0, която удовлетворява уравнението (2) и условието $\varphi(x_0) = y_0$. За да установим, че такава функция има само една, означаваме с $\psi(x)$ диференцуема функция, която е дефинирана в достатъчно малка околност на точката x_0 и удовлетворява условията

$$f(x) + g(\psi(x))\psi'(x) = 0,$$
$$\psi(x_0) = y_0.$$

Разглеждаме функцията

$$p(x) = F(x) + G(\psi(x)).$$

В такъв случай

$$p'(x) = f(x) + g(\psi(x))\psi'(x) = 0,$$

т. е. функцията $p(x)$ е константа. Тази константа е равна на нула, защото

$$F(x_0) + G(\psi(x_0)) = F(x_0) + G(y_0) = 0.$$

И така непрекъснатата функция $y = \psi(x)$ удовлетворява уравнението (2) и условието $\psi(x_0) = y_0$. От това и от теоремата за единственост на неявни функции следва, че функцията $\psi(x)$ съвпада с разглежданата по-горе функция $\varphi(x)$, когато x е достатъчно близо до x_0.

Забележка. От изложението се вижда, че диференциалното уравнение (1) при допълнителното условие $y(x_0) = y_0$ съществено се свежда към уравнението (2), което не съдържа производната на неизвестната функция.

§ 3. Хомогенни диференциални уравнения

Уравнение от вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

се нарича хомогенно.

Нека функцията $f(t)$ е дефинирана и непрекъсната в някоя околност на точката t_0, нека $f(t_0) - t_0 \neq 0$ и нека x_0 е произволно различно от нула число. Ние ще докажем, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има една и само една диференцуема функция $y = \varphi(x)$, която удовлетворява уравнението (1) и приема стойността $t_0 x_0$ в точката x_0.

Доказателство. Полагаме

$$u(x) = \frac{\varphi(x)}{x}. \tag{2}$$

В такъв случай

$$\varphi'(x) = u'x + u.$$

Очевидно функцията $y = \varphi(x)$ удовлетворява уравнението (1) и условието $\varphi(x_0) = t_0 x_0$ тогава и само тогава, когато функцията $u(x)$ удовлетворява уравнението

$$u'x + u - f(u) = 0 \tag{3}$$

и условието $u(x_0) = t_0$. От друга страна, уравнението (3) е еквивалентно на уравнението

$$\frac{1}{x} + \frac{u'}{u - f(u)} = 0, \tag{4}$$

което удовлетворява условията, при които разгледахме уравнението (1) от предния параграф. И така във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 съществува една и само една функция $u(x)$, която удовлетворява уравнението (3) и условието $u(x_0) = t_0$, и следователно съществува една и само една функция $y = \varphi(x)$, която удовлетворява уравнението (1) и условието $\varphi(x_0) = t_0 x_0$.

Забележка. Изложеното може да се резюмира кратко така: субституцията (2) ни позволява да преобразуваме уравнението (1) в уравнение, чиито променливи се отделят.

§ 4. Линейни диференциални уравнения

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и непрекъснати в някой интервал Δ. Уравнение от вида

$$y' = f(x)y + g(x) \tag{1}$$

се нарича линейно диференциално уравнение.

Да допуснем, че y е едно решение на уравнението (1). Разглеждаме помощната функция

$$u = ye^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

В такъв случай

$$y = ue^{\int f(x)\,\mathrm{d}x},$$
$$y' = u'e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} + ue^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} f(x).$$

Оттук заключаваме, че функцията u удовлетворява уравнението

$$u'e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} + ue^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} f(x) = f(x)ue^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} + g(x)$$

и следователно

$$u' = g(x)e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Това ни позволява да пишем

$$u = C + \int g(x)e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

и следователно всяко решение y на уравнението (1) може да се представи във вида

$$y = e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\left[C + \int g(x)e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right] \tag{2}$$

при подходящ избор на константата C.

Обратното, каквато и да е константата C, функцията y, определена от (2), удовлетворява уравнението (1). Доказателството се извършва с непосредствена проверка, която предоставяме на читателя.

От равенството (2) се вижда, че каквато и да е точката x_0 от Δ и каквато и да е константата a, уравнението (1) има едно и само едно решение $y = y(x)$, което удовлетворява условието $y(x_0) = a$.

§ 5. Уравнение на Бернули

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и непрекъснати в някой интервал Δ. Уравнение от вида

$$y' = f(x)y + g(x)y^m, \text{ където } m \neq 1, \tag{1}$$

се нарича диференциално уравнение на Бернули (Bernoulli).

Това уравнение може да се преобразува в линейно с помощта на подходяща субституция поне тогава, когато търсим[1] негови решения, които не се анулират.

И наистина нека y е едно решение на уравнението (1) и нека $y \neq 0$ при всички стойности на x от Δ. В такъв случай

$$y^{-m}y' = f(x)y^{1-m} + g(x)$$

и следователно функцията

$$u = y^{1-m}$$

удовлетворява диференциалното уравнение

$$\frac{1}{1-m} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(x)u + g(x),$$

което е линейно.

§ 6. Уравнение на Рикати

Нека функциите $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ са дефинирани и непрекъснати в някой интервал Δ. Уравнение от вида

$$y' = f_1(x) + f_2(x)y + f_3(x)y^2 \tag{1}$$

се нарича диференциално уравнение на Рикати (Riccati).

