

**Проф. Я. ТАГАМЛИЦКИ**

**ДИФЕРЕНЦИАЛНО  
СМЯТАНЕ**

**V ИЗДАНИЕ**

**СОФИЯ – 1971**  
**НАУКА И ИЗКУСТВО**



## ИЗ ПРЕДГОВОРА КЪМ ПЪРВОТО ИЗДАНИЕ

Настоящият курс по диференциално и интегрално смятане е предназначен за студентите по математика и физика от Физико-математическия факултет. Той представлява преработка на курса от 1951 г. за студентите-задочници по математика.

Естеството на предмета изисква от читателя известна зрелост, поради което читателят често пъти среща затруднения при първото си запознаване с него. Тези затруднения са естествени при първо четене и не трябва да смущават никого. При второ четене, когато читателят има общ поглед върху предмета, те сами отпадат в по-голямата си част. Когато читателят, след като е добил впечатление например от първите две части на учебника, наново се върне върху преминалото, той ще има съвсем друг поглед върху него.

Курсът трябва да се изучава непременно с молив и хартия. Читателят трябва да извършва писмено пресмятанията, да възпроизвежда доказателствата, да следи къде се използват в тях предположенията и да решава *много* задачи. Тъкмо за да може читателят да се упражнява достатъчно още при четенето, в учебника са дадени много задачи.

*Я. Тагамлици*

София, 1. XII. 1953 г.

## ИЗ ПРЕДГОВОРА КЪМ ВТОРОТО ИЗДАНИЕ

При първо четене е целесъобразно читателят да изостави § 5, § 7 и § 8 от глава I на част I.

Особено място в този учебник заемат задачите. Разбира се, най-напред са дадени задачи, които се решават, като се прилагат непосредствено общите методи от основния текст. Чрез тях студентът добива необходимата техническа сръчност. По-нататък обаче следват задачи, които разширяват кръгозора на читателя. Така под форма на задачи читателят се запознава с различни възможности за въвеждане на елементарните функции, с критерия на Кумер, с критерият на Абел, с Чезаровото сумиране на разходящите редове, със съществуването на диференцируем клон на полярния ъгъл на една еднократно гладка крива, с неравенството на Коши—Буняковски, с неравенството на Хьолдер, с неравенството на Минковски, с полиномите на Чебишев и техните свойства, с числата на Бернули, със сумационната формула на Ойлер—Маклорен, с теорията на функцията  $\Gamma(x)$ , изложена по метода на Бор, Молеруп и Артин, с Гаусовата квадратурна формула, с възможността да се изгради теорията на вероятностите, без да се въвежда понятието вероятност, с непрекъснатата функция на Вайерщрас, която няма производна, с теоремата на Ермит за трансцендентност на Неперовото число, с теоремата на Вайерщрас за апроксимиране на непрекъснати функции с полиноми, с понятието за неразложимост на една функция в един конус от функции (макар и в специалния случай, когато този конус е множеството на монотонно растящите функции), с интерполационната формула на М. Рис и неравенството на С. Бернщайн, с критерия на Ермаков и пр. Всяка една от тези задачи е или достатъчно подготвена от задачите, които непосредствено я предшествуват, или е снабдена с подходящо упътване, така че интересуваният се студент наистина може да я реши.

*Я. Тагамлици*

София, 1. XII. 1956 г.

### **ИЗ ПРЕДГОВОРА КЪМ ТРЕТОТО ИЗДАНИЕ**

За разлика от предишните издания настоящото издание излиза в два тома. В първия том се разглежда диференциалното смятане, а във втория — интегралното смятане. Промените се отнасят главно до подробностите и засягат целия учебник.

*Я. Тагамлици*

София, 1. XII. 1961 г.

## **ПРЕДГОВОР КЪМ ЧЕТВЪРТТО ИЗДАНИЕ**

Промените в настоящето издание се отнасят главно до подробностите.

Приятен дълг ми е да изкажа най-сърдечна благодарност на моя дълбоко уважаван колега Д. Скордев, който допринесе много за подобряването на учебника.

*Я. Тагамлици*

София, 30. XI. 1965 г.

**Част I**  
**РЕАЛНИ ЧИСЛА, РЕДИЦИ ОТ РЕАЛНИ ЧИСЛА,**  
**РЕДОВЕ ОТ РЕАЛНИ ЧИСЛА**

**Глава I**  
**РЕАЛНИ ЧИСЛА**

В основата на диференциалното и интегралното смятане лежи понятието реално число. Ние ще смятаме, че теорията на реалните числа поне отчасти е позната (така ще смятаме, че читателят знае как реалните числа се изобразяват върху една права и пр.), но все пак ще припомним основните им свойства.

**§ 1. Равенство между реални числа**

1. При всеки избор на реално число  $a$  имаме

$$a = a \quad (\text{рефлективност}).$$

2. Ако

$$a = b \text{ и } b = c,$$

то

$$a = c \quad (\text{транзитивност}).$$

3. Ако

$$a = b,$$

то

$$b = a \quad (\text{симетрия}).$$

**§ 2. Аритметични действия**

4. На всеки две реални числа  $a$  и  $b$  е съпоставено едно реално число  $a+b$  и едно реално число  $ab$ , като при това са изпълнени следните изисквания:

$$a + b = b + a, \quad ab = ba \quad (\text{комутативен закон});$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc) \quad (\text{асоциативен закон});$$

$$a(b + c) = ab + ac \quad (\text{дистрибутивен закон}).$$

Ако  $a = b$  и  $c = d$ , то  $a + c = b + d$  и  $ac = bd$ .

Реалното число  $a+b$  наричаме сума, а реалното число  $ab$  — произведение на двете реални числа  $a$  и  $b$ .

След като са дефинирани свойствата събиране и умножение за две числа, ние можем да разширим тяхната дефиниция, като пишем (по дефиниция)

$$a + b + c = (a + b) + c$$

$$abc = (ab)c$$

и пр.

5. Уравнението  $a + x = b$  има винаги поне едно решение. (По-късно ще докажем, че това уравнение има само едно решение.)

*Забележка 1.* Съгласно казаното по-горе уравнението  $a + x = a$  има решение. Не е трудно да се покаже, че всяко решение на това уравнение удовлетворява и уравнението  $b + x = b$ , каквото и да бъде реалното число  $b$ . И наистина нека  $y$  е едно решение на уравнението  $a + y = b$ . В такъв случай

$$b + x = (a + y) + x = (y + a) + x = y + (a + x) = y + a = a + y = b.$$

Не е трудно да се убедим, че уравнението  $a + x = a$  има само едно решение. И наистина нека реалното число  $y$  е също едно решение на уравнението  $a + y = a$ . Ние знаем обаче, че равенствата  $a + x = a$  и  $a + y = a$  не се нарушават, както и да изменяме  $a$ . Специално, поставяйки в първото от тези равенства  $a = y$ , а във второто  $a = x$ , получаваме  $y + x = y$ ,  $x + y = x$ , т. е.  $x = y$ .

*Забележка 2.* Уравнението  $a + x = b$  има само едно решение. И наистина нека  $y$  е кое да е решение на уравнението  $a + y = 0$ . В такъв случай, каквото и да бъде решението  $x$  на уравнението  $a + x = b$ , имаме

$$x = x + 0 = x + (a + y) = (x + a) + y = (a + x) + y = b + y.$$

Така намереното единствено решение на уравнението  $a + x = b$  се означава обикновено със символа  $b - a$  и се нарича разлика. По-специално уравнението  $a + x = 0$  също има едно и само едно решение. Това решение се означава със символа  $-a$ . Очевидно имаме

$$b - a = (b - a) + 0 = (b - a) + [a + (-a)] = [(b - a) + a] + (-a)$$

$$= [a + (b - a)] + (-a) = b + (-a).$$

*Забележка 3.* Като вземем под внимание, че от една страна,  $0$  удовлетворява уравнението  $0 + x = 0$  (съгласно дефиницията на  $0$ ), а от друга страна,



$-0$  удовлетворява същото уравнение (съгласно дефиницията на  $-0$ ), заключаваме с помощта на доказаната вече теорема за единственост, че  $-0 = 0$ .

Аналогично, като вземем под внимание, че както  $a$ , така и  $a - 0$  удовлетворяват уравнението  $0 + x = a$  (първото следва от дефиницията на  $0$  и от комутативния закон, а второто следва от дефиницията на понятието разлика), заключаваме с помощта на споменатата теорема за единственост, че  $a - 0 = a$ .

*Забележка 4.* Не е трудно да се види, че  $-(-a) = a$ . И наистина

$$\begin{aligned} -(-a) &= -(-a) + 0 = -(-a) + [a + (-a)] = -(-a) + [(-a) + a] \\ &= [(-(-a)) + (-a)] + a = [(-a) + (-(-a))] + a = 0 + a \\ &= a + 0 = a. \end{aligned}$$

6. От двете зависимости  $a = 0$  и  $a \neq 0$  (четете така:  $a$  е различно от нула) е в сила едната и само едната. Измежду реалните числа има такива, които са различни от  $0$ .

7. Когато  $a \neq 0$ , уравнението  $ax = b$  има поне едно решение.

*Забележка 1.* Ако  $a \neq 0$ , всяко решение на уравнението  $ax = a$  удовлетворява уравнението  $bx = b$  при всеки избор на  $b$ . И наистина нека  $y$  е едно решение на уравнението  $ay = b$ . В такъв случай

$$bx = (ay)x = (ya)x = y(ax) = ya = ay = b.$$

Уравнението  $ax = a$  има само едно решение. И наистина нека  $y$  е също решение на уравнението  $ay = a$ . Ако поставим  $a = y$  в равенството  $ax = a$  и  $a = x$  в равенството  $ay = a$ , ще получим  $yx = y$ ,  $xy = x$ , т. е.  $x = y$ .

Така намереното единствено и независимо от  $a$  решение на уравнението  $ax = a$  се означава със символа  $1$  и се нарича единица.

Сега не е трудно да се види, че уравнението  $ax = b$  при  $a \neq 0$  има само едно решение. И наистина нека  $y$  е едно решение на уравнението  $ay = 1$ . В такъв случай, каквото и да бъде решението  $x$  на уравнението  $ax = b$ , ще имаме

$$x = x \cdot 1 = x(ay) = (xa)y = (ax)y = by.$$

Единственото решение на уравнението  $ax = b$  при  $a \neq 0$  се означава със символа  $\frac{b}{a}$  и се нарича частно или дроб с числител  $b$  и знаменател  $a$ . По такъв начин ние казахме какво означава символът  $\frac{b}{a}$  само при  $a \neq 0$ . Поради това ние няма да си служим с дроби, чийто знаменател е нула.

*Забележка 2.* Не е трудно да се види, че при всеки избор на  $a$  имаме  $a \cdot 0 = 0$ . И наистина

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + [a + (-a)] = [a \cdot 0 + a] + (-a) = (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) \\ &= a(0 + 1) + (-a) = a(1 + 0) + (-a) = a \cdot 1 + (-a) = a + (-a) = 0. \end{aligned}$$

*Забележка 3.* Ще покажем, че  $1 \neq 0$ . И наистина нека  $a \neq 0$  (такова число съществува съгласно условието б). Ако допуснем, че  $1 = 0$ , ще имаме  $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$ , което противоречи на избора на  $a$ .

*Забележка 4.* Ще установим, че  $(-1)a = -a$ . И наистина

$$\begin{aligned} (-1)a &= (-1)a + 0 = (-1)a + [a + (-a)] = [(-1)a + a] + (-a) \\ &= [(-1)a + 1 \cdot a] + (-a) = [(-1) + 1]a + (-a) \\ &= 0 \cdot a + (-a) = 0 + (-a) = -a. \end{aligned}$$

Специално при  $a = -1$  получаваме  $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$ .

*Забележка 5.* Не е трудно да се види, че

$$-(a - b) = b - a.$$

И наистина

$$\begin{aligned} -(a - b) &= (-1)[a + (-b)] = (-1)a + (-1)(-b) = (-1)(-b) + (-1)a \\ &= -(-b) + (-a) = b + (-a) = b - a. \end{aligned}$$

По такъв начин в съвкупността на реалните числа имаме две действия (събиране и умножение) и една зависимост (равенство), които се подчиняват на седемте условия, които са изброени в този параграф.

**Дефиниция.** Всяко множество от елементи, в което са дефинирани две действия и една зависимост, подчиняващи се на изброените условия в горните седем точки, се нарича поле или (комутативно) тяло.

### § 3. Сравняване на реалните числа

Част от реалните числа се наричат положителни, като при това са изпълнени следните условия:

8. Нулата не е положително число.
9. Ако  $a \neq 0$ , то поне едното от двете числа  $a$  и  $-a$  е положително.
10. Ако  $a$  и  $b$  са положителни, то  $a + b$  и  $ab$  са положителни.
11. Ако  $a$  е положително число и  $a = b$ , то  $b$  е положително число

**Дефиниция.** Тяло, в което част от елементите са наречени положителни, като при това са изпълнени условията 8, 9, 10 и 11, се нарича наредено тяло.

*Забележка 1.* Числата  $a$  и  $-a$  не могат да бъдат едновременно положителни, защото в противен случай съгласно условието 10 сумата  $a + (-a)$  би била положителна, което противоречи на условията 8 и 11, защото  $a + (-a) = 0$ .

*Забележка 2.* Елементите, които не са положителни и не са равни на нула, се наричат отрицателни.

*Забележка 3.* Съгласно условието 9 някое от двете числа 1 и  $-1$  е положително, защото както вече видяхме,  $1 \neq 0$ . Числото  $-1$  сигурно не е положително, защото в противен случай числото  $(-1)(-1) = 1$  също би било положително, което, както установихме, не е възможно. И така числото 1 е положително.

Ако разликата  $a - b$  е положителна, то казваме, че числото  $a$  е по-голямо от  $b$ , и пишем  $a > b$  и  $b < a$ . Символът  $a \geq b$  или (което е същото)  $b \leq a$  означава, че или  $a > b$ , или  $a = b$ .

Ако числата  $a$  и  $b$  не са равни помежду си, то разликата  $a - b$  е различна от нула и следователно едното и само едното от двете числа  $a - b$  и  $-(a - b) = b - a$  е положително, т. е. в сила е едното и само едното от двете неравенства  $a > b$ ,  $b > a$ . Това свойство се нарича трихотомия на наредбата при реалните числа.

*Забележка 4.* Очевидно имаме  $a > 0$  тогава и само тогава, когато  $a$  е положително, защото  $a = a - 0$ .

*Забележка 5.* Ако  $a > b$  и  $c > d$ , то  $a + c > b + d$ . И наистина не е трудно да се види, че

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$$

например по следния начин:

$$\begin{aligned} (a + c) - (b + d) &= (a + c) + (-1)(b + d) = (a + c) + [(-1)b + (-1)d] \\ &= [(a + c) + (-1)b] + (-1)d = [a + (c + (-1)b)] + (-1)d \\ &= [a + ((-1)b + c)] + (-1)d = [(a + (-b)) + c] + (-1)d \\ &= (a + (-b)) + (c + (-1)d) = (a - b) + (c - d). \end{aligned}$$

Разликите  $a - b$  и  $c - d$  са обаче положителни и следователно сумата им  $(a - b) + (c - d)$  е също положителна. Оттук заключаваме, че разликата  $(a + c) - (b + d)$  е положителна, т. е. наистина  $a + c > b + d$ . Разбира се, ако  $a \geq b$  и  $c \geq d$ , то по същия начин се вижда, че  $a + c \geq b + d$ .

Аналогично може да се провери без труд, че ако

$$a > b, c > d, c > 0, b > 0,$$

то

$$ac > bd.$$

За тази цел използваме тъждеството

$$ac - bd = (a - b)c + (c - d)b,$$

което може да се провери например така:

$$\begin{aligned} (a - b)c + (c - d)b &= (a + (-1)b)c + (c + (-1)d)b \\ &= (ac + (-1)bc) + (cb + (-1)bd) \\ &= ac + [(-1)bc + (bc + (-1)bd)] \\ &= ac + [((-1)bc + bc) + (-1)bd] = ac + [0 + (-1)bd] \\ &= ac + (-1)bd = ac - bd. \end{aligned}$$

По-нататък извършваме разсъжденията така: произведенията  $(a-b)c$  и  $(c-d)b$  са положителни, защото техните множители са положителни, отгук заключаваме, че сумата  $(a-b)c + (c-d)b$  е също тъй положителна т. е. и разликата  $ac - bd$  е положителна и следователно  $ac > bd$ .

Най-сетне нека читателят сам провери следните прости свойства на неравенствата:

- 1) ако  $a > b$ , то  $a + c > b + c$ ;
- 2) ако  $a > b$  и  $b > c$ , то  $a > c$ ;
- 3) ако  $\lambda > 0$  и  $a > b$ , то  $\lambda a > \lambda b$ ;
- 4) ако  $a > b$ , то  $-a < -b$

и пр.

#### § 4. Абсолютна стойност

Под думите *абсолютна стойност* или *модул* на едно реално число  $a$  се разбира по-голямото\* от двете числа  $a$  и  $-a$ . Обикновено абсолютната стойност на едно число  $a$  се означава със знака  $|a|$ . Очевидно, ако  $a > 0$ , то

\* Ако тези числа са равни помежду си, то под думите „по-голямото от тях“ ще разбираме кое да е от тях.

$|a| = a$ , ако  $a < 0$ , то  $|a| = -a$ , и най-сетне, ако  $a = 0$ , то  $|a| = 0$ . Всичко това ние можем да обединим в равенството

$$|a| = \varepsilon a,$$

където  $\varepsilon = 1$ , когато  $a \geq 0$ , и  $\varepsilon = -1$ , когато  $a < 0$ .

*Примери.*

$$|1| = 1; |-1| = -(-1) = 1; |2| = 2; |-3| = -(-3) = 3; |0| = 0.$$

Очевидно каквото и да е реалното число  $a$ , имаме  $a \geq 0$ , а равенството  $|a| = 0$  е валидно тогава и само тогава, когато  $a = 0$ .

Не е трудно да се види, че

$$|ab| = |a| |b|.$$

И наистина

$$|a| = \varepsilon_1 a, \quad |b| = \varepsilon_2 b, \quad |ab| = \varepsilon ab,$$

където  $\varepsilon_1 = \pm 1$ ,  $\varepsilon_2 = \pm 1$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ . Оттук получаваме

$$|a| |b| = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon} |ab|.$$

Като вземем под внимание, че

$$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon} = \pm 1,$$

заклучаваме, че или

$$|a| |b| = |ab|,$$

или

$$|a| |b| = -|ab|.$$

Във втория случай обаче ще имаме  $|a| |b| = 0$ , защото числото  $-|ab|$  не е положително, докато произведението  $|a| |b|$  не е отрицателно. От това следва, че поне едното от двете числа  $a$  и  $b$  е равно на нула, откъдето заключаваме, че и в този случай е валидно равенството  $|a| |b| = |ab|$ .

Аналогично се установява, че  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$  при  $b \neq 0$ .

В бъдеще ние често ще използваме следното неравенство:

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Доказателството може да се извърши така: от дефиницията на понятието модул имаме

$$a \leq |a|, \quad -a \leq |a|,$$

$$b \leq |b|, \quad -b \leq |b|;$$

като съберем неравенствата, които са написани едно под друго, намираме

$$a + b \leq |a| + |b|, \quad -(a + b) \leq |a| + |b|,$$

т. е. по-голямото от двете числа  $a + b$  и  $-(a + b)$  не надминава числото  $|a| + |b|$ , откъдето

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

С оглед на бъдещите нужди ще докажем още и неравенството

$$|a - b| \geq |a| - |b|.$$

За тази цел разсъждаваме така: съгласно доказаното по-горе имаме

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|.$$

т. е.

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

В заключение ще покажем, че неравенството

$$|x - a| < \varepsilon,$$

където  $\varepsilon$  е произволно положително, а  $x$  и  $a$  са произволни реални числа, е еквивалентно с неравенствата

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

И наистина, ако

$$|x - a| < \varepsilon,$$

то съгласно дефиницията на понятието модул имаме

$$\begin{aligned} x - a &< \varepsilon, \\ -(x - a) &< \varepsilon. \end{aligned}$$

От първото от тези неравенства получаваме  $x < a + \varepsilon$ , а от второто получаваме  $a - \varepsilon < x$ , т. е.  $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ .

Обратно, нека

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

В такъв случай от  $x < a + \varepsilon$  намираме  $x - a < \varepsilon$ , а от  $a - \varepsilon < x$  намираме  $-(x - a) < \varepsilon$  и сл. по-голямото от двете числа  $x - a$  и  $-(x - a)$  е по-малко от  $\varepsilon$ , което значи, че

$$|x - a| < \varepsilon.$$

**§ 5. Понятието цяло число и едно негово обобщение\***

Множеството  $N$  от естествените числа

$$1, 2, 3, \dots$$

е *най-малкото* множество от реални числа, което притежава следните три свойства:

- 1)  $N$  съдържа единицата;
- 2) ако числото  $n$  принадлежи на  $N$ , то  $n + 1$  също принадлежи на  $N$ ;
- 3) ако числото  $n$  принадлежи на  $N$  и  $n = m$ , то числото  $m$  също принадлежи на  $N$ .

Горните думи трябва да се разбират така: множеството  $N$  се съдържа във всяко множество от реални числа, което притежава изброените три свойства.

*Обобщение.* Нека  $K$  е кое да е тяло. Едно множество  $M$  от елементи на  $K$  ще наричаме негово рекурентно подмножество, ако то притежава следните три свойства:

- 1)  $M$  съдържа всички елементи, равни на единица;
- 2) ако  $n$  принадлежи на  $M$ , то  $n + 1$  също принадлежи на  $M$ ;
- 3) ако  $n$  принадлежи на  $M$  и  $n = m$ , то  $m$  също принадлежи на  $M$ .

Ясно е, че всяко тяло  $K$  притежава рекурентни подмножества. Такова е например самото множество  $K$ . За нашите цели е важно обаче, че измежду рекурентните подмножества на едно тяло винаги има едно най-малко, т. е. такова, което се съдържа във всичките останали рекурентни подмножества на това тяло. За да се убедим в това, образуваме множеството  $N$  от елементите на  $K$ , които влизат във всичките му рекурентни подмножества. Очевидно единицата влиза в  $N$ , защото съгласно условието 1) тя влиза във всичките рекурентни подмножества на  $K$ . Също е ясно, че ако  $n$  се съдържа в  $N$ , то  $n + 1$  също се съдържа в  $N$ , защото ако  $n$  се съдържа във всичките рекурентни подмножества на  $K$ , то съгласно условието 2) елементът  $n + 1$  също ще се съдържа във всичките рекурентни подмножества на  $K$ . Най-сетне, ако  $n$  принадлежи на всички рекурентни подмножества на  $K$  и  $n = m$  то съгласно условието 3) елементът  $m$  също ще принадлежи на всички рекурентни подмножества на  $K$ .

С това показахме, че подмножеството  $N$  е рекурентно. За да се убедим, че  $N$  е най-малкото рекурентно подмножество на  $K$ , избираме кое да е друго рекурентно подмножество  $M$ . Тъй като елементите на  $N$  се съдържат във всяко рекурентно подмножество на  $K$ , то те се съдържат и в подмножеството  $M$ , т. е.  $N$  наистина се съдържа в  $M$ .

\*Добре е да се остави този параграф при първо четене.

**Дефиниция.** *Елементите на минималното рекурентно подмножество  $N$  на дадено тяло  $K$  се наричат негови естествени елементи.*

С други думи, естествените елементи на едно тяло  $K$  са онези негови елементи, които се съдържат във всичките му рекурентни подмножества. Такива елементи винаги има. Такъв е например елементът 1.

Принципът за минималност на подмножеството на естествените елементи се нарича понякога принцип на математическата индукция и се формулира обикновено така: нека  $M$  е множество от естествените елементи на едно тяло  $K$ , което заедно с всеки свой елемент съдържа и равните му; ако  $M$  съдържа 1 и заедно с  $n$  винаги съдържа и  $n + 1$ , то  $M$  съвпада с множеството  $N$  на естествените елементи на  $K$ . И наистина  $M$  е съставено от естествени елементи и следователно се съдържа в  $N$ . От друга страна,  $N$  е *минималното* рекурентно подмножество, т.е. то се съдържа във всяко рекурентно подмножество и следователно се съдържа в  $M$ .

*Пример 1.* Ще докажем, че сумата на два естествени елемента на едно тяло  $K$  е естествен елемент на това тяло. И наистина нека  $M$  е множеството на онези естествени елементи  $y$  на  $K$ , за което сумата  $x + y$  е естествен елемент на  $K$  при всички естествени стойности на  $x$ . Очевидно 1 принадлежи на  $M$ , защото  $x + 1$  е естествен елемент. От друга страна, ако  $y$  принадлежи на  $M$ , то  $y + 1$  също принадлежи на  $M$ , защото елементът  $x + (y + 1) = (x + 1) + y$  е естествен. Ако елементът  $y$  принадлежи на  $M$  и  $y = z$ , то елементът  $z$  също принадлежи на  $M$ , защото  $x + y = x + z$  и следователно елементът  $x + z$  е естествен при всеки избор на естествения елемент  $x$ . Въз основа на принципа на математическата индукция заключаваме, че  $M$  съдържа всичките естествени елементи на  $K$ .

*Пример 2.* Ще докажем, че произведението на два естествени елемента на едно тяло  $K$  е естествен елемент на това тяло. И наистина нека  $x$  е произволен естествен елемент на  $K$  и нека  $M$  е множеството на онези естествени елементи  $y$  на  $K$ , за които произведението  $x \cdot y$  е естествен елемент. Очевидно  $M$  съдържа 1, защото елементът  $x \cdot 1 = x$  е естествен. От друга страна, ако  $y$  принадлежи на  $M$ , то  $y + 1$  също принадлежи  $M$ , защото елементът  $x(y + 1) = xy + x$  е естествен.

Ако елементът  $y$  принадлежи на  $M$  и  $y = z$ , то елементът  $z$  също принадлежи на  $M$ , защото  $xy = xz$  и следователно елементът  $xz$  е естествен. Въз основа на принципа на математическата индукция заключаваме, че  $M$  съдържа всички естествени елементи на  $K$ .

*Пример 3.* Ако  $x \neq 1$  и елементът  $x$  е естествен в едно тяло  $K$ , то елементът  $x - 1$  е също тъй естествен в това тяло. И наистина нека  $M$  е множество, съставено от елементи, равни на единица, и от онези естествени елементи  $x$  на тялото  $K$ , за които  $x - 1$  е също естествен елемент. Ако  $x$  е произволен елемент от  $M$ , то елементът  $x + 1$  също принадлежи на  $M$ , защото двата елемента  $x + 1$  и  $(x + 1) - 1 = x$  са естествени. Освен това, ако  $x$  принадлежи на  $M$  и  $x = y$ , то  $y$  също принадлежи на  $M$ , защото, ако елементът  $x - 1$  е естествен, то същото е вярно и за елемента  $y - 1$ , тъй като  $x - 1 = y - 1$ ; ако ли пък елементът  $x - 1$  не е естествен, то  $x = 1$ , защото  $x$  принадлежи на  $M$ , а следователно и  $y = 1$ . Като приложим принципа на математическата индукция, заключаваме, че  $M$  съдържа всичките естествени елементи на  $K$ .

Досега не предполагаме, че разглежданото тяло е наредено. Сега ние ще установим някои свойства на естествените елементи в наредените тела.



Нека  $K$  е произволно наредено тяло. В такъв случай всичките му естествени елементи  $x$  удовлетворяват неравенството  $x \geq 1$ . И наистина нека  $M$  е множеството на онези естествени елементи, за които това неравенство е изпълнено. В такъв случай  $M$  съдържа 1 и ако съдържа  $x$ , то съдържа и  $x + 1$ , защото  $x + 1 > x \geq 1$ . Освен това, ако  $x$  принадлежи на  $M$  и  $x = y$ , то  $y$  принадлежи на  $M$ , защото  $y \geq 1$ . Оттук заключаваме, че  $M$  съдържа всичките естествени елементи на  $K$ .

С оглед на нашите нужди ще докажем следното: ако  $x$  и  $n$  са два естествени елемента и  $x > n$ , то  $x - n$  е естествен елемент. И наистина нека  $M$  е множеството на онези естествени елементи  $n$ , за които твърдението е вярно. Очевидно  $M$  съдържа 1, защото, ако  $x > 1$ , то  $x \neq 1$  и следователно съгласно доказаното в пример 3 елементът  $x - 1$  е естествен. Сега ще докажем, че ако  $n$  принадлежи на  $M$ , то  $n + 1$  също принадлежи на  $M$ . И наистина нека  $x$  е естествен елемент и  $x > n + 1$ . В такъв случай ще имаме  $x - 1 > n$ . Обаче  $x \neq 1$ , защото в противен случай ще имаме  $0 > n$ , което не е възможно, защото  $n$  е естествен елемент. Това ни дава възможност да твърдим, че  $x - 1$  е естествен елемент, а следователно  $(x - 1) - n$  е също естествен елемент, защото  $n$  принадлежи на  $M$  и  $x - 1 > n$ . От друга страна,  $x - (n + 1) = (x - 1) - n$  и следователно  $x - (n + 1)$  е също тъй естествен елемент. По такъв начин ние доказахме, че  $n + 1$  принадлежи на  $M$ . Най-сетне нека  $n$  принадлежи на  $M$  и  $n = m$ . В такъв случай  $m$  също принадлежи на  $M$ , защото  $x - n = x - m$ . От това обаче следва въз основа на принципа на математическата индукция, че множеството  $M$  съдържа всички естествени елементи, с което интересувашото ни твърдение е доказано.

*Следствие.* Неравенствата

$$0 < x - n < 1$$

не могат да се удовлетворят при никой избор на естествени елементи  $x$  и  $n$ . И наистина от неравенството  $0 < x - n$  следва, че елементът  $x - n$  е естествен и следователно  $x - n \geq 1$ .

**Дефиниция.** Един елемент  $p$  на едно тяло се нарича цял, когато той може да се представи като разлика на два естествени елемента на това тяло.

Не е трудно да се види, че сумата, разликата и произведението на два цели елемента на едно тяло е също цял елемент на тялото. Това може да се установи, като вземе под внимание, че от равенствата

$$p_1 = n_1 - m_1,$$

$$p_2 = n_2 - m_2$$

следват равенствата

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= (n_1 + n_2) - (m_1 + m_2), \\ p_1 - p_2 &= (n_1 + m_2) - (m_1 + n_2), \\ p_1 p_2 &= (n_1 n_2 + m_1 m_2) - (n_1 m_2 + n_2 m_1). \end{aligned}$$

Всеки естествен елемент  $m$  е цял, както това се вижда от равенството  $m = (m + 1) - 1$ . Специално, ако тялото е наредено, то неговите естествени елементи са и положителни (ние дори видяхме, че те не са по-малки от 1). Сега ще установим, че обратното е също вярно, т. е. всеки цял и положителен елемент на едно наредено тяло е естествен. И наистина нека  $m$  е цял и положителен елемент. Тъй като  $m$  е цял елемент, ние можем да го представим във вида  $m = x - n$ , където  $x$  и  $n$  са естествени елементи. От друга страна, елементът  $m$  е положителен и следователно  $x > n$ . По такъв начин ние можем да приложим доказаното по-горе, според което  $x - n$  е естествен елемент.

От изложеното се вижда, че няма цял елемент  $p$ , който да удовлетворява неравенствата

$$0 < p < 1.$$

Ние ще използваме впоследствие тази бележка.

**Дефиниция.** Един елемент на едно тяло се нарича рационален, когато той може да се представи като отношение на два цели елемента на тялото. Елементите, които не са рационални, се наричат ирационални.

Лесно е да се види, че сумата, разликата, произведението и частното на два рационални елемента на едно тяло е също тъй рационален елемент на това тяло.

## § 6. Принцип за непрекъснатост на множеството на реалните числа

Едно множество  $M$  от числа се нарича ограничено отгоре, когато съществува число  $l$ , което удовлетворява неравенството  $x \leq l$  при всеки избор на  $x$  от  $M$ . Такова число  $l$  се нарича горна граница на едно множество  $M$ . И така едно число  $l$  се нарича горна граница на едно множество  $M$ , когато при всяко  $x$  от  $M$  е изпълнено неравенството  $x \leq l$ . Аналогично се дефинира понятието долна граница на едно множество от числа.\*

\*По-точно едно число  $m$  се нарича долна граница на на едно множество  $M$  от числа, ако при всяко  $x$  от  $M$  е изпълнено неравенството  $m \leq x$ .

Като пример нека разгледаме множеството на дробите

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Това множество е ограничено отгоре (числото 2 е например една негова горна граница). Това множество е ограничено и отдолу (числото  $-1$  е една негова долна граница). Едно множество от числа ще наричаме ограничено, когато то е ограничено и отгоре, и отдолу.

Разбира се, ако едно множество е ограничено отгоре, то притежава безбройно много горни граници, защото всяко число, което е по-голямо от една негова горна граница, е също тъй негова горна граница. *Най-малката от горните граници на едно ограничено отгоре множество от числа се нарича негова точна горна граница.* Аналогично се дефинира и понятието точна долна граница на едно ограничено отдолу множество от числа.\*

Едно ограничено отдолу множество от числа съвсем не е задължено да съдържа най-малък член. Така множеството на съществено положителните числа (т. е. множеството на числата, които са по-големи от нула; нулата не се причислява към това множество) е ограничено отдолу. Нулата например е една негова долна граница. В това множество обаче няма най-малък член (към разглежданото множество са причислени произволно близки до нулата числа, но числото нула не е причислено). Разбира се, аналогична забележка се отнася и за ограничени отгоре множества от числа.

**Принцип за непрекъснатост.** *Всяко ограничено отгоре множество от реални числа притежава точна горна граница.*

От принципа за непрекъснатост следва, разбира се, че всяко ограничено отдолу множество от реални числа притежава точна долна граница. И наистина нека множеството  $M$  на числата  $x$  е ограничено отдолу. В такъв случай множеството  $N$  на числата  $-x$  е ограничено отгоре. Нека  $l$  е точната горна граница на множеството  $N$ . Не е трудно да се убедим, че в такъв случай  $-l$  е точната долна граница на множеството  $M$ . Подробностите на доказателството ще предоставим на читателя.

Принципът за непрекъснатост съществено отличава тялото на реалните числа от тялото на рационалните числа. Ще дадем тук един пример, от който ще се види, че принципът за непрекъснатост не е валиден в тялото на рационалните числа. Този пример е предназначен, разбира се, за читатели, които са запознати поне с основните неща от теорията на рационалните числа.

Разглеждаме множеството  $M$  на онези *рационални* неотрицателни числа  $x$ , които удовлетворяват неравенството  $x^2 \leq 2$ . Множеството  $M$  е ограниче-

\*Точна долна граница на едно множество от числа се нарича най-голямата му долна граница.

но отгоре, защото никой негов член не надминава например числото 2. И наистина, ако допуснем, че при някое  $x$  от  $M$  имаме  $x > 2$ , то ще имаме  $x^2 > 4$ , което не е вярно. Въпреки това ние ще покажем, че не съществува рационално число, което да е точна горна граница на множеството  $M$ . Доказателството ще извършим от противното. Нека рационалното число  $l$  да е точната горна граница на множеството  $M$ . Не е трудно да се убедим, че не можем да имаме  $l^2 < 2$ . И наистина в противен случай неотрицателното рационално число

$$r = \frac{4 + 3l}{3 + 2l}$$

удовлетворява неравенството

$$2 - r^2 = 2 - \left(\frac{4 + 3l}{3 + 2l}\right)^2 = \frac{2 - l^2}{(3 + 2l)^2} > 0$$

и следователно принадлежи на  $M$ . От друга страна,

$$r - l = \frac{4 + 3l}{3 + 2l} - l = \frac{2(2 - l^2)}{3 + 2l} > 0, \text{ т. е. } r > l,$$

което противоречи на предположението, че  $l$  е една горна граница на  $M$ .

Също така не е трудно да се види, че не можем да имаме  $l^2 > 2$ . Да допуснем противното. Числото

$$m = \frac{4 + 3l}{3 + 2l}$$

е също една горна граница на множеството  $M$ . За да се убедим в това, разглеждаме неравенствата

$$\begin{aligned} m - x &= \frac{4 + 3l}{3 + 2l} - x = \left(\frac{4 + 3l}{3 + 2l} - \frac{4 + 3x}{3 + 2x}\right) + \left(\frac{4 + 3x}{3 + 2x} - x\right) \\ &= \frac{l - x}{(3 + 2l)(3 + 2x)} + \frac{2(2 - x^2)}{3 + 2x} \geq 0, \end{aligned}$$

които са валидни при всички стойности на  $x$  от  $M$ . Така конструираната горна граница  $m$  е обаче по-малка от  $l$ , защото

$$l - m = l - \frac{4 + 3l}{3 + 2l} = \frac{2(l^2 - 2)}{3 + 2l} > 0,$$

нещо, което противоречи на предположението, че  $l$  е най-малката горна граница на  $M$ . И така от изложеното досега е ясно, че

$$(1) \quad l^2 = 2.$$

Нашата цел ще бъде постигната, ако успеем да покажем, че няма рационално число  $l$ , чийто квадрат е равен на 2. Ние ще извършим доказателството от противното. Нека  $p$  и  $q$  да са две цели числа, за които да имаме

$$l = \frac{p}{q}, \quad q \neq 0.$$

Без да ограничаваме общността, ние можем да приемем, че дробта  $\frac{p}{q}$  е *несъкратима*. От равенството  $l^2 = 2$  получаваме

$$p^2 = 2q^2.$$

Това равенство ни учи, че  $p^2$ , а следователно и  $p$  е четно число. И така ние можем да пишем

$$p = 2r,$$

където  $r$  е цяло число. Оттук получаваме

$$4r^2 = 2q^2, \quad \text{т. е. } 2r^2 = q^2.$$

Последното равенство ни учи, че числото  $q^2$ , а следователно и числото  $q$  е четно. И така двете числа  $p$  и  $q$  са четни, което противоречи на допускането, че дробта  $\frac{p}{q}$  е *несъкратима*.

*Обобщение.* Наредено тяло, в което е валиден принципът за непрекъснатост, се нарича *непрекъснато наредено тяло*.

От направените по-горе разсъждения се вижда, че ако в някое наредено тяло е валиден принципът за непрекъснатост, то в това тяло сигурно има елементи, които не са рационални, т. е. които не могат да се представят като частно на два цели елемента. Такива елементи ще наричаме *иррационални*. Такъв е например елементът  $l$ , който удовлетворява условието (1). Както вече споменахме, от разсъжденията, които ние направихме, се вижда, че такъв елемент има във всяко непрекъснато наредено тяло.

Досега ние се ползувахме (макар и привидно) от познанията, които читателят има за реалните числа. По-нататък с изключение на следващите два параграфа това вече няма да бъде нужно. От този момент ние ще застанем на следната основа: ще си мислим едно произволно наредено непрекъснато тяло (от каквото естество и да бъдат неговите елементи); елементите на това тяло ние ще наричаме *реални числа*. По-нататък ще градим всичко, като изхождаме от едно такова тяло (впрочем, разбира се, не е необходимо да се обвързваме с никое конкретно тяло). След като застанем на такава основа, понятията като нула, единица, положително число и пр. вече са дефинирани

за нас, а като вземем под внимание § 5, ще бъдат дефинирани и понятията цяло число, рационално число и пр.

Тук обаче се налага да поставим следния принципен въпрос: съществуват ли въобще непрекъснати наредени тела? Нека припомним, че тялото на рационалните числа не е непрекъснато. В следващите два параграфа ще покажем два примера на непрекъснати наредени тела, като изхождаме от предположението, че теорията на рационалните тела е изградена по някакъв друг път. Елементите на тези две тела ще изглеждат твърде различни. Ние обаче и в двата случая ще ги наричаме реални числа съгласно дадената по-горе дефиниция. Нека най-сетне изрично подчертаем, че следващите два параграфа не трябва да се разглеждат като част от тази книга (и следователно те могат въобще да не се четат). Тази книга си поставя за задача само да покаже какво следва от предположението, че съществува поне едно непрекъснато наредено тяло. За да се направи това, не е необходимо предварително да бъде изградена теорията на рационалните числа.

### **§ 7. Съществуване на непрекъснати наредени тела като следствие от съществуването на тялото на рационалните числа (метода на Г. Кантор)\***

В този параграф ще предполагаме, че теорията на рационалните числа е изградена независимо от това, което ние излагахме досега. Методата, с която ще си служим, произхожда от Кантор (Cantor).

Казваме, че е дадена една безкрайна редица от рационални числа

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots,$$

ако на всяко цяло положително число  $n$  е съпоставено по едно рационално число  $a_n$ . Ще казваме, че редицата (1) е фундаментална, ако при всеки избор на положителното рационално число  $\varepsilon$  е изпълнено неравенството

$$(2) \quad |a_p - a_q| < \varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на  $p$  и  $q$ . Фундаментални редици съществуват. Такава е например редицата

$$r, r, r, \dots,$$

каквото и да бъде рационалното число  $r$ .

---

\*Добре е този параграф да се изостави при първо четене.

Всяка фундаментална редица е ограничена. И наистина нека редицата (1) е фундаментална и нека  $\varepsilon$  е едно положително рационално число. Неравенството (2) ни дава

$$a_q - \varepsilon < a_p < a_q + \varepsilon.$$

Да фиксираме едно достатъчно голямо цяло число  $q$  по такъв начин, че при  $p > q$  да е изпълнено условието (2). В такъв случай най-голямото от числата

$$a_1, a_2, \dots, a_q, a_q + \varepsilon$$

е една горна граница на редицата (1), а най-малкото от числата

$$a_1, a_2, \dots, a_q, a_q - \varepsilon$$

е една нейна долна граница. Нека читателят сам докаже това.

Казваме, че две редици

$$\begin{aligned} a_1, a_2, a_3, \dots \\ b_1, b_2, b_3, \dots \end{aligned}$$

са конфинални помежду си, ако при всеки избор на положителното рационално число  $\varepsilon$  е изпълнено неравенството

$$|b_n - a_n| < \varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на  $n$ .

Не е трудно да се види, че ако едната от две конфинални помежду си редици е фундаментална, то и другата е фундаментална. Читателят лесно сам ще докаже това.

Множеството на *всичките* редици, които са конфинални с дадена фундаментална редица, се нарича *Канторов клас*, определен от тази редица. Лесно се вижда, че всичките редици от един Канторов клас са конфинални помежду си.

*Равенство на два Канторови класа.* Нека  $\alpha$  и  $\beta$  са два Канторови класа. Ще пишем  $\alpha = \beta$ , ако поне една редица от  $\alpha$  е конфинална с някоя редица от  $\beta$ . Не е трудно да се види, че в такъв случай  $\alpha$  и  $\beta$  са съставени от едни и същи редици. И наистина нека класът  $\alpha$  е определен от редицата

$$(3) \quad a_1, a_2, a_3, \dots,$$

а класът  $\beta$  е определен от редицата

$$(4) \quad b_1, b_2, b_3, \dots$$

По-нататък нека редицата

$$a'_1, a'_2, a'_3, \dots$$

от  $\alpha$  е конфинална с редицата

$$b'_1, b'_2, b'_3, \dots$$

от  $\beta$  и най-сетне нека

$$(5) \quad a''_1, a''_2, a''_3, \dots$$

е произволна редица от  $\alpha$  и

$$(6) \quad b''_1, b''_2, b''_3, \dots$$

е произволна редица от  $\beta$ . В такъв случай при всеки избор на положителното число  $\varepsilon$  при достатъчно големи стойности на  $n$  ще имаме

$$\begin{aligned} |a''_n - a_n| &< \frac{\varepsilon}{4} & |b''_n - b_n| &< \frac{\varepsilon}{4} \\ |a'_n - a_n| &< \frac{\varepsilon}{4} & |b'_n - b_n| &< \frac{\varepsilon}{4} \\ |a'_n - b'_n| &< \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

и следователно

$$\begin{aligned} |a''_n - b_n| &\leq |a''_n - a_n| + |a_n - a'_n| + |a'_n - b'_n| + |b'_n - b_n| < \varepsilon \\ |b''_n - a_n| &\leq |b''_n - b_n| + |b_n - b'_n| + |b'_n - a'_n| + |a'_n - a_n| < \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. редицата (5) принадлежи на  $\beta$ , защото е конфинална с редицата (4), а редицата (6) принадлежи на  $\alpha$ , защото е конфинална с редицата (3).

*Събиране.* Нека  $\alpha$  и  $\beta$  са два Канторови класа. Избираме една редица

$$(7) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

от  $\alpha$  и една редица

$$(8) \quad b_1, b_2, b_3, \dots$$

от  $\beta$ . Образоваме редицата

$$(9) \quad a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots$$



Не е трудно да се види, че тази редица е фундаментална. И наистина каквото и да бъде положителното рационално число  $\varepsilon$ , ще имаме

$$|a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |b_p - b_q| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при достатъчно големи стойности на  $p$  и  $q$  и следователно

$$|(a_p + b_p) - (a_q + b_q)| \leq |a_p - a_q| + |b_p - b_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Означаваме с  $\gamma$  Канторовия клас, който съдържа редицата (9). Така дефинираният клас  $\gamma$  не зависи от начина, по който са избрани редиците (7) и (8) съответно в  $\alpha$  и  $\beta$ . И наистина нека

$$a'_1, a'_2, a'_3, \dots$$

е коя да е редица от  $\alpha$  и

$$b'_1, b'_2, b'_3, \dots$$

е коя да е редица от  $\beta$ . Разглеждаме редицата

$$(10) \quad a'_1 + b'_1, a'_2 + b'_2, a'_3 + b'_3, \dots$$

и означаваме с  $\gamma'$  Канторовия клас, който съдържа тази редица. Избираме едно произволно положително рационално число  $\varepsilon$ . В такъв случай при достатъчно големи стойности на  $n$  ще имаме

$$\begin{aligned} |a_n - a'_n| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ |b_n - b'_n| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

и следователно

$$|(a_n + b_n) - (a'_n + b'_n)| \leq |a_n - a'_n| + |b_n - b'_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

което показва, че двете редици (9) и (10) са конфинални помежду си, откъдето следва, както знаем, че двата класа  $\gamma$  и  $\gamma'$  са съставени от едни и същи редици.

По дефиниция полагаме

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Като изхождаме от тази дефиниция на понятието сума, не е трудно да се убедим, че Канторовият клас  $\xi$ , който е съставен от редиците, конфинални с редицата

$$0, 0, 0, \dots$$

удовлетворява уравнението

$$\alpha + \xi = \alpha$$

при всеки избор на Канторовия клас  $\alpha$ . Съгласно с общите дефиниции на § 1 ние ще означаваме този клас със символа 0 и ще го наричаме нулев Канторов клас или по-кратко — нула. Очевидно една редица

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$$

принадлежи на нулевия Канторов клас тогава и само тогава, когато при всеки избор на положителното число  $\varepsilon$  е изпълнено неравенството

$$|\xi_n| < \varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на  $n$ .

*Умножение.* Нека  $\alpha$  и  $\beta$  са два Канторови класа. Избираме една редица

$$(11) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

от  $\alpha$  и една редица

$$(12) \quad b_1, b_2, b_3, \dots$$

от  $\beta$ . Редицата

$$(13) \quad a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots$$

е фундаментална (нека читателят сам докаже това). Означаваме с  $\gamma$  Канторовия клас от редиците, които са кофинални с редицата (13). Този клас не зависи от спомагателните редици (11) и (12). Доказателството предоставяме на читателя. По дефиниция полагаме

$$\gamma = \alpha\beta.$$

Относно така дефинираните понятия равенство, събиране и умножение множеството на всичките Канторови класове представлява едно комутативно тяло. Проверката, която не е свързана с принципиални трудности, но изисква търпение и хартия, ще предоставим на трудолюбивия читател.

*Наредба на Канторовите класове.* Нека  $\alpha$  е един Канторов клас. Ще наричаме този клас положителен, ако поне за една негова редица

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

може да се намери такова положително рационално число  $\varepsilon_0$ , че да имаме

$$(14) \quad a_n \geq \varepsilon_0$$

за всички достатъчно големи стойности на  $n$ . В такъв случай и при всеки друг избор на редицата

$$a'_1, a'_2, a'_3, \dots$$

от  $\alpha$  съществува положително число  $\eta$ , за което е изпълнено неравенството

$$a'_n \geq \eta$$

при всички достатъчно големи стойности на  $n$ . За да се убедим в това, достатъчно е да положим  $\eta = \frac{\varepsilon_0}{2}$ . И наистина при достатъчно големи стойности на  $n$  имаме

$$|a_n - a'_n| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

и следователно

$$a'_n = a_n + (a'_n - a_n) \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Не е трудно да се покаже, че множеството от така дефинираните положителни класове удовлетворява условията 8, 9, 10 и 11 на § 3. Нека читателят сам провери това.

Ще покажем, че за да принадлежи една редица

$$(15) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

към неотрицателен клас  $\alpha$  (т.е. към клас, който е или положителен, или нула), е необходимо и достатъчно при всеки избор на положителното число  $\varepsilon$  да бъде изпълнено неравенството

$$(16) \quad a_n > -\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на  $n$ . И наистина, ако редицата (15) принадлежи към положителен клас, то за достатъчно големи стойности на  $n$  е изпълнено дори неравенството (14), където  $\varepsilon_0$  е избрано по подходящ начин; ако пък (15) принадлежи към нулевия клас, то при всеки избор на положителното рационално число  $\varepsilon$  е изпълнено неравенството  $|a_n| < \varepsilon$ , а още повече е изпълнено и условието (16) за достатъчно големи стойности на  $n$ . И така интересуващото ни условие е необходимо, за да принадлежи редицата (15) към неотрицателен клас. Ще покажем, че условието е достатъчно. За тази цел да допуснем, че редицата (15) не принадлежи към положителен

клас. Това значи, че при всеки избор на положителното рационално число  $\varepsilon$  неравенството

$$a_m \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

се нарушава за безбройно много стойности на  $m$ . Да означим тези стойности с

$$m_1, m_2, m_3, \dots,$$

т. е.

$$a_{m_k} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } k = 1, 2, \dots$$

От друга страна, ако  $n$  и  $k$  са достатъчно големи, то

$$|a_n - a_{m_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и следователно

$$a_n = a_{m_k} + (a_n - a_{m_k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

което заедно с (16) дава

$$|a_n| < \varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на  $n$ , т. е. при тези условия редицата (15) принадлежи към нулевия Канторов клас. С това достатъчността е установена.

От доказаното се вижда следното. Нека  $\alpha$  и  $\beta$  са два Канторови класа; нека

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е една редица от  $\alpha$  и

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

е една редица от  $\beta$ . За да имаме

$$\alpha \leq \beta,$$

т. е. за да бъде класът  $\beta - \alpha$  неотрицателен, е необходимо и достатъчно при всеки избор на положителното рационално число  $\varepsilon$  да имаме

$$b_n - a_n > -\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на  $n$ . Доказателството предоставяме и този път на читателя.

След всичко изложено дотук ще покажем, че в нареденото тяло на Канторовите класове е валиден принципът за непрекъснатост. За тази цел разглеждаме едно ограничено отгоре множество  $M$  от Канторови класове  $\xi$  и означаваме с  $\alpha$  една негова горна граница.

Ще казваме, че едно рационално число  $q$  е дясно, ако при всеки избор на положителното рационално число  $\varepsilon$  и при всеки избор на редицата

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

която принадлежи на някой клас от  $M$ , е изпълнено неравенството

$$x_n \leq q + \varepsilon$$

за всички достатъчно големи стойности на  $n$ . Рационално число, което не е дясно, ще наричаме ляво.

Ще покажем, че съществуват десни числа. И наистина нека  $q$  е една горна граница на една редица

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

от  $\alpha$ , нека  $\xi$  е един Канторов клас от  $M$  и нека

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

е една редица от  $\xi$ . В такъв случай имаме  $\xi \leq \alpha$  и следователно при всеки избор на положителното рационално число  $\varepsilon$  ще имаме

$$a_n - x_n > -\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на  $n$ . Оттук получаваме

$$x_n < q + \varepsilon,$$

т. е. числото  $q$  е дясно.

Ще покажем, че съществуват леви числа. И наистина нека

$$(17) \quad x_1, x_2, x_3, \dots$$

е редица от някой клас  $\xi$  от  $M$ . Означаваме с  $r$  една долна граница на редицата (17). В такъв случай при всички стойности на  $n$  имаме

$$r \leq x_n$$

и следователно, ако  $p < r$ , то неравенството

$$x_n \leq p + \varepsilon$$

сигурно е нарушено при

$$0 < \varepsilon < r - p,$$

т. е. числото  $p$  не е дясно. С това е показано съществуването на леви числа.

С оглед на това, което ще следва, ще отбележим, че левите числа са винаги по-малки от десните. И наистина от дефиницията на понятието дясно число се вижда веднага, че число, което е по-голямо от едно дясно число, е също тъй дясно.

Нека  $q_1$  е едно дясно число и  $p_1$  е едно ляво число. Разглеждаме числото  $\frac{p_1 + q_1}{2}$ . Ако това число е дясно, полагаме

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1, \\ q_2 &= \frac{p_1 + q_1}{2}; \end{aligned}$$

ако пък е ляво, полагаме

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{p_1 + q_1}{2}, \\ q_2 &= q_1. \end{aligned}$$

И в двата случая числото  $p_2$  е ляво, числото  $q_2$  е дясно и освен това са изпълнени условията

$$\begin{aligned} p_1 &\leq p_2 < q_2 \leq q_1, \\ q_2 - p_2 &= \frac{q_1 - p_1}{2}. \end{aligned}$$

Като използваме числото  $\frac{p_2 + q_2}{2}$  и приложим още веднъж горните разсъждения, добиваме възможност да дефинираме едно ляво число  $p_3$  и едно дясно число  $q_3$  по такъв начин, че да имаме

$$\begin{aligned} p_2 &\leq p_3 < q_3 \leq q_2, \\ q_3 - p_3 &= \frac{q_2 - p_2}{2^n}. \end{aligned}$$

Този процес продължаваме неограничено. По този начин получаваме редица от леви числа

$$(18) \quad p_1, p_2, p_3, \dots$$

и редица от десни числа

$$(19) \quad q_1, q_2, q_3, \dots,$$

които удовлетворяват условията

$$\begin{aligned} p_n &\leq p_{n+1} < q_{n+1} \leq q_n, \\ q_{n+1} - p_{n+1} &= \frac{q_n - p_n}{2} = \frac{q_1 - p_1}{2^n}. \end{aligned}$$

Ще покажем, че редицата (18) е фундаментална. И наистина при всички цели положителни стойности на  $n$  и  $m$  имаме

$$\begin{aligned} 0 &\leq p_{n+m} - p_n \\ &= (p_{n+m} - p_{n+m-1}) + (p_{n+m-1} - p_{n+m-2}) + \dots + (p_{n+1} - p_n) \\ &\leq (q_{n+m-1} - q_{n+m-1}) + (q_{n+m-2} - p_{n+m-2}) + \dots + (q_n - p_n) \\ &= \frac{q_1 - p_1}{2^{n+m-2}} + \frac{q_1 - p_1}{2^{n+m-3}} + \dots + \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}} \left( \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \dots + 1 \right) = \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^m}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{q_1 - p_1}{2^{n-2}}, \end{aligned}$$

т. е. както и да избираме рационалното число  $\varepsilon$ , ще имаме при всички достатъчно големи стойности на  $n$  неравенството

$$0 \leq p_{n+m} - p_n < \varepsilon,$$

каквото и да бъде цялото положително число  $m$ . И така редицата (18) е наистина фундаментална.

Да означим с  $\delta$  Канторовия клас на редиците, които са конфинални с редицата (18). Този клас съдържа и редицата (19), защото

$$q_n - p_n = \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}}$$

и следователно редицата (19) е конфинална с редицата (18).

Ще покажем, че Канторовият клас  $\delta$  е една горна граница на множеството  $M$ . И наистина нека  $\xi$  е един клас от  $M$  и

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

е една редица от  $\xi$ . Избираме едно положително рационално число  $\varepsilon$ . Като вземем под внимание, че редицата (19) е фундаментална (тъй като тя е конфинална с една фундаментална редица), получаваме при всички достатъчно големи стойности на  $n$  и  $m$  неравенството

$$(20) \quad |q_n - q_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Фиксираме  $n$ . В такъв случай при достатъчно големи стойности на  $m$  ще имаме

$$(21) \quad x_m \leq q_n + \frac{\varepsilon}{2},$$

защото числото  $q_n$  е дясно. От така получените неравенства (20) и (21) получаваме

$$q_m - x_m = (q_n - x_m) + (q_m - q_n) \geq -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = -\varepsilon$$

при всички достатъчно големи стойности на  $m$ , т. е.

$$\xi \leq \delta,$$

с което е показано, че  $\delta$  е една горна граница на  $M$ .

Ще покажем, че  $\delta$  е *точната* горна граница на множеството  $M$ , т. е. най-малката от всичките му горни граници. И наистина нека  $\gamma$  е един Канторов клас, за който  $\gamma < \delta$ , и нека

$$(22) \quad y_1, y_2, y_3, \dots$$

е една редица от  $\gamma$ . В такъв случай съществува такова положително число  $\varepsilon_1$ , че при всички достатъчно големи стойности на  $n$  да имаме

$$(23) \quad p_n - y_n \geq \varepsilon_1.$$

Фиксираме едно толкова голямо цяло число  $n$ , че при достатъчно големи стойности на  $m$  да имаме

$$|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Това е възможно, защото редицата (22) е фундаментална. В такъв случай ще имаме

$$(24) \quad y_n - y_m > -\frac{\varepsilon_1}{2}.$$

От друга страна, числото  $p_n$  е ляво, т. е. при някое положително число  $\varepsilon_2$  имаме поне един клас  $\xi$  от  $M$  който съдържа такава редица

$$(25) \quad x_1, x_2, x_3, \dots,$$

че неравенството

$$x_s \leq p_n + \varepsilon_2$$



се нарушава за безбройно много стойности на  $s$ , т. е. съществува неограничена редица от цели положителни числа

$$s_1, s_2, s_3, \dots,$$

за които

$$(26) \quad x_{s_k} > p_n + \varepsilon_2 \text{ при } k = 1, 2, 3, \dots$$

Да вземем сега под внимание, че редицата (25) е фундаментална. Това дава възможност да твърдим, че при всички достатъчно големи стойности на  $m$  и  $k$  имаме

$$|x_m - x_{s_k}| < \frac{\varepsilon_2}{2},$$

следователно

$$(27) \quad x_m - x_{s_k} > -\frac{\varepsilon_2}{2}.$$

Събираме почленно неравенствата (23), (24), (26) и (27). Това ни дава

$$x_m - y_m > \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2}$$

при всички достатъчно големи стойности на  $m$ , т. е.  $\xi > \gamma$ , което показва, че  $\gamma$  не е горна граница на  $M$ . И така  $\delta$  е най-малката горна граница на  $M$ . По такъв начин установихме, че в тялото на Канторовите класове е валиден принципът за непрекъснатост.

И така, като използвахме теорията на рационалните числа, ние можахме да дадем пример на едно непрекъснато наредено тяло. В съгласие с това, което казахме в предния параграф, занаяпред под реални числа бихме могли да разбираме Канторовите класове.

### **§ 8. Съществуване на непрекъснати наредени тела като следствие от съществуването на тялото на рационалните числа (метода на Р. Дедекинд)\***

В този параграф, както и в предшестващия, ще предполагаме, че теорията на рационалните числа е изградена независимо от това, което излагахме досега. Методата, с която ще си служим този път, произхожда от Дедекинд (Dedekind).

---

\*Добре е този параграф да се изостави при първо четене.

**Дефиниция.** Сечение ще наричаме всяка система от две множества  $A$  и  $B$  от рационални числа, които има следните свойства:

1. Никое от двете множества  $A$  и  $B$  не е празно (т. е. във всяко едно от тях има рационални числа).
2. Никое рационално число не принадлежи едновременно на двете множества  $A$  и  $B$ .
3. Всяко рационално число, с евентуално изключение само на едно, е причислено към едното от двете множества  $A$  и  $B$ .
4. В множеството  $A$  няма най-голямо рационално число, а в множеството  $B$  няма най-малко рационално число.
5. Ако  $a$  принадлежи на  $A$  и  $a_1 \leq a$ , то  $a_1$  принадлежи на  $A$ ; ако  $b$  принадлежи на  $B$  и  $b \leq b_1$ , то  $b_1$  принадлежи на  $B$ .

Двете множества  $A$  и  $B$ , които образуват сечението, ще наричаме класове; множеството  $A$  ще наричаме ляв клас, а множеството  $B$  — десен клас. Сечението, чийто ляв клас е  $A$ , а десен клас е  $B$ , ще означаваме със символа  $(A, B)$ .

*Пример 1.* Означаваме с  $A$  множеството на числата, които са съществено по-малки от 2, а с  $B$  — множеството на числата, които са съществено по-големи от 2. Не е трудно да се убедим, че двете множества  $A$  и  $B$  удовлетворяват изброените по-горе условия, т. е. образуват сечение.

*Пример 2.* Означаваме с  $A$  множеството, съставено от всичките отрицателни рационални числа и от онези неотрицателни рационални числа, чийто квадрат не надминава 2. С  $B$  означаваме множеството на останалите рационални числа. Не е трудно да се убедим, че така дефинираните множества  $A$  и  $B$  образуват сечение.

В първия от двата примера числото 2 (и само това рационално число) не е причислено към никой от класовете. Напротив, във втория пример всяко рационално число влиза в някой от класовете.

Полезно е да отбележим, че ако  $(A, B)$  е едно сечение, то, както и да избираме положителното рационално число  $\varepsilon$ , винаги може да се намери число  $a$  от  $A$  и число  $b$  от  $B$  по такъв начин, че да имаме  $b - a < \varepsilon$ . И наистина нека  $a_1$  е число от  $A$  и  $b_1$  е число от  $B$ . Разглеждаме двете числа

$$a_1 + \frac{b_1 - a_1}{3} \text{ и } a_1 + 2\frac{b_1 - a_1}{3}.$$

От тези две числа поне едното се съдържа в някое от двете множества  $A$  и  $B$ . Означаваме това число с  $p$ . Очевидно имаме

$$p - a_1 \leq \frac{2}{3}(b_1 - a_1),$$

$$b_1 - p \leq \frac{2}{3}(b_1 - a_1).$$

Ако  $p$  принадлежи на  $A$ , полагаме  $a_2 = p$  и  $b_2 = b_1$ . Ако пък  $p$  принадлежи на  $B$ , полагаме  $a_2 = a_1$  и  $b_2 = p$ . По такъв начин получаваме число  $a_2$  от  $A$  и число  $b_2$  от  $B$ , за които е изпълнено неравенството

$$b_2 - a_2 \leq \frac{2}{3}(b_1 - a_1).$$

След като сме дефинирали  $a_2$  и  $b_2$ , по същия начин намираме число  $a_3$  от  $A$  и число  $b_3$  от  $B$ , за които

$$b_3 - a_3 \leq \frac{2}{3}(b_2 - a_2)$$

и следователно

$$b_3 - a_3 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 (b_1 - a_1).$$

Като повторим  $n$  пъти тези разсъждения, получаваме число  $a_n$  от  $A$  и число  $b_n$  от  $B$ , които удовлетворяват условието

$$b_n - a_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (b_1 - a_1).$$

След всичко извършено, каквото и да бъде положителното рационално число  $\varepsilon$ , достатъчно е да изберем  $n$  толкова голямо, че да имаме

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (b_1 - a_1) < \varepsilon,$$

за да имаме и

$$b_n - a_n < \varepsilon.$$

За тази цел означаваме с  $r$  и  $s$  две цели положителни числа, за които

$$\frac{r}{s} = \frac{b_1 - a_1}{\varepsilon},$$

и полагаме например

$$n = 2r.$$

В такъв случай

$$\frac{n}{2} \geq \frac{b_1 - a_1}{\varepsilon}$$

и следователно

$$\frac{b_1 - a_1}{\varepsilon} < 1 + \frac{n-1}{2} \leq \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

което ни дава

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (b_1 - a_1) < \varepsilon.$$

**Равенство на сечения.** Две сечения се наричат равни, ако левите им класове са съставени от едни и същи рационални числа.

*Събиране.* Нека са дадени две сечения  $(A, B)$  и  $(C, D)$ . Означаваме с  $P$  множеството на онези числа  $p$ , които могат да се представят във вида  $p = a + c$ , където  $a$  принадлежи на  $A$ , а  $c$  принадлежи на  $C$ . След това дефинираме един клас  $Q$  по следния начин: едно число  $q$  причисляваме към  $Q$  тогава и само тогава, когато то е по-голямо от някое число, което не принадлежи на  $P$ . Не е трудно да се убедим, че множествата  $P$  и  $Q$  образуват сечение. Проверката предоставяме на читателя. Сечението  $(P, Q)$  се нарича сума на двете сечения  $(A, B)$  и  $(C, D)$ , което символично се записва така:

$$(P, Q) = (A, B) + (C, D).$$

*Умножение.* Нека са дадени две сечения  $(A, B)$  и  $(C, D)$ . Означаваме с  $P$  множеството на онези числа  $p$ , за всяко от които могат да се намерят числа  $a, b, c$  и  $d$  съответно от  $A, B, C$  и  $D$  по такъв начин, че ако  $t$  и  $n$  са две произволни числа, които удовлетворяват неравенствата  $a \leq t \leq b$ ,  $c \leq n \leq d$ , то  $p < tn$ . След това дефинираме едно множество  $Q$  по следния начин: едно число  $q$  се причислява към  $Q$  тогава и само тогава, когато то е по-голямо от някое число, което не влиза в  $P$ . Не е трудно да се провери, че двете множества  $P$  и  $Q$  образуват сечение. Тази проверка предоставяме на читателя. Сечението  $(P, Q)$  се нарича произведение на двете сечения  $(A, B)$  и  $(C, D)$ . Символично това се записва така:

$$(P, Q) = (A, B) \cdot (C, D).$$

*Относно така дефинираните понятия равенство, събиране и умножение сеченията образуват тяло.* Ние и този път ще предоставим проверката на трудолюбивия читател.

*Наредба на сеченията.* Едно сечение  $(A, B)$  ще наричаме положително, когато множеството  $A$  съдържа поне едно положително число. Нека читателят сам провери, че множеството от положителните сечения удовлетворява условията 8, 9, 10 и 11 на § 3. По такъв начин получаваме една наредба в тялото на сеченията. Не е трудно да се види, че

$$(A, B) < (C, D)$$

тогава и само тогава, когато съществува рационално число  $\xi$ , което принадлежи както на  $B$ , така и на  $C$ . И наистина нека положим

$$(P, Q) = (C, D) - (A, B).$$

Ще отбележим, че понятието разлика на две сечения има смисъл за нас, защото множеството на всичките сечения е тяло. Да допуснем, че сечението  $(P, Q)$  е положително. В такъв случай множеството  $P$  ще съдържа някое положително число  $p$ . Избираме едно число  $a$  от  $A$  и едно число  $b$  от  $B$  по такъв начин, че да имаме  $b - a < p$ . Това е възможно, както вече знаем, защото числото  $p$  е положително. По такъв начин получаваме  $b < a + p$ . От друга страна,

$$(1) \quad (P, Q) + (A, B) = (C, D)$$

и следователно числото  $a + p$  принадлежи на  $C$ . Като вземем под внимание, че  $b < a + p$ , заключаваме, че  $b$  също тъй принадлежи на  $C$ . С това ние намерихме едно число  $b$ , което принадлежи както на  $B$ , така и на  $C$ .

Обратно, нека съществува число  $b$ , което принадлежи както на  $B$ , така и на  $C$ . От равенството (1) и от дефиницията на понятието сума се вижда, че числото  $b$  може да се представи във вида

$$b = a + p,$$

където  $a$  принадлежи на  $A$  и  $p$  принадлежи на  $P$ . По такъв начин получаваме

$$p = b - a > 0,$$

защото  $b$  принадлежи на  $B$  и  $a$  принадлежи на  $A$ , т. е. ние намерихме в  $P$  едно положително число и следователно показахме (което е същото), че сечението  $(P, Q)$  е положително.

След всичко изложено дотук ще покажем, че в нареденото тяло на сеченията е валиден принципът за непрекъснатост. За тази цел разглеждаме едно ограничено множество  $M$  от сечения  $(X, Y)$  и означаваме с  $(A, B)$  една

негова горна граница. По-нататък дефинираме един клас  $P$  от рационални числа по следния начин: причисляваме едно число  $p$  към  $P$  тогава и само тогава, когато може да се намери число  $x$  от левия клас  $X$  на някое сечение  $(X, Y)$  от  $M$ , удовлетворяващо неравенството  $p < x$ . След това дефинираме един клас  $Q$  така: едно число  $q$  се причислява към  $Q$  тогава и само тогава, когато то е по-голямо от някое число, което не влиза в  $P$ .