Ако u е един интервал на уравнението (1), т. е. ако

$$u' = f_1(x) + f_2(x)u + f_3(x)u^2, \tag{2}$$

уравнението на Рикати (1) може да се преобразува в уравнение на Бернули с помощта на субституцията

$$y = z + u,$$

[1]Разбира се, стойностите на търсената функция y трябва да принадлежат на дефиниционната област на функцията t^m.

където z е нова неизвестна функция. И наистина

$$y' = z' + u'$$

и следователно

$$z' + u' = f_1(x) + f_2(x)(z + u) + f_3(x)(z + u)^2,$$

откъдето, като вземем пред вид (2), намираме

$$z' = [f_2(x) + 2f_3(x)u]z + f_3(x)z^2,$$

което е едно уравнение на Бернули.

§ 7. Уравнение на Лагранж

Уравнение от вида

$$y = f(y')x + g(y') \tag{1}$$

се нарича уравнение на Лагранж (Lagrange).

Нека функциите $f(x)$ и $g(t)$ са дефинирани и имат непрекъснати първи производни в някоя околност на точката t_0. Ако $f(t_0) - t_0 \neq 0$ и $f'(t_0)x_0 + g'(t_0) \neq 0$, то във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има една и само една функция $y = y(x)$, която притежава непрекъснатата втора производна, удовлетворява уравнението (1) и е подчинена на условието $y'(x_0) = t_0$.

Първо ще разгледаме въпроса за единственост. Нека функцията $y = y(x)$ е дефинирана в достатъчно малка околност Δ на точката x_0, притежава непрекъсната втора производна и удовлетворява условията (1) и $y'(x_0) = t_0$. Полагаме $y'(x) = p(x)$. В такъв случай

$$y(x) = f(p)x + g(p). \tag{2}$$

Диференцираме спрямо x. Това ни дава

$$p = f(p) + [f'(p)x + g'(p)]p'(x).$$

Специално при $x = x_0$ получаваме

$$t_0 - f(t_0) = [f'(t_0)x_0 + g'(t_0)]p'(x_0)$$

и следователно $p'(x_0) \neq 0$. Оттук, като вземем пред вид, че $t_0 - p(x_0) = 0$, заключаваме с помощта на теоремата за съществуване на неявни функции и теоремата за съществуване на производни на неявни функции, че във всяка достатъчно малка околност на точката t_0 има функция $\xi(t)$ с непрекъсната производна, която удовлетворява уравнението $t - p[\xi(t)] = 0$ и условието $\xi(t_0) = x_0$.

Ако t е достатъчно близо до t_0, то $\xi(t)$ ще принадлежи на Δ и следователно ще имаме

$$p[\xi(t)] = f\left\{p[\xi(t)]\right\} + \left[f'\left\{p[\xi(t)]\right\}\xi(t) + g'\left\{p[\xi(t)]\right\}\right] p'[\xi(t)],$$

откъдето, като вземем пред вид, че

$$p[\xi(t)] = t \quad \text{и} \quad p'[\xi(t)]\xi'(t) = 1,$$

намираме

$$t = f(t) + [f'(t)\xi(t) + g'(t)]\frac{1}{\xi'(t)}$$

или още

$$\xi'(t) = \frac{f'(t)}{t - f(t)}\xi(t) + \frac{g'(t)}{t - f(t)}. \tag{3}$$

Така полученото уравнение (3) е линейно. То има само едно решение $\xi(t)$, което удовлетворява условието $\xi(t_0) = x_0$. Ние ще използуваме това обстоятелство, за да покажеш, че функцията $p(x)$ е също тъй еднозначно определена в достатъчно малка околност на точката x_0. За тази цел вземаме пред вид, че $x_0 - \xi(t_0) = 0$. От друга страна, $\xi'(t_0) \neq 0$, защото $p'[\xi(t)]\xi'(t) = 1$. Това ни позволява да заключим, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 съществува (непрекъсната) функция $q(x)$, която удовлетворява уравнението $x - \xi[q(x)] = 0$ (и условието $q(x_0) = t_0$). По този начин дефиницията на функцията $q(x)$ зависи от еднозначно определената функция $\xi(t)$, но не зависи ни най-малко от функцията $p(x)$. Полученият резултат ни дава възможност да пишем $x = \xi[q(x)]$ при всички стойности на x, които са достатъчно близо до x_0. Оттук получаваме

$$p(x) = p[\xi(q(x))] = q(x),$$

с което е показано, че функцията $p(x)$ е наистина еднозначно определена в достатъчно малка околност на точката x_0. Най-сетне, като вземем пред вид равенството

$$y(x) = f[p(x)]x + g[p(x)],$$

заключаваме, че функцията $y(x)$ е също така еднозначно определена.

За да установим, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 разглежданото уравнение (1) наистина има решение $y = y(x)$ с непрекъсната втора производна, което удовлетворява условието $y'(x_0) = t_0$, образуваме уравнението (3). Това уравнение е линейно и следователно притежава решение $\xi(t)$, което удовлетворява условието $\xi(t_0) = x_0$, стига t да се мени в достатъчно малка околност G на точката t_0. Равенството (3) ни позволява да заключим, че $\xi'(t)$ е непрекъсната функция на t. От друга страна, $x_0 - \xi(t_0) = 0$ и

$$\xi'(t_0) = \frac{f'(t_0)\xi(t_0) + g'(t_0)}{t_0 - f(t_0)} = \frac{f'(t_0)x_0 + g'(t_0)}{t_0 - f(t_0)} \neq 0.$$