Така дефинираните два класа  $P$  и  $Q$  не са празни. За да видим, че класът  $P$  не е празен, избираме едно сечение  $(X, Y)$  от  $M$ , избираме произволно  $x$  от  $X$  и означаваме с  $p$  кое да е число, по-малко от  $x$ . По този начин намерихме едно число, което сигурно принадлежи на  $P$ . За да видим, че класът  $Q$  не е празен, избираме едно число  $b$  от  $B$  и означаваме с  $q$  кое да е число, по-голямо от  $b$ . Числото  $b$  не принадлежи на  $P$ , защото в противен случай би съществувало число  $x$  от класа  $X$  на някое сечение  $(X, Y)$  от  $M$ , за което  $b < x$ , т. е. бихме имали  $(A, B) < (X, Y)$ . Това обаче не е вярно, защото  $(A, B)$  е една горна граница на множеството  $M$ . И така избраното число  $q$  е по-голямо от едно число  $b$ , което не принадлежи на  $P$ , т. е.  $q$  принадлежи на  $Q$ .

Дефинираните по този начин два класа  $P$  и  $Q$  образуват сечение. Проверката е съвсем проста и може да бъде предоставена на читателя. Ние ще докажем, че сечението  $(P, Q)$  представлява точната горна граница на множеството  $M$ .

Първо ще докажем, че сечението  $(P, Q)$  е една горна граница на  $M$ . И наистина, ако допуснем, че за някое сечение  $(X, Y)$  от  $M$  имаме

$$(P, Q) < (X, Y),$$

от това ще следва, че има рационално число  $x$ , което фигурира както в  $Q$ , така и в  $X$ . Съгласно дефиницията на  $Q$  съществува число  $r$ , което *не влиза* в  $P$  и за което  $r < x$ . Това обаче не е възможно, защото от неравенството  $r < x$  следва, че  $r$  принадлежи на  $P$ .

Така намерената горна граница  $(P, Q)$  е най-малката от всички горни граници на  $M$ . И наистина нека

$$(C, D) < (P, Q).$$

Ще покажем, че  $(C, D)$  вече не е горна граница на  $M$ . Това може да се види по следния начин: нека  $\xi$  е рационално число, което фигурира както в  $D$ , така и в  $P$ . Съгласно дефиницията на  $P$  има поне едно сечение  $(X, Y)$  в  $M$ , за което е възможно да се намери рационално число  $x$  по такъв начин, че  $x$  да принадлежи на  $X$  и при това да имаме  $\xi < x$ . В такъв случай обаче  $x$

принадлежи на  $D$ , защото  $\xi$  принадлежи на  $D$  и  $\xi < x$ . От доказаното следва, че  $(C, D) < (X, Y)$ , т. е. сечението  $(C, D)$  наистина не е горна граница на  $M$ .

По такъв начин можахме да дадем още един пример за непрекъснато наредено тяло, като обаче и този път си послужихме с теорията на рационалните числа. В съгласие с това, което казахме в § 6, занапред под реални числа ние бихме могли да разбираме сеченията.

## § 9. Геометрична терминология

В геометрията се показва, че в множеството на точките на една права могат да се дефинират понятията равенство, събиране, умножение и наредба, относно които това множество представлява непрекъснато наредено тяло. Поради тази причина точките от разглежданата права се наричат често *реални числа*. Ние няма да разглеждаме тук този поучителен геометричен въпрос, защото в същност няма да го използваме. Все пак ние често ще си служим с геометричен език поради неговата нагледност. Така, вместо да говорим за реални числа, ще говорим за точки, вместо да казваме, че числото  $a$  е по-малко от числото  $b$ , ще казваме, че точката  $a$  лежи наляво от точката  $b$  и пр. По-специално множеството от числата  $x$ , които удовлетворяват неравенствата  $a \leq x \leq b$ , ще наричаме *затворен интервал* и ще го означаваме със символа  $[a, b]$ , а множеството на числата  $x$ , които удовлетворяват неравенствата  $a < x < b$ , ще наричаме *отворен интервал* и ще го означаваме със символа  $(a, b)$ .

Множеството от числата  $x$ , които удовлетворяват неравенствата  $a \leq x < b$ , както и множеството от числата, които удовлетворяват неравенствата  $a < x \leq b$ , ще наричаме *полузатворен интервал*. Независимо от това, дали точките  $a$  и  $b$  са причислени или не към разглеждания интервал, ние ще ги наричаме краища на този интервал. Точка, която принадлежи на един интервал, но не е край за този интервал, се нарича негова вътрешна точка. Така дефинираните интервали ще наричаме *крайни* за разлика от множествата от числата  $x$ , които удовлетворяват едното от неравенствата  $a < x$ ,  $a \leq x$ ,  $x < a$ ,  $x \leq a$ , които ще наричаме *безкрайни интервали* и ще означаваме съответно със символите  $(a, \infty)$ ,  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, a)$ ,  $(-\infty, a]$ . Също така множеството от всички реални числа ще наричаме *безкраен интервал* и ще го означаваме със символа  $(-\infty, \infty)$ . Понятията край и вътрешна точка за безкрайните интервали се дефинират по очевиден начин.

В съгласие с тези дефиниции и дефинициите, които дадохме по-рано, едно множество от точки ще наричаме *ограничено*, когато съществува краен интервал, който съдържа всичките му точки. С тези няколко примера,

разбира се, не се изчерпват случаите, когато ще си служим с геометрична терминология. Ние обаче няма да формулираме изрично тривиалните дефиниции. Използването на геометрията ще бъде само привидно, защото ние ще можем да прередактираме всичко без затруднения на езика на аритметиката.

### § 10. Съществуване на най-малък член във всяко ограничено отдолу множество от цели числа

Ние знаем, че едно безкрайно множество от числа може да не притежава най-малък член дори когато е ограничено отдолу. Тук ще докажем обаче, че във всяко ограничено отдолу множество от *цели* числа винаги има най-малко число. И наистина нека  $N$  е едно ограничено отдолу множество от цели числа. Да допуснем, че  $N$  не съдържа най-малък член. Множеството  $N$  обаче е ограничено отдолу и следователно съгласно принципа за непрекъснатост то притежава точна долна граница  $\nu$ . Числото  $\nu + 1$  не е долна граница на  $N$ , защото то е по-голямо от най-голямата му долна граница. Оттук следва, че в  $N$  съществува число  $p$ , което удовлетворява неравенството  $p < \nu + 1$ . От друга страна, в  $N$  по предположение няма най-малък член. Въз основа на това ние можем да твърдим, че съществува число  $q$  в  $N$ , което удовлетворява неравенството  $q < p$ . От това неравенство и от двете неравенства  $\nu \leq q$  и  $p < \nu + 1$  заключаваме, че  $0 < p - q < 1$ , нещо, което е невъзможно, защото числото  $p - q$  е цяло. Полученото противоречие се дължи на допускането, че в множеството  $N$  няма най-малък член. С това интересуващото ни твърдение е доказано. Така установената теорема понякога се нарича принцип за добрата наредба на множеството на целите числа.

От доказаното лесно следва, че всяко ограничено отгоре множество от цели числа притежава най-голям член.

Едно множество от цели числа, което е ограничено и отгоре, и отдолу, се нарича крайно. По-специално, ако едно множество от цели положителни числа е ограничено отгоре, то е крайно. Всяко крайно множество от цели числа съдържа най-голям и най-малък член.

### § 11. Принцип на Архимед

Този принцип може да се формулира така: множеството на целите положителни числа не е ограничено отгоре.

**Доказателство.** Допускаме обратното и означаваме с  $\nu$  точната горна граница на множеството на целите положителни числа. Такава съществу-



ва съгласно принципа за непрекъснатост. Числото  $\nu - 1$  е по-малко от  $\nu$  и следователно не е горна граница на множеството на целите положителни числа. И така съществува цяло положително число  $n$ , което удовлетворява неравенството  $n > \nu - 1$ . От това неравенство получаваме обаче  $n + 1 > \nu$ , т. е. намерихме цяло положително число, по-голямо от  $\nu$ , което е невъзможно, защото  $\nu$  е горна граница на множеството на целите положителни числа. Полученото противоречие се дължи на допускането, че принципът на Архимед не е верен. С това доказателството е завършено.

## § 12. Теорема на Кантор

Казваме, че е дадена една безкрайна редица от интервали

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots,$$

когато на всяко цяло положително число  $n$  е съпоставен по един интервал  $\Delta_n$ .

Казваме, че един интервал  $\Delta$  съдържа друг интервал  $\Delta'$ , ако всичките точки на  $\Delta'$  лежат в  $\Delta$ .

Една безкрайна редица от интервали

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$$

се нарича *Канторова система*, ако:

- 1) всичките интервали от редицата са затворени;
- 2) всеки интервал  $\Delta_n$  съдържа следващия  $\Delta_{n+1}$ .

*Теорема на Кантор.* Ако

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$$

е една Канторова система от интервали, то има (поне\* една) точка, която лежи във всичките интервали на системата.

**Доказателство.** Нека  $a_n$  и  $b_n$  са съответно левият и десният край на интервала  $\Delta_n$ . Тъй като всеки интервал на системата съдържа следващия, то всичките интервали се съдържат в интервала  $\Delta_1$ . По-специално точката  $a_n$  принадлежи на  $\Delta_n$  и следователно лежи в  $\Delta_1$ . И така всичките числа

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

---

\*Разбира се, ако измежду интервалите има и произволно малки, то повече от една точка не може да се намира във всичките интервали на системата.

лежат в  $\Delta_1$ . Това значи, че при всички цели положителни стойности на  $n$  имаме  $a_n \leq b_1$ . И така множеството от числата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е ограничено отгоре. Съгласно принципа за непрекъснатост това множество притежава точна горна граница. Нека  $\xi$  е тази точна горна граница. Очевидно имаме  $a_n \leq \xi$ .

Нека  $p$  и  $q$  са две произволни цели положителни числа. Ние ще покажем, че  $a_p \leq b_q$ . И наистина, ако  $p \leq q$ , то интервалът  $\Delta_q$  се съдържа в  $\Delta_p$  и следователно точката  $b_q$  се съдържа в интервала  $\Delta_p$ , т.е.  $a_p \leq b_q$ . Ако  $p > q$ , то интервалът  $\Delta_p$  се съдържа в интервала  $\Delta_q$ , т.е. точката  $a_p$  се съдържа в  $\Delta_q$ , и следователно  $a_p \leq b_q$ . След всичко извършено фиксираме  $q$  и оставяме  $p$  да се мени. Неравенството  $a_p \leq b_q$  ни учи, че  $b_q$  е една горна граница на множеството на числата  $a_p$ . Като вземем под внимание, че  $\xi$  е точната, т.е. най-малката горна граница на тези числа, получаваме  $\xi \leq b_q$ . Неравенствата  $a_n \leq \xi$  и  $\xi \leq b_q$  ни позволяват да заключим, че при всички цели положителни стойности на  $k$  имаме

$$a_k \leq \xi \leq b_k,$$

т.е. намерената точка  $\xi$  наистина лежи във всичките интервали  $\Delta_k$ .

### § 13. Разпределение на рационалните и ирационалните числа

Нека  $(a, b)$  е един произволен интервал, при който  $a < b$ . Ще покажем, че във вътрешността му има както рационални, така и ирационални числа. За тази цел ще изберем едно произволно число  $c$  и ще покажем, че може да се избере цяло число  $p$  и цяло *положително* число  $q$  така, че да имаме

$$a < c + \frac{p}{q} < b$$

или, което е все същото,

$$(1) \quad q(a - c) < p < q(b - c).$$

Ако дадем на  $c$  рационална стойност, числото  $c + \frac{p}{q}$  ще бъде също рационално. Ако  $c$  е ирационално, то  $c + \frac{p}{q}$  е също ирационално. И така, за да се постигне целта, достатъчно е да се покаже, че целите числа  $q > 0$  и  $p$  могат да бъдат така избрани, че да е изпълнено неравенството (1).

За да докажем това, избираме едно цяло положително число  $q$ , по-голямо от  $\frac{1}{b-a}$ . Това може да се направи въз основа на принципа на Архимед. След това разглеждаме множеството  $M$  от онези цели числа  $r$ , които удовлетворяват неравенството

$$q(a-c) < r.$$

Такива числа има, както ни учи принципът на Архимед. Множеството на тези числа е ограничено отдолу и следователно в това множество има едно най-малко число  $p$  (вж. § 10). И така цялото число  $p$  удовлетворява неравенствата

$$q(a-c) < p, \quad p-1 \leq q(a-c).$$

От неравенството

$$p-1 \leq q(a-c)$$

получаваме

$$p \leq q(a-c) + 1$$

и тъй като  $q > \frac{1}{b-a}$  или, което е все същото,

$$q(b-a) > 1,$$

то

$$p < q(a-c) + q(b-a) = q(b-c).$$

И така цялото число  $p$  удовлетворява неравенствата

$$q(a-c) < p < q(b-c)$$

или

$$a < c + \frac{p}{q} < b.$$

Като дадем на  $c$  рационална стойност, заключаваме, че в интервала  $(a, b)$  има рационални числа; като дадем на  $c$  ирационална стойност, заключаваме, че в интервала  $(a, b)$  има ирационални числа. Този резултат често се изразява накратко, като казваме, че рационалните и ирационалните числа се намират навсякъде гъсто върху числовата права.

## Общи задачи

1. Да се докаже индуктивно, че при всички цели положителни стойности на  $n$  са валидни равенствата

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1) \cdot n}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{(1+n)^2 n^2}{4}.$$

2. Да се докажат индуктивно формулите:

$$\frac{1}{2} + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \text{ при } \sin \frac{\theta}{2} \neq 0;$$

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\sin \frac{n}{2}\theta \sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \text{ при } \sin \frac{\theta}{2} \neq 0;$$

$$\cos \theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \dots + \cos (2n-1)\theta = \frac{\sin 2n\theta}{2 \sin \theta} \text{ при } \sin \theta \neq 0;$$

$$\sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \dots + \sin (2n-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin \theta} \text{ при } \sin \theta \neq 0;$$

$$\frac{n+1}{2} + n \cos \theta + (n-1) \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 \text{ при } \sin \frac{\theta}{2} \neq 0;$$

$$\cos^2 \theta + \cos^2 2\theta + \dots + \cos^2 n\theta = \frac{2n-1}{4} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{4 \sin \theta} \text{ при } \sin \theta \neq 0.$$

3. Да се докаже индуктивно, че при всички цели положителни стойности на  $n$  е вярно равенството

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

4. Да се докаже, че при всяко  $n$  и при всички цели неотрицателни стойности на  $k$  е вярно равенството

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

където при цели положителни стойности на  $k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k(k-1) \dots 1},$$

а при  $k=0$

$$\binom{n}{0} = 1.$$

5. Да се докаже, че при всички цели стойности на  $n$  и  $k$ , подчинени на неравенствата  $0 \leq k \leq n$ , е в сила

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Значението на символите е дадено в зад. № 4.

6. Докажете индуктивно, че при всички цели положителни стойности на  $n$  имаме

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n,$$

където значението на символите  $\binom{n}{k}$  е изяснено в зад. № 4. Тази важна формула се нарича Нютонин бинот.

7. Докажете, че при всички стойности на  $n$  и всички цели неотрицателни стойности на  $k$  имаме

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Значението на символите е дадено в зад. № 4.

8. Докажете, че при всички цели неотрицателни стойности на  $n$  и  $k$  имаме

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

Значението на символите е дадено в зад. № 4.

9. Нека  $P(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+m-1)$ , където  $m$  е цяло положително число. Да се докаже, че

$$P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(n) = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{m+1}.$$

10. Да се докаже, че сумата

$$1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m$$

може да се представи като полином на  $n$  от  $m+1$ -ва степен.

11. Да се докаже, че при всички цели положителни стойности на  $n$  и при  $x \geq -1$  имаме

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

(неравенство на Бернули).

12. Нека са дадени два елемента  $\omega$  и  $\varepsilon$ . Дефинираме за тях равенство и действията събиране и умножение с помощта на таблиците:

$$\begin{array}{ll} \omega = \omega, & \varepsilon = \varepsilon, \\ \omega + \omega = \omega, & \omega\omega = \omega, \\ \omega + \varepsilon = \varepsilon, & \omega\varepsilon = \omega, \\ \varepsilon + \omega = \varepsilon, & \varepsilon\omega = \omega, \\ \varepsilon + \varepsilon = \omega, & \varepsilon\varepsilon = \varepsilon. \end{array}$$

Да се покаже, че при така дефинираните равенство и действията елементите  $\omega$  и  $\varepsilon$  образуват тяло. Да се намерят нулата и единицата на това тяло. Да се покаже, че в това тяло имаме  $-1 = 1$ . Да се покаже, че в това тяло не може да се дефинира наредба по такъв начин, че да са изпълнени условията на § 3.

13. Разглеждаме множеството  $K$  от всевъзможни двойки  $(a, b)$  от реални числа. Дефинираме в  $K$  действията събиране и умножение по следния начин:

$$\begin{array}{l} (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \\ (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc). \end{array}$$

Две двойки  $(a, b)$  и  $(c, d)$  се наричат равни тогава и само тогава, когато  $a = c$  и  $b = d$ .

Да се покаже, че при така дефинираните действия събиране и умножение и при така дефинираното равенство множеството  $K$  е едно тяло. Да се намери нулата и единицата на това тяло. Да се покаже, че в това тяло не е възможно да се дефинира наредба така, че да бъдат изпълнени условията на § 3.

*Упътване.* За да покажете, че в  $K$  не може да се установи наредба, допуснете противното и разгледайте елемента

$$i = (0, 1).$$

От двата елемента  $i$  и  $-i$  единият е положителен и следователно неговия квадрат е положителен (като произведение на два положителни елемента). От друга страна, не е трудно да се види, че

$$i^2 = (-i)^2 = -(1, 0),$$

т. е. елементът  $-(1, 0)$  е сигурно положителен. Отгук заключаваме, че елементът

$$(1, 0) = [-(1, 0)]^2$$

е положителен като произведение на два положителни елемента. Това обаче не е възможно, защото от двата елемента

$$(1, 0) \text{ и } -(1, 0)$$

само единият е положителен.

14. Ако  $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \dots$  и числата  $n_k$  са цели положителни, то  $n_k \geq k$ .

*Упътване.* Извършете доказателството индуктивно.

## Глава II

### БЕЗКРАЙНИ РЕДИЦИ

#### § 1. Редици

Ще казваме, че е дефинирана една редица

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

от числа, ако на всяко цяло положително число  $n$  е съпоставено по едно число  $a_n$  (числото  $n$  се нарича номер на члена  $a_n$ ). Така например, за да получим редицата от четните числа

$$2, 4, 6, \dots,$$

ние на всяко цяло положително число  $n$  съпоставяме четното число  $2n$ , което съпоставяне може кратко да се запише с помощта на равенството

$$a_n = 2n.$$

Друг пример ни дава редицата

$$1, 1, 1, 1, \dots,$$

всички членове на която са равни на 1. Нека изрично кажем, че се позволява при дефинирането на една редица на две *различни* цели положителни числа (номера) да се съпостави *едно и също* число, т. е. (което е все същото) позволява се два члена с различни номера да бъдат равни помежду си. Такъв е случаят с последния пример.

#### § 2. Околност

Околност на едно число  $c$  ще наричаме всеки отворен интервал  $(a, b)$ , който съдържа  $c$ , т. е. за който  $a < c < b$ . Ясно е, че всяка точка притежава безбройно много околности. Така например интервалът  $(-1, 1)$  е околност на точката 0, интервалът  $(-\frac{1}{2}, 1)$  е друга околност на същата точка, но интервалът  $(1, 2)$  не е околност на точка 0.

### § 3. Точка на съгъстяване. Теорема на Болцано–Вайерщрас

Нека ни е дадена редица от числа

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

Една точка  $\xi$  се нарича точка на съгъстяване на редицата (1), ако всяка околност на  $\xi$  съдържа безбройно много членове на тази редица.

Така да разгледаме например редицата

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

При нечетно  $n$  имаме  $a_n = 1$ , а при четно  $n$  имаме  $a_n = 0$ ; това може да се запише кратко така:  $a_n = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}$ . Очевидно точката 1 е една точка на съгъстяване за тази редица, защото всяка околност на точката 1 съдържа безбройно много различни по номер членове от редицата, а именно всичките членове с нечетни номера. Точката 0 е също една точка на съгъстяване на редицата, но точката  $\frac{1}{2}$  не е точка на съгъстяване, защото например интервалът  $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ , който е една околност на точката  $\frac{1}{2}$ , не само не съдържа безбройно много членове от редицата, но той дори не съдържа нито една точка от тази редица. В примера, който дадохме, двете точки на съгъстяване принадлежат на редицата. Това обаче съвсем не се изисква в дефиницията на понятието точка на съгъстяване. Така например точката 0 е точка на съгъстяване за редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$$

при все че не принадлежи на тази редица (всичките членове на тази редица са различни от 0).

Може да се случи една редица да има само една точка на съгъстяване, какъвто е случаят с редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

Може да се случи редицата да има няколко точки на съгъстяване. Така например редицата

$$1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

има две точки на съгъстяване. Може една редица да няма нито една точка на съгъстяване, какъвто е случаят с редицата на целите положителни числа

$$1, 2, 3, 4, \dots$$



Обаче всяка ограничена редица притежава поне една точка на съгъстяване. Това твърдение съставлява съдържанието на една важна теорема, която е известна под името *теорема на Болцано–Вайерщрас* (Bolzano–Weierstrass).

**Доказателство.** Нека  $a_1, a_2, a_3, \dots$  е една ограничена числова редица и нека  $\Delta_1$  е произволен (затворен) интервал с дължина  $d$ , който съдържа всичките ѝ членове. Да разделим  $\Delta_1$  на две равни части. Поне едната от двете половини (разглеждани като затворени интервали) съдържа безбройно много (различни по номер) членове на редицата. И наистина в противен случай интервалът  $\Delta_1$  би съдържал най-много краен брой членове на редицата, което не е вярно. Нека  $\Delta_2$  е такава от двете половини, която съдържа безбройно много членове на редицата (ако само едната половина съдържа безбройно много членове на редицата, то  $\Delta_2$  е тази половина; ако и двете половини имат това свойство, с  $\Delta_2$  означаваме коя да е от тях). Разделяме  $\Delta_2$  на две равни части и означаваме с  $\Delta_3$  такава затворена половина на  $\Delta_2$ , която съдържа безбройно много членове на редицата (сигурно поне едната от двете половини на  $\Delta_2$  съдържа безбройно много членове на редицата, защото в противен случай интервалът  $\Delta_2$  би съдържал само краен брой членове на редицата). Продължавайки този процес на разполовяване на интервалите, получаваме една безкрайна редица от затворени интервали

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots,$$

всеки един от които съдържа следващия. Според теоремата на Кантор (глава I, § 12) има точка  $c$ , която принадлежи на всеки един от тези интервали.

От начина, по който са дефинирани интервалите  $\Delta_n$ , се вижда, че всеки един от тях съдържа безбройно много членове на дадената числова редица. Като използваме това обстоятелство, ще покажем, че  $c$  е една нейна точка на съгъстяване, т. е. че всяка околност на  $c$  съдържа безбройно много членове на тази редица.

Нека  $(p, q)$  (където  $p$  е по-малко от  $q$ ) е произволна околност на точка  $c$ , тъй че разликите  $c - p$  и  $q - c$  са положителни. Нека  $d$  е дължината на  $\Delta_1$ . Ще изберем цялото положително число  $n$  толкова голямо, че дължината  $\frac{d}{2^{n-1}}$  на  $\Delta_n$  да е по-малка както от  $c - p$ , така и от  $q - c$ . За тази цел избираме  $n$  така, че да имаме

$$n > \frac{d}{c - p} \quad \text{и} \quad n > \frac{d}{q - c},$$

\* Дължината на интервала  $\Delta_2$  е равна на половината от дължината  $d$  на интервала  $\Delta_1$ , дължината на  $\Delta_3$  е равна на половината от дължината на  $\Delta_2$  и т. н. Оттук се вижда, че дължината на  $\Delta_n$  е равна на  $\frac{d}{2^{n-1}}$ .

нещо, което е възможно според принципа на Архимед. Като вземем под внимание, че Нютоновият бином ни дава

$$2^{n-1} = (1+1)^{n-1} = 1 + (n-1) + \dots \geq n,$$

получаваме

$$2^{n-1} > \frac{d}{c-p} \quad \text{и} \quad 2^{n-1} > \frac{d}{q-c}$$

и следователно

$$c-p > \frac{d}{2^{n-1}} \quad \text{и} \quad q-c > \frac{d}{2^{n-1}}.$$

Не е трудно да се убедим, че при направеният избор на числото  $n$  интервалът  $\Delta_n$  се съдържа изцяло в интервала  $(p, q)$ . И наистина, ако означим с  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  съответно левия и десния край на  $\Delta_n$ , то

$$\beta_n - \alpha_n = \frac{d}{2^{n-1}}$$

и следователно  $\beta_n - \alpha_n < c - p$ , откъдето  $\alpha_n > \beta_n - c + p$ , т. е.  $\alpha_n > p$ , тъй като  $\beta_n - c \geq 0$ . Също така от  $\beta_n - \alpha_n < q - c$  следва  $\beta_n < q - (c - \alpha_n)$ , т. е.  $\beta_n < q$ .

Така установените неравенства

$$p < \alpha_n < \beta_n < q$$

показват, че  $\Delta_n$  се съдържа в интервала  $(p, q)$ . Оттук, като вземем под внимание, че  $\Delta_n$  съдържа безбройно много членове на дадената числова редица, заключаваме, че същото свойство притежава и интервала  $(p, q)$ , с което нашето твърдение е доказано.

#### § 4. Сходящи редици

*Ако една числова редица е ограничена и притежава само една точка на съгъстяване, тя се нарича сходяща. Единствената точка на съгъстяване на една сходяща редица се нарича нейна граница (вместо да казваме, че  $l$  е граница на една редица, ние често казваме, че редицата клони към  $l$ ).*

Така например редицата

$$1, 1, 1, \dots$$

е сходяща и клони към 1.

Редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

е сходяща и клони към 0.

Редицата

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

не е сходяща, защото не е ограничена.

Редицата

$$1, 0, 1, 0, 1, \dots,$$

при все че е ограничена, не е сходяща, защото има две точки на сгъстяване.

Ако  $c$  е една точка на сгъстяване на една редица, то (съгласно дадената по-горе дефиниция) във всяка околност на  $c$  има безбройно много членове на редицата. Това не изключва обаче във някоя околност на  $c$  също да има безбройно много (други) членове на редицата. Толкова по-интересно е, че за сходящите редици е в сила следната теорема:

*Във всяка околност на границата на една сходяща редица може да има най-много краен брой членове на редицата.*

**Доказателство.** Нека

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

е една сходяща редица и  $a$  е нейната граница. Да допуснем, че може да се намери поне една околност  $\Delta$  на  $a$ , във която има безбройно много членове

$$(2) \quad a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$$

на редицата. Тези безбройно много членове образуват една ограничена редица (защото цялата редица (1) е сходяща и следователно е ограничена), която съгласно теоремата на Болцано–Вайерщрас притежава поне една точка на сгъстяване  $\xi$ . Тази точка е различна от  $a$ , защото  $a$  не е точка на сгъстяване на редицата (2), тъй като околността  $\Delta$  на точката  $a$  не съдържа нито един член на редицата (2). От друга страна, точката  $\xi$  е точка на сгъстяване не само на редицата (2), но и на редицата (1), защото всяка околност на  $\xi$  съдържа безбройно много членове на редицата (2), а следователно и безбройно много членове на редицата (1). И така ние достигнахме до заключението, че редицата (1) притежава повече от една точка на сгъстяване, което не е вярно, понеже е дадено, че редицата (1) е сходяща.

Нека

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е една сходяща редица и  $a$  е нейната граница. Ние ще изберем едно произволно *положително* число  $\varepsilon$  и ще разгледаме околността  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Вън от

тая околност могат да се намират най-много краен брой членове на нашата редица, т. е. от известно място в нашата редица всичките членове се намират в интервала  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Нека  $a_\nu$  е кой да е член на нашата редица, след който всичките членове се намират в интервала  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . В такъв случай при  $n > \nu$  имаме

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

или (което е същото)\*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

И така, ако редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е сходяща и  $a$  е нейната граница, то при всеки избор на положителното число  $\varepsilon$  може да се намери число  $\nu$  (евентуално зависещо от  $\varepsilon$ ) така, че щом  $n > \nu$ , да е изпълнено неравенството

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Сега ще покажем, обратно, че ако за една редица

$$(3) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

може да се намери такова число  $a$ , щото при всеки избор на положителното число  $\varepsilon$  да може да се намери число  $\nu$  (не е задължително това число да бъде цяло) така, че при  $n > \nu$  да имаме

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

то редицата (3) е сходяща и  $a$  е нейната граница.

И наистина, щом разполагаме с избора на положителното число  $\varepsilon$ , ние можем да вземем например  $\varepsilon = 1$ . След този избор на  $\varepsilon$  определяме съответстващото му число  $\nu$ . И така при  $n > \nu$  имаме

$$|a_n - a| < 1,$$

т. е.  $a - 1 < a_n < a + 1$ . Така ние намерихме краен интервал, който съдържа всички членове на редицата с евентуално изключение на краен брой членове. Увеличавайки интервала  $(a - 1, a + 1)$ , ако е нужно това, ние можем да намерим (също краен) интервал, който съдържа всичките членове на редицата (3) без изключение, което показва, че редицата (3) е ограничена. Остава да покажем, че редицата (3) не може да има точка на съгъстяване, различна

\*Вж. глава I, § 4.

от  $a$  (поне една точка на съгъстяване тя сигурно притежава въз основа на теоремата на Болцано—Вайерщрас). Нека допуснем, че редицата (3) притежава някоя точка на съгъстяване  $b$ , различна от  $a$ . Ще изберем положително число  $\varepsilon$  толкова малко, че да имаме  $\varepsilon < \frac{|b-a|}{2}$ . Това винаги е възможно, защото  $b \neq a$ . Нека  $\nu$  е такова число, че при  $n > \nu$  да имаме

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Да разгледаме околността  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$  на точката  $b$ . Щом точката  $b$  е една точка на съгъстяване, то в избраната околност на точката  $b$  (както и във всяка околност на тая точка) има безбройно много членове на редицата, а следователно и такива членове, чиито номера са по-големи от  $\nu$ . Нека  $a_p$  е такъв член. И така имаме

$$|a_p - a| < \varepsilon.$$

От друга страна,

$$|a_p - a| < \varepsilon \quad (\text{защото } p > \nu).$$

Събирайки почленно тези неравенства, намираме

$$|a_p - a| + |a_p - b| < 2\varepsilon$$

и тъй като

$$|a_p - a| + |a_p - b| = |a_p - a| + |b - a_p| \geq |(a_p - a) + (b - a_p)| = |b - a|,$$

намираме

$$|b - a| < 2\varepsilon$$

противно на направения от нас избор на  $\varepsilon$ .

Полученият резултат ни дава възможност да дадем нова дефиниция на понятието граница на една редица, която е напълно еквивалентна на тази дефиниция, която вече дадохме.

**Дефиниция.** Казваме, че едно число  $a$  е граница на редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

ако при всеки избор на положителното число  $\varepsilon$  може да се намери такова число  $\nu$  (евентуално зависещо от избора на  $\varepsilon$ ), че при  $n > \nu$  да е в сила неравенството

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

За да изразим, че  $a$  е граница на редицата с общ член  $a_n$ , често ще си служим с краткото означение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

В случай че има число  $a$ , удовлетворяващо изброените условия, редицата наричаме сходяща. В противен случай редицата наричаме разходяща. Ние ще си служим както с първата, така и с втората дефиниция на понятието граница на една редица от числа.

Не е трудно да се види, че за да клони редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

към  $l$ , е необходимо и достатъчно редицата

$$a_1 - l, a_2 - l, a_3 - l, \dots$$

да клони към нула, И наистина да положим

$$b_n = a_n - l$$

и да означим с  $\varepsilon$  едно положително число. Като вземем под внимание, че

$$|a_n - l| = |b_n - 0|,$$

заклучаваме, че неравенството

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

е изпълнено тогава и само тогава, когато е изпълнено неравенството

$$|b_n - 0| < \varepsilon.$$

Най-сетне ще споменем, че за да клони редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

към нула, е необходимо и достатъчно редицата

$$|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots$$

да клони към нула. И наистина да положим

$$c_n = |a_n|$$

и да означим с  $\varepsilon$  едно положително число. В такъв случай, като вземем под внимание, че

$$|a_n - 0| = |c_n - 0|,$$

заклучаваме, че неравенството

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

е изпълнено тогава и само тогава, когато е изпълнено неравенството

$$|c_n - 0| < \varepsilon.$$

### § 5. Действия със сходящите редици

Нека са дадени двете сходящи редици

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots,$$

$$(2) \quad b_1, b_2, b_3, \dots,$$

чиито граници са съответно  $a$  и  $b$ . Да образуваме редицата с общ член  $c_n = a_n + b_n$ . Ние твърдим, че така получената редица е сходяща и нейната граница е  $a + b$ . За да докажем това твърдение, ще си изберем едно положително число  $\varepsilon$ . Числото  $\frac{\varepsilon}{2}$  е също положително, следователно може да се намери число  $\nu_1$  така, че при  $n > \nu_1$  да имаме

$$(3) \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Също така може да се намери число  $\nu_2$  така, че при  $n > \nu_2$  да имаме

$$(4) \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека  $\nu$  е по-голямото от двете числа  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . В такъв случай при  $n > \nu$  е изпълнено както неравенството (3), така и неравенството (4). Като съберем почленно тези неравенства, получаваме

$$|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

и като вземем пред вид, че

$$|(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|,$$

намираме, че при всяко  $n > \nu$  имаме

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon.$$

Полученото неравенство ни учи, че редицата с общ член  $a_n + b_n$  е сходяща и клони към  $a + b$ .