Оттук, като използуваме теорията на неявните функции, заключаваме, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 съществува функция $\varphi(x)$ с непрекъсната производна, която удовлетворява условията

$$x - \xi(\varphi(x)) = 0,$$
$$\varphi(x_0) = t_0.$$

Ако x е достатъчно близо до x_0, $\varphi(x)$ принадлежи на G и следователно

$$\xi'[\varphi(x)] = \frac{f'[\varphi(x)]}{\varphi(x) - f[\varphi(x)]}\xi[\varphi(x)] + \frac{g'[\varphi(x)]}{\varphi(x) - f[\varphi(x)]}.$$

От друга страна,

$$\xi[\varphi(x)] = x \quad \text{и} \quad \xi'[\varphi(x)]\varphi'(x) = 1$$

и следователно

$$\frac{1}{\varphi'(x)} = \frac{f'[\varphi(x)]}{\varphi(x) - f[\varphi(x)]}x + \frac{g'[\varphi(x)]}{\varphi(x) - f[\varphi(x)]},$$

откъдето

$$\varphi(x) = f[\varphi(x)] + \left\{f'[\varphi(x)] + g'[\varphi(x)]\right\}\varphi'(x)$$

или още

(4) $$\varphi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{f[\varphi(x)]x + g[\varphi(x)]\right\}.$$

Да разгледаме функцията

(5) $$y(x) = f[\varphi(x)]x + g[\varphi(x)].$$

Равенството (4) ни учи, че $y'(x) = \varphi(x)$. Оттук заключаваме следното:

1. Функцията $y(x)$ притежава непрекъсната втора производна, защото функцията $\varphi(x)$ притежава непрекъсната първа производна.

2. $y'(x_0) = t_0$, защото $\varphi(x_0) = t_0$.

3. Равенството (5) ни дава

$$y(x) = f[y'(x)]x + g[y'(x)],$$

т. е. функцията $y(x)$ удовлетворява уравнението (1).

По такъв начин показахме, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 уравнението (1) наистина има решение $y(x)$ с непрекъсната втора производна, което удовлетворява условието $y'(x_0) = t_0$.

§ 8. Уравнение на Клеро

Уравнение от вида

$$y = xy' + g(y') \tag{1}$$

се нарича уравнение на Клеро (Clairaut).

Нека функцията $g(t)$ притежава непрекъсната втора производна в някоя околност на точката t_0 и нека $g''(t_0) \neq 0$. Ще покажем, че във всяка достатъчно малка околност на точката $x_0 = -g'(t_0)$ съществуват две и само две функции $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, които имат непрекъснати втори производни, удовлетворяват уравнението (1) и за които $\varphi'(x_0) = t_0$, $\psi'(x_0) = t_0$. И наистина нека y е едно такова решение. Полагаме $y' = p(x)$. Уравнението (1) добива вида

$$y = xp + g(p). \tag{2}$$

Като диференцираме спрямо x, намираме

$$\big\{x + g'[p(x)]\big\}p'(x) = 0. \tag{3}$$

Ако $p'(x_0) \neq 0$, то във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 имаме $p'(x) \neq 0$ и следователно

$$x + g'[p(x)] = 0. \tag{4}$$

От друга страна, като вземем пред вид, че

$$x + g'(t_0) = 0, \tag{5}$$

$$g''(t_0) \neq 0, \tag{6}$$

заключаваме от теорията на неявните функции, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има *само една* непрекъсната функция $p(x)$, която удовлетворява уравнение (4) и условието $p(x_0) = t_0$. След като установихме, че функцията $p(x)$ е еднозначно определена, заключаваме с помощта на равенството (2), че функцията y е също така еднозначно определена.

Преминаваме към случая, когато $p'(x_0) = 0$. Да разгледаме функцията

$$\varphi(x) = x + g'[p(x)].$$

В такъв случай

$$\varphi'(x_0) = 1 + g''[p(x_0)]p'(x_0) = 1$$

и следователно в достатъчно малка околност на точката x_0 имаме $\varphi'(x) \neq 0$. Оттук заключаваме, че функцията $\varphi(x)$ приема всяка своя стойност само един път. По-специално тя не може да се анулира повече от един път. Това ни позволява да заключим от равенство (3), че в достатъчно малка околност на точката x_0 имаме $p'(x) = 0$, т. е.

$$p(x) = \text{const} = p(x_0) = t_0.$$

По такъв начин ние и в този случай виждаме от равенството (2), че функцията y е еднозначно определена. Тя има вида

$$y = t_0 x + g(t_0).$$

От направените разсъждения се вижда, че в достатъчно малка околност на точката x_0 не може да има повече от две решения с непрекъснати втори производни, чиито първи производни приемат стойността t_0 в точката x_0.

За да покажем, че наистина съществуват две решения с интересуващите ни свойства, разглеждаме уравнението (4). Като вземем пред вид условията (5) и (6), заключаваме с помощта на теорията на неявните функции, че във всяка достатъчно малка околност на точката x_0 има функция $p(x)$ с непрекъсната производна, която удовлетворява уравнението (4) и условието $p(x_0) = t_0$.