Аналогично се доказва (пак при предположението, че редиците (1) и (2) са сходящи), че редицата с общ член  $a_n - b_n$  също е сходяща и клони към  $a - b$ . За целта се ползуваме от неравенството

$$(5) \quad |(a_n - b_n) - (a - b)| = |(a_n - a) + (b - b_n)| \leq |a_n - a| + |b - b_n|$$

по следния начин: избираме  $\varepsilon > 0$  и след това определяме числото  $\nu$  така, че при  $n > \nu$  да имаме както

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

така и

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

отгук с помощта на неравенство (5) намираме

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Нека

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots,$$

са две сходящи редици, които клонят съответно към  $a$  и  $b$ . Ще докажем, че редицата

$$a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n, \dots$$

е сходяща и клони към  $ab$ .

За тази цел полагаме

$$a_n - a = \alpha_n,$$

$$b_n - b = \beta_n,$$

откъдето получаваме

$$a_n = a + \alpha_n,$$

$$b_n = b + \beta_n.$$

Като умножим почленно тези две неравенства, намираме

$$a_n b_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n,$$



откъдето

$$|a_n b_n - ab| = |a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n| \leq |a\beta_n| + |b\alpha_n| + |\alpha_n \beta_n|.$$

Избираме си едно произволно положително число  $\varepsilon$  и определяме  $\nu$  така, че при  $n > \nu$  да имаме

$$\begin{aligned} |\alpha_n| &< \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1}, \\ |\beta_n| &< \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1}, \\ |\beta_n| &< 1. \end{aligned}$$

Това е възможно да се направи, защото  $a_n$  клони към  $a$  и  $b_n$  клони към  $b$ . Но в такъв случай имаме

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\leq |a||\beta_n| + |b||\alpha_n| + |\alpha_n||\beta_n| \leq |a||\beta_n| + |b||\alpha_n| + |\alpha_n| \\ &< \frac{|\alpha|\varepsilon}{|a| + |b| + 1} + \frac{|b|\varepsilon}{|a| + |b| + 1} + \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Сега ще разгледаме въпроса за почленното деление на две сходящи редици.

Нека редиците

$$\begin{aligned} a_1, a_2, \dots, \\ b_1, b_2, \dots, \end{aligned}$$

където  $b_n \neq 0$ , са сходящи и клонят съответно към  $a$  и  $b$ , като  $b \neq 0$ . В такъв случай редицата

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots$$

е сходяща и клони към  $\frac{a}{b}$ .

И наистина полагаме

$$\begin{aligned} a_n - a &= \alpha_n, \\ b_n - b &= \beta_n, \end{aligned}$$

откъдето намираме

$$\begin{aligned} a_n &= a + \alpha_n, \\ b_n &= b + \beta_n, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n},$$

или

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{\alpha_n b - a\beta_n}{(b + \beta_n)b} \right| \leq \frac{|\alpha_n||b| + |a||\beta_n|}{|b + \beta_n||b|}.$$

При това ние съществено се ползуваме от условията  $b_n \neq 0$  и  $b \neq 0$ , тъй като делим с тия числа.

Избираме  $\nu_1$  толкова голямо, че при  $n > \nu_1$  да имаме  $|\beta_n| < \frac{|b|}{2}$ . Това може да се направи, защото  $\frac{|b|}{2}$  е положително число и  $b_n$  клони към  $b$ . В такъв случай получаваме

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{|\alpha_n||b| + |a||\beta_n|}{(|b| - |\beta_n|)|b|} < 2 \frac{|\alpha_n||b| + |a||\beta_n|}{b^2}.$$

След това избираме едно положително число  $\varepsilon$  и определяме  $\nu_2$  така, че при това  $n > \nu_2$  да имаме

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon b^2}{2(|a| + |b|)},$$

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon b^2}{2(|a| + |b|)}.$$

Ако с  $\nu$  означим по-голямото от двете числа  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , заключаваме, че при  $n > \nu$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| < \varepsilon,$$

т. е. редицата с общ член  $\frac{a_n}{b_n}$  е наистина сходяща и клони към  $\frac{a}{b}$ . При доказателството ние няколко пъти използвахме, че  $b \neq 0$ . Това условие е твърде съществено. И наистина нека разделим почленно двете сходящи редици

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots,$$

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Получаваме разходящата редица

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

(тази редица е разходяща, защото не е ограничена). Този пример обаче не противоречи ни най-малко на доказаната вече по-горе теорема, защото тук редицата с общ член  $\frac{1}{n}$  клони към 0.

## Задачи

1. Нека редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

всички членове на която са различни от 2 и  $-2$ , е сходяща и клони към 2. Да се покаже, че редицата с общ член

$$b_n = \frac{a_n^2 - 5a_n + 6}{a_n^2 - 4}$$

е също сходяща, и да се пресметне нейната граница ( $b_n$  е добре дефинирано, защото  $a_n \neq \pm 2$  и следователно знаменателят  $a_n^2 - 4$  е различен от нула).

*Решение.* При все че числителят  $a_n^2 - 5a_n + 6$  и знаменателят  $a_n^2 - 4$  образуват сходящи редици, тук не можем директно да приложим теоремата за почленно деление на две сходящи редици, защото  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - 4) = 0$ . За да решим задачата, правим следните преобразувания:

$$b_n = \frac{a_n^2 - 5a_n + 6}{a_n^2 - 4} = \frac{(a_n - 2)(a_n - 3)}{(a_n - 2)(a_n + 2)} = \frac{a_n - 3}{a_n + 2}.$$

За дробта  $\frac{a_n - 3}{a_n + 2}$  вече можем да приложим теоремата за почленно деление на сходящи редици, защото  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2) = 4 \neq 0$ . Твърдението, че  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2) = 4$ , може да се мотивира с помощта на теоремата за почленно събиране на сходящи редици по следния начин: редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е сходяща (по условие) и клони към 2, редицата

$$2, 2, 2, \dots$$

е също сходяща и клони към 2; от това следва, че редицата

$$a_1 + 2, a_2 + 2, a_3 + 2, \dots,$$

чийто общ член  $a_n + 2$ , е също сходяща и клони към  $2 + 2 = 4$ .

Аналогично се доказва, че и редицата с общ член  $a_n - 3$  е сходяща и клони към  $2 - 3 = -1$ .

От това заключаваме, че редицата с общ член  $\frac{a_n - 3}{a_n + 2}$  е също сходяща и клони към  $\frac{-1}{4}$ .

2. Нека редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

всички членове на която са различни от  $-1$  и  $3$ , е сходяща и клони към 3. Да се докаже, че редицата с общ член

$$b_n = \frac{a_n^3 - 7a_n^2 + 15a_n - 9}{a_n^3 - 5a_n^2 + 3a_n + 9}$$

е също сходяща и да се пресметне нейната граница.

3. Нека редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е сходяща и клони към 2. Да се докаже, че редицата с общ член

$$b_n = \frac{2a_n^3 - a_n + 2}{a_n^2 - a_n + 1}$$

е също сходяща, и да се пресметне нейната граница.

4. Да се докаже, че редицата с общ член  $a_n = \frac{n-1}{n+1}$  е сходяща, и да се пресметне нейната граница.

*Упътване.* Тук числителят  $n-1$  и знаменателят  $n+1$  образуват разходящи редици (тези редици не са ограничени). Това не е пречка редицата с общ член  $\frac{n-1}{n+1}$  да бъде сходяща. И наистина ние можем да пишем

$$a_n = \frac{n\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Сега числителят  $1 - \frac{1}{n}$  и знаменателят  $1 + \frac{1}{n}$  образуват вече сходящи редици и при това  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \neq 0$ , което ни дава право да приложим теоремата за почленното деление на сходящи редици.

5. Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_n = \frac{3n^4 - 5n^3 + 2n - 1}{4n^4 + n^2 + 2n + 5}$$

е сходяща, и да се пресметне нейната граница.

6. Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n + 2}$$

е разходяща.

7. Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2}$$

е сходяща, и да се пресметне нейната граница.

## § 6. Някои свойства на сходящите редици

Нека

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

е една безкрайна редица. Ще казваме, че редицата

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$$

е подредица на редицата (1), когато целите положителни числа

$$n_1, n_2, n_3, \dots$$

удовлетворяват неравенствата

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Ще покажем, че ако една безкрайна редица

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

клони към някоя граница  $a$ , то всяка нейна безкрайна подредица

$$(2) \quad a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$$

е също сходяща и също клони към  $a$ .

И наистина нека  $\varepsilon$  е едно произволно избрано положително число. Избираме си едно число  $\nu$  така, че при  $k > \nu$  да имаме

$$|a_k - a| < \varepsilon.$$

От друга страна\*,  $n_k \geq k$ , т. е.  $n_k > \nu$ , и следователно

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon,$$

което ни учи, че редицата (2) е действително сходяща и клони към  $a$ .

Ще разгледаме друго свойство на сходящите редици. Нека

$$(3) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

е една безкрайна редица от числа. Ако всяко цяло положително число фигурира поне веднъж в едната от двете редици от цели положителни числа

$$(4) \quad n_1, n_2, n_3, \dots$$

$$(5) \quad m_1, m_2, m_3, \dots$$

и ако редиците

$$(6) \quad a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$$

$$(7) \quad a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3}, \dots$$

клонят към една и съща граница  $l$ , то редицата (3) също клони към  $l$ .

И наистина нека  $\varepsilon$  е произволно положително число. Избираме цяло положително число  $p$  по такъв начин, че при  $k > p$  да имаме

$$|a_{n_k} - l| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |a_{m_k} - l| < \varepsilon.$$

Означаваме с  $\nu$  най-голямото от числата

$$n_1, n_2, \dots, n_p; \quad m_1, m_2, \dots, m_p.$$

\* Вж. задача 14 към глава I.

В такъв случай при  $n > \nu$  ще имаме

$$|a_n - l| < \varepsilon.$$

За да се убедим в това, ще вземем под внимание, че числото  $n$  фигурира по предположение поне в едната от двете редици (4) или (5). Нека например това число фигурира в редицата (4), т. е. при подходящ избор на цялото положително число  $k$  имаме  $n = n_k$ . Като вземем под внимание, че  $n > \nu$ , получаваме  $n_k > \nu$  и следователно  $k$  не може да бъде никое от числата  $1, 2, \dots, p$ , т. е.  $k > p$ , и следователно

$$|a_{n_k} - l| < \varepsilon$$

или, което е същото,

$$|a_n - l| < \varepsilon.$$

Аналогично се разглежда случаят, когато  $n$  принадлежи на редицата (5).

Специално, ако редиците (4) и (5) удовлетворяват неравенствата

$$\begin{aligned} n_1 &< n_2 < n_3 < \dots \\ m_1 &< m_2 < m_3 < \dots \end{aligned}$$

и никое цяло положително число не фигурира едновременно в тези две редици, казваме, че редицата (3) е получена чрез комбиниране на редиците (6) и (7). От изложеното се вижда, че ако една редица е получена чрез комбиниране на две редици, които клонят към една и съща граница  $l$ , то тя също клони към  $l$ .

Съвсем специален начин на комбиниране на две редици

$$\begin{aligned} b_1, b_2, b_3, \dots \\ c_1, c_2, c_3, \dots \end{aligned}$$

ще получим, като образуваме редицата

$$b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, \dots$$

Този начин на комбиниране ще наричаме алтернативен. Ние често ще го използваме в бъдеще.

Също така просто се установява следното: ако редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е сходяща и клони към  $a$ , то каквото и да е числото  $b$ , редицата

$$b, a_1, a_2, a_3, \dots$$

е също сходяща и клони към  $a$ . С други думи, ако положим

$$b_1 = b, b_n = a_{n-1} \quad \text{при } n = 2, 3, \dots,$$

ще трябва да докажем, че редицата

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

клони към  $a$ . Доказателството извършваме така: избираме си едно произволно положително число  $\varepsilon$  и подбираме положителното число  $\nu$  по такъв начин, че при  $k > \nu$  да имаме

$$|a_k - a| < \varepsilon.$$

Това може да се направи, защото редицата  $a_1, a_2, \dots$  клони към  $a$ . След всичко това не е трудно да се убедим, че

$$|b_n - a| < \varepsilon$$

при  $n > \nu + 1$ . И наистина очевидно имаме  $n - 1 > \nu$  и следователно

$$|a_{n-1} - a| < \varepsilon.$$

От друга страна,  $b_n = a_{n-1}$ , т. е.

$$|b_n - a| < \varepsilon,$$

с което е показано, че редицата  $b_1, b_2, b_3, \dots$  наистина клони към  $a$ .

От доказаното се вижда, че ако редицата

$$(8) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

е сходяща и клони към  $a$ , то каквито и да бъдат числата

$$b_1, b_2, \dots, b_k,$$

редицата

$$(9) \quad b_1, b_2, \dots, b_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots$$

е също сходяща и също клони към  $a$ . И наистина редицата

$$a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots$$

е поредицата на редицата (8) и следователно клони към  $a$ . Оттук заключаваме, като приложим  $k$  пъти последната от доказаните теореми, че редицата (9) също клони към  $a$ .

В бъдеще често ще използваме следната проста теорема: *ако съществуват границите  $a = \lim a_n$  и  $b = \lim b_n$  и поне при безбройно много стойности на  $n$  имаме  $a_n \leq b_n$ , то  $a \leq b$* . И наистина да допуснем, че  $a > b$ , и да положим  $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ . При достатъчно големи стойности на  $n$  имаме

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad |b_n - b| < \varepsilon$$

и следователно

$$a_n - \varepsilon < a < a_n + \varepsilon, \quad b_n - \varepsilon < b < b_n + \varepsilon,$$

откъдето

$$b - a > (b_n - \varepsilon) - (a_n + \varepsilon) = -2\varepsilon + (b_n - a_n) = b - a + (b_n - a_n),$$

т. е. за всички достатъчно големи стойности на  $n$  ще имаме

$$b_n - a_n < 0,$$

което противоречи на нашето предположение, че за безбройно много стойности на  $n$  имаме  $a_n \leq b_n$ . С това доказателство е завършено.

От доказаното следва, че ако редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

клони към  $a$  и за безбройно много стойности на  $n$  удовлетворява неравенството

$$a_n \leq b,$$

то

$$a \leq b.$$

За да се убедим в това, достатъчно е да вземем под внимание, че редицата

$$b, b, b, \dots$$



клони към  $b$ . По същия начин се вижда, че ако за безбройно много стойности на  $n$  имаме  $a_n \geq b$ , то  $a \geq b$ .

Накрая ще докажем, че ако двете редици

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

са сходящи и клонят към една и съща граница  $l$  и ако редицата

$$c_1, c_2, c_3, \dots$$

удовлетворява неравенствата

$$a_n \leq c_n \leq b_n,$$

то тя също е сходяща и клони към същата граница  $l$ .

И наистина избираме си произволно  $\varepsilon > 0$  и след това определяме  $\nu$  така, че при  $n > \nu$  да имаме

$$|a_n - l| < \varepsilon,$$

$$|b_n - l| < \varepsilon,$$

т. е.

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon,$$

$$l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon.$$

От неравенствата

$$l - \varepsilon < a_n \quad \text{и} \quad a_n \leq c_n$$

намираме

$$l - \varepsilon < c_n.$$

Аналогично от неравенствата

$$c_n \leq b_n \quad \text{и} \quad b_n < l + \varepsilon$$

намираме

$$c_n < l + \varepsilon.$$

По такъв начин

$$l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon,$$

т. е.

$$|c_n - l| < \varepsilon,$$

което ни учи, че редицата с общ член  $c_n$  е сходяща и клони към  $l$ .

### Задачи

1. Нека редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е сходяща и  $|a_n| < a$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$

Докажете, че  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a$ .

2. Нека

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

са две сходящи редици, които клонят към една и съща граница  $l$ , и нека  $c_n$  е по-малкото, а  $d_n$  е по-голямото от двете числа  $a_n$  и  $b_n$ . Докажете, че двете редици

$$c_1, c_2, c_3, \dots$$

$$d_1, d_2, d_3, \dots$$

са също сходящи и клонят към  $l$ .

*Упътване.* Докажете предварително, че

$$c_n = \frac{a_n + b_n - |a_n - b_n|}{2},$$

$$d_n = \frac{a_n + b_n + |a_n - b_n|}{2}.$$

3. Нека

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

са две сходящи редици, които клонят към една и съща граница  $l$ . Докажете, че ако  $n$ -тият член  $c_n$  на една редица при всяко цяло положително число  $n$  се заключава между  $a_n$  и  $b_n$ , то редицата

$$c_1, c_2, c_3, \dots$$

е сходяща и клони към  $l$ . Тази теорема се различава от теоремата на § 6 по това, че не се иска непременно при всички (разбира се, цели положителни) стойности на  $n$  да имаме

$$a_n \leq c_n \leq b_n,$$

а се позволява при някои или при всички стойности на  $n$  да имаме

$$b_n \leq c_n \leq a_n.$$

4. Нека редицата

$$a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots$$

е сходяща и клони към  $a$ . Да се покаже, че каквито и да са числата  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , редицата

$$a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$$

е също сходяща и клони към  $a$ .

5. Нека редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е сходяща и  $\lim a_n > a$ . Докажете, че при всички достатъчно големи стойности на  $n$  имаме  $a_n > a$ .

## § 7. Монотонни редици

Една редица

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

се нарича монотонно растяща, ако при всички цели положителни стойности на  $n$  е изпълнено неравенството  $a_n \leq a_{n+1}$ . Редицата се нарича монотонно намаляваща, ако при всички цели положителни стойности на  $n$  е изпълнено неравенството  $a_n \geq a_{n+1}$ .

*Примери.* Редицата  $1, 2, 3, \dots$  е монотонно растяща.

Редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

е монотонно намаляваща.

Редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots$$

е също монотонно намаляваща.

Редицата

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

не е нито монотонно растяща, нито монотонно намаляваща.

Когато казваме накратко „монотонна редица“, имаме пред вид една редица, която или монотонно расте, или монотонно намалява.

Ако една монотонно растяща редица е сходяща, никой неин член не е по-голям от границата. Ако една монотонно намаляваща редица е сходяща, никой неин член не е по-малък от границата. Доказателството ще изложим само за монотонно растящи редици. За тази цел разглеждаме една монотонно растяща сходяща редица

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

и означаваме с  $a$  нейната граница. В такъв случай, както и да фиксираме цялото положително число  $k$ , ще имаме

$$a_k \leq a_n$$

при безбройно много стойности на  $n$  (по-точно при всички цели стойности на  $n$ , които не са по-малки от  $k$ ). Оттук получаваме въз основа на едно доказано вече свойство на сходящите редици

$$a_k \leq a,$$

с което доказателството е завършено.

**Теорема.** *Всяка ограничена монотонна редица е сходяща.*

**Доказателство.** В условието е дадено, че редицата е ограничена. За да покажем, че е сходяща, достатъчно е да установим, че тя не може да притежава повече от една точка на съгъстяване (поне една точка на съгъстяване тя има съгласно теоремата на Болцано–Вайерштрас). Доказателството ще извършим за монотонно растящи редици (случаят на монотонно намаляваща редица се третира аналогично). Нека

$$(1) \quad a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$$

е една монотонно растяща редица. Да допуснем, че  $\alpha$  и  $\beta$  са две нейни различни точки на съгъстяване, като  $\alpha < \beta$ . Избираме едно положително число  $\varepsilon < \frac{\beta - \alpha}{2}$ . Това може да се направи, защото  $\beta > \alpha$ . Тъй като  $\beta$  е една точка на съгъстяване на редицата (1), то във всяка околност на  $\beta$ , а следователно и в околността  $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$  има безбройно много членове на редицата. Нека  $a_k$  е такъв член, т. е.

$$\beta - \varepsilon < a_k < \beta + \varepsilon.$$

Обаче  $\alpha$  е също така точка на съгъстяване на редицата (1), т. е. и в околността  $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$  има също тъй безбройно много членове, а следователно *ще има и такива, чиито номера са по-големи от  $k$ .*

Нека  $a_l$  е такъв един член, т. е.

$$\alpha - \varepsilon < a_l < \alpha + \varepsilon \text{ и } l > k.$$

От последното неравенство следва, че  $a_l \geq a_k$ , тъй като редицата монотонно расте.

Като съберем почленно неравенството

$$a_l < \alpha + \varepsilon$$

и неравенството

$$\beta - \varepsilon < a_k,$$

получаваме

$$a_l + (\beta - \varepsilon) < a_k + (\alpha + \varepsilon)$$

или

$$a_l - a_k < (\alpha + \varepsilon) - (\beta - \varepsilon) = 2\varepsilon - (\beta - \alpha) < 0,$$

понеже  $\varepsilon < \frac{\beta - \alpha}{2}$ , а това противоречи на неравенството  $a_l \geq a_k$ . Полученото противоречие се дължи на допускането, че разглежданата редица има повече от една точка на съгъстяване. И така една монотонна редица не може да има повече от една точка на съгъстяване и следователно, щом е ограничена, тя е непременно сходяща.

*Пример.* Да разгледаме редицата с общ член  $a_n = x^n$  при  $0 \leq x < 1$ . Като повдигнем трите части на неравенството  $0 \leq x < 1$  в  $n$ -та степен, получаваме  $0 \leq x^n < 1$ , т. е. редицата е ограничена. Тая редица е монотонно намаляваща, защото

$$a_n - a_{n+1} = x^n - x^{n+1} = x^n(1 - x) \geq 0.$$

И така разглежданата редица е сходяща. Нека  $l$  е нейната граница. За да пресметнем стойността на  $l$ , умножаваме почленно двете сходящи редици.

$$\begin{aligned} x, x^2, \dots, x^n, \dots, \\ x, x, \dots, x, \dots, \end{aligned}$$

от които първата клони към  $l$ , а втората към  $x$ . Получаваме сходящата редица

$$x^2, x^3, \dots, x^{n+1}, \dots$$

която клони към  $xl$ . Но така получената редица е една подредица от редицата

$$x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$$

и следователно клони към  $l$ , т. е. като се възползуваме от единствеността на границата на една сходяща редица (границата е *единствената* точка на съгъстяване на редицата), намираме

$$xl = l,$$

или  $l(x - 1) = 0$ , тъй като  $x \neq 1$ , то  $l = 0$ .

*Въпрос.* Сходяща ли е редицата  $x^n$  при  $x > 1$ ? Сходяща ли е при  $x = 1$ ?

## § 8. Неперово число

Да разгледаме редицата с общ член

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ще покажем, че тая редица е сходяща. За тази цел развиваме бинома  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  по формулата на Нютон\* и получаваме

\*Това значи, че ние прилагаме при цели положителни стойности на  $n$  формулата

$$(a + b)^n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^{n-k}b^k + \dots + b^n,$$

където  $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2 \cdot 1}$  при цели положителни стойности на  $k$ . Ние често ще означаваме произведението  $k(k-1)\dots 2 \cdot 1$  със знака  $k!$ . Така

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} + \dots \\
&\quad + \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n!} \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\
&\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots \\
&\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Очевидно

$$\begin{aligned}
a_n &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots \\
&\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \dots \\
&\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\
&= a_{n+1} - \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) < a_{n+1}.
\end{aligned}$$

И така редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е растяща. За да покажем, че е сходяща, достатъчно е да покажем, че е ограничена отгоре (че редицата е ограничена отдолу, се вижда от това, че тя расте, и следователно  $a_1 = 2$  е една нейна долна граница).

Очевидно имаме

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1,$$

т. е.

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

От друга страна

$$k! = k(k-1) \dots 3 \cdot 2 \geq 2 \cdot 2 \dots 2 = 2^{k-1},$$

т. е.

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

което показва, че редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е ограничена и следователно (тъй като тя е монотонна) е сходяща. Границата на тая редица се означава обикновено с буквата  $e$ . Тази константа играе много важна роля в анализа. Тя служи за основа на така наречената Неперова (естествена) логаритмична система. В бъдеще (освен ако не е казано противното) при логаритмуване ще избираме винаги това число за основа на логаритмичната система. Тъй като всичките членове на редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

се намират между 2 и 3, то и границата на тази редица се намира между 2 и 3. Както ще видим по-късно, числото  $e$  е ирационално. Ние обаче можем да го пресметнем с произволно голяма точност. Ето няколко първи десетични знака на числото:

$$e = 2,718281828\dots$$

## § 9. Ограничени редици

Ако една редица е ограничена, това още не значи, тя е сходяща, защото тя може да има повече от една точка на сгъстяване. *Обаче от всяка ограничена редица може да се избере сходяща поредица.*

И наистина

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

е една *ограничена* редица. Според теоремата на Болцано–Вайерщрас тази редица има поне една точка на сгъстяване  $a$ . Във всяка околност на точката  $a$  има безбройно много членове на редицата; специално в околността  $(a - 1, a + 1)$  също има безбройно много членове на редицата. Нека  $a_{n_1}$  е един такъв член. В околността  $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$  също има безбройно много членове, т. е. ще има и такъв член  $a_{n_2}$ , за който  $n_2 > n_1$ . В околността  $\left(a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3}\right)$  избираме член  $a_{n_3}$ , за който  $n_3 > n_2$ , и т. н. Изобщо означаваме с  $a_{n_k}$  такъв

член на редицата (1), който принадлежи на околността  $\left(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}\right)$  и за който  $n_k > n_{k-1}$ . По този начин ние получаваме една подредица

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots,$$

членовете на която удовлетворяват неравенствата

$$a - \frac{1}{k} < a_{n_k} < a + \frac{1}{k}.$$

Обаче редиците с общ член  $a - \frac{1}{k}$  и  $a + \frac{1}{k}$  са сходящи и клонят към  $a$ , следователно редицата с общ член  $a_{n_k}$  е също сходяща (и също клони към  $a$ ).

Доказаното в този параграф твърдение се нарича понякога принцип за компактност.

От направените разсъждения е ясно, че може винаги да се избере подредица, която да клони към отнапред зададена точка на съгъстяване на дадената редица.

### § 10. Общо условие за сходимост на редиците (теорема на Коши)

За да бъде една редица

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

сходяща, необходимо и достатъчно е за всяко положително число  $\varepsilon$  да може да се намери такова число  $\nu$ , че при  $n > \nu$  да е изпълнено неравенството

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

при всяка цяла и положителна стойност на  $p$ .

**Доказателство.** Най-напред ще докажем, че условието е *необходимо*, т. е. ако редицата е сходяща, то условието на Коши (Cauchy) трябва да бъде изпълнено. И така нека редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е сходяща и нека  $a$  е нейната граница. Избираме произволно  $\varepsilon > 0$  и определяме  $\nu$  така, че при  $n > \nu$  да имаме

$$(1) \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$



Но щом  $n > \nu$  и  $p > 0$ , то  $n + p > \nu$  и следователно

$$(2) \quad |a_{n+p} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Като съберем почленно неравенствата (1) и (2), намираме

$$|a_n - a| + |a_{n+p} - a| < \varepsilon,$$

или като се възползуваме от неравенството

$$|a_{n+p} - a| + |a_n - a| \geq |(a_{n+p} - a) + (a - a_n)| = |a_{n+p} - a_n|,$$

получаваме

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

И така необходимостта на условието е доказана.

Сега ще покажем, че ако условието на Коши е изпълнено, то редицата е сходяща, т. е. ще покажем, че условието на Коши е *достатъчно*, за да осигури сходимостта на редицата.

И така нека условието на Коши е изпълнено. Ще покажем най-напред, че редицата е ограничена. За тази цел избираме например  $\varepsilon = 1$  и определяме  $\nu$  така, че при  $n > \nu$  да имаме

$$|a_{n+p} - a_n| < 1,$$

или (което е все същото)  $a_n - 1 < a_{n+p} < a_n + 1$ . Да фиксираме  $n$  и да оставим  $p$  да се мени. В такъв случай заключаваме, че редицата

$$(3) \quad a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots$$

е ограничена, а следователно и редицата

$$(4) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots,$$

която се отличава от редицата (3) само по краен брой членове, е също тъй ограничена.

Остава да покажем, че редицата (4) не може да има повече от една точка на съгъстяване (поне една точка на съгъстяване тя има съгласно теоремата на Болцано—Вайерщрас). Ние ще докажем това от противното. Нека  $\alpha$  и  $\beta$  са две различни точки на съгъстяване на редицата (4). Избираме  $\varepsilon < \frac{|\alpha - \beta|}{3}$ . Това може да се направи, понеже  $\alpha \neq \beta$ . Избираме  $\nu$  така, че при  $n > \nu$  и при всички цели положителни  $p$  да имаме

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

От друга страна, числото  $\alpha$  е една точка на съгъстяване на редицата (4). Това значи, че във всяка нейна околност, а следователно и в околността  $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$  има безбройно много членове на редицата, а следователно сигурно има членове, чиито номера са по-големи от  $\nu$ . Нека  $a_k$  е такъв член, тъй че

$$\alpha - \varepsilon < a_k < \alpha + \varepsilon \quad \text{и} \quad k > \nu$$

или

$$(5) \quad |a_k - \alpha| < \varepsilon, \quad k > \nu.$$

Обаче  $\beta$  е също точка на съгъстяване на редицата (4), т. е. използвайки аналогични разсъждения, можем да намерим член  $a_{k+q}$  с номер, по-голям от  $k$ , за който

$$(6) \quad |a_{k+q} - \beta| < \varepsilon.$$

От друга страна,

$$\begin{aligned} |\beta - \alpha| &= |(\beta - a_{k+q}) + (a_{k+q} - a_k) + (a_k - \alpha)| \\ &\leq |\beta - a_{k+q}| + |a_{k+q} - a_k| + |a_k - \alpha| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

както това се вижда от неравенствата (5) и (6) и от неравенството  $|a_{k+q} - a_k| < \varepsilon$ . Това обаче противоречи на условието, на което подчинихме числото  $\varepsilon$ . Полученото противоречие се дължи на допускането, че редицата (4) има повече от една точка на съгъстяване.

И така ние доказахме, че ако е изпълнено условието на Коши, редицата (4) е ограничена и има само една точка на съгъстяване, т. е. тя е сходяща.

Накрая ще споменем, че на теоремата на Коши може, разбира се, да се даде следната по-симетрична форма:

За да бъде редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

сходяща, необходимо и достатъчно е за всяко положително число  $\varepsilon$  да съществува такова число  $\nu$ , че при  $m > \nu$  и  $n > \nu$  да е изпълнено неравенството

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

### § 11. Несобствени точки

Понякога е удобно (при все че не е наложително) да се въведат двата нищо неозначаващи символа  $+\infty$  и  $-\infty$ . Тези два символа ще наричаме несобствени точки за разлика от реалните числа.

Каквото и да е реалното число  $x$ , ще пишем  $-\infty < x$  и  $x < +\infty$ .

Казваме, че  $+\infty$  е точка на сгъстяване за една редица от реални числа

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

ако тази редица не е ограничена отгоре.

Казваме, че  $-\infty$  е точка на сгъстяване на една редица от реални числа, ако тази редица не е ограничена отдолу.

Въведените по този начин точки на сгъстяване ще наричаме *несобствени* за разлика от редовните точки на сгъстяване, които ще наричаме *собствени*.

Всяка редица (дори да не е ограничена) притежава поне една собствена или несобствена точка на сгъстяване. И наистина, ако една редица не притежава несобствени точки на сгъстяване, тя е ограничена и отгоре, и отдолу и следователно според теоремата на Болцано–Вайерщрас тя притежава поне една собствена точка на сгъстяване.

### § 12. Най-дясна и най-лява точка на сгъстяване

Измежду точките на сгъстяване на една редица от числа

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

винаги има една най-дясна и една най-лява дори когато те са безбройно много. Ще установим съществуването на най-дясната точка на сгъстяване; съществуването на най-лява точка се установява по същия начин.

Ако  $+\infty$  е точка на сгъстяване на редицата, то  $+\infty$  е най-дясната точка на сгъстяване. Ако  $+\infty$  не е точка на сгъстяване, то разглежданата редица е ограничена отгоре. Нека  $m$  е една нейна горна граница. Да допуснем, че разглежданата редица притежава поне една собствена точка на сгъстяване и нека  $M$  е тяхното множество. Очевидно множеството  $M$  е ограничено отгоре, защото вдясно от  $m$  няма нито една точка на сгъстяване. Нека  $l$  е точната горна граница на  $M$ . В такъв случай каквото и да бъде положителното число  $\varepsilon$ , числото  $l - \varepsilon$  не е вече горна граница на  $M$  и следователно има поне една точка на сгъстяване  $\xi$ , за която  $l - \varepsilon < \xi$ . Като вземем под внимание още, че  $\xi \leq l$ , намираме  $l - \varepsilon < \xi < l + \varepsilon$ . Оттук следва, че в интервала  $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$  има

безбройно много членове на разглежданата редица

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

т. е.  $l$  е една нейна точка на съгъстяване. От друга страна, вдясно от  $l$  няма точки на съгъстяване и следователно  $l$  е най-дясната точка на съгъстяване. Остана да се разгледа случаят, когато разглежданата редица е ограничена отгоре (т. е.  $+\infty$  не е нейна точка на съгъстяване) и няма собствени точки на съгъстяване. В този случай редицата не може да бъде ограничена отдолу, защото в противен случай съгласно теоремата на Болцано–Вайерщрас тя би трябвало да има поне една собствена точка на съгъстяване. И така в този случай единствената точка на съгъстяване на редицата е  $-\infty$ , която е същевременно и най-дясната точка на съгъстяване. С това доказателството е завършено.

Най-дясната точка на съгъстяване на редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

се означава със символа  $\overline{\lim} a_n$  и се нарича limes superior (четете — лимес супериор), а най-лявата ѝ точка на съгъстяване се означава със символа  $\underline{\lim} a_n$  и се нарича limes inferior (четете — лимес инфериор).

За да бъде една ограничена редица

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

сходяща, необходимо и достатъчно е да имаме  $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$ .

При неограничените редици са особено интересни случаите, когато

$$\underline{\lim} a_n = +\infty$$

или когато

$$\overline{\lim} a_n = -\infty.$$

В първия случай редицата е ограничена отдолу, но няма собствени точки на съгъстяване. Такъв случай имаме тогава и само тогава, когато при всеки избор на числото  $A$  неравенството  $a_n \leq A$  може да бъде изпълнено най-много за краен брой стойности на  $n$  или, с други думи, каквото и да бъде числото  $A$ , може винаги да се намери число  $\nu$  по такъв начин, че при  $n > \nu$  да имаме  $a_n > A$ . В този случай казваме, че редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

дивергира към  $+\infty$  (или расте неограничено, или още клони към  $+\infty$ ), и пишем  $\lim a_n = +\infty$ .

В случая, когато  $\overline{\lim} a_n = -\infty$ , казваме, че редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

дивергира към  $-\infty$ , и пишем  $\lim a_n = -\infty$ . Това е в сила тогава и само тогава, когато при всеки избор на числото  $A$  е изпълнено неравенството  $a_n < A$  при всички достатъчно големи стойности на  $n$ .

**Пример.** Редицата

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

дивергира към  $+\infty$ .

Редицата

$$-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$$

дивергира към  $-\infty$ .

#### Общи задачи

1. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}.$$

*Упътване.* Използвайте, че

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

*Отговор.*  $\lim a_n = e^2$ .

2. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

*Отговор.*  $\lim a_n = e$ .

3. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n.$$

*Отговор.*  $\lim a_n = e$ .

4. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

*Решение.* При  $n > 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\lim a_n = \frac{1}{e}.$$

5. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

*Отговор.*  $\lim a_n = 1$ .

6. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n,$$

където  $k$  е цяло положително число.

*Упътване.* Разсъждавайте индуктивно по  $k$ , като използвате, че

$$\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{k}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{1 + \frac{k}{n+1}}.$$

*Отговор.*  $\lim a_n = e^k$ .

7. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n,$$

където  $k$  е цяло положително число.

*Упътване.* Използвайте, че

$$\left(1 - \frac{k+1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{k}{n-1}\right)^n.$$

*Отговор.*  $\lim a_n = \frac{1}{e^k}$ .

8. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

монотонно намалявайки, клони към  $e$ .

*Упътване.* Използвайте неравенството на Бернули.

*Забележка.* Като вземем под внимание, че  $a_n \geq 0$ , получаваме директно доказателство за сходимост на редицата с общ член  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ . Това обстоятелство може да се използва, за да се дефинира константата  $e$  като  $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ .

9. Да се покаже, че при всички цели положителни стойности на  $n$  са валидни неравенствата

$$n^n e^{-n+1} \leq n! \leq n^{n+1} e^{-n+1}.$$

*Упътване.* Покажете, че редицата с общ член  $\frac{n^n e^{-n}}{n!}$  е намаляваща, а редицата с общ член  $\frac{n^{n+1} e^{-n}}{n!}$  е растяща.

10. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n + \dots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^n$$

е сходяща и клони към  $\frac{1}{e-1}$ .

*Упътване.* Докажете, че

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \leq \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

като използвате, че

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \leq \frac{1}{2}$$

и че неравенството на Бернули дава

$$1 - \frac{k}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k.$$

Нека  $\varepsilon$  е произволно положително число. Изберете цялото число  $\nu$  толкова голямо, че да имаме

$$\frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{e^\nu(e-1)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

и го фиксирайте. Като си послужите с неравенството

$$\begin{aligned} \left|a_n - \frac{1}{e-1}\right| &\leq \left|\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{e}\right| + \left|\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n - \frac{1}{e^2}\right| + \dots + \left|\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^n - \frac{1}{e^\nu}\right| \\ &\quad + \left(1 - \frac{\nu+1}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{\nu+2}{n}\right)^n + \dots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^n + \frac{1}{e^\nu(e-1)} \end{aligned}$$

покажете, че при всички достатъчно големи стойности на  $n$  имаме

$$\left|a_n - \frac{1}{e-1}\right| < \varepsilon.$$

11. Нека  $k$  е цяло положително число. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^n$$

е сходяща и границата ѝ удовлетворява уравнението  $x^k = e$ .

*Упътване.* Като вземете под внимание, че  $a_n > 0$  и че редицата с общ член  $a_{nk} = \left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{kn}$  е подредица на монотонно растящата редица с общ член  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , докажете, че редицата  $a_1, a_2, a_3, \dots$  расте монотонно. След това, като използвате, че

$$\left(1 + \frac{1}{kn}\right)^{kn} < 3 \leq 3^k,$$

т. е. че

$$a_n < 3,$$

покажете, че редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е сходяща.

12. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2} - \frac{n}{3}$$

Отговор.  $\lim a_n = \frac{1}{2}$ .

13. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

е сходяща.

Упътване. От

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$$

се вижда, че редицата е монотонно растяща. От

$$a_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

се вижда, че тя е ограничена отгоре.

14. Покажете, че редицата с общ член

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

е разходяща.

Упътване. Използвайте неравенството

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

15. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

е сходяща и да се намери нейната граница.

Упътване. Използвайте неравенствата

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$

16. Да се докаже, че редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

за която

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

и

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2},$$

е сходяща, и да се намери нейната граница.

Упътване. Покажете, че редицата е монотонно растяща, като използвате, че

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)^2}{2}.$$

Покажете индуктивно, че

$$a_n < 1.$$

Отговор.  $\lim a_n = 1$ .



17. Да се покаже, че редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

при която  $a_1 = 2$  и

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2},$$

е разходяща.

*Решение.* Да допуснем, че редицата е сходяща и клони към  $c$ . В такъв случай редицата

$$a_2, a_3, \dots, a_{n+1}, \dots$$

също клони към  $c$ , а редицата

$$a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2, \dots$$

клони към  $c^2$ . Като вземем под внимание, че

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2},$$

намираме

$$c = \frac{c^2 + 1}{2},$$

или  $c^2 - 2c + 1 = 0$ , откъдето  $c = 1$ .

От друга страна, редицата  $a_1, a_2, a_3, \dots$  е монотонно растяща, както това се вижда от равенството

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)^2}{2}.$$

Въз основа на това, като вземем под внимание, че  $a_1 = 2$ , намираме  $a_n \geq 2$ . Оттук заключаваме, че точката 1 не е точка на съгъстяване на дадената редица и следователно тази редица не може да клони към 1. По такъв начин предположението, че редицата е сходяща, ни доведе до противоречие, т. е. тя е разходяща.

18. Покажете, че редицата с общ член  $a_n = \cos nx$  е разходяща, ако  $\cos x \neq 1$ .

*Решение.* Да предположим, че редицата е сходяща и клони към  $c$ . В такъв случай нейната подредица

$$\cos 3x, \cos 4x, \dots, \cos(n+2)x, \dots$$

е също сходяща и също клони към  $c$ , поради което редицата с общ член

$$b_n = \cos nx + \cos(n+2)x$$

клони към  $2c$ . От друга страна, и редицата, чийто  $n$ -ти член е  $\cos(n+1)x$ , клони към  $c$ , т. е. като извършим граничен преход в равенството

$$\cos nx + \cos(n+2)x = 2 \cos x \cos(n+1)x,$$

намираме

$$2c = 2c \cos x$$

и следователно  $2c(1 - \cos x) = 0$ . Оттук, като вземем под внимание, че  $\cos x \neq 1$ , намираме  $c = 0$ . И така, ако дадената редица е сходяща, нейната граница е равна на нула.

От друга страна, като извършим граничен преход в равенството

$$\cos 2nx = 2 \cos^2 nx - 1$$

и вземем под внимание, че редицата

$$\cos 2x, \cos 4x, \dots, \cos 2nx, \dots$$

е подредица на дадената редица и следователно клони към  $c$ , получаваме  $c = 2c^2 - 1$ , което очевидно не се удовлетворява при  $c = 0$ . Полученото противоречие се дължи на допускането, че дадената редица е сходяща.

19. Сходяща ли е редицата с общ член  $a_n = \cos nx$ , когато  $\cos x = 1$ ?

20. Да се покаже, че редицата с общ член  $a_n = \sin nx$  е разходяща, когато  $\sin x \neq 0$ .

21. Да се докаже, че редицата  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , за която  $a_1 = a$ ,  $a_2 = b$  и

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \text{ при } n = 3, 4, \dots$$

е сходяща, и да се намери нейната граница.

*Упътване.* От равенството

$$a_n - a_{n-1} = -\frac{1}{2}(a_{n-1} - a_{n-2})$$

се вижда, че разликите

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots$$

образуват геометрична прогресия. Това обстоятелство ни позволява да изразим  $a_n$  чрез  $n$ , като използваме, че

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}).$$

*Отговор.*  $\lim a_n = \frac{a + 2b}{3}$ .

22. Дадени са две редици

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots,$$

където

$$a_1 = 0, \quad b_1 = \alpha,$$

$$a_{n+1} = \frac{\alpha + b_n}{1 + b_n},$$

$$b_{n+1} = \frac{\alpha + a_n}{1 + a_n},$$

$$\alpha \geq 1.$$

Да се докаже, че двете редици са сходящи и клонят към една и съща неотрицателна граница, която удовлетворява уравнението  $x^2 = \alpha$ .

*Забележка.* Оттук се вижда, че уравнението  $x^2 = \alpha$  сигурно притежава неотрицателно решение поне при  $\alpha \geq 1$ . Не е трудно да се убедим, че това уравнение притежава неотрицателно решение и при  $0 < \alpha \leq 1$ , като разгледаме помощното уравнение  $y^2 = \frac{1}{\alpha}$ . Случаят  $\alpha = 0$  е тривиален. И така уравнението  $x^2 = \alpha$  сигурно има неотрицателно решение при  $\alpha \geq 0$ . Това решение е единствено, защото от  $p \neq q$  и  $p > 0$ ,  $q > 0$  следва  $p^2 \neq q^2$  (така, ако  $p > q \geq 0$ , то  $p^2 > q^2$ ). Читателят знае, че неотрицателното решение на уравнението  $x^2 = \alpha$  при  $\alpha \geq 0$  се означава със символа  $\sqrt{\alpha}$ .

*Упътване.* Покажете, че

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n,$$

като си послужите с равенствата

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{(\alpha - 1)(b_n - a_n)}{(1 + a_n)(1 + b_n)}, \\ b_n - b_{n+1} &= \frac{(\alpha - 1)(a_n - a_{n-1})}{(1 + a_n)(1 + a_{n-1})}, \\ a_{n+1} - a_n &= \frac{(\alpha - 1)(b_{n-1} - b_n)}{(1 + b_n)(1 + b_{n-1})}. \end{aligned}$$

За да покажете, че двете редици клонят към една и съща граница, която удовлетворява уравнението  $x^2 = \alpha$ , положете  $\lim a_n = a$ ,  $\lim b_n = b$  и използвайте, че

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha + b}{1 + b}, \\ b &= \frac{\alpha + a}{1 + a}. \end{aligned}$$

*Забележка.* Интервалите  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$ , ... образуват Канторова система, която дефинира числото  $\sqrt{\alpha}$ .

23. Нека  $a$  и  $b$  са две неотрицателни числа и нека  $a \geq b$ ,  $a \neq 0$ . Образоваме двете редици\*

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a + b}{2}, & a_2 &= \frac{a_1 + b_1}{2}, & \dots, & & a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, & \dots \\ b_1 &= \frac{2ab}{a + b}, & b_2 &= \frac{2a_1b_1}{a_1 + b_1}, & \dots, & & b_{n+1} &= \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, & \dots \end{aligned}$$

Покажете, че тия две редици са сходящи и имат обща граница, която удовлетворява уравнението  $x^2 = ab$ . Използвайте този резултат, за да установите съществуването на неотрицателно решение на уравнението  $x^2 = c$  при всяко  $c \geq 0$ .

*Упътване.* Покажете, че

$$b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n,$$

и използвайте тези неравенства, за да установите, че двете редици са сходящи.

За да покажете, че двете редици имат обща граница, използвайте равенството

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

За да покажете, че границата на двете редици удовлетворява уравнението  $x^2 = c$ , използвайте, че  $a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n$ .

За да установите съществуването на неотрицателно решение на уравнението  $x^2 = c$  при  $c \geq 0$ , положете  $a = c$ ,  $b = 1$  при  $c \geq 1$  и

$$a = 1, \quad b = c \quad \text{при} \quad c < 1.$$

\*Членът  $a_{n+1}$  представлява средна аритметична, а членът  $b_{n+1}$  — средна хармонична на членовете  $a_n$  и  $b_n$ . Едно число  $c$  се нарича средна хармонична на двете положителни числа  $a$  и  $b$ , ако  $\frac{1}{c}$  е средна аритметична на  $\frac{1}{a}$  и  $\frac{1}{b}$ , т. е.

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad \text{или} \quad c = \frac{2ab}{a + b}.$$

*Забележка.* Интервалите  $[b_1, a_1], [b_2, a_2], \dots$  образуват Канторова система, която дефинира числото  $\sqrt{ab}$ .

24. Нека  $a$  и  $b$  са две неотрицателни числа и нека  $a \geq b$ . Образоваме двете редици

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a+b}{2}, & a_2 &= \frac{a_1+b_1}{2}, & \dots, & a_{n+1} &= \frac{a_n+b_n}{2}, & \dots, \\ b_1 &= \sqrt{ab}, & b_2 &= \sqrt{a_1b_1}, & \dots, & b_{n+1} &= \sqrt{a_nb_n}, & \dots \end{aligned}$$

Покажете, че тези две редици са сходящи и имат обща граница.

*Забележка 1.* Общата граница на горните две редици се нарича средна аритметично-геометрична на двете числа  $a$  и  $b$ . Тази средна е използвана от Гаус в теорията на елиптичните интеграли.

*Забележка 2.* Относно дефиницията на квадратния корен вж. първата забележка към зад. 22.

*Упътване.* За да установите сходимостта на редиците, докажете, че

$$b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n,$$

а за да покажете, че те клонят към обща граница, използвайте че

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

25. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

е сходяща, и да се намери нейната граница.

*Упътване.* Използвайте, че

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq 1.$$

26. Нека редицата

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е сходяща и клони към  $a$ . Да се покаже, че редицата

$$\frac{a_1}{1}, \frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \dots, \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}, \dots$$

е също сходяща и клони към  $a$ .

*Упътване.* Нека  $\varepsilon > 0$ . Изберете  $m$  толкова голямо, че при  $p > m$  да имаме  $|a_p - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ . В такъв случай при  $n > m$

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - a \right| &= \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \dots + (a_m - a) + (a_{m+1} - a) + \dots + (a_n - a)}{n} \right| \\ &\leq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \dots + |a_m - a| + |a_{m+1} - a| + \dots + |a_n - a|}{n} \\ &\leq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \dots + |a_m - a|}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n-m}{n}. \end{aligned}$$

Фиксирайте  $m$ . Тогава при всички достатъчно големи стойности на  $n$

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - a \right| < \varepsilon.$$

27. Една редица

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

се нарича лимитируема с помощта на средни аритметични, ако редицата

$$\frac{a_1}{1}, \frac{a_1 + a_2}{2}, \dots, \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \dots$$

е сходяща. Границата на

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

се нарича обобщена граница на  $a_n$ . От предната задача се вижда, че всяка сходяща редица е лимитируема с помощта на средни аритметични и нейната обобщена граница е равна на редовната ѝ граница.

Да се покаже, че разходящата редица с общ член  $a_n = \cos nx$  е лимитируема с помощта на средни аритметични и нейната обобщена граница е равна на нула, когато  $\cos x \neq 1$ .

*Упътване.* Използвайте, че

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

28. Нека

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

са две редици от числа. Ако редицата

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

расте неограничено, като при това

$$b_n < b_{n+1} \text{ и } b_n \neq 0,$$

то от съществуването на границата

$$l = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

следва, че редицата

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

е сходяща и клони също към  $l$ .

*Упътване.* Нека  $\varepsilon > 0$ . Изберете  $m$  толкова голямо, че при  $n > m$  да имате

$$\left| \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} - l \right| < \varepsilon,$$

т. е.

$$(l - \varepsilon)(b_n - b_{n-1}) < a_n - a_{n-1} < (l + \varepsilon)(b_n - b_{n-1}).$$

Нека цялото число  $k$  е по-голямо от  $m$ . В такъв случай, като дадете на  $n$  стойностите  $m + 1, m + 2, \dots, k$  и съберете получените неравенства, ще намерите

$$(l - \varepsilon)(b_k - b_m) < a_k - a_m < (l + \varepsilon)(b_k - b_m),$$

т. е.

$$\left| \frac{a_k - a_m}{b_k - b_m} - l \right| < \varepsilon.$$

Отгук, като вземете под внимание, че

$$\left| \frac{a_k}{b_k} - l \right| = \left| \frac{a_m}{b_k} - \frac{b_m}{b_k} \frac{a_k - a_m}{b_k - b_m} + \frac{a_k - a_m}{b_k - b_m} - l \right| \leq \left| \frac{a_m}{b_k} \right| + \left| \frac{b_m}{b_k} \right| \left| \frac{a_k - a_m}{b_k - b_m} \right| + \left| \frac{a_k - a_m}{b_k - b_m} - l \right|,$$

ще намерите

$$\left| \frac{a_k}{b_k} - l \right| < \left| \frac{a_m}{b_k} \right| + \left| \frac{b_m}{b_k} \right| (|l| + \varepsilon) + \varepsilon.$$

Фиксирайте  $m$ . Тогава при всички достатъчно големи стойности на  $k$  ще получите

$$\left| \frac{a_k}{b_k} - l \right| < 2\varepsilon.$$

29. Нека  $k$  е цяло положително число. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$$

е сходяща и да се намери нейната граница.

*Упътване.* Използвайте предната задача.

*Отговор.*  $\lim a_n = \frac{1}{k+1}$ .

30. Нека редиците

$$a_0, a_1, a_2, \dots,$$

$$b_0, b_1, b_2, \dots$$

са сходящи и  $\lim a_n = a$ ,  $\lim b_n = b$ . Да се покаже, че редицата с общ член

$$c_n = \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}{n+1}$$

е сходяща и клони към  $ab$ .

31. Нека  $a$  е произволно неотрицателно число и  $k$  е цяло число, по-голямо от 1. Да се покаже, че редицата

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

където  $x_1$  е произволно число и

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}},$$

е сходяща и че нейната граница е неотрицателна и удовлетворява уравнението  $x^k = a$ .

*Упътване.* Покажете, че  $x_n > 0$ , като използвате равенството

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n^k + a}{kx_n^{k-1}}.$$

След това покажете, че  $x_{n+1}^k \geq a$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$ , като си послужите с неравенството на Бернули по следния начин:

$$x_{n+1}^k - a = \left( x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}} \right)^k - a = x_n^k \left( 1 - \frac{x_n^k - a}{kx_n^k} \right)^k - a \geq x_n^k \left( 1 - k \frac{x_n^k - a}{kx_n^k} \right) - a = 0.$$

По-нататък покажете, че редицата

$$x_2, x_3, \dots$$

монотонно намалява, като използвате за целта равенството

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}}.$$

32. Нека  $k$  е цяло положително число. Покажете, че уравнението  $x^k = a$  не може да има повече от един неотрицателен корен.

*Упътване.* Използвайте, че при  $p \geq 0$  от неравенството  $q > p$  следва неравенството  $q^k > p^k$ , нещо, което може да се установи например индуктивно чрез почленно умножаване на двете неравенства  $q^{k-1} > p^{k-1}$  и  $q > p$ .

*Забележка.* Единственото (съгласно зад. 32) и сигурно съществуващото (съгласно зад. 31) неотрицателно решение на уравнението  $x^k = a$  при  $a \geq 0$  се означава със символа  $\sqrt[k]{a}$  или  $a^{\frac{1}{k}}$ .

*От този момент нататък ние постоянно ще използваме тези символи.*

33. Нека  $k$  е цяло положително число и  $a$  е неотрицателно число. На всяко цяло положително число  $n$  съпоставяме най-голямото цяло неотрицателно число  $p_n$ , за което е в сила неравенството

$$\left(\frac{p_n}{n}\right)^k \leq a.$$

Покажете, че редицата с общ член  $\frac{p_n}{n}$  е сходяща и клони към  $\sqrt[k]{a}$ .

*Упътване.* Покажете, че при всяко цяло положително  $m$  имаме

$$a < \left(\frac{p_m + 1}{m}\right)^k$$

и следователно при всеки избор на двете цели положителни числа  $n$  и  $m$  е в сила неравенството

$$\frac{p_n}{n} < \frac{p_m + 1}{m}.$$

Извлечете отгук, че

$$\left|\frac{p_n}{n} - \frac{p_m}{m}\right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Това ни дава възможност да приложим теоремата на Коши от § 10 на тази глава.

34. Нека редицата от неотрицателни числа

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е сходяща и клони към  $a$  и нека  $k$  е цяло число, по-голямо от 1. Да се докаже, че редицата

$$\sqrt[k]{a_1}, \sqrt[k]{a_2}, \sqrt[k]{a_3}, \dots$$

е сходяща и клони към  $\sqrt[k]{a}$ .

*Упътване.* При  $a > 0$  използвайте, че

$$\left|\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{a_n}\right| = \frac{|a - a_n|}{a^{\frac{k-1}{k}} + a^{\frac{k-2}{k}} a_n^{\frac{1}{k}} + \dots + a_n^{\frac{k-1}{k}}} \leq \frac{|a - a_n|}{a^{\frac{k-1}{k}}}.$$

При  $a = 0$  използвайте, че каквото и да бъде положително число  $\varepsilon$ , при всички достатъчно големи стойности на  $n$  имаме  $a_n < \varepsilon^k$  и следователно  $\sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$ .

35. Нека  $a > 0$ . Да се докаже, че редицата с общ член

$$a_n = \sqrt[n]{a}$$

клони към 1.

*Упътване.* Нека  $a \geq 1$ . Положете  $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$ . В такъв случай  $\alpha_n \geq 0$ . Очевидно  $a = (1 + \alpha_n)^n$ , т. е. съгласно неравенството на Бернули

$$a \geq 1 + n\alpha_n,$$

откъдето  $0 \leq \alpha_n \leq \frac{a-1}{n}$  и следователно  $\lim \alpha_n = 0$ . Аналогично се разглежда случаят, когато  $0 < a < 1$ .

36. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \sqrt[n]{n}$$

клони към 1.

*Упътване.* Положете  $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n$ . В такъв случай  $\alpha_n \geq 0$  и  $n = (1 + \alpha_n)^n$  и следователно

$$n = 1 + \frac{n}{1!}\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2 + \dots,$$

откъдето

$$n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2, \text{ т. е. при } n > 1$$

$$\alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

37. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \left(\frac{1 + \sqrt[n]{e}}{2}\right)^n$$

е сходяща и да се пресметне нейната граница.

*Упътване.* Като използвате неравенствата

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n,$$

валидни при  $n = 2, 3, \dots$ , покажете, че

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < a_n < \left(1 + \frac{1}{2(n-1)}\right)^n.$$

*Отговор.*  $\lim a_n = \sqrt{e}$ .

38. Ако съществува границата

$$l = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

и  $a_n > 0$ , то редицата с общ член

$$b_n = \sqrt[n]{a_n}$$

е сходяща и клони към  $l$ .



*Упътване.* Да разгледаме случая, когато  $l > 0$ . Нека  $\varepsilon$  е произволно положително число, по-малко от  $l$ . Избираме  $m$  толкова голямо, че при  $n \geq m$  да имаме

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon$$

или

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon.$$

Нека  $k$  е цяло число, по-голямо от  $m$ . В такъв случай, като дадем на  $n$  стойностите  $m, m + 1, \dots, k - 1$  и умножим получените неравенства, ще получим

$$(l - \varepsilon)^{k-m} < \frac{a_k}{a_m} < (l + \varepsilon)^{k-m}$$

или

$$(l - \varepsilon) \frac{\sqrt[k]{a_m}}{\sqrt[k]{(l - \varepsilon)^m}} < \sqrt[k]{a_k} < (l + \varepsilon) \frac{\sqrt[k]{a_m}}{\sqrt[k]{(l + \varepsilon)^m}}.$$

Фиксираме  $m$ . В такъв случай, като вземем под внимание, че

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_m} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(l + \varepsilon)^m} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(l - \varepsilon)^m} = 1,$$

получаваме при достатъчно големи стойности на  $k$

$$l - 2\varepsilon < \sqrt[k]{a_k} < l + 2\varepsilon.$$

Случаят  $l = 0$  се разглежда още по-просто.

39. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

е сходяща и клони към  $\frac{1}{e}$ .

*Упътване.* Използвайте зад. 38.

40. Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$$

е сходяща и да се пресметне нейната граница.

*Упътване.* Използвайте зад. 38.

*Отговор.*  $\lim a_n = \frac{4}{e}$ .

41. Нека  $x > 0$ . Да се покаже, че редицата с общ член

$$a_n = 2^n (\sqrt[n]{x} - 1)$$

е сходяща.

*Упътване.* Да разгледаме първо случая, когато  $x > 1$ . В такъв случай  $a_n > 0$ . Покажете, че в този случай

$$\frac{a_n}{a_n + 1} = \frac{2^{n+1} \sqrt[n]{x} + 1}{2} > 1.$$

Случаят, когато  $0 < x < 1$ , може да се сведе към разглеждания, като се вземе под внимание, че

$$a_n = -2^n \left( \sqrt[n]{\frac{1}{x}} - 1 \right) \cdot \sqrt[n]{x}.$$

Случаят, когато  $x = 1$ , е тривиален.

*Забележка.* Границата на разгледаната редица

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

се означава обикновено със символа  $\ln x$ . По-късно ще се запознаем с други дефиниции на този символ, които са еквивалентни на тази, която даваме сега.

42. Като се използва дефиницията на символа  $\ln x$  от предната задача, да се докаже, че при всички положителни стойности на  $x$  и  $y$  имаме

$$\begin{aligned}\ln xy &= \ln x + \ln y, \\ \ln \frac{x}{y} &= \ln x - \ln y.\end{aligned}$$

*Упътване.* Използвайте, че

$$\begin{aligned}n(\sqrt[n]{xy} - 1) &= \sqrt[n]{x} \cdot n(\sqrt[n]{y} - 1) + n(\sqrt[n]{x} - 1), \\ n\left(\sqrt[n]{\frac{x}{y}} - 1\right) &= n(\sqrt[n]{x} - 1) - n(\sqrt[n]{y} - 1)\sqrt[n]{\frac{x}{y}}.\end{aligned}$$

43. Да се докаже, че при всички стойности на  $x$  редицата с общ член

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

е сходяща.

*Упътване.* При  $x \geq 0$  използвайте, че

$$\begin{aligned}a_n &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{x^3}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right),\end{aligned}$$

и покажете, че редицата е монотонна растяща и ограничена.

При  $x < 0$  положете  $-x = t$  и използвайте, че

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n &= \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{n-t}\right)^n}, \\ \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n &\leq \left(1 + \frac{t}{n-t}\right)^n \leq \left(1 + \frac{t}{n-k}\right)^{n-k} \left(1 + \frac{t}{n-k}\right)^k,\end{aligned}$$

където  $k$  е цяло число, по-голямо от  $t$ , и  $n > k$ .

*Забележка.* Границата на разгледаната редица се означава със символа  $e^x$ . По-късно ще се запознаем с друга еквивалентна дефиниция.

44. Нека

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

е произволна редица от реални числа. Нека  $b_n$  е точната горна граница на редицата

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$$

Да се покаже, че  $\overline{\lim} a_n = \lim b_n$ .

*Забележка.* Това твърдение е вярно и тогава, когато редицата  $a_1, a_2, \dots$  не е ограничена отгоре. В този случай трябва да се смята по дефиниция

$$b_n = \infty \quad \text{и} \quad \lim b_n = \infty.$$

### Глава III

#### БЕЗКРАЙНИ РЕДОВЕ

#### § 1. Сходимость на редовете

Символ от вида

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots,$$

или по-кратко

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

се нарича *ред*. Този символ, разбира се, е лишен от всякакъв смисъл, докато не сме казали какво ще означаваме с него. Символът (1) се различава съществено от аналогични символи, които са съставени от краен брой събираеми, по това, че ние знаем какво означава сума от краен брой събираеми, но още никъде не сме казали какво означава съдържащият безбройно много събираеми символ (1).

Сумата

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

от първите  $n$  члена на реда (1) ще наричаме негова  $n$ -та частична (парциална) сума. Тя във всеки случай има смисъл за нас, защото е съставена от краен брой събираеми. Да означим тази  $n$ -та частична сума с  $s_n$ , т. е.

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \dots,$$

и да разгледаме безкрайната редица от числа

$$(2) \quad s_1, s_2, s_3, \dots$$

Ако редицата (2) е сходяща, ще казваме, че и редът (1) е сходящ (в противен случай ще казваме, че той е разходящ). Границата на редицата (2) се нарича сума на реда (1). И така *един ред се нарича сходящ, когато редицата от частичните му суми е сходяща. Сума на един сходящ ред се нарича границата на редицата от частичните му суми.*

Когато редът (1) е сходящ, символът (1) се използва за означаване на сумата му. И така ние казахме какво ще означаваме със символа (1) *само* когато редът е сходящ, т. е. за разлика от крайните суми символът

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

означава число само в някои случаи.

Пример 1. Редът

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

е сходящ. За да покажем това, разглеждаме неговата  $n$ -та частична сума

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Редицата с общ член  $1 - \frac{1}{n+1}$  е сходяща и клони към 1. И така ние не само установихме, че редът е сходящ, но и пресметнахме неговата сума.

Пример 2. Редът

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

е разходящ, защото редицата от частичните му суми

$$1, 2, 3, \dots$$

е неограничена и следователно разходяща.

Пример 3. Редът\*

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

е също разходящ, защото редицата от частичните му суми

$$1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

има две точки на сгъстяване и следователно е разходяща.

И така ние въведохме понятието сума само за сходящите редове и следователно само за такива редове ще можем да се ползуваме от това понятие (освен ако не го дефинираме другояче).

В теорията на редовете от основно значение е да умеем да определяме дали един ред е сходящ или разходящ. Тук ще дадем едно важно необходимо условие за сходимост на един ред.

За да бъде един ред

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

сходящ, необходимо е редицата от членовете му

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

да клони към нула.

---

\*Ние тук имаме пред вид реда

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$$

С подобни съкращения в означенията ние често ще си служим в бъдеще.

Да допуснем, че редът е сходящ. В такъв случай от частичните му суми

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

е сходяща. Нейната подредица

$$S_2, S_3, \dots, S_{n+1}, \dots$$

следователно е сходяща и клони към същата граница, поради което редицата с общ член

$$u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

клони към нула.

Така например редът

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

сигурно не е сходящ, защото общият му член не клони към нула.

Установеното условие обаче не е достатъчно. Да вземем за пример реда

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

който се нарича *хармоничен ред*. Общият му член клони към нула, но редът не е сходящ. Наистина нека  $S_n$  е  $n$ -тата му частична сума. Ако допуснем, че редицата

$$S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_n, \dots$$

е сходяща, то нейната подредица

$$S_2, S_4, S_6, \dots, S_{2n}, \dots$$

трябва също да бъде сходяща и да клони към същата граница, поради което разликата  $S_{2n} - S_n$  трябва да клони към нула. Това обаче не е вярно, защото

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

## § 2. Геометрична прогресия

В бъдещето ние често ще си служим с безкрайния ред

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots,$$

който се нарича *геометрична прогресия*. При  $|x| \geq 1$  този ред е разходящ, защото  $|x|^{n-1} \geq 1$ , и следователно общият му член не клони към нула. Ние ще покажем, че при  $|x| < 1$  този ред е сходящ и сумата му е  $\frac{1}{1-x}$ . И наистина нека  $S_n$  е неговата  $n$ -та частична сума. Очевидно имаме

$$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}.$$

Тъй като  $|x| < 1$ , то редицата с общ член  $|x^n| = |x|^n$  клони към нула. Оттук следва, че и редицата с общ член  $\frac{x^n}{1-x}$  също клони към нула, т. е. редицата с общ член  $S_n$  е сходяща и клони към  $\frac{1}{1-x}$ . И така при  $|x| < 1$  геометричната прогресия е сходяща и

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

### § 3. Общо условия на Коши за сходимост на редовете

За да бъде редът

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

сходящ, е необходимо и достатъчно за всяко положително число  $\varepsilon$  да може да се намери такова число  $\nu$ , че при  $n > \nu$  да е изпълнено неравенството

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

каквото и да е цялото положително число  $p$ .

И наистина, ако означим  $n$ -тата частична сума на дадения ред с  $S_n$ , получаваме

$$S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + \dots + u_{n+p}.$$

Това ни дава възможност да редактираме по следния начин горната теорема: за да бъде редът

$$u_1 + u_2 + \dots$$

сходящ, необходимо и достатъчно е на всяко положително число  $\varepsilon$  да може да се съпостави число  $\nu$  така, че при  $n > \nu$  да е изпълнено неравенството

$$(1) \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

при всички цели положителни стойности на  $p$ .

При тази редакция на теоремата нейната вярност е очевидна. Тя изразява, че за да бъде един ред сходящ, необходимо и достатъчно е редицата от частичните му суми да удовлетворява условието (1) (т. е. да бъде сходяща).

### § 4. Елементарни свойства на редовете

Ако от един сходящ ред

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

премахнем краен брой членове

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k,$$

получаваме сходящ ред. Ако от един разходящ ред премахнем краен брой членове, получаваме пак разходящ ред. И наистина да разгледаме двата реда

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots,$$

$$(2) \quad u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \dots$$

Нека  $n$ -тата частична сума на реда (2) е  $\sigma_n$  и  $k + n$ -тата частична сума на реда (1) е  $S_{k+n}$ . В такъв случай имаме

$$(3) \quad S_{k+n} = (u_1 + u_2 + \dots + u_k) + \sigma_n.$$

От това равенство е ясно, че редицата с общ член  $\sigma_n$  е сходяща тогава и само тогава, когато редицата с общ член  $S_{k+n}$  е сходяща.

Нека  $S$  е сумата на реда (1) и  $\sigma$  е сумата на реда (2). Като извършим граничен преход в равенството (3), ще получим

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_k + \sigma.$$

Аналогично се вижда, че ако към един сходящ (съответно разходящ) ред прибавим краен брой членове, получаваме пак сходящ (съответно разходящ) ред.

Читателят знае как се смята с крайни суми. Ние сега обаче изучаваме *безкрайни* суми. Разбира се, ако сме доказали някое твърдение за крайни суми, но не сме го доказали за безкрайни редове, не можем да твърдим, че доказаното от нас е валидно и за безкрайните редове. Има много случаи, при които за безкрайните редове не са верни твърдения, които ние знаем за суми с краен брой събираеми, дори когато броят на събираемите може да бъде произволно голям. Обяснението на това явление е просто: макар за суми с краен брой събираеми ние и да сме доказали тези твърдения, за верността им при *безкрайните* суми не сме дали доказателство. Ето един пример: ние знаем, че при суми с краен брой събираеми могат да се разкрият скоби, като

се спазват познатите правила; при безкрайните редове това не винаги може да се прави; така например редът

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

или, което е все също,

$$0 + 0 + 0 + \dots$$

е сходящ, защото редицата от частичните му суми е съставена от нули и следователно е сходяща; сумата на реда е нула. Ако разкрием формално скобите, получаваме ред, който няма сума:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Този ред е разходящ, защото общият му член не клони към нула. Поставяме отново скоби, обаче този път по следния начин:

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$$

Така получаваме реда

$$1 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

Този ред е сходящ и сумата му е 1, защото редицата от парциалните му суми клони към 1.