Разглеждаме функцията

$$y = xp(x) + g[p(x)], \tag{7}$$

която очевидно е добре дефинирана в достатъчно малка околност на точката x_0 и притежава производна. В такъв случай

$$y' = p(x) + \big\{x + g'[p(x)]\big\}p'(x) = p(x). \tag{8}$$

Оттук заключаваме, че функцията y притежава непрекъсната втора производна, защото функцията $p(x)$ има непрекъсната първа производна. Найсетне равенствата (7) и (8) ни дават $y = xy' + g(y')$, т. е. функцията (7) е едно решение на уравнението (1). От друга страна, $y'(x_0) = p(x_0) = t_0$. С това е намерено едно решение на (1), което притежава всички свойства, които ни интересуват. Друго такова решение ни представя линейната функция

$$y = t_0 x + g(t_0).$$

Двете намерени решения са сигурно различни, защото функцията (7) не е линейна, както това се вижда от равенството (4), което ни дава

$$1 + g''[p(x)]p'(x) = 0,$$

откъдето $p'(x) \neq 0$ и следователно $y'' \neq 0$.

Забележка 1. С директна проверка се вижда, че линейните функции

$$y = Cx + g(C) \tag{9}$$

представляват решения на (1) при всяко x и при всеки избор на константата C от дефиниционната област на $g(t)$.

Фамилията решения (9) се нарича *общ интеграл* на уравнението на Клеро.

Забележка 2. Кривата (7) представлява обвивка на фамилията (9), когато C се мени в достатъчно малка околност на точката t_0. За да се убедим в това, полагаме

$$y_0 = t_0 x_0 + g(t_0)$$

и разглеждаме функцията $F(x, y, C) = Cx + g(C) - y$, която притежава непрекъснати частни производни до втори ред в съседство с точката (x_0, y_0, t_0). Очевидно

$$F(x_0, y_0, t_0) = 0,$$
$$F'_C(x_0, y_0, t_0) = x_0 + g'(t_0) = 0.$$

От друга страна,

$$\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{Cx} & F''_{Cy} \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$
$$F''_{CC}(x_0, y_0, t_0) = g''(t_0) \neq 0.$$

Оттук заключаваме, че уравненията

$$F(x, y, C) = 0,$$
$$F'_C(x, y, C) = 0$$

дават търсената обвивка. Последните две уравнения обаче са

$$Cx + g(C) - y = 0,$$
$$x + g'(C) = 0$$

и съвпадат с уравненията (4) и (7).

Функцията (7) се нарича *особен* интеграл на уравнението на Клеро.

Забележка 3. Ако $x_0 \neq -g'(t_0)$, уравнението (3) ни дава $p'(x_0) = 0$. В този случай, както видяхме по-горе, уравнението на Клеро няма друго решение в достатъчно малка околност на точката x_0, което да притежава непрекъсната втора производна и да удовлетворява условието $y'(x_0) = t_0$, освен решението

$$y = t_0 x + g(t_0).$$

Забележка 4. Освен намерените два пъти диференцуеми решения изобщо съществуват и други, които не притежават втора производна. Така например, означавайки с $\varphi(x)$ функцията (7), можем да конструираме ново решение, като положим

$$y(x) = \varphi(x),$$

когато x е достатъчно близо до x_0, но е по-малко от x_0 и

$$y(x) = t_0 x + g(t_0),$$

когато $x \geq x_0$.

§ 9. Интегриращ множител

Нека $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са две функции, които са дефинирани и притежават непрекъснати първи частни производни в някоя околност D на точката (x_0, y_0), и нека $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Ще търсим диференцуема функция $y = y(x)$ в достатъчно малка околност на точката x_0, която при $x = x_0$ да приема стойността y_0 и която да удовлетворява уравнението

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0. \tag{1}$$

Ако съществува в D функция $F(x, y)$, която притежава непрекъснати производни поне до втори ред и удовлетворява уравненията

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y), \tag{2}$$

търсената функция може да се определи като неявна функция на x от уравнението

$$F(x, y) = F(x_0, y_0),$$

тъй като уравнението (1) е удовлетворено тогава и само тогава, когато функцията $F(x, y(x))$ е константа.

За да съществува функция $F(x, y)$ с исканите свойства, необходимо е да имаме

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3}$$

тъй като, от една страна,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},$$

а, от друга,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

Ще покажем, че условието (3) е и достатъчно за съществуване на функция $F(x, y)$, която удовлетворява уравненията (2). За тази цел ще отбележим, че уравнението

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$$

е равносилно с уравнението

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)\,\mathrm{d}t + \varphi(y),$$

където $\varphi(y)$ е произволна два пъти диференцуема функция на y, която не зависи от x. Така определената функция $F(x, y)$ удовлетворява условието

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$$

тогава и само тогава, когато

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}t + \varphi'(y) = Q(x, y)$$

или

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}t,$$

т. е. за да съществува функция $F(x, y)$ с исканите свойства, необходимо и достатъчно е функцията

$$\psi(x, y) = Q(x, y) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}t$$

да не зависи от x, което е сигурно изпълнено, ако

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3}$$

защото в такъв случай

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Условието (3) се нарича условие за интегруемост на уравнението (1).

Една функция $\mu(x, y)$, която притежава непрекъснати частни производни поне до втори ред и не се анулира в D, се нарича *интегриращ множител* на уравнението (1), когато уравнението

$$\mu P + \mu Q y' = 0$$

удовлетворява условието за интегруемост, т. е. когато

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

или още

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

За да притежава уравнението (1) интегриращ множител, зависещ само от x, необходимо и достатъчно е да съществува функция $\mu = \mu(x)$, която не зависи от y и за която е изпълнено уравнението

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

или

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q},$$

за тази цел пък необходимо и достатъчно е отношението

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

да не зависи от y.