Разбира се, няма нищо странно в това, че макар и да сме доказали някоя теорема при някои условия, заключението може и да не е вярно, ако не са налице условията, при които е извършено доказателството.

Впоследствие често ще се ползваме от следното свойство на сходящите редове: нека

$$u_1 + u_2 + \dots$$

$$v_1 + v_2 + \dots$$

са два сходящи реда, сумите на които са съответно  $S$  и  $\sigma$ , и нека  $a$  и  $b$  са две произволни числа. В такъв случай редът

$$(4) \quad (au_1 + bv_1) + (au_2 + bv_2) + (au_3 + bv_3) + \dots$$

е сходящ и сумата му е  $aS + b\sigma$ .

И наистина нека  $S_n$ ,  $\sigma_n$  и  $\Sigma_n$  са  $n$ -тите частични суми съответно на първия, втория и третия ред. Очевидно имаме

$$\begin{aligned} \Sigma_n &= (au_1 + bv_1) + \dots + (au_n + bv_n) \\ &= a(u_1 + u_2 + \dots + u_n) + b(v_1 + v_2 + \dots + v_n) = aS_n + b\sigma_n. \end{aligned}$$



Тези пресмятания са напълно законни, защото са извършени с крайни суми. Тъй като редиците с общи членове  $S_n$  и  $\sigma_n$  са сходящи, то и редицата с общ член  $aS_n + b\sigma_n$  е също сходяща и клони към  $aS + b\sigma$ . И така докажахме, че редът (4) е сходящ и че

$$aS + b\sigma = (au_1 + bv_1) + (au_2 + bv_2) + \dots$$

Специално при  $a = b = 1$  получаваме едно правило за почленно събиране на два сходящи реда, при  $a = 1, b = -1$  имаме правило за почленно изваждане на два сходящи реда, а при  $b = 0$  имаме правило за умножаване на един ред с едно число (дистрибутивен закон при безкрайни редове).

Редът  $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k + v_k)$  се нарича сума, а редът  $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k - v_k)$  се нарича разлика на двата реда  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ . И така както сумата, така и разликата на два сходящи реда е сходящ ред.

Ако редът  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  е сходящ, то каквото и да е числото  $\lambda$ , редът  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda u_k$  е също сходящ.

### § 5. Редове с неотрицателни\* членове

Ако членовете на един ред

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

са неотрицателни, то редицата от частичните му суми

$$S_1, S_2, S_3, \dots$$

расте монотонно, тъй като

$$S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0.$$

Оттук следват редица свойства на такива редове. Така например никоя частична сума на един сходящ ред с неотрицателни членове не надминава сумата на този ред, защото, както знаем, членовете на една монотонно растяща сходяща редица не надминават границата ѝ. Също така от монотонността на редицата от частичните суми следва, че за да бъде един ред с неотрицателни членове сходящ, необходимо и достатъчно е редицата от частичните му суми да бъде ограничена. Ние в бъдеще много често ще използваме това

\*Терминът „неотрицателни“ значи положителни или нули.

свойство. Върху него се основава така нареченият принцип за сравняване на редовете. Този принцип може да се формулира така:

*Ако членовете на един ред*

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

*са неотрицателни и не надминават съответните членове на един сходящ ред*

$$(2) \quad v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

*(т. е. ако  $0 \leq u_n \leq v_n$ ), то редът (1) е сходящ.*

Доказателството може да се извърши така: нека  $S_n$  и  $\sigma_n$  са  $n$ -тите частични суми съответно на редовете (1) и (2). Очевидно

$$S_n \leq \sigma_n.$$

Редът (2) е сходящ, следователно редицата от частичните му суми е ограничена (тъй като е сходяща). Нека  $\sigma$  е една горна граница на тази редица. Очевидно имаме

$$S_n \leq \sigma_n \leq \sigma,$$

т. е. редицата с общ член  $S_n$  е също ограничена, и тъй като е монотонно растяща, тя е сходяща. С това доказателството се завършва.

*Пример 1.* Да се изследва дали е сходящ или разходящ редът

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Изследването може да се извърши така: вместо да изследваме дадения ред, достатъчно е да изследваме реда

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots,$$

който се получава от дадения, след като премахнем първия му член; така полученият ред обаче е сходящ, защото членовете му не са отрицателни и не надминават съответните членове на сходящия ред

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

*Пример 2.* Редът

$$\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \dots + \frac{2}{2n-1} + \dots$$

е разходящ. И наистина в противен случай, използвайки неравенството

$$\frac{2}{2n-1} > \frac{1}{n},$$

бихме заключили, че хармоничният ред

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

е сходящ, което, както знаем, не е вярно.\*

### § 6. Признаци (критерии) за сходимост на редове с положителни членове

Ние ще дадем някои достатъчни условия за сходимост и разходимост на редове с положителни\*\* членове.

*Критерий на Даламбер (d'Alembert).* За да бъде един ред с положителни членове

$$(1) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

сходящ, достатъчно е да бъде изпълнено неравенството

$$(2) \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$$

от известно  $n$  нататък, където  $q < 1$ . За да бъде редът (1) разходящ, достатъчно е да имаме от известно  $n$  нататък

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1.$$

*Доказателство.* Ще започнем с първата част на твърдението. Нека при  $n \geq k$  имаме  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$ . В такъв случай  $u_{n+1} \leq qu_n$ . Оттук получаваме последователно неравенствата

$$\begin{aligned} u_{k+1} &\leq qu_k, \\ u_{k+2} &\leq qu_{k+1} \leq q^2 u_k, \\ u_{k+3} &\leq qu_{k+2} \leq q^3 u_k, \\ &\dots \end{aligned}$$

\* Аналогично може да се установи по-общо следното: ако  $0 \leq u_n \leq v_n$  и ако редът

$$u_1 + u_2 + \dots$$

е разходящ, то редът

$$v_1 + v_2 + \dots$$

е също разходящ. И наистина, ако допуснем, че редът  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  е сходящ, ще следва, че редът

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  е също сходящ, което не е вярно.

\*\* Терминът „положителни“ трябва да се разбира в смисъл на „съществено положителни“, т. е. всички различни от нула, за разлика от термина „неотрицателни“, който допуска някои от членовете да са нули.

които показват, че членовете на реда

$$(3) \quad u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \dots$$

не надминават съответните членове на сходящата геометрична прогресия

$$u_k + u_k q + u_k q^2 + \dots$$

(тази геометрична прогресия е сходяща, защото се получава, като умножим с числото  $u_k$  всички членове на прогресията

$$1 + q + q^2 + \dots,$$

за която ние вече знаем, че е сходяща, тъй като  $0 < q < 1$ ).

И така редът (3) е сходящ. Това обаче е достатъчно, за да твърдим, че и редът

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots$$

е също сходящ.

За да докажем втората част от теоремата, достатъчно е да забележим, че ако  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ , то  $u_{n+1} \geq u_n$ . И така редицата от положителните числа

$$u_k, u_{k+1}, \dots$$

монотонно расте и следователно не клони към нула (тъй като  $u_n \geq u_k$  при  $n \geq k$ ). Това е достатъчно, за да твърдим, че редът (1) не е сходящ.

Нека отбележим изрично, че ние не предположихме съществуването на  $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ . Когато тази граница съществува, на критерия на Даламбер може да се даде следната, макар и по-малко обща, но по-удобна форма.

Ако редицата

$$(4) \quad \frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}, \frac{u_4}{u_3}, \dots$$

е сходяща и клони към граница, която е по-малка от 1, редът е сходящ. Когато тази редица клони към граница, която е по-голяма от 1, редът е разходящ, но когато редицата (4) клони към единица, без обаче поне от известно място нататък членовете ѝ да остават по-големи или равни на единица, критерият на Даламбер не ни дава никакво указание за сходимостта или разходимостта на реда.

Ако  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1$ , то за всички достатъчно големи стойности на  $n$  имаме  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \frac{1-l}{2}$ , тъй като числото  $\frac{1-l}{2}$  е съществено положително.

Оттук получаваме  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - l < \frac{1-l}{2}$  и следователно

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \frac{1-l}{2} = \frac{1+l}{2}.$$

Това е достатъчно, за да твърдим, че редът (1) е сходящ, защото

$$\frac{1+l}{2} < \frac{1+1}{2} = 1,$$

а следователно е изпълнено достатъчното условие за сходимост на Даламбер.

В случай че  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$ , то за всички достатъчно големи стойности на  $n$  имаме  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ , което ни осигурява разходимостта на реда (1).

Накрая нека споменем, че ние изрично изключихме случаите, при които редът притежава членове, равни на нула, за да имаме свободата да делим с тях. Разбира се, достатъчно би било да се иска членовете на реда (1) да са положителни от известно място нататък.

*Пример.* Редът  $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$  е сходящ, защото

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1} \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0.$$

*Критерий на Коши (Cauchy).*

За да бъде един ред с неотрицателни членове

$$(5) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

сходящ, достатъчно е да бъде изпълнено неравенството\*

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q$$

за всички достатъчно големи стойности на  $n$ , където  $q < 1$ . За да бъде редът (5) разходящ, достатъчно е за безбройно много стойности на  $n$  да е изпълнено неравенството  $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ .

**Доказателство.** Ще започнем с първата част на твърдението. От неравенството  $\sqrt[n]{u_n} \leq q$  получаваме  $u_n \leq q^n$ , т. е. членовете на дадения ред поне от

\*Вж. относно дефиницията на действието коренуване зад. 31 и 32 в края на глава II.

известно място нататък не надминават съответните членове на една сходяща геометрична прогресия (тук използваме, че  $0 \leq q < 1$ ). Това е достатъчно, за да ни осигури сходимостта на реда (5), тъй като членовете му са неотрицателни.

Доказателството на втората част може да се извърши така: от  $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$  получаваме неравенството  $u_n \geq 1$ , което е изпълнено за безбройно много стойности на  $n$ . И така  $u_n$  сигурно не клони към нула, когато  $n$  расте неограничено и следователно редът (5) не е сходящ.

Ние досега не изисквахме редицата с общ член  $\sqrt[n]{u_n}$  да е сходяща. Ако се случи обаче  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$  да съществува, то на критерия на Коши може да се даде следната по-удобна форма (макар и не толкова обща):

Ако  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$  съществува и  $l < 1$ , редът е сходящ. Ако  $l > 1$ , редът е разходящ. Ако  $l = 1$ , критерият на Коши не ни дава никакво указание за сходимостта на разглеждания ред.

Нека  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l < 1$ . Избираме произволно число  $q$ , за което  $l < q < 1$  (такова число може да се избере, защото  $l < 1$ ). В такъв случай за всички достатъчно големи стойности на  $n$  ще имаме  $\sqrt[n]{u_n} < q$ , което е достатъчно, за да твърдим, че редът (5) е сходящ.

Ако  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l > 1$ , то за всички достатъчно големи стойности на  $n$  имаме  $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$  и следователно редът (5) е разходящ.

*Пример.* Редът  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$  сходящ, защото

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0.$$

*Критерий на Раабе и Дюамел (Raabe–Duhamel).*

Нека

$$(6) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

е един ред с положителни членове. Определяме числото  $\alpha_n$  от уравнението

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \alpha_n}.$$

Ако за всички достатъчно големи стойности на  $n$  произведението  $n\alpha_n$  не е по-малко от едно (независещо от  $n$ ) число, което е по-голямо от 1, редът (6) е сходящ. Ако от известно място нататък това произведение е по-малко или равно на 1, редът е разходящ.

И наистина очевидно

$$\alpha_n = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}}.$$

Ако при  $n \geq k$  имаме  $n\alpha_n \geq \mu$ , където  $\mu > 1$ , то

$$n \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}} \geq \mu,$$

откъдето получаваме последователно

$$\begin{aligned} nu_n - nu_{n+1} &\geq \mu u_{n+1}, \\ nu_n - (n+1)u_{n+1} &\geq (\mu - 1)u_{n+1}. \end{aligned}$$

Събираме почленно неравенствата

$$\begin{aligned} ku_k - (k+1)u_{k+1} &\geq (\mu - 1)u_{k+1}, \\ (k+1)u_{k+1} - (k+2)u_{k+2} &\geq (\mu - 1)u_{k+2}, \\ &\dots\dots\dots \\ (k+p-1)u_{k+p-1} - (k+p)u_{k+p} &\geq (\mu - 1)u_{k+p}, \end{aligned}$$

които се получават, когато на  $n$  даваме последователно стойности  $k, k+1, \dots, k+p-1$ , и получаваме

$$ku_k - (k+p)u_{k+p} \geq (\mu - 1)(u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_{k+p})$$

или

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_{k+p} \leq \frac{ku_k - (k+p)u_{k+p}}{\mu - 1} < \frac{ku_k}{\mu - 1}.$$

Полученото неравенство ни учи, че редицата от частичните суми на реда

$$u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \dots$$

е ограничена — нещо, което е достатъчно, за да твърдим, че редът е сходящ, тъй като членовете му са положителни. От доказателството следва, че и редът

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

е сходящ.

Сега ще преминем към втората част на теоремата. Да допуснем, че при  $n \geq k$  имаме  $n\alpha_n \leq 1$ , т. е.

$$n \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}} \leq 1$$

или

$$nu_n \leq (n+1)u_{n+1}.$$

Оттук получаваме

$$ku_k \leq (k+1)u_{k+1} \leq \dots \leq (k+p)u_{k+p},$$

т. е.

$$\frac{ku_k}{k+p} \leq u_{k+p}.$$

Ако допуснем, че редът (6) е сходящ, оттук ще следва, че и редът

$$(7) \quad \frac{ku_k}{k+1} + \frac{ku_k}{k+2} + \frac{ku_k}{k+3} + \dots$$

е сходящ, което не е вярно, защото в противен случай редът

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots$$

(който се получава от реда (7), след като се умножи с  $\frac{1}{ku_k}$ ) трябва да бъде сходящ, откъдето пък би следвала сходимостта на хармоничния ред

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots$$

Но ние знаем, че хармоничният ред е разходящ. От това следва, че и редът (6) не може да бъде сходящ.

*Пример.* Да разгледаме реда

$$\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} + \dots$$

Тук

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Това число клони към 1 чрез стойности по-малки от 1, т. е. критерият на Даламбер не ни дава никакво указание за сходимостта или разходимостта на реда. Ние обаче ще приложим тук критерия на Раабе–Дюамел. От уравнението

$$\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{1+\alpha_n}$$

получаваме

$$\alpha_n = \frac{1}{2n+1},$$

т. е.

$$n\alpha_n = \frac{n}{2n+1} < 1,$$

което показва, че редът е разходящ.



**§ 7. Представяне на константата  $e$  във вид на безкраен ред**

Сега ще докажем, че константата  $e$  може да се представи като сума на следния безкраен ред:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

За целта ще си послужим с развитието

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right), \end{aligned}$$

което вече използвахме в § 8 на глава II при дефиницията на числото  $e$ .

Нека  $k$  е произволно цяло положително число и нека  $n$  е цяло число, по-голямо от  $k$ . В такъв случай

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &> 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Като оставим в това неравенство  $n$  да расте неограничено, ще получим след граничния преход

$$e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}.$$

Това неравенство ни учи, че редът

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

е сходящ\* и неговата сума не надминава константата  $e$ .

Да положим

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = S.$$

По такъв начин установихме, че  $S \leq e$ .

От друга страна,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

\*Тъй като членовете му са неотрицателни, а редицата от частичните му суми ограничена.

и толкова повече

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq S.$$

Като извършим граничен преход, заключаваме от това неравенство, че  $e \leq S$  — нещо, което заедно с установеното по-горе неравенство  $S \leq e$  ни учи, че  $S = e$ . С това доказателството е завършено.

### § 8. Теорема на Коши за редове с неотрицателни монотонно намаляващи членове

Нека членовете на реда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

са неотрицателни и при всяко цяло положително  $n$  имаме  $u_n \geq u_{n+1}$ . В такъв случай този ред е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ редът

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k u_{2^k}.$$

За да докажем тази теорема на Коши, полагаме

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n, \\ \sigma_n &= u_1 + 2u_2 + 4u_4 + \dots + 2^n u_{2^n}. \end{aligned}$$

Тъй като редицата

$$u_1, u_2, u_3, \dots,$$

монотонно намалява, то имаме следните неравенства:

$$\begin{aligned} u_2 &\leq u_1 = u_1, \\ 2u_4 &\leq u_2 + u_3 \leq 2u_2, \\ 4u_8 &\leq u_4 + u_5 + u_6 + u_7 \leq 4u_4, \\ &\dots\dots\dots \\ 2^n u_{2^{n+1}} &\leq u_{2^n} + u_{2^{n+1}} + \dots + u_{2^{n+1}-1} \leq 2^n u_{2^n}. \end{aligned}$$

Като съберем почленно тези неравенства, получаваме

$$\frac{\sigma_{n+1} - u_1}{2} \leq S_{2^{n+1}-1} \leq \sigma_n.$$

Ако редът

$$u_1 + u_2 + \dots$$

е сходящ, редицата от частичните му суми е ограничена. Нека  $A$  е една нейна горна граница. В такъв случай  $S_{2^{n+1}-1} \leq A$  и следователно

$$\frac{\sigma_{n+1} - u_1}{2} \leq A,$$

т. е.

$$\sigma_{n+1} \leq u_1 + 2A.$$

И така редицата от частичните суми на реда с неотрицателни членове  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k u_{2^k}$  е ограничена, т. е. този ред е сходящ.

Ако редът

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

е разходящ, то редицата с общ член  $S_{2^{n+1}-1}$  расте неограничено\*, а следователно частичните суми  $\sigma_n$  също растат неограничено, както това се вижда от неравенството

$$S_{2^{n+1}-1} \leq \sigma_n.$$

От това следва, че редът  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k u_{2^k}$  е разходящ. По такъв начин теоремата на Коши е доказана.

## § 9. Критерий за сходимост на Лайбниц (Leibniz)

Ще докажем, че ако монотонно намаляващата редица

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots$$

клони към нула, то редът

$$(1) \quad u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$$

е сходящ.

За да докажем твърдението, избираме едно положително число  $\varepsilon$  и след това вземаме  $\nu$  така, че при  $n > \nu$  да е изпълнено неравенството  $u_n < \varepsilon$ . Това може да се направи, защото  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . Разглеждаме разликата

$$S_{n+p} - S_n = (-1)^n [u_{n+1} - u_{n+2} + \dots + (-1)^{p-1} u_{n+p}],$$

където  $S_n$  и  $S_{n+p}$  означават съответно  $n$ -тата и  $n+p$ -тата частична сума на реда (1). Очевидно за всяко цяло положително  $p$  имаме

\*Тъй като членовете на реда  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  са неотрицателни.

$$\begin{aligned}
|S_{n+p} - S_n| &= |u_{n+1} - u_{n+2} + \dots + (-1)^{p-1} u_{n+p}| \\
&= |(u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \dots| \\
&= u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \dots + (-1)^{p-1} u_{n+p} \\
&= u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \dots \\
&\leq u_{n+1}.
\end{aligned}$$

И така

$$(2) \quad |S_{n+p} - S_n| \leq u_{n+1},$$

т. е.

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon,$$

което е достатъчно, за да твърдим, че редът е сходящ.

Направените разсъждения могат да се използват за оценка на грешката, която се прави, когато вместо сумата на реда (1) се взима някоя негова частична сума. И наистина нека  $S$  е негова сума. Ако оставим  $p$  да расте неограничено в неравенството (2), ще получим след граничен преход

$$|S - S_n| \leq u_{n+1}.$$

Ние ще използваме в бъдеще това неравенство.

*Пример.* Редът

$$(3) \quad \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

е сходящ, защото знаците на членовете му алтернативно се сменят и редицата

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

клони към нула, монотонно намалявайки.

Ако  $S$  е сумата на реда (3), а  $S_n$  е неговата  $n$ -та частична сума, то както отбелязахме по-горе, е в сила неравенството

$$|S - S_n| \leq \frac{1}{n+1}.$$

## § 10. Абсолютно сходящи редове

Един ред

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

се нарича абсолютно сходящ, когато редът

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots,$$

съставен от абсолютните стойности на членовете му, е сходящ. Така например редът

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \cdots$$

е абсолютно сходящ, защото редът

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

е сходящ. Напротив, редът

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots,$$

макар и да е сходящ (според критерия на Лайбниц), не е абсолютно сходящ, защото редът

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

е разходящ (това е хармоничният ред). Ред, който е сходящ, но не е абсолютно сходящ, се нарича условно сходящ. Редът

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

не е нито сходящ (защото общият му член не клони към нула), нито е абсолютно сходящ, защото редът

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$$

е разходящ.

Ще докажем, че *ако един ред е абсолютно сходящ, той е сходящ.*

За тази цел ще си послужим с неравенствата

$$(1) \quad 0 \leq \frac{|a| + a}{2} \leq |a|, \quad 0 \leq \frac{|a| - a}{2} \leq |a|,$$

които са валидни при всички реални стойности на  $a$ . Верността на тези неравенства може да се установи например по следния начин. Дефиницията на понятието абсолютна стойност ни дава

$$(2) \quad a \leq |a|, \quad -a \leq |a|$$

и следователно

$$0 \leq \frac{|a| - a}{2}, \quad 0 \leq \frac{|a| + a}{2}.$$

От друга страна, като прибавим към двете части на неравенствата (2) числото  $|a|$ , получаваме

$$|a| + a \leq 2|a|, \quad |a| - a \leq 2|a|$$

и следователно

$$\frac{|a| + a}{2} \leq |a|, \quad \frac{|a| - a}{2} \leq |a|.$$

След тази малка подготовка вече сме готови да докажем, че ако един ред

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

е абсолютно сходящ, той е сходящ. И наистина нека редът

$$(3) \quad |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

е сходящ. Разглеждаме двата реда

$$(4) \quad \frac{|u_1| + u_1}{2} + \frac{|u_2| + u_2}{2} + \frac{|u_3| + u_3}{2} + \dots$$

$$(5) \quad \frac{|u_1| - u_1}{2} + \frac{|u_2| - u_2}{2} + \frac{|u_3| - u_3}{2} + \dots$$

Въз основа на неравенствата (1) можем да пишем

$$0 \leq \frac{|u_k| + u_k}{2} \leq |u_k|, \quad 0 \leq \frac{|u_k| - u_k}{2} \leq |u_k|,$$

т. е. членовете на редовете (4) и (5) са неотрицателни и не надминават съответните членове на сходящия ред (3). Това е достатъчно, за да твърдим, че двата реда (4) и (5) са сходящи. Като се възползуваме от теоремата, според която разликата на два сходящи реда е сходящ ред (относно тази теорема и относно дефиницията на понятието разлика на два реда вж. глава III, § 4), заключаваме, че редът

$$\left( \frac{|u_1| + u_1}{2} - \frac{|u_1| - u_1}{2} \right) + \left( \frac{|u_2| + u_2}{2} - \frac{|u_2| - u_2}{2} \right) + \dots$$

т. е. редът

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

е сходящ.

От направените разсъждения се вижда, че всеки абсолютно сходящ ред може да се представи като разлика на два сходящи реда с неотрицателни членове. Обратното е също вярно. И наистина, ако двата реда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

са сходящи и  $a_k \geq 0$ ,  $b_k \geq 0$ , то редът  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$  е абсолютно сходящ, защото  $|a_k - b_k| \leq a_k + b_k$  и редът  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  е сходящ.

Ние бихме могли да установим, че всеки абсолютно сходящ ред е сходящ, и с помощта на теоремата на Коши по следния начин: нека  $\varepsilon$  е произволно положително число; избираме  $\nu$  по такъв начин, че при  $n > \nu$  и при всички цели положителни стойности на  $p$  да имаме

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon;$$

това може да се направи, защото редът (3) е сходящ; последното неравенство и неравенството

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|$$

ни позволява да заключим, че

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon,$$

т. е. редът  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  е наистина сходящ.

*Пример 1.* Редът

$$(6) \quad \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{2^3} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots$$

е сходящ, защото редът

$$\frac{|\sin x|}{2} + \frac{|\sin 2x|}{2^2} + \frac{|\sin 3x|}{2^3} + \dots + \frac{|\sin nx|}{2^n} + \dots$$

е сходящ (неговите членове са неотрицателни и не надминават съответните членове на сходящата геометрична прогресия  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ). От направените разсъждения се вижда, че редът е дори абсолютно сходящ.

*Пример 2.* Ако при достатъчно големи стойности на  $n$  имаме  $u_n \neq 0$  и  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq r < 1$ , то редът  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  е сходящ (дори абсолютно), защото редът  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  е сходящ. Ако пък при достатъчно големи стойности на  $n$  имаме  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq 1$ , то редът  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  е разходящ, защото  $|u_{n+1}| \geq |u_n|$  и следователно  $u_n$  не клони към нула, когато  $n$  расте неограничено. По-специално, ако съществува границата  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$  и  $l < 1$ , то редът  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  е сходящ; ако пък  $l > 1$ , то редът  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  е разходящ.

### § 11. Комутативен закон при абсолютно сходящите редове

Нека

$$(1) \quad S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

е един абсолютно сходящ ред и нека редът

$$(2) \quad u_{n_1} + u_{n_2} + u_{n_3} + \dots$$

се получава от реда (1) чрез разместване на членовете му. Това значи, че в редицата от цели положителни числа

$$n_1, n_2, n_3, \dots$$

се среща *всяко* цяло положително число, и то *само веднъж*. Ще докажем, че редът (2) е също абсолютно сходящ и сумата му е равна на сумата  $S$  на реда (1).

Да изберем едно цяло положително число  $k$ . Нека  $\nu$  е цяло число, по-голямо от всяко едно от числата  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . В такъв случай всичките тези числа се срещат в редицата  $1, 2, \dots, \nu$ . Като вземем под внимание още, че никои две от тях не са равни помежду си, намираме

$$|u_{n_1}| + |u_{n_2}| + \dots + |u_{n_k}| \leq |u_1| + |u_2| + \dots + |u_\nu|.$$

Да означим със  $\Sigma$  сумата на сходящия ред

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

В такъв случай

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_\nu| \leq \Sigma$$

и следователно

$$|u_{n_1}| + |u_{n_2}| + \dots + |u_{n_k}| \leq \Sigma.$$

И така редицата от частичните суми на реда

$$|u_{n_1}| + |u_{n_2}| + |u_{n_3}| + \dots$$

е ограничена — нещо, което е достатъчно, за да твърдим, че този ред е сходящ, тъй като членовете му са неотрицателни. По такъв начин ние доказахме, че редът (2) е абсолютно сходящ. Нека  $\sigma$  е неговата сума. Остава



да покажем, че  $\sigma = S$ . За тази цел избираме едно произволно положително число  $\varepsilon$  и след това избираме едно толкова голямо цяло число  $m$ , че да имаме

$$|u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \dots + |u_{m+p}| < \varepsilon$$

при всички цели положителни стойности на  $p$ . Това може да се направи, защото редът (1) е абсолютно сходящ и следователно редът

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

е сходящ. Фиксираме  $m$ . В такъв случай при достатъчно големи стойности на  $p$  числата  $1, 2, \dots, m$  сигурно фигурират в редицата  $n_1, n_2, \dots, n_{m+p}$ , защото в безкрайната редица

$$n_1, n_2, n_3, \dots$$

фигурират *всичките* цели положителни числа. Останалите членове на редицата  $n_1, n_2, \dots, n_{m+p}$  са по-големи от  $m$ , защото никое цяло число не фигурира повече от един път в тази редица. Този резултат ни позволява да твърдим, че

$$u_{n_1} + u_{n_2} + \dots + u_{n_{m+p}} = u_1 + u_2 + \dots + u_m + u_{m+v_1} + u_{m+v_2} + \dots + u_{m+v_p},$$

където целите числа  $v_1, v_2, \dots, v_p$  са положителни.

Да разгледаме разликата

$$\begin{aligned} \alpha_p &= (u_1 + u_2 + \dots + u_{m+p}) - (u_{n_1} + u_{n_2} + \dots + u_{n_{m+p}}) \\ &= (u_1 + u_2 + \dots + u_m + u_{m+1} + \dots + u_{m+p}) \\ &\quad - (u_1 + u_2 + \dots + u_m + u_{m+v_1} + \dots + u_{m+v_p}) \\ &= u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_{m+p} - u_{m+v_1} - u_{m+v_2} - \dots - u_{m+v_p}, \end{aligned}$$

т. е.

$$|\alpha_p| \leq |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \dots + |u_{m+p}| + |u_{m+v_1}| + |u_{m+v_2}| + \dots + |u_{m+v_p}| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

И така ние установихме неравенството

$$|(u_1 + u_2 + \dots + u_{m+p}) - (u_{n_1} + u_{n_2} + \dots + u_{n_{m+p}})| < 2\varepsilon$$

за *всички достатъчно големи* стойности на  $p$ . Като извършим граничния преход  $p \rightarrow \infty$ , получаваме

$$(3) \quad |S - \sigma| \leq 2\varepsilon.$$

Положителното число  $\varepsilon$  обаче е произволно, а разликата  $S - \sigma$  ни най-малко не зависи от  $\varepsilon$ . Оттук заключаваме, че  $S - \sigma = 0$ . И наистина в противен случай ще имаме  $\frac{|S - \sigma|}{2} > 0$  и следователно ще можем да изберем положителното число  $\varepsilon$  така, че да имаме

$$\varepsilon < \frac{|S - \sigma|}{2},$$

което противоречи на неравенството (3).

И така ние доказахме следната теорема. *В един абсолютно сходящ ред при разместване на членовете му нито се нарушава абсолютната му сходимост, нито се променя сумата му.*

Един ред може да бъде сходящ, без да бъде абсолютно сходящ. Такъв ред наричаме условно сходящ или полусходящ. Като пример за условно сходящ ред може да ни служи редът

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Този ред е сходящ според критерия на Лайбниц, но не е абсолютно сходящ, защото редът

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

е разходящ.

При условно сходящите редове не е валиден комутативният закон. Ще разгледаме за пример полусходящия ред

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots$$

Сумата на този ред е нула. Разместваме членовете му по следния начин:

$$(4) \quad 1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + \dots$$

Сумата на този ред обаче не може да бъде нула, защото колкото и да бъде голямо цялото положително число  $n$ , имаме

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} \\ = \left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right) \\ = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} \geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$





Нека редът (1) е абсолютно сходящ и нека

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots = B.$$

Избираме произволно положително число  $\varepsilon$  и след това даваме на  $k$  толкова голяма стойност, че при всички цели положителни значения на  $n$ , които са по-големи от  $k$ , да имаме

$$|u_{k+1}| + |u_{k+2}| + \dots + |u_{n-1}| + |u_n| < \varepsilon.$$

В такъв случай получаваме следното неравенство:

$$\begin{aligned} |S'_n S''_n - S_n| &\leq \varepsilon \cdot 2A \\ &\quad + |u_k| |v_{n-k+1} + v_{n-k+2} + \dots + v_n| \\ &\quad + \dots \\ &\quad + |u_2| |v_{n-1} + v_n| \\ &\quad + |u_1| |v_n|. \end{aligned}$$

Редът (2) е сходящ и следователно може да се избере толкова голямо число  $\nu$ , че при  $q \geq \nu$  да имаме

$$|v_{q+1} + v_{q+2} + \dots + v_{q+p}| < \varepsilon.$$

Фиксираме  $k$ . В такъв случай при достатъчно големи стойности на  $n$  ще имаме  $n - k > \nu$  и следователно

$$\begin{aligned} |v_{n-k+1} + v_{n-k+2} + \dots + v_n| &< \varepsilon, \\ |v_{n-k+2} + v_{n-k+3} + \dots + v_n| &< \varepsilon, \\ \dots \\ |v_{n-1} + v_n| &< \varepsilon, \\ |v_n| &< \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е.

$$|S'_n S''_n - S_n| \leq 2A\varepsilon + (|u_k| + |u_{k-1}| + \dots + |u_2| + |u_1|)\varepsilon,$$

откъдето

$$|S'_n S''_n - S_n| \leq 2A\varepsilon + B\varepsilon = (2A + B)\varepsilon.$$

Да означим сумата на реда (1) с  $S'$ , а сумата на реда (2) с  $S''$ . Като вземем под внимание, че  $\lim S'_n = S'$  и  $\lim S''_n = S''$ , заключаваме, че  $\lim S'_n S''_n =$



2. Да се покаже, че редът

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

е сходящ и сумата му е  $\frac{1}{2}$ .

*Упътване.* Използвайте, че

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

3. Да се покаже, че редът

$$\frac{1}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \frac{1}{7 \cdot 10 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)} + \dots$$

е сходящ, и да се пресметне сумата му.

*Упътване.* Използвайте, че

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)} = \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} - \frac{1}{(3n+4)(3n+7)} \right].$$

4. Нека  $a_n \geq 0$ . Покажете, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$$

е сходящ.

*Упътване.* Използвайте, че

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} \\ = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{n-1})(1+a_n)}. \end{aligned}$$

5. Покажете, че при  $b > a > 0$  редът

$$\frac{1}{b} + \frac{a}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)(b+2)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)(b+3)} + \dots$$

е сходящ и сумата му е  $\frac{1}{b-a}$ .

*Упътване.* Използвайте тъждеството

$$\frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n+1)} = \left[ \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)} - \frac{a(a+1)\dots(a+n)(a+n+1)}{b(b+1)\dots(b+n)(b+n+1)} \right] \frac{1}{b-a}.$$

6. Покажете, че редът

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

е сходящ при  $|x| \neq 1$  и

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{при } |x| < 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

*Упътване.* Използвайте, че

$$\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

7. Да се изследва дали са сходящи, или са разходящи редовете:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; & \text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}; \\ \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{3^n}; & \text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{n+1}; \\ \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}; & \text{ж)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \cdot \frac{1}{n+1}; \\ \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}; & \text{з)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}}. \end{array}$$

*Упътване.* Приложете някой от критериите за сходимост или разходимост на редове с положителни членове

8. Да се изследва дали са сходящи или разходящи редовете:

$$\begin{array}{l} \text{a)} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots; \\ \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^n}{n!}. \end{array}$$

9. Покажете, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} \cdot \frac{1}{n+1}$$

е сходящ.