§ 10. Съществуване и единственост на решенията на линейните диференциални уравнения от n-ти ред при дадени начални условия

Уравнение от вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_n(x)y = f(x), \tag{1}$$

където $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_n(x)$ и $f(x)$ са дадени непрекъснати функции на x в някой интервал Δ, а y е неизвестна функция, се нарича линейно диференциално уравнение от n-ти ред. Нека x_0 е произволна точка от Δ и $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ са произволни константи. Ще покажем, че диференциалното уравнение (1) притежава едно и само едно решение $y = y(x)$ в интервала Δ, което удовлетворява условията

$$y(x_0) = a_0,\ y'(x_0) = a_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}. \tag{2}$$

Най-напред ще разгледаме въпроса за единственост. За целта ще допуснем, че поставената задача има решение, и ще положим

$$y^{(n)}(x) = \varphi(x). \tag{3}$$

В такъв случай

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_\nu}{\nu!}(x-x_0)^\nu + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} \varphi(t)(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t, \tag{4}$$

което се вижда без всякакъв труд например индуктивно с интегриране по части. Оттук получаваме при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$y^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n-k-1} \frac{a_{k+\nu}}{\nu!}(x-x_0)^\nu + \frac{1}{(n-k-1)!}\int_{x_0}^{x} \varphi(t)(x-t)^{n-k-1}\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Заместваме $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y$ в (1) с равните им от (3) и (5). Това ни дава

$$\varphi(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x} K(x,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \tag{6}$$

където

$$g(x) = f(x) - \sum_{\lambda=1}^{n} p_\lambda(x) \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \frac{a_{n+\nu-\lambda}}{\nu!}(x - x_0)^\nu$$

и

$$K(x,t) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu(x)(x-t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}.$$

Очевидно $g(x)$ и $K(x,t)$ са непрекъснати функции.

Ще покажем, че уравнението (6) не може да има повече от едно решение. И наистина нека $\psi(x)$ е още едно решение на уравнението (6), т. е.

$$\psi(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x} K(x,t)\psi(t)\,\mathrm{d}t.$$

В такъв случай

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)[\varphi(t) - \psi(t)]\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$

От друга страна, функцията $K(x,t)$ е непрекъсната и следователно функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са също тъй непрекъснати. Да означим с M една горна граница на $|K(x,t)|$, а с A една горна граница на $|\varphi(x) - \psi(x)|$, когато x се мени в произволен краен[1] и затворен подинтервал D на Δ и t принадлежи на интервала $[x_0, x]$, респ. $[x, x_0]$. В такъв случай уравнението (7) ни дава

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le MA|x - x_0|. \tag{8}$$

Като използуваме още веднъж уравнението (7) и като вземем пред вид оценката (8), ще получим

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le \left| \int_{x_0}^{x} M \,.\, MA(t - x_0)\,\mathrm{d}t \right| = \frac{M^2 A (x - x_0)^2}{2!}.$$

Като продължаваме тези разсъждения, получаваме изобщо

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le \frac{M^n A |x - x_0|^n}{n!}$$

[1]Самият интервал Δ не е задължен да бъде нито краен, нито затворен.

и следователно $\varphi(x) - \psi(x) = 0$, защото

$$\frac{M^n A|x - x_0|^n}{n!}$$

е общ член на един сходящ ред и следователно клони към нула, когато n расте неограничено. И така уравнението (6) не може да има повече от едно решение. Този резултат и равенството (4) ни учат, че и уравнението (1) не може да има повече от едно решение, което удовлетворява условията (2).

Преминаваме към въпроса за съществуване на решение на уравнение (1) при допълнителните условия (2). За целта ще приложим към уравнението (6) метода на последователните приближения.

Разглеждаме редицата

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots,$$

за която $\varphi_0(x)$ е произволна непрекъсната функция в интервала Δ, а $\varphi_{n+1}(x)$ се дефинира чрез $\varphi_n(x)$ посредством равенството

$$\varphi_{n+1}(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x} K(x, t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t. \tag{9}$$

В такъв случай,

$$\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, t)[\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)]\,\mathrm{d}t.$$

Да означим с M една горна граница на $|K(x, t)|$ и с A една горна граница на $|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)|$, когато x се мени в кой да е краен и затворен подинтервал D на интервала Δ. В такъв случай получаваме последователно

$$\begin{aligned}
&|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \le MA|x - x_0|,\\
&|\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} M \,.\, MA(t - x_0)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{M^2 A(x - x_0)^2}{2!},\\
&|\varphi_4(x) - \varphi_3(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} M \frac{M^2 A(t - x_0)^2}{2!}\,\mathrm{d}t\right| = \frac{M^3 A|x - x_0|^3}{3!},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \le \frac{AM^n|x - x_0|^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Тези неравенства ни осигуряват равномерната сходимост в D на реда

$$\varphi_0(x) + [\varphi_1(x) - \varphi_0(x)] + [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] + \cdots + [\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)] + \cdots,$$

а следователно и равномерната сходимост на редицата от частичните му суми

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$$

Да положим

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x).$$

В такъв случай, ако извършим граничен преход в уравнението (9), ще получим

$$\varphi(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x} K(x,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

След като е дефинирана по такъв начин функцията $\varphi(t)$, разглеждаме функцията

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_\nu}{\nu!}(x - x_0)^\nu + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} \varphi(t)(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Тази функция удовлетворява условията

$$y(x_0) = a_0,\ y'(x_0) = a_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1},$$

което се вижда с непосредствена проверка. Тя обаче удовлетворява и уравнението (1), защото, замествайки y с равното му от (10) в (1), ще получим (6), което е изпълнено съгласно дефиницията на $\varphi(x)$. По такъв начин установихме съществуването на решението на уравнението (1) при допълнителните условия (2).