*Упътване.* Използвайте, че

$$\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 < \frac{k}{k-1}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

и следователно

$$\left(\frac{4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \cdot \frac{1}{n+1}\right)^2 < \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2}.$$

След това приложете критерия на Лайбниц, като докажете предварително, че членовете на реда намаляват монотонно по абсолютна стойност.

10. Покажете, че редът

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \dots$$

е разходящ, при все че общият му член клони към нула и знаците на членовете му се сменят алтернативно.

*Упътване.* Нека  $S_n$  е  $n$ -тата частична сума на дадения ред. Покажете, че

$$S_{2n} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

11. Да се изследва при какви стойности на  $x$  (положителни или не) е сходящ редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}.$$

*Упътване.* Нека  $U_n = \frac{n! x^n}{n^n}$ . При  $x \neq 0$  и  $|x| < e$  приложете критерия на Даламбер за реда

$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$ . При  $|x| \geq e$  покажете, че  $|U_{n+1}| \geq |U_n|$  и следователно  $U_n$  не клони към нула.



12. Да се изследва при какви стойности на  $x$  (положителни или не) са сходящи следните редове:

- а)  $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ ;  
 б)  $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$ ;  
 в)  $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$ ;  
 г)  $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots$ ;  
 д)  $\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$

13. Да се изследва при какви стойности на  $x$  е сходящ редът

$$\frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \dots + \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} + \dots$$

*Упътване.* При  $x > 0$  използвайте критерия на Раабе и Дюамел. При  $-1 < x \leq 0$  използвайте критерия на Лайбниц, като вземете предвид, че при  $\alpha < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1 \cdot 2 \dots n}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} &= \left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha+1}\right) \dots \left(1 + \frac{1-\alpha}{n+\alpha-1}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha+1} + \frac{1-\alpha}{\alpha+2} + \frac{1-\alpha}{\alpha+3} + \dots + \frac{1-\alpha}{n+\alpha-1}. \end{aligned}$$

При  $x \leq -1$  общият член не клони към нула.

14. Да се покаже, че  $\lim \frac{x^n}{n!} = 0$ .

*Упътване.* Покажете, че редът  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  е сходящ. От това ще следва, че общият му член клони към нула.

15. Да се покаже, че

$$\lim \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n = 0 \text{ при } |x| < 1.$$

16. Нека редът

$$u_1 + u_2 + \dots$$

е сходящ. Докажете, че ако редицата с общ член  $nu_n$  е сходяща, границата ѝ е равна на нула.

*Упътване.* Извършете доказателството от противното, като разгледате отделно случая, когато  $\lim nu_n > 0$ , и отделно случая, когато  $\lim nu_n < 0$ . В първия случай изберете едно положително число  $\varepsilon$ , по-малко от  $\lim nu_n$ , и използвайте, че при всички достатъчно големи стойности на  $n$  имаме  $nu_n > \varepsilon$ , т.е.  $u_n > \frac{\varepsilon}{n}$ . Аналогично разгледайте случая, при който  $\lim nu_n < 0$ .

*Забележка.* Може да се случи редът  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  да е сходящ, но  $nu_n$  да не клони към никаква граница. Такъв е случаят с реда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ . Може да се покаже дори пример на сходящ ред  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  с неотрицателни членове, при който произведението  $nu_n$  не клони към никаква граница. Достатъчно е да положим  $u_n = \frac{1}{n^2}$ , когато  $n$  не е точен квадрат, и  $u_n = \frac{1}{n}$ , когато  $n$  е точен квадрат.

17. Ако редът

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

е сходящ, то редицата с общ член

$$a_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n}$$

клони към нула.

*Упътване.* Използвайте, че

$$a_n = S_n - \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n}, \text{ където } S_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k.$$

18. Нека редът  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  е сходящ и редицата

$$p_0, p_1, p_2, \dots$$

монотонно дивергира към  $+\infty$ . В такъв случай редицата с общ член

$$a_n = \frac{p_0 u_0 + p_1 u_1 + \dots + p_n u_n}{p_n}$$

клони към нула.

*Упътване.* Нека

$$S_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k.$$

Използвайте, че

$$a_n = S_n - \frac{(p_1 - p_0)S_0 + (p_2 - p_1)S_1 + \dots + (p_n - p_{n-1})S_{n-1}}{p_n}.$$

19. Ако редът  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  е сходящ и редицата  $u_1, u_2, u_3, \dots$  монотонно намалява, то  $nu_n$  клони към нула.

*Упътване.* Нека  $\varepsilon$  е произволно положително число. Да изберем  $n$  толкова голямо, че при всички цели положителни стойности на  $k > n$  да имаме

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В такъв случай имаме

$$(k - n)u_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

и следователно при  $k > 2n$

$$ku_k < \varepsilon.$$

20. Нека е даден редът с положителни членове  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . При критерия на Раабе и Дюамел се разглежда редицата с общ член  $n\alpha_n$ , където  $\alpha_n$  се определя от равенството

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \alpha_n}.$$

Докажете, че ако редицата с общ член  $n\alpha_n$  е сходяща и  $\lim n\alpha_n > 1$ , то редът  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  е сходящ;

ако ли пък  $\lim n\alpha_n < 1$ , редът  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  е разходящ.

21. Нека редът  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , членовете на който са положителни, е разходящ и нека  $s_n = \sum_{v=1}^n u_v$ . Да се докаже, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{s_n}$$

е разходящ (Абел).

*Упътване.* Използвайте, че

$$\sum_{v=n+1}^{n+p} \frac{u_v}{s_v} > \frac{1}{s_{n+p}} \sum_{v=n+1}^{n+p} u_v = \frac{s_{n+p} - s_n}{s_{n+p}} = 1 - \frac{s_n}{s_{n+p}}$$

и следователно каквото и да бъде цялото положително число  $n$ , винаги можем да изберем  $p$  толкова голямо, че да имаме

$$\sum_{v=n+1}^{n+p} \frac{u_v}{s_v} > \frac{1}{2}.$$

22. За да бъде сходящ един ред

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

с положителни членове, необходимо и достатъчно е да съществува такава редица

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

от положителни числа, че да бъдат изпълнени неравенствата

$$b_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} b_{n+1} \geq 1$$

(критерий на Кумер).

*Упътване.* За да покажете, че условието на Кумер е достатъчно, използвайте, че

$$b_n a_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq a_n > 0$$

и следователно редицата с общ член  $a_n b_n$ , монотонно намалявайки, клони към някаква граница. Отгук заключете, че редът

$$(1) \quad \sum (b_n a_n - a_{n+1} b_{n+1})$$

е сходящ. Сравнете реда  $\sum a_n$  с реда (1).

За да покажете, че условието на Кумер е необходимо, положете

$$b_n = \frac{\sum_{v=n}^{\infty} a_v}{a_n}.$$

23. Получете достатъчните условия за сходимост на Даламбер и Раабе—Дюамел като следствие от критерия на Кумер.

*Упътване.* Положете

$$b_n = b_1 \text{ и } b_n = n b_1.$$

24. Ако редицата

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

клони към нула, като монотонно намалява, и ако редицата от частичните суми на реда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  е ограничена, то редът

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n + \dots$$

е сходящ (Абел).

*Упътване.* Нека

$$s_n = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} \quad \text{и} \quad |s_n| \leq A.$$

В такъв случай

$$\begin{aligned} |a_{n+1}\alpha_{n+1} + a_{n+2}\alpha_{n+2} + \dots + a_{n+p}\alpha_{n+p}| &= |(s_{n+1} - s_n)\alpha_{n+1} \\ &\quad + (s_{n+2} - s_{n+1})\alpha_{n+2} + \dots + (s_{n+p} - s_{n+p-1})\alpha_{n+p}| = | -s_n\alpha_{n+1} \\ &\quad + s_{n+1}(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + s_{n+2}(\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3}) + \dots + s_{n+p-1}(\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) \\ &\quad + s_{n+p}\alpha_{n+p}| \leq |s_n\alpha_{n+1}| + |s_{n+1}|(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + |s_{n+2}|(\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3}) + \dots \\ &\quad + |s_{n+p-1}|(\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) + |s_{n+p}|\alpha_{n+p} \leq A\alpha_{n+1} + A(\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) \\ &\quad + A(\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3}) + \dots + A(\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) + A\alpha_{n+p} = 2A\alpha_{n+1}. \end{aligned}$$

25. Ако  $a_n > 0$  и

$$\frac{a_n + 1}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{A}{n^2},$$

където  $A$  не зависи от  $n$ , то редът

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

е разходящ.

*Упътване.* Нека

$$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu}.$$

Покажете, че редът  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sigma_n}$  е разходящ, като използвате зад. 21. Като вземете пред вид, че

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{n} = 0,$$

установете, че при достатъчно големи стойности на  $n$  имаме,

$$\frac{(n-1)\sigma_{n-1}}{n\sigma_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n\sigma_n}\right) < 1 - \frac{1}{n} - \frac{A}{n^2} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

т. е.  $a_{n+1} \geq \frac{k}{n\sigma_n}$ , където  $k$  не зависи от  $n$ .

26. Да се изследва кога е сходящ и кога е разходящ хипергеометричният ред

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \dots,$$

където  $\alpha, \beta, \gamma$  са различни от  $0, -1, -2, -3, \dots$

27. Умножете двата реда

$$\begin{aligned} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \\ 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

по правилото на Коши.

28. Покажете, че произведението (по правилото на Коши) на двата разходящи реда

$$1 - \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \dots,$$

$$1 + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{3}{2} \left(2^2 + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(2^3 + \frac{1}{2^4}\right) + \dots$$

е абсолютно сходящ ред

$$1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots$$

29. Покажете, че достатъчното условие на Даламбер (в по-общата му форма) за сходимост на ред  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  с положителни членове е еквивалентно с условието

$$\overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

а достатъчното условие на Коши е еквивалентно с условието

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} < 1.$$

Покажете, че критерият на Коши е по-силен от критерия на Даламбер в смисъл, че

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} \leq \overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

но положителните числа  $u_n$  могат да се изберат така, че да имаме

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} < 1, \quad \overline{\lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

30. Казваме, че един ред

$$(2) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

е сумируем по метода на Чезаро, ако редицата

$$s_1, s_2, s_3, \dots$$

от частичните му суми е лимитируема с помощта на средни аритметични, т. е. ако редицата с общ член

$$\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

е сходяща.

Да се покаже, че ако редът (2) е сумируем по метода на Чезаро и ако произведението  $nu_n$  клони към нула, когато  $n$  расте неограничено, то той е сходящ.

*Упътване.* Използвайте, че

$$s_{n+1} - \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} = \frac{u_2 + 2u_3 + 3u_4 + \dots + nu_{n+1}}{n}.$$

31. Ако редът

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

е сходящ, а редицата

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

расте монотонно и неограничено, то

$$\lim \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{\infty} b_k a_k = 0$$

(Л. Кронекер).

32. Нека редът

$$(3) \quad u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

е условно сходящ. Да се покаже, че каквото и да бъде числото  $A$ , винаги е възможно така да се разместят членовете на този ред, че да се получи ред със сума  $A$ . Възможно е също тъй да се разместят членовете и така, че да се получи разходящ ред.

*Упътване.* Покажете, че редът (3) притежава както безбройно много неотрицателни членове

$$v_1, v_2, v_3, \dots,$$

така и безбройно много отрицателни членове

$$-w_1, -w_2, -w_3, \dots$$

Покажете след това, че двата реда

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

и

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots$$

са разходящи. Покажете, че съществува цяло положително число  $n$ , за което

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n > A.$$

Нека  $n_1$  е най-малкото такова число. Покажете, че съществува цяло положително число  $m$ , за което

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{n_1} - w_1 - w_2 - \dots - w_m < A.$$

Нека  $m_1$  е най-малкото такова число. Означаваме с  $n_2$  най-малкото цяло число, по-голямо от  $n_1$ , за което

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{n_1} - w_1 - w_2 - \dots - w_{m_1} + v_{n_1+1} + v_{n_1+2} + \dots + v_{n_2} > A$$

и т. н. Покажете, че редът

$$v_1 + v_2 + \dots + v_{n_1} - w_1 - w_2 - \dots - w_{m_1} + v_{n_1+1} + \dots + v_{n_2} - \dots$$

е сходящ и сумата му е  $A$ , като използвате, че двете редици

$$v_{n_1}, v_{n_2}, v_{n_3}, \dots$$

и

$$w_{m_1}, w_{m_2}, w_{m_3}, \dots$$

клонят към нула.

По подобен начин покажете, че в реда (3) могат така да се разместят членовете, че да се получи разходящ ред.

**Част II**  
**ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ**  
**НА ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА**

**Глава I**  
**ФУНКЦИИ НА ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА**

**§ 1. Функционална зависимост**

Нека е дадено множество  $M$  от реални числа. *Казваме, че в множеството  $M$  е дефинирана една функция, ако на всяко число от  $M$  е съпоставено по едно число.*

За да изразим, че на всяко число  $x$  от едно множество  $M$  сме съпоставили по едно число  $y$ , пишем кратко

$$y = f(x) \quad (\text{четете — игрек равно на еф икс}),$$

или пък  $y = \varphi(x)$ ,  $y = g(x)$  и пр.

Знакът (в случая  $x$ ), който служи за общо означаване на числа, принадлежащи на  $M$ , се нарича *аргумент* или независима променлива, а знакът (в случая  $y$  или  $f(x)$  и пр.), с който означаваме съпоставените стойности, се нарича *функция*. Множеството  $M$ , в което е дефинирана функцията, се нарича *дефиниционна област* или *област на съществуване на функцията*.

*Пример 1.* Нека на всяко число  $x$  от интервала  $-1 \leq x \leq 1$  съпоставим числото  $x^2$ . По този начин ние сме дефинирали една функция в затворения интервал  $[-1, 1]$ . Нека означим с  $f(x)$  тази функция. При всяко  $x$  от затворения интервал  $[-1, 1]$  е казано какво означава  $f(x)$ . Така например  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ . Напротив,  $f(2)$  няма никакъв смисъл, защото ние сме казали какво означава  $f(x)$  само при  $|x| \leq 1$ .

2. Нека на *всяко* число  $x$  съпоставим числото  $x^2$ . Така ние сме дефинирали една функция за всяка стойност на  $x$ . Сега се касае за една функция, различна от функцията в първия пример (двете функции имат различни дефиниционни области).

3. Нека под  $\varphi(x)$  разбираме  $x^2$  при  $|x| \leq 1$  и  $\varphi(x) = 2$  при  $|x| > 1$ . С това ние сме дефинирали една функция за всяко  $x$  без изключение.

4. Нека под  $g(x)$  разбираме числото  $x$ , когато  $x \geq 0$ , а  $-x$ , когато  $x < 0$ . С това ние сме дефинирали една функция на  $x$  при всички стойности на  $x$ . Както знаем вече, тази функция се означава кратко със знака  $|x|$

и се нарича абсолютна стойност на  $x$ .

5. Нека  $f(x) = 1$  за всички рационални стойности на  $x$  и  $f(x) = 0$  за всички ирационални стойности на  $x$ . Дефиниционната област на тази функция се състои от всичките реални числа.

6. Нека  $M$  е множеството от онези стойности на  $x$ , за които уравнението  $y^2 = x$  притежава (поне едно) реално решение. Множеството  $M$  очевидно не е празно (то съдържа например числото 1). Нека на всяко число  $x$  от  $M$  съпоставим *всичките* решения на уравнението  $y^2 = x$ . С това например на числото  $x = 4$  са съпоставени двете числа 2 и  $-2$ . Така установеното съответствие *не дефинира функция*, защото не е еднозначно.

7. Нека  $M$  е множеството от онези стойности на  $x$ , за които уравнението  $y^2 = x$  притежава (поне едно) реално решение. Разбира се, ако  $y^2 = x$ , то и  $|y|^2 = x$ , т.е. ако  $x$  принадлежи на  $M$ , уравнението  $y^2 = x$  има сигурно и неотрицателно решение. Това неотрицателно решение е единствено, защото от  $0 \leq y_1 < y_2$  следва  $y_1^2 < y_2^2$  и следователно при  $0 \leq y_1 < y_2$  не може да имаме  $y_1^2 = y_2^2$ .

Ако на всяко  $x$  от  $M$  съпоставим единственото неотрицателно решение на уравнението  $y^2 = x$ , то с това дефинираме една функция (установеното съответствие е еднозначно!) в множеството  $M$ . Така дефинираната функция се означава със символа  $\sqrt{x}$ . Дадената дефиниция може да се резюмира така: под  $\sqrt{x}$  (където  $x$  принадлежи към  $M$ ) се разбира (единственото) число  $y$ , което удовлетворява равенството  $y^2 = x$  и неравенството  $y \geq 0$ . Впоследствие ние ще покажем, че множеството  $M$  в същност не е нищо друго освен множеството от неотрицателните числа.

Полезно е да се знае, че

$$(\sqrt{x})^2 = x \text{ при } x \geq 0$$

и

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

за всички стойности на  $x$  без изключение. Верността на първото твърдение е ясна: числото  $\sqrt{x}$  ние дефинирахме като (неотрицателното) решение на уравнението  $y^2 = x$ . Замествайки  $y$  с  $\sqrt{x}$ , получаваме  $(\sqrt{x})^2 = x$ . Тъждеството  $\sqrt{x^2} = |x|$  може да се установи така: числото  $y = \sqrt{x^2}$  се дефинира като число  $y$ , което удовлетворява равенството  $y^2 = x^2$  и неравенството  $y \geq 0$ . Очевидно  $|x|$  е едно такова число, защото  $|x|^2 = x^2$  и  $|x| \geq 0$ . Както вече знаем, друго число с тези свойства не може да има.

8. Нека на всяко цяло положително число  $n$  съпоставим числото  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ . По този начин ние получаваме една функция, дефинирана за всички цели положителни стойности на  $n$  и само за тях. Тази функция се означава



обикновено със символа  $n!$  (четете  $n$  факториел). Така например  $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ . Ние често ще срещаме в бъдеще тая функция.

9. Общият член  $a_n$  на една редица

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

от числа представлява функция, дефинирана за цели положителни стойности на аргумента  $n$ . (Понятието редица може да се дефинира като функция, чиято дефиниционна област е множеството от целите положителни числа.)

В бъдеще често ще използваме стандартни означения за някои важни функции. Така например под  $\sin x$  ще разбираме функция, дефинирана при всяко  $x$  като ордината на точка  $P$  от равнината  $XOY$ , която се намира на разстояние 1 от началото  $O$  на координатната система, за която лъчът  $OP$  сключва с положителната част на абсцисната ос ъгъл, чиято радианна мярка е  $x$ . Последните думи означават, че за мярка на ъгъла се избира частното на дължината на дъгата, принадлежаща на този ъгъл, от коя да е окръжност с център във върха на ъгъла към радиуса на тази окръжност. Аналогично се дефинира функцията  $\cos x$ . Под  $\operatorname{tg} x$  ще разбираме функция, дефинирана чрез равенството

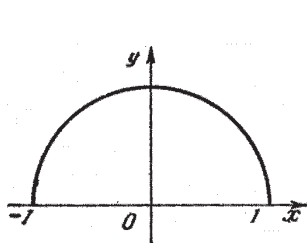
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

при онези и само при онези стойности на  $x$ , за които  $\cos x \neq 0$ , и пр. Нека изрично кажем, че дефиниционната област на тези функции се посочва, разбира се, още при дефиницията им, поради което ние ще я считаме за известна. Така например дефиниционната област на функцията  $\frac{1}{x}$  е съставена от всички реални числа с изключение на нулата, дефиниционната област на функцията  $\sqrt{x}$  е множеството на неотрицателните числа и пр.

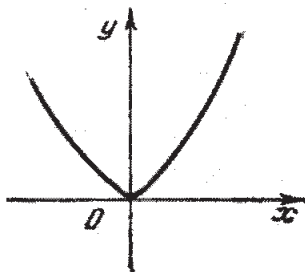
## § 2. Графика на една функция

Нека  $f(x)$  е една функция, дефинирана в някое точково множество  $M$ . Множеството от точките в равнината на една правоъгълна координатна система  $XOY$  с координати  $(x, f(x))$ , където  $x$  се мени в  $M$ , се нарича графика на функцията  $f(x)$  или крива с уравнение  $y = f(x)$ . Така например графиката на функцията  $y = \sqrt{1 - x^2}$ , където  $x$  се мени в интервала  $-1 \leq x \leq 1$ , е една полуокръжност с център в началото на координатната система и радиус 1. Графиката на тази функция е изобразена на черт. 1.

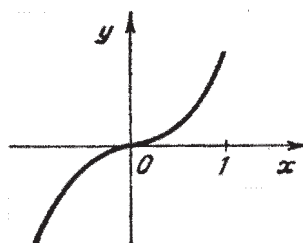
На черт. 2 е изобразена графиката на функцията  $y = x^2$ , дефинирана с това уравнение при всички стойности на  $x$ .



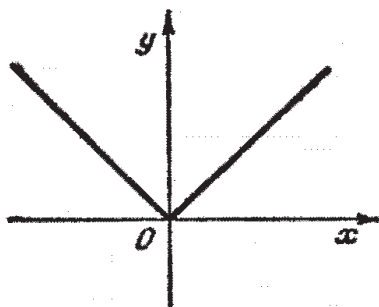
Черт. 1



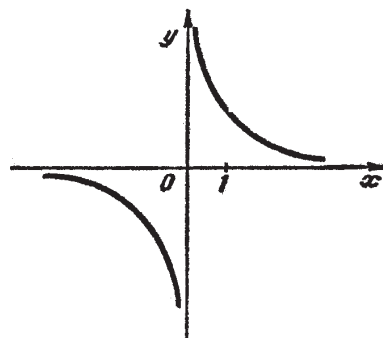
Черт. 2



Черт. 3



Черт. 4



Черт. 5

На черт. 3 е изобразена графиката на функцията  $y = x^3$ , дефинирана с това уравнение при всички стойности на  $x$ .

На черт. 4 е изобразена графиката на функцията  $y = |x|$ , дефинирана с това уравнение при всички стойности на  $x$ .

На черт. 5 изобразена графиката на функцията  $y = \frac{1}{x}$ , дефинирана с това уравнение за всички стойности на  $x$ , които са различни от нула.

### § 3. Ограничени функции

Една функция се нарича *ограничена отгоре (отдолу)*, когато множеството от функционалните ѝ стойности е ограничено отгоре (отдолу). Една функция се нарича *ограничена*, когато тя е ограничена и отгоре, и отдолу. Така например функцията  $f(x) = x^3$  при  $0 \leq x \leq 1$  е ограничена. Напротив, функцията  $g(x) = \frac{1}{x}$  при  $0 < x \leq 1$ , макар и да е ограничена отдолу, не е ограничена отгоре. И наистина, колкото и голямо положително число

$L$  да вземем, измежду функционалните стойности на  $g(x)$  има по-големи от  $L$ . За да получим такава функционална стойност, достатъчно е да вземем  $x < \frac{1}{L}$ . Нека отбележим изрично, че функцията  $g(x)$  е добре дефинирана в интервала  $0 < x \leq 1$ , защото точката 0 не е причислена към този интервал.

Ако една функция е ограничена отгоре, тя притежава съгласно принципа за непрекъснатост точна горна граница (най-малката от горните граници). *Точната горна граница на една функция обаче не е задължена да бъде една функционална стойност на тая функция.* Това може да се види при следния прост пример. Нека дефинираме функция  $\varphi(x)$  в отворения интервал  $0 < x < 1$  с условието  $\varphi(x) = x$ ; тази функция е ограничена (точната ѝ горна граница е 1), но никоя от функционалните ѝ стойности не е равна на 1. В този пример функцията е дефинирана в един отворен интервал. За да имаме пример на една ограничена функция, която е дефинирана в един затворен интервал и въпреки това не достига точната си горна граница, нека означим с  $[x]$  (четете „скобка  $x$ “) най-голямото цяло число, което не надминава  $x$ . Така  $\left[2\frac{1}{2}\right] = 2$ ,  $[5] = 5$ ,  $[\pi] = 3$ ,  $\left[-1\frac{1}{2}\right] = -2$  и пр. Нека  $\psi(x) = x - [x]$  при  $0 \leq x \leq 1$ . Тази функция е ограничена. При  $0 \leq x < 1$  имаме  $[x] = 0$ , т. е.  $\psi(x) = x < 1$ . При  $x = 1$  имаме  $\psi(1) = 1 - [1] = 1 - 1 = 0$ , т. е. и в тоя случай  $\psi(1) < 1$ . Очевидно числото 1 е една горна граница за функцията  $\psi(x)$ . Това е и най-малката от горните граници, защото функцията  $\psi(x)$  е способна да приема стойности, произволно близки до 1 (имаме  $\psi(x) = x$  при  $0 \leq x < 1$ ). Функцията  $\psi(x)$  обаче не достига тая своя точна горна граница при никаква стойност на  $x$ ; ние видяхме, че имаме винаги  $\psi(x) < 1$ , дори при  $x = 1$ .

Разбира се, аналогична забележка е в сила и за точната долна граница на една функция.

#### § 4. Граници на функции

Нека  $f(x)$  е една функция, дефинирана в някое множество  $M$  от точки, и нека  $x_0$  е една такава точка (която може и да не принадлежи на  $M$ ), във всяка околност на която има точки от  $M$ , различни от  $x_0$ .

Казваме, че функцията  $f(x)$  притежава граница при  $x$ , клонящо към  $x_0$  (чрез стойности, различни от  $x_0$ ), когато при всеки избор на редицата

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

от стойностите на аргумента, принадлежащи на дефиниционната област  $M$ , различни от  $x_0$  и клонящи към  $x_0$ , съответната редица

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$$

от функционалните стойности е сходяща (какво значи една редица от числа да бъде сходяща, ние знаем).

Не е трудно да се убедим, че в такъв случай границата на редицата

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$$

не зависи от специалния избор на редицата

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

И наистина нека

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

$$x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots$$

са две редици от точки от  $M$ , различни от  $x_0$  и клонящи към  $x_0$ . Ще покажем, че  $\lim f(x_n) = \lim f(x_n^*)$ . За да се убедим в това, вземаме под внимание, че редицата

$$x_1, x_1^*, x_2, x_2^*, x_3, x_3^*, \dots,$$

членовете на която са различни от  $x_0$  и принадлежат на  $M$ , клони към  $x_0$ . В такъв случай, щом функцията  $f(x)$  притежава граница, когато  $x$  клони към  $x_0$  (чрез стойности, различни от  $x_0$ ), редицата

$$f(x_1), f(x_1^*), f(x_2), f(x_2^*), f(x_3), f(x_3^*), \dots$$

е сходяща и следователно двете нейни подредици

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$$

$$f(x_1^*), f(x_2^*), f(x_3^*), \dots$$

клонят към една и съща граница.

И така нека функцията  $f(x)$  притежава граница, когато  $x$  клони към  $x_0$  (чрез стойности, различни от  $x_0$ ). Независещата от специалния избор на числата  $x_n$  граница на редицата

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots,$$

когато числата  $x_n$  са различни от  $x_0$ , принадлежат на  $M$  и клонят към  $x_0$ , се нарича граница на функцията  $f(x)$  при  $x$ , клонящо към  $x_0$  (чрез стойности, различни от  $x_0$ ).

За да изразим, че числото  $l$  е граница на една функция  $f(x)$ , когато  $x$  клони към  $x_0$ , пишем кратко  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  (четете — „лимес  $f(x)$  при  $x$ , клонящо към  $x_0$ , е  $l$ “).

Когато една функция  $f(x)$  клони към  $l$  при  $x$ , клонящо към  $x_0$ , тогава при всеки избор на положително число  $\varepsilon$  може да се намери такова положително число  $\delta$  (евентуално зависещо от  $\varepsilon$ ), че при всички стойности на  $x$  от дефиниционната област на функцията, различни от  $x_0$ , за които  $|x - x_0| < \delta$ , да е в сила неравенството

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

И наистина, ако допуснем противното, заключаваме, че има поне едно положително число  $\varepsilon_0$ , на което не може да се съпостави положително число  $\delta$  с исканото свойство. Така, ако изберем  $\delta = 1$ , ще може да се намери число  $x_1 \neq x_0$  (от дефиниционната област на функцията), за което да имаме  $|x_1 - x_0| < 1$  и въпреки това  $|f(x_1) - l| \geq \varepsilon_0$ . При  $\delta = \frac{1}{2}$  също може да се намери някое число  $x_2 \neq x_0$  така, че  $|x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$ , но  $|f(x_2) - l| \geq \varepsilon_0$ , и т. н. Изобщо при  $\delta = \frac{1}{n}$ , където  $n$  е цяло положително число, има число  $x_n \neq x_0$  в дефиниционната област на функцията, за което  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$  и въпреки това

$$|f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0.$$

Така получихме една редица от числа

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

всички принадлежащи на дефиниционната област на функцията, различни от  $x_0$  и клонящи към  $x_0$  (поради  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ ), за които съответната редица от функционалните стойности

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$$

сигурно не клони към  $l$  (поради  $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0$ ). Това обаче противоречи на нашето допускане, според което функцията  $f(x)$  клони към  $l$  при  $x \rightarrow x_0$ . С това доказателството е завършено.

Сега ще покажем, че и обратното е в сила, т. е. ако за всяко  $\varepsilon > 0$  може да се намери  $\delta > 0$  така, че за всички стойности на  $x \neq x_0$  от дефиниционната област на функцията, удовлетворяващи неравенството  $|x - x_0| < \delta$ , е изпълнено и неравенството  $|f(x) - l| < \varepsilon$ , то функцията  $f(x)$  клони към  $l$  при  $x \rightarrow x_0$ . Това значи, че каквото и да е редицата

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

от стойности на аргумента, принадлежащи на дефиниционната област на функцията, различни от  $x_0$  и клонящи към  $x_0$ , съответната редица

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$$

клони към  $l$ .

За да покажем това, избираме  $\varepsilon > 0$ . Нека  $\delta > 0$  е съответното му число. Очевидно може да се намери число  $\nu$  така, че при  $n > \nu$  да имаме  $|x_n - x_0| < \delta$  (защото числото  $\delta$  е положително и  $x_n \rightarrow x_0$ ). В такъв случай обаче  $|f(x_n) - l| < \varepsilon$ , което ни учи, че редицата с общ член  $f(x_n)$  е сходяща и клони към  $l$ .

От направения анализ заключаваме, че на понятието граница на една функция можем да дадем още и следната дефиниция, която е напълно еквивалентна на дадената вече по-горе дефиниция:

*Едно число  $l$  се нарича граница на една функция  $f(x)$  при  $x$ , клонящо към  $x_0$  чрез стойности, различни от  $x_0$ , ако на всяко положително число  $\varepsilon$  може да се съпостави положително число  $\delta$  по такъв начин, че щом  $x$  е различно от  $x_0$ , принадлежи на дефиниционната област на  $f(x)$  и удовлетворява неравенството  $|x - x_0| < \delta$ , да е изпълнено неравенството*

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

В заключение ще дадем още следните дефиниции:

1. Казваме, че функцията  $f(x)$  дивергира към  $+\infty$  (или расте неограничено) при  $x$ , клонящо към  $x_0$ , и пишем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty,$$

когато при всеки избор на редицата от различните от  $x_0$  точки

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

които принадлежат към дефиниционната област на функцията  $f(x)$  и клонят към  $x_0$ , съответната редица

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$$

от стойностите на функцията расте неограничено.

2. Казваме, че функцията  $f(x)$  дивергира към  $-\infty$ , когато  $x$  клони към  $x_0$ , и пишем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty,$$

ако

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty.$$

**§ 5. Граница на функции, когато аргументът клони към  $+\infty$  или към  $-\infty$**

Нека в дефиниционната област  $M$  на една функция  $f(x)$  има произволно големи числа. Ще казваме, че функцията  $f(x)$  клони към  $l$ , когато  $x$  клони към  $+\infty$ , ако при всеки избор на редицата

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

от стойности на аргумента, които принадлежат на  $M$  и растат неограничено, съответната редица от функционални стойности

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$$

е сходяща и клони към  $l$ .

На тази дефиниция може да се даде още следната форма: ще казваме, че  $f(x)$  клони към  $l$ , когато  $x$  клони (или дивергира) към  $+\infty$ , ако при всеки избор на положително число  $\varepsilon$  може да се намери число  $A$  по такъв начин, че за всяко  $x$ , което принадлежи на дефиниционната област на  $f(x)$  и удовлетворява неравенството  $x > A$ , да е изпълнено неравенството

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

Предоставяме на читателя да докаже, че горните две редакции са наистина еквивалентни. Разсъжденията могат да се извършат съвсем аналогично на съответните разсъждения от § 4.

За да изразим, че  $f(x)$  клони към  $l$ , когато  $x$  клони към  $+\infty$ , пишем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

Казваме, че функцията  $f(x)$  клони или дивергира към  $+\infty$  при  $x$ , клонящо към  $+\infty$ , и пишем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

ако при всеки избор на числото  $A$  може да се намери такова число  $B$ , че щом  $x$  принадлежи към дефиниционната област на  $f(x)$  и удовлетворява неравенството  $x > B$ , да имаме  $f(x) > A$ . Нека припомним, че още в началото на този параграф предположихме, че в дефиниционната област на  $f(x)$  има произволно големи числа.

Аналогично се дефинират символите

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

където  $l$  е едно реално число. Нека читателят сам редактира съответните дефиниции.