Ако оставим произволните константи $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ да се менят, получаваме всичките решения на уравнението (1). Оттук става ясно, че общото решение на уравнението (1) зависи от n произволни константи.

§ 11. Фундаментална система на едно линейно диференциално уравнение от *n*-ти ред

Нека

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

е едно линейно диференциално уравнение, където $p_1(x), \dots, p_n(x)$ и $f(x)$ са дадени непрекъснати функции в някой интервал Δ. Нека y_0 е едно решение на уравнението (1), т. е.

$$y_0^{(n)} + p_1(x)y_0^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y_0 = f(x).$$

Ако извършим субституцията

$$y = z + y_0 \tag{2}$$

в уравнението (1), ще получим

$$z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + p_2(x)z^{(n-2)} + \cdots + p_n(x)z = 0. \tag{3}$$

Това е пак едно линейно уравнение. То обаче е по-просто от уравнението (1) в това отношение, че дясната му страна е равна на нула. Такова линейно уравнение се нарича хомогенно.

Ако $z_1, z_2, \dots, z_k$ са решения на уравнението (3) и $C_1, C_2, \dots, C_k$ са константи, функцията

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \cdots + C_k z_k$$

е пак решение на уравнението (3), защото

$$z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)z = C_1(z_1^{(n)} + p_1(x)z_1^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)z_1)$$
$$+C_2(z_2^{(n)}+p_1(x)z_2^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)z_2)+\cdots+C_k(z_k^{(n)}+p_1(x)z_k^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)z_k) = 0.$$

Ще установим сега следното важно свойство на хомогенните линейни уравнения: ако $z_1, z_2, \dots, z_n, z$ са $n + 1$ решения на едно хомогенно линейно уравнение от n-ти ред, то могат да се намерят $n+1$ константи $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda$, от които поне една е различна от нула, по такъв начин, че да имаме тъждествено

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_n z_n + \lambda z = 0. \tag{4}$$

За да докажем това, разглеждаме $n + 1$ решения $z_1, z_2, \dots, z_n, z$ на уравнението (3). Избираме произволно една точка x_0 в интервала Δ и означаваме с $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda$ едно нетривиално решение на системата

$$\begin{gathered}
\lambda_1 z_1(x_0) + \lambda_2 z_2(x_0) + \cdots + \lambda_n z_n(x_0) + \lambda z(x_0) = 0,\\
\lambda_1 z_1'(x_0) + \lambda_2 z_2'(x_0) + \cdots + \lambda_n z_n'(x_0) + \lambda z'(x_0) = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\lambda_1 z_1^{(n-1)}(x_0) + \lambda_2 z_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \lambda_n z_n^{(n-1)}(x_0) + \lambda z^{(n-1)}(x_0) = 0.
\end{gathered}$$

Както е известно от алгебрата, такова решение сигурно съществува. Образуваме помощната функция

$$\varphi(x) = \lambda_1 z_1(x) + \lambda_2 z_2(x) + \cdots + \lambda_n z_n(x) + \lambda z(x).$$

Тази функция удовлетворява уравнението

$$\varphi^{(n)}(x) + p_1(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)\varphi(x) = 0$$

и условията

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{5}$$

Константата нула обаче също тъй удовлетворява уравнението (3) и условията (5) и следователно съгласно теоремата за единственост, която доказахме в предния параграф, функцията $\varphi(x)$ се анулира тъждествено. Така ние успяхме да намерим $n+1$ константи $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$, от които поне една е различна от нула, по такъв начин, че да е изпълнено условието (4) при всяко x от Δ.

Ако функциите $z_1, z_2, \ldots, z_n$ са линейно независими в Δ, т. е. ако не могат да се намерят n константи $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, от които поне едната е различна от нула, по такъв начин, че да имаме

$$\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \cdots + \mu_n z_n = 0$$

при всяко x от Δ, коефициентът λ в зависимостта (4) е различен от нула. Това обстоятелство ни позволява да пишем

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \cdots + C_n z_n,$$

където

$$C_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad C_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda}, \quad \ldots, \quad C_n = -\frac{\lambda_n}{\lambda}.$$

Оттук и от (2) добиваме възможност да представим общото решение на уравнението (1) във вида

$$y = y_0 + C_1 z_1 + C_2 z_2 + \cdots + C_n z_n.$$

По такъв начин въпросът за намиране на общото решение на уравнението (1) се свежда към намирането на едно негово частно решение и на n линейно независими решения на хомогенното уравнение (3).

Една система от n линейно независими решения на едно хомогенно линейно уравнение от n-ти ред се нарича негова фундаментална система. За да установим съществуването на една фундаментална система от уравнението (3), избираме n^2 на брой числа a_{ik}, където i и k приемат цели положителни стойности между 1 и n, по такъв начин, че

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{6}$$

След това, като се основаваме на доказаната по-горе теорема за съществуване, построяваме n решения $z_1, z_2, \dots, z_n$, които удовлетворяват условията

$$z_\nu(x_0) = a_{1\nu},\ z'_\nu(x_0) = a_{2\nu},\ \dots,\ z_\nu^{(n-1)}(x_0) = a_{n\nu}$$

при $\nu = 1, 2, \dots, n$, където x_0 е точка от Δ. Така построените функции $z_1, z_2, \dots, z_n$ са сигурно линейно независими в Δ. И наистина да допуснем, че съществуват такива n числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, от които поне едно е различно от нула, че да имаме

$$\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \dots + \mu_n z_n = 0 \tag{7}$$

при всяко x от Δ. Като диференцираме това равенство последователно $n-1$ пъти, ще получим

$$\begin{aligned} \mu_1 z'_1 + \mu_2 z'_2 + \dots + \mu_n z'_n &= 0,\\ \mu_1 z''_1 + \mu_2 z''_2 + \dots + \mu_n z''_n &= 0,\\ \mu_1 z_1^{(n-1)} + \mu_2 z_2^{(n-1)} + \dots + \mu_n z_n^{(n-1)} &= 0. \end{aligned}$$

Тези уравнения заедно с уравнението (7) дават при $x = x_0$

$$\begin{aligned} a_{11}\mu_1 + a_{12}\mu_2 + \dots + a_{1n}\mu_n &= 0,\\ a_{21}\mu_1 + a_{22}\mu_2 + \dots + a_{2n}\mu_n &= 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}\mu_1 + a_{n2}\mu_2 + \dots + a_{nn}\mu_n &= 0, \end{aligned}$$

което не е възможно, защото детерминантата (6) е различна от нула.

§ 12. Линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти

Нека в линейното и хомогенно уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0 \tag{1}$$

коефициентите $p_1, p_2, \dots, p_n$ са константи. Ще търсим една негова фундаментална система. За тази цел ще се опитаме да го удовлетворим с функции от вида

$$y = e^{\alpha x},$$

където α е константа. Като заместим y с равното му, ще получим

$$e^{\alpha x}\left(\alpha^n + p_1\alpha^{n-1} + p_2\alpha^{n-2} + \dots + p_n\right) = 0.$$

Това уравнение е удовлетворено тогава и само тогава, когато е удовлетворено уравнението

$$\alpha^n + p_1\alpha^{n-1} + p_2\alpha^{n-2} + \cdots + p_n = 0. \tag{2}$$

Така полученото уравнение (2) се нарича характеристично уравнение на уравнението (1).

Да разгледаме случая, когато корените $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ на уравнението (2) са реални и прости. Ще докажем, че решенията

$$e^{\alpha_1 x},\ e^{\alpha_2 x},\ \ldots,\ e^{\alpha_n x}$$

на уравнението (1) образуват една негова фундаментална система. И наистина да допуснем, че съществуват такива константи $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, от които поне едната, например μ_n, е различна от нула, така че да имаме тъждествено

$$\mu_1 e^{\alpha_1 x} + \mu_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + \mu_n e^{\alpha_n x} = 0.$$

Ако разделим с $e^{\alpha_1 x}$ и диференцираме спрямо x, ще получим

$$\mu_2(\alpha_2 - \alpha_1)e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} + \mu_3(\alpha_3 - \alpha_1)e^{(\alpha_3-\alpha_1)x} + \cdots + \mu_n(\alpha_n - \alpha_1)e^{(\alpha_n-\alpha_1)x} = 0.$$

Делим полученото равенство с $e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}$ и пак диференцираме спрямо x. В такъв случай получаваме

$$\mu(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)e^{(\alpha_3-\alpha_2)x} + \cdots + \mu_n(\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_2)e^{(\alpha_n-\alpha_2)x} = 0$$

и т. н. Продължаваме тези пресмятания и най-сетне получаваме

$$\mu_n(\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_2)\cdots(\alpha_n - \alpha_{n-1})e^{(\alpha_n-\alpha_{n-1})x} = 0,$$

което очевидно не е вярно.

И така функциите $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}$ наистина образуват една фундаментална система решения на уравнението (1) и следователно общото му решение ще има вида

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + C_n e^{\alpha_n x}.$$

Характеристичното уравнение може да се използува, за да се намери една фундаментална система за уравнението (1) и тогава, когато не всичките му корени са реални и прости. За да съкратим изложението, ще изясним това в случая, когато уравнението (1) е от втори ред, т. е. когато то има вида

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0. \tag{3}$$

В този случай характеристичното му уравнение е

$$\alpha^2 + p_1\alpha + p_2 = 0. \tag{4}$$

По-горе разгледахме случая, когато корените α_1 и α_2 на това уравнение са реални и прости, и видяхме, че общото решение на уравнението (3) е

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}. \tag{5}$$

Сега ще разгледаме случая, когато корените на уравнението (4) не са реални и прости, т. е. когато

$$p_1^2 - 4p_2 \leq 0.$$

За да не напишем много, ще положим

$$p_2 - \frac{p_1^2}{4} = a^2$$

и ще направим субституцията

$$y = z e^{-\frac{p_1}{2}x}.$$

В такъв случай уравнението (3) приема вида

$$z'' + a^2 z = 0. \tag{6}$$

Ако $a = 0$, то $z'' = 0$ и следователно z има вида

$$z = C_1 x + C_2,$$

където C_1 и C_2 са константи. По такъв начин намираме

$$y = (C_1 x + C_2) e^{-\frac{p_1}{2}x}.$$

Преминаваме към случая, когато $a^2 > 0$. С непосредствена проверка се вижда, че функциите

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos ax, \\ z_2 &= \sin ax \end{aligned} \tag{7}$$

са две решения на уравнението (6). Ние ще покажем, че те са линейно независими. И наистина, ако допуснем, че при някой избор на константите μ_1 и μ_2 имаме

$$\mu_1 \cos ax + \mu_2 \sin ax = 0$$

при всяко x, то чрез диференциране намираме

$$-a\mu_1 \sin ax + a\mu_2 \cos ax = 0.$$

От друга страна,

$$\begin{vmatrix} \cos ax & \sin ax \\ -a \sin ax & a \cos ax \end{vmatrix} = a \neq 0$$

и следователно $\mu_1 = \mu_2 = 0$. С това е установено, че решенията (7) на уравнението (6) образуват една негова фундаментална система. По такъв начин общото решение на уравнението (6) е

$$z = A \cos ax + B \sin ax,$$

където A и B са две произволни константи. Оттук заключаваме, че общото решение на уравнението (3) е

$$y = e^{-\frac{p_1}{2}x}(A \cos ax + B \sin ax).$$

Полученият резултат може да се представи в друга форма, като се дефинира показателната функция за комплексни стойности на показателя. Това може да стане, като положим по дефиниция

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

при всички реални стойности на x и y. В такъв случай ще имаме

$$\begin{aligned} e^{\alpha_1 x} &= e^{-\frac{p_1}{2}x}(\cos ax + i \sin ax), \\ e^{\alpha_2 x} &= e^{-\frac{p_1}{2}x}(\cos ax - i \sin ax), \end{aligned} \tag{8}$$

където

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{p_1}{2} + ai, \\ \alpha_2 &= -\frac{p_1}{2} - ai \end{aligned}$$

са двата корена на характеристичното уравнение (4). Равенствата (8) ни позволяват да представим общото решение на уравнението (3) във вида

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x},$$

където

$$C_1 = \frac{A - iB}{2}, \quad C_2 = \frac{A + iB}{2},$$

т. е. формулата (5) може да се използува и тогава, когато корените на характеристичното уравнение (4) не са реални.

Ние вече отбелязахме по-горе, че и в случая, когато разглежданото линейно уравнение с постоянни коефициенти е от n-ти ред, може да се намери една негова фундаментална система, каквито и да са корените на характеристичното му уравнение. Ние няма обаче да се спираме върху този въпрос, при все че решението му не е свързано с някакви трудности.

Използувана литература

[1] Брадистилов, Г. — Сборник от задачи и теореми по диференциално и интегрално смятане, част I и II, София, 1947.

[2] Гребенча, М. К., С. И. Новоселов — Курс математического анализа, т. I, Москва, 1948, т. II, Москва, 1949.

[3] Гюнтер, Н. М. и Р. О. Кузьмин — Сборник задач по высшей математике, т. I и II. Москва — Ленинград, 1949.

[4] Ковалевский, Г. — Основы дифференциального и интегрального исчислений, Одесса, 1911.

[5] Лузин, Н. И. — Дифференциальное исчисление, Москва, 1946.

[6] Лузин, Н. И. — Интегральное исчисление, Москва, 1946.

[7] Немыцкий, В., М. Слудская, А. Черкасов — Курс математического анализа, т. I и II, издание второе.

[8] Попов, К. — Учебник по диференциално и интегрални смятане, София.

[9] Фихтенгольц, Г. М. — Курс дифференциалньного и интегрального исчисления, т. I, II и III, Москва — Ленинград, 1948.

[10] Чезаро, Э. — Элементарный учебник алгебрического анализа и исчисления бесконечно малых, часть I и II, Одесса, 1913.

[11] Шифф, В. — Сборник упражнений и задач по дифференциальному и интегральному исчислениям, ч. I и II, Москва, 1910.

[12] Baire, R. — Leçons sur les théories générales de l'analyse, t. I, II, Paris, 1908.

[13] Brahy, M. — Exercices méthodiques de calcul différentiel, Paris, 1895.

[14] COURANT, R. — Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. I, II, Berlin, 1929.

[15] FABRY, E. — Problèmes et exercices de mathématiques générales, Paris, 1918.

[16] GOURSAT, E. — Cours d'analyse mathématique, t. I, Paris, 1910.

[17] HARDY, G. H. — A course of pure mathematics.

[18] TISSERAND, F. — Recueil complementaire d'exercices sur le calcul infinitésimal, Paris, 1933.

[19] KNOPP, K. — Theorie und Anwendung der unendichen Reinen, Berlin, 1931.

[20] LANDAU, E. — Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung, 1934.

[21] MANGOLDT, H., K. KNOPP — Einführung in die höhere Mathematik, Bd. I, II, III, Leipzig, 1942.

[22] PÓLYA, G., G. SZEGŐ — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I, II, Berlin, 1925.

[23] JORDAN, C. — Cours d'analyse de l'école polytechnique, t. I, Paris, 1909.

[24] ARTIN, E. — Einführung in die Theorie der Gammafunktion, Leipzig, 1931.

Съдържание

Част II
ДВОЙНИ И ТРОЙНИ ИНТЕГРАЛИ

Част III
ПРИЛОЖЕНИЯ

Ярослав Александров Тагамлицки

ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ

Шесто Издание

Художествен редактор Светлозар Писаров
Технически редактор Стела Петрова
Коректор Биляна Василева

Дадена за набор на 26.VIII.1977 г. Подписана за печат на 10.II.1978 г.
Излязла от печат на 28.II.1978 г. Формат 16/60/90 Печатни коли 28
Издателски коли 28 Издателски № 23723 Литературна група I–4 Тираж 8076

Цена 1,68 лв. КОД 02 $\frac{95346\ 71511}{4790\text{-}96\text{-}78}$

ДИ „Наука и изкуство“
ДП „Тодор Димитров“ кл. Лозенец