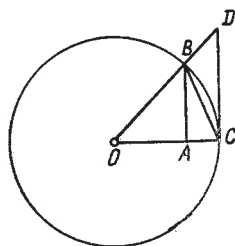
### § 6. Границата на $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$

Частното  $\frac{\sin x}{x}$  е дефинирано при всички стойности на  $x$ , различни от нула (при  $x = 0$  това частно не е дефинирано, защото знаменателят става нула). Разбира се, няма смисъл да поставяме въпроса за пресмятане на стойността на това частно при  $x = 0$  (за тази стойност на  $x$  то не е дефинирано), но има смисъл да изследваме дали това частно има граница, когато  $x$  клони към нула (разбира се, чрез стойности, различни от нула). Тук ще докажем, че  $\frac{\sin x}{x}$  притежава граница при  $x \rightarrow 0$  и, когато ъгълът е измерен в радиани\*,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

За целта ще се възползуваме от неравенствата

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$



Черт. 6

валидни при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Ето как могат да се докажат тези неравенства. От чертеж 6 се вижда, че лиц.  $\triangle OCB <$  лиц. сект.  $OCB <$  лиц.  $\triangle OCD$ , или

$$\frac{1}{2}OC \cdot AB < \frac{1}{2}OC \cdot \overset{\frown}{CB} < \frac{1}{2}OC \cdot CD.$$

Нека радиусът на окръжността е  $r$  и ъгълът  $COB$ , измерен в радиани, е  $x$ . В такъв случай

$$\frac{1}{2}r \cdot r \cdot \sin x < \frac{1}{2}r \cdot rx < \frac{1}{2}r \cdot r \operatorname{tg} x$$

(имаме  $\overset{\frown}{CB} = r \cdot x$ , понеже  $x$  е абсолютната мярка на  $\sphericalangle COB$ ), т. е.

$$(1) \quad \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

\* Да припомним, че това значи, че за мярка на ъгъла се избира частното на дъгата, принадлежаща на този ъгъл, от коя да е окръжност с център във върха на ъгъла, към радиуса на тази окръжност. Този начин на измерване на ъглите се нарича абсолютен.

Така абсолютната мярка на ъгъл от  $90^\circ$  е  $\frac{\pi}{2}$ , на ъгъл от  $180^\circ$  е  $\pi$ , на  $360^\circ$  е  $2\pi$  и пр. Ъгъл, чиято абсолютна мярка е 1, се нарича радиан.

В бъдеще, ако изрично не е казано противоположното, ще измерваме ъглите винаги в радиани.



С това помощните неравенства са доказани. От тях получаваме

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

и

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

От друга страна,  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ , т. е.  $1 - \cos x < \frac{x^2}{2}$  (понеже  $\sin x < x$ , виж (1)). И така ние получаваме

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Последното неравенство доказахме само за положителни стойности на  $x$ , по-малки от  $\frac{\pi}{2}$ , но то е вярно\* и за отрицателни стойности на  $x$ , по-големи от  $-\frac{\pi}{2}$ , защото

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}.$$

Ако изберем произволно  $\varepsilon > 0$  и означим с  $\delta$  по-малкото от числата  $\frac{\pi}{2}$  и  $\varepsilon$ , то при  $|x| < \delta$  получаваме

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{|x| \cdot |x|}{2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \varepsilon < \varepsilon,$$

което ни учи, че  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  съществува и има стойност 1.

### Задачи

Да се намерят границите на следните функции:

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{2x^3 - 3ax^2 + a^3}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$ .

\*Неравенството е вярно и за всички стойности на  $x$ , но ние няма да се спираме на това, защото то няма да ни трябва поне засега.

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ .
9.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x}$ .

10. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \cos \frac{x}{2^n}.$$

*Упътване.* Докажете, че при  $\sin \frac{x}{2^n} \neq 0$  имаме

$$a_n = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}.$$

11. Докажете, че  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x$  при  $\sin x \neq 0$ .

*Упътване.* Използвайте, че

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha - 2 \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

12. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n = \frac{\cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \cos \frac{3\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{n\pi}{2n}}{n}.$$

*Упътване.* Използвайте, че

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\cos \frac{n+1}{2}\alpha \cdot \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

13. Нека  $a$  е произволно реално число и  $b$  е число, за което  $|b| < 1$ . Образуваме редицата

$$x_0, x_1, x_2, \dots,$$

за която първият член  $x_0$  се избира произволно и

$$x_{n+1} = a + b \sin x_n.$$

Покажете, че тази редица е сходяща и границата ѝ удовлетворява уравнението  $x = a + b \sin x$ .

*Забележка.* Уравнението

$$x = a + b \sin x$$

се използва в небесната механика и се нарича уравнение на Кеплер.

*Упътване.* Покажете, че редът

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_{n+1} - x_n) + \dots$$

е сходящ, като се възползвате от това, че

$$x_{n+1} - x_n = b(\sin x_n - \sin x_{n-1}) = 2b \sin \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \cos \frac{x_n + x_{n-1}}{2},$$

следователно

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |b| |x_n - x_{n-1}|.$$

## § 7. Непрекъснати функции

Може да се случи една функция  $f(x)$  да не притежава граница, когато  $x$  клони към някоя точка  $x_0$  (разбира се, за да има смисъл да поставяме въпроса за съществуване или несъществуване на  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , трябва във всяка околност на точката  $x_0$  да има точка от дефиниционната област на функцията  $f(x)$ , различни от  $x_0$ ). Такъв е например случаят с функцията, дефинирана при  $x \neq 0$  с условието  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Тук  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  не съществува, защото редицата от функционалните стойности

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \dots$$

е неограничена и следователно не е сходяща, когато редицата

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

от стойностите на аргумента клони към нула. Ако функцията  $f(x)$  е дефинирана при  $x = x_0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  съществува, когато  $x \rightarrow x_0$  чрез стойности, различни от  $x_0$ , от това още не следва, че  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Това ние можем да си уясним със следния пример. Да дефинираме  $f(x)$  като сума на реда

$$f(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \dots$$

за такива стойности на  $x$ , за които редът е сходящ. Очевидно редът е сходящ за всяко реално  $x$ . При  $x \neq 0$  имаме

$$f(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2(1+x^2)}{1+x^2-1} = 1+x^2,$$

а при  $x = 0$  всичките членове на реда са нули и следователно  $f(0) = 0$ . Функцията  $f(x)$  притежава граница, когато  $x$  клони към нула чрез стойности, различни от нула, но

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq f(0).$$

Ние бихме могли да дадем и по-прост пример. Нека  $\varphi(x) = x$  при  $x \neq 0$  и  $\varphi(0) = 1$ . Тогава очевидно  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0 \neq \varphi(0)$ .

Ако една функция  $f(x)$  притежава граница, когато  $x$  клони към  $x_0$  (чрез стойности, различни от  $x_0$ ), и тая граница е равна на  $f(x_0)$ , казваме, че функцията  $f(x)$  е непрекъснатата в точката  $x_0$ .

Понякога се препоръчва да се дефинира понятието непрекъснатост така, че да се прилага и за случая, когато точката  $x_0$  е изолирана\*. Затова ние ще дадем следната дефиниция: *Една функция  $f(x)$  се нарича непрекъснатата в една точка  $x_0$  от дефиниционната си област, ако за всяка редица*

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

*от стойности на аргумента, които принадлежат\*\* на дефиниционната област на функцията  $f(x)$  и клонят към  $x_0$ , съответната редица от функционалните стойности*

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$$

*е сходяща.*

Не е трудно да се убедим, че от сходимостта на редицата

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

при *всички*, клонящи към  $x_0$  редици от стойности на аргумента, включително и онези, в които фигурира  $x_0$ , следва, че  $\lim f(x_n) = f(x_0)$ . И наистина, ако  $\lim x_n = x_0$ , то редицата

$$x_1, x_0, x_2, x_0, x_3, x_0, x_4, \dots$$

също клони към  $x_0$  и следователно редицата

$$f(x_1), f(x_0), f(x_2), f(x_0), f(x_3), f(x_0), \dots$$

\* Това значи, че ние искаме да допуснем и такива точки  $x_0$ , около които има околности, несъдържащи други точки от дефиниционната област на функцията освен  $x_0$ .

\*\* Тук не се иска да имаме непременно  $x_n \neq x_0$ . В нашия курс ще изхождаме от тази редакция на дефиницията.

е сходяща. От това следва, че двете редици

$$\begin{aligned} f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, \\ f(x_0), f(x_0), f(x_0), \dots \end{aligned}$$

клонят към една и съща граница като подредици на една и съща сходяща редица, т. е.  $\lim f(x_n) = f(x_0)$ .

На дефиницията на понятието непрекъснатост може да се даде още и следната форма: *една функция  $f(x)$  се нарича непрекъсната в една точка  $x_0$  от дефиниционната си област, когато на всяко положително число  $\varepsilon$  може да се съпостави положително число  $\delta$  (евентуално зависещо от  $\varepsilon$ ) така, че за всички точки  $x$  от дефиниционната област на функцията, за които  $|x - x_0| < \delta$ , да е изпълнено неравенството*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Както ще видим, последните две дефиниции на понятието непрекъснатост са еквивалентни помежду си.

*Доказателство.* Нека е дадено, че каквато и да е редицата

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

от точки, които принадлежат на дефиниционната област на  $f(x)$  и клонят към  $x_0$ , съответната редица от функционални стойности

$$f(x_1), f(x_2), \dots$$

е сходяща и клони към  $f(x_0)$ . Ще докажем, че при всеки избор на положителното число  $\varepsilon$  може да се намери положително число  $\delta$  така, че всеки път, когато е изпълнено неравенството  $|x - x_0| < \delta$  и точката  $x$  принадлежи на дефиниционната област на  $f(x)$ , да имаме

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Доказателството извършваме от противното, като допускаме, че има (поне едно) положително число  $\varepsilon_0$ , за което не е възможно да се избере положително число  $\delta$  с исканото свойство. В такъв случай, ако вземем  $\delta = \frac{1}{n}$ , където  $n$  е цяло число, можем да намерим точка  $x_n$  от дефиниционната област на  $f(x)$ , за която

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n},$$

но при все това

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

От друга страна, редицата

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

както това се вижда от неравенството  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ , клони към  $x_0$  и според допускането редицата

$$f(x_1), f(x_2), \dots$$

трябва да клони към  $f(x_0)$ , което не е възможно поради неравенството

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

С това исканото противоречие е получено.

Сега нека разгледаме обратния въпрос. Нека е дадено, че при всеки избор на положително число  $\varepsilon$  може да се намери положително число  $\delta$  така, че ако  $|x - x_0| < \delta$  и точката  $x$  принадлежи на дефиниционната област на  $f(x)$ , да имаме

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ще докажем, че каквато и да е редицата от числата

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

които принадлежат на дефиниционната област на  $f(x)$  и клонят към  $x_0$ , съответната редица от функционални стойности

$$f(x_1), f(x_2), \dots$$

е сходяща и клони към  $f(x_0)$ .

Нека

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

е една произволна редица от точки, принадлежащи на дефиниционната област на  $f(x)$  и клонящи към  $x_0$ . Ще докажем, че  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ . За тази цел избираме едно произволно положително число  $\varepsilon$  и определяме  $\delta$  така, че при  $|x - x_0| < \delta$  да имаме

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

всеки път, когато  $x$  принадлежи на дефиниционната област на  $f(x)$ . Избираме си след това числото  $\nu$  така, че при  $n > \nu$  да имаме  $|x_n - x_0| < \delta$ . Това е възможно, защото числото  $\delta$  е положително и редицата

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

клони към  $x_0$ . Но щом  $|x_n - x_0| < \delta$ , тогава

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Последното неравенство е изпълнено при всички цели положителни стойности на  $n$ , които са по-големи от  $\nu$ . С това ние доказахме, че редицата

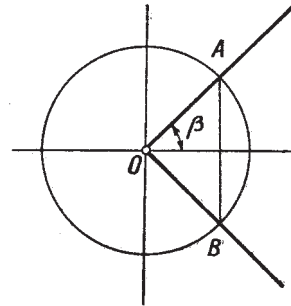
$$f(x_1), f(x_2), \dots$$

е сходяща и клони към  $f(x_0)$ .

*Пример.* Функцията  $f(x) = \sin x$ , дефинирана за всички стойности на  $x$ , е непрекъсната за всяко  $x_0$ . За да докажем това, предварително ще установим неравенството

$$|\sin \alpha| \leq |\alpha|.$$

При  $|\alpha| \geq \frac{\pi}{2}$  верността на това неравенство се вижда непосредствено, защото  $|\sin \alpha| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |\alpha|$ . Остава да се изучи случаят, когато  $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ . Но в такъв случай  $|\sin \alpha| = \sin |\alpha|$  и следователно имаме да установим неравенството  $\sin \beta \leq \beta$  при  $\beta < \frac{\pi}{2}$ , където сме положили  $|\alpha| = \beta$  и следователно имаме  $\beta \geq 0$ . Това неравенство може да се установи, като вземем под внимание, че (черт. 7)



Черт. 7

$$\overline{AB} \leq \overset{\frown}{AB}$$

или

$$2 \cdot OA \cdot \sin \beta \leq OA \cdot 2\beta, \text{ т. е. } \sin \beta \leq \beta.$$

За да покажем непрекъснатостта на функцията  $\sin x$  в една точка  $x_0$ , ползуваме се от неравенството

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot 1 = |x - x_0|.$$

Избираме едно положително число  $\varepsilon$  и полагаме  $\delta = \varepsilon$ . Тогава при  $|x - x_0| < \delta$  имаме

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

С това непрекъснатостта на функцията  $\sin x$  е установена при всеки избор на точката  $x_0$ . Аналогично се установява непрекъснатостта и на функцията  $\cos x$  при всички стойности на аргумента.

Една функция се нарича прекъсната в една точка от дефиниционната си област, когато не е непрекъсната в тази точка. Нека изрично кажем, че за да има смисъл да се питаме дали една функция е непрекъсната в една точка  $x_0$ , трябва точката  $x_0$  да принадлежи на дефиниционната област на функцията (в дефинициите, които дадохме, участва  $f(x_0)$  и следователно, за да можем да приложим коя да е от тия дефиниции, трябва да се знае какво означава  $f(x_0)$ ). Така например въпросът, дали функцията  $f(x) = \frac{1}{x}$ , дефинирана при  $x \neq 0$ , е прекъсната, или не, при  $x = 0$  е лишен от смисъл. Тази функция не е дефинирана при  $x = 0$ . Напротив, ако дефинираме функцията  $f(x)$  с условията  $f(x) = \frac{1}{x}$  при  $x \neq 0$  и  $f(0) = 1$ , то тази функция е дефинирана при  $x = 0$  и в тази точка е прекъсната.

Една функция се нарича непрекъсната в едно множество от точки, когато тя е непрекъсната във всяка точка в това множество.

В началото на този параграф ние дадохме още и такава дефиниция на понятието непрекъснатост: една функция  $f(x)$  се нарича непрекъсната в една точка  $x_0$  от дефиниционната си област, когато  $f(x)$  клони към  $f(x_0)$  при  $x$ , клонящо към  $x_0$  чрез стойности, различни от  $x_0$ , или, което е същото,  $f(x)$  се нарича непрекъсната в  $x_0$ , когато при всеки избор на положителното число  $\varepsilon$  може да се намери положително число  $\delta$  по такъв начин, че при всички стойности на  $x$  от дефиниционната област на  $f(x)$ , различни от  $x_0$  и удовлетворяващи неравенството  $|x - x_0| < \delta$ , е изпълнено неравенството

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Разбира се, тази дефиниция може да се прилага само когато във всяка околност на точката  $x_0$  има точки от дефиниционната област на  $f(x)$ , които са различни от  $x_0$ . В такъв случай тя е еквивалентна с другите две дефиниции, които ние разгледахме в този параграф, защото неравенството

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

е изпълнено очевидно и при  $x = x_0$ .



### § 8. Свойства на непрекъснатите функции

Нека  $f(x)$  и  $g(x)$  са две функции, дефинирани в някое точково множество  $M$ , и нека точката  $x_0$  принадлежи на  $M$ . Ако функциите  $f(x)$  и  $g(x)$  са непрекъснати в  $x_0$ , то функциите

$$(1) \quad f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x)g(x)$$

са също непрекъснати в точката  $x_0$ . Ако освен това  $g(x) \neq 0$  в  $M$ , то и функцията

$$(2) \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

е непрекъсната в точката  $x_0$ .

За да докажем това, разглеждаме произволна редица

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

от точки, които принадлежат на множеството  $M$  и клонят към  $x_0$ . В такъв случай, като вземем под внимание, че функцията  $f(x)$  и  $g(x)$  са непрекъснати в  $x_0$ , заключаваме, че редиците

$$\begin{aligned} f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots \\ g(x_1), g(x_2), g(x_3), \dots \end{aligned}$$

са сходящи. Оттук следва, че редиците

$$\begin{aligned} f(x_1) + g(x_1), \quad f(x_2) + g(x_2), \dots \\ f(x_1) - g(x_1), \quad f(x_2) - g(x_2), \dots \\ f(x_1)g(x_1), \quad f(x_2)g(x_2), \dots \end{aligned}$$

са също сходящи, а при  $g(x) \neq 0$  в  $M$ , то и редицата

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)}, \frac{f(x_2)}{g(x_2)}, \dots$$

е сходяща. С това е показано, че функциите (1) и (2) са наистина непрекъснати в точката  $x_0$ .

Преминаваме към едно друго често използвано свойство на непрекъснатите функции. За тази цел ще дефинираме първо понятието функция от функция (или, както се казва често, сложна функция).

Нека  $F(x)$  е една функция и  $M$  е нейната дефиниционна област. Ако всички функционални стойности на една функция  $f(t)$  принадлежат на  $M$ , то както и да избираме  $t$  от дефиниционната област на  $f(t)$  символът

$$F(f(t))$$

има смисъл. Стойността на този израз е еднозначно определена при всеки избор на  $t$  от дефиниционната област на  $f(t)$ . По този начин, като приложим

$$(3) \quad \varphi(t) = F(f(t)),$$

получаваме една функция на  $t$ , която е дефинирана в същото множество, където е дефинирана и функцията  $f(t)$ . Така получената функция (3) се нарича функция от функция или сложна функция.

Ще покажем, че непрекъснатата функция от непрекъснатата функция е непрекъснатата. По-точно ще покажем, че ако функцията  $f(t)$  е непрекъснатата в точката  $t_0$ , а функцията  $F(x)$  е непрекъснатата в точката  $x_0 = f(t_0)$  (и ако, разбира се, стойностите на  $f(t)$  не напускат дефиниционната област на  $F(x)$ , когато  $t$  се мени), то функцията (3) е непрекъснатата в точката  $t_0$ .

И наистина нека  $\varepsilon$  е произволно положително число. Избираме положителното число  $\eta$  по такъв начин, че ако  $|x - x_0| < \eta$  и  $x$  принадлежи към дефиниционната област на  $F(x)$ , то  $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$ . След като е дефинирано положителното число  $\eta$ , избираме положителното число  $\delta$  по такъв начин, че ако  $t$  принадлежи на дефиниционната област на  $f(t)$  и  $|t - t_0| < \delta$ , да имаме

$$|f(t) - f(t_0)| < \eta$$

или, което е същото,

$$(4) \quad |f(t) - x_0| < \eta.$$

Щом обаче е изпълнено неравенството (4), ще имаме

$$|F(f(t)) - F(x_0)| < \varepsilon$$

и следователно

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \varepsilon,$$

с което е показано, че функцията (3) е непрекъснатата в точката  $t_0$ .

В бъдеще ние често ще си служим и със следното свойство на непрекъснатите функции: ако функцията  $f(x)$  е непрекъснатата в една точка  $x_0$  от дефиниционната си област и  $f(x_0) > 0$ , то може да се намери положително число  $\delta$  по такъв начин, че за всички точки  $x$  от дефиниционната област на

$f(x)$ , за които  $|x - x_0| < \delta$ , да имаме  $f(x) > 0$ . За да докажем това, избираме положителното число  $\delta$  по такъв начин, че при всички стойности на  $x$  от дефиниционната област на  $f(x)$ , за които  $|x - x_0| < \delta$ , да имаме

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}f(x_0).$$

В такъв случай ще имаме

$$-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$$

и следователно

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

По същия начин се установява, разбира се, че ако функцията  $f(x)$  е непрекъсната в  $x_0$ , и ако  $f(x_0) < 0$ , то за всички стойности на  $x$  от дефиниционната област на  $f(x)$ , които са достатъчно близо до  $x_0$ , имаме

$$f(x) < 0.$$

И така ние установихме няколко съвсем прости свойства на непрекъснатите функции. Нека обърнем вниманието на читателя, че при доказателството ние не си служихме с принципа на непрекъснатост на множеството на реалните числа. Сега ще разгледаме няколко теореми, доказателствата на които съществено почиват на този принцип. Така ние често ще използваме принципа за компактност, който получихме като следствие от теоремата на Болцано—Вайерщрас. Тази теорема ние получихме обаче като следствие от теоремата на Кантор, която от своя страна доказахме въз основа на принципа за непрекъснатост.

Теоремите, които ще разгледаме сега, се отнасят за функции, които са дефинирани и непрекъснати в така наречени компактни множества. *Едно множество от точки се нарича компактно, когато е ограничено и когато всяка сходяща редица от точки, принадлежащи на това множество, клони към точка, която също принадлежи на това множество.* Така например всеки краен и затворен интервал  $a \leq x \leq b$  е компактно множество, защото това множество е ограничено и защото границата  $x_0$  на всяка сходяща редица

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

членовете на която удовлетворяват условието

$$a \leq x_n \leq b,$$

също удовлетворява условието

$$a \leq x_0 \leq b,$$

както ни учи теоремата на граничен преход в неравенствата (вж. част I, глава II, § 6).

**Теорема.** Ако една функция  $f(x)$  е дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество  $M$ , тя е ограничена (и отгоре, и отдолу).

Доказателството ще извършим от противното. Да допуснем, че функцията  $f(x)$  е непрекъсната в  $M$ , но не е ограничена. В такъв случай може да се намери число  $x_1$  от  $M$ , за което  $|f(x_1)| > 1$ , защото в противен случай бихме имали  $|f(x)| \leq 1$  навсякъде в  $M$ , т. е. функцията би била ограничена. Разсъждавайки по същия начин, заключаваме, че може да се намери число  $x_2$ , за което  $|f(x_2)| > 2$ , и пр. Така ние получаваме редица от числа

$$(5) \quad x_1, x_2, x_3, \dots,$$

принадлежащи на  $M$ , за която  $|f(x_n)| > n$ . Редицата (5) е обаче ограничена (всичките ѝ членове се намират в компактно множество  $M$ ) и следователно можем да изберем от нея (вж. § 9 от гл. II) сходяща подредица

$$(6) \quad \begin{aligned} & x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \dots, \\ & m_1 < m_2 < m_3 < \dots \end{aligned}$$

Нека  $\xi$  е границата на редицата (6). Тъй като всичките членове на редицата (6) принадлежат на компактно множество  $M$ , то и точката  $\xi$  лежи в него. От друга страна, функцията  $f(x)$  е дефинирана и непрекъсната във всичките точки на множеството  $M$ , следователно тя е дефинирана непрекъсната и в точката  $\xi$ . От това следва, че редицата

$$f(x_{m_1}), f(x_{m_2}), f(x_{m_3}), \dots$$

е сходяща, нещо, което не е възможно, защото неравенствата

$$|f(x_{m_k})| > m_k \geq k$$

ни учат, че тази редица не е ограничена (ние знаем, че всяка сходяща редица е ограничена). С това доказателството е завършено.

При доказателството ние съществено се възползувахме (къде?) от обстоятелството, че функцията е непрекъсната в едно компактно множество. Ако това условие е нарушено, не можем да твърдим, че функцията е ограничена. Така например функцията  $f(x) = \frac{1}{x}$  е непрекъсната за всяко  $x$  от отворения

интервал  $0 < x < 1$ , но тя не е ограничена в този интервал. Това, разбира се, не противоречи на теоремата, която току-що доказахме, защото множеството от точките, в което разглеждаме  $f(x)$ , не е компактно.

*Теорема на Вайерщрас (Weierstrass).* Измежду стойностите на една функция, дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество, има най-голяма и най-малка стойност.

Разбира се, всяко множество от краен брой числа има най-голямо и най-малко число. Но множеството на функционалните стойности на една функция, изобщо казано, е съставено от безбройно много числа, поради което съвсем не е ясно дали тя съдържа най-голям член, или не. Едно множество от безбройно много числа може да няма най-голям или най-малък член дори тогава, когато то е ограничено. Така например измежду числата, които образуват полуотворения интервал  $0 \leq x < 1$ , има едно най-малко, но няма най-голямо число.

Ние вече знаем, че една непрекъсната функция е ограничена както отгоре, така и отдолу и следователно притежава точна горна и точна долна граница. Ние не знаем обаче дали тази функция достига точната си долна и точната си горна граница.

Функцията  $f(x) = x$  при  $0 \leq x < 1$  е ограничена; точната ѝ горна граница е 1, а точната ѝ долна граница е нула. Тази функция достига точната си долна граница, но не достига точната си горна граница (точката  $x = 1$  не е причислена към дефиниционния интервал).

Теоремата на Вайерщрас може да се формулира още така:

Ако една функция  $F(x)$  е дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество  $M$ , то тя достига както точната си горна граница, така и точната си долна граница.

Това трябва да се разбира така: при изброените условия има точка  $x_1$  от  $M$ , за която  $f(x_1)$  е равно на точната горна граница на функцията, и точка  $x_2$ , за която  $f(x_2)$  е равно на точната долна граница на функцията.

След тази предварителна бележка ще пристъпим към доказателството на теоремата на Вайерщрас. Нека  $f(x)$  е една непрекъсната функция в компактното множество  $M$  и нека  $L$  е точната ѝ горна граница (функцията има точна горна граница, защото, както ние вече доказахме, тя е ограничена). Колкото и голямо да е цялото положително число  $n$ , числото  $L - \frac{1}{n}$  не е горна граница на  $f(x)$  (защото  $L$  е най-малката от горните граници) и следователно има поне едно число  $x_n$  от  $M$ , за което  $f(x_n) > L - \frac{1}{n}$ . По тоя начин ние добиваме възможност да дефинираме една редица от числа

$$(7) \quad x_1, x_2, x_3, \dots,$$

принадлежащи на  $M$ , за които са изпълнени неравенствата

$$(8) \quad f(x_n) > L - \frac{1}{n}.$$

Редицата (7) е ограничена (защото множеството  $M$  е компактно) и следователно ние можем от нея да изберем сходяща подредица

$$(9) \quad x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots \quad (n_1 < n_2 < n_3 < \dots).$$

Да означим с  $\xi$  границата на тази редица. Тъй като множеството  $M$  е компактно и всичките членове на редицата (9) принадлежат на него, то границата  $\xi$  също принадлежи на  $M$ . Това ни дава основание да твърдим, че функцията  $f(x)$  е дефинирана и непрекъсната в точката  $\xi$  и следователно редицата

$$f(x_{n_1}), f(x_{n_2}), \dots$$

е сходяща и клони към  $f(\xi)$ . От друга страна, имаме

$$(10) \quad L - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq L, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(Неравенствата  $L - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k})$  следват от неравенствата (8), а неравенствата  $f(x_{n_k}) \leq L$  са изпълнени, понеже  $L$  е една горна граница на  $f(x)$ .)

Редицата с общ член  $L - \frac{1}{n_k}$  е сходяща и клони към  $L$ . Редицата с общ член  $L$  е също сходяща и клони също към  $L$ . Това ни позволява да заключим с помощта на неравенствата (10), че редицата с общ член  $f(x_{n_k})$  клони към  $L$ . От друга страна, ние знаем, че

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi),$$

откъдето заключаваме, че  $f(\xi) = L$ . Разбира се,  $f(\xi)$  е най-голямата стойност на функцията, защото за всяка функционална стойност на  $f(x)$  имаме  $f(x) \leq L$  и следователно  $f(x) \leq f(\xi)$  (понеже  $f(\xi) = L$ ). С това доказателството е завършено.

Аналогично се установява и съществуването на най-малка функционална стойност.

**Теорема.** *Ако една функция  $f(x)$  е дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество  $M$ , то множеството  $N$  от функционалните стойности на  $f(x)$  е също тъй компактно.*

**Доказателство.** Ние вече знаем, че множеството  $N$  е ограничено, тъй като множеството  $M$  е компактно, а функцията  $f(x)$  е непрекъсната в  $M$ . Остава да покажем, че границата  $y_0$  на всяка сходяща редица

$$y_1, y_2, y_3, \dots,$$

членовете на която принадлежат на  $N$ , също тъй принадлежи на  $N$ . Това можем да установим така. Тъй като  $y_n$  принадлежи на  $N$ , то ние можем да намерим поне една точка  $x_n$  от  $M$ , за която

$$f(x_n) = y_n.$$

Редицата

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

обаче е ограничена, защото членовете ѝ принадлежат на компактното множество  $M$ . Това ни дава възможност да изберем от нея сходяща подредица

$$x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \dots \quad (m_1 < m_2 < m_3 < \dots).$$

Нека  $x_0$  е границата на тази сходяща подредица. Точката  $x_0$  принадлежи на  $M$ , защото множеството  $M$  е компактно. Функцията обаче е непрекъсната навсякъде в  $M$  и следователно е непрекъсната и в точката  $x_0$ , което ни дава

$$f(x_0) = y_0,$$

т. е. точката  $y_0$  действително принадлежи на  $N$ , с което е показано, че множеството  $N$  е компактно.

Сега ще разгледаме друго важно свойство на непрекъснатите функции.

**Теорема.** *Ако една функция  $f(x)$  е дефинирана и непрекъсната в един краен и затворен интервал  $[a, b]$  и в краищата на този интервал приема стойности с противни знаци, то има поне една точка в интервала  $[a, b]$ , за която функцията се анулира.*

Нека например  $f(a) > 0$  и  $f(b) < 0$  (аналогично се разглежда случаят, когато  $f(a) < 0$  и  $f(b) > 0$ ). Да означим с  $M$  множеството от онези точки  $x$  на интервала  $[a, b]$ , в които  $f(x) > 0$ . Такива точки има. Такава е във всеки случай точката  $a$ . Множеството  $M$  е ограничено, защото лежи в крайния интервал  $[a, b]$ . Нека  $x_0$  е точната горна граница на  $M$ . Както ще видим, точката  $x_0$  принадлежи на дефиниционната област на  $f(x)$  и при това  $f(x_0) = 0$ .

И наистина очевидно  $a \leq x_0$ , защото точката  $a$  принадлежи на  $M$ , а  $x_0$  е една горна граница на  $M$ . Също така  $x_0 \leq b$ , защото  $b$  е една горна граница

на  $M$ , а  $x_0$  е най-малката от горните граници на  $M$ . И така  $a \leq x_0 \leq b$ , т. е. функцията  $f(x)$  е дефинирана в точката  $x_0$ . Остава да покажем, че  $f(x_0) = 0$ . Точката  $x_0$  е най-малката от горните граници на  $M$ , следователно  $x_0 - \frac{1}{n}$  вече не е горна граница на  $M$ , колкото и голямо да е положителното число  $n$ . Това значи, че имаме поне една точка  $x_n$  от  $M$ , за която  $x_n > x_0 - \frac{1}{n}$ . Разбира се, имаме  $x_n \leq x_0$ , защото  $x_n$  принадлежи на  $M$ , а  $x_0$  е една горна граница на  $M$ . Като даваме на  $n$  стойностите

$$1, 2, 3, \dots,$$

получаваме редица, която клони към  $x_0$ , както това се вижда от току-що доказаните неравенства

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq x_0.$$

Това ни дава право да твърдим,\* че  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ . От друга страна,  $f(x_n) > 0$  (защото  $x_n$  принадлежи на  $M$ ) и следователно

$$f(x_0) \geq 0$$

(ако имяхме  $f(x_0) < 0$ , то числото  $f(x_0)$  не би могло да бъде точка на съгътяване за редицата  $f(x_1), f(x_2), \dots$ ).

Ние винаги можем да изберем в интервала  $[a, b]$  една редица от числа

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots,$$

които не принадлежат на  $M$  и клонят към  $x_0$ . И действително, ако  $x_0 = b$ , то достатъчно е да поставим  $\xi_n = b$ . Ако  $x_0 < b$ , числата  $\xi_n$  избираме произволно в отворения интервал  $(x_0, b)$ , подчинявайки ги на единственото условие да клонят към  $x_0$ . Редицата

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$$

клонят към  $x_0$  и следователно (поради непрекъснатостта на  $f(x)$  в точката  $x_0$ ) имаме

$$\lim f(\xi_n) = f(x_0).$$

От друга страна, числата  $\xi_n$  не принадлежат на  $M$ , т. е.  $f(\xi_n) \leq 0$ , нещо, което е достатъчно да твърдим, че и

$$f(x_0) \leq 0.$$

---

\*Използваме непрекъснатостта на  $f(x)$  при  $x = x_0$ .



И така получихме двете неравенства

$$f(x_0) \geq 0 \text{ и } f(x_0) \leq 0,$$

от което заключаваме, че  $f(x_0) = 0$ .

Доказаната теорема може да се формулира в малко по-обща форма по следния начин:

*Ако функцията  $f(x)$  е непрекъсната в крайния и затворен интервал  $[a, b]$  и ако  $\lambda$  е едно число, заключено между  $f(a)$  и  $f(b)$ , то има поне една точка  $x_0$  в интервала  $[a, b]$ , за която  $f(x_0) = \lambda$ .*

За да докажем това, образуваме помощната функция  $\varphi(x) = f(x) - \lambda$ . Функцията  $\varphi(x)$  е непрекъсната в затворения интервал  $[a, b]$  и в краищата на този интервал приема стойностите  $\varphi(a) = f(a) - \lambda$  и  $\varphi(b) = f(b) - \lambda$ , които имат противни знаци, защото  $\lambda$  се намира между  $f(a)$  и  $f(b)$  (ако  $f(a) < \lambda < f(b)$ , то  $\varphi(a) < 0$  и  $\varphi(b) > 0$ ; ако ли пък  $f(b) < \lambda < f(a)$ , то  $\varphi(a) > 0$  и  $\varphi(b) < 0$ ). Това ни дава право да твърдим, че има поне една точка  $x_0$  в интервала  $[a, b]$ , за която  $\varphi(x_0) = 0$  и следователно

$$f(x_0) = \lambda.$$

## § 9. Равномерна непрекъснатост

Ние знаем кога една функция се нарича непрекъсната. Така не е трудно да се види, че функцията  $f(x) = x^2$ , дефинирана за всички стойности на  $x$ , е непрекъсната навсякъде. Това може да се покаже по следния начин: избираме произволно положително число  $\varepsilon$  и с  $\delta$  означаваме по-малкото от двете числа 1 и  $\frac{\varepsilon}{2|x| + 1}$ ; в такъв случай от неравенството

$$|(x + h)^2 - x^2| = |2xh + h^2| \leq (2|x| + |h|)|h|$$

заключаваме, че при  $|h| < \delta$  имаме

$$|(x + h)^2 - x^2| < [2|x| + 1]|h| < (2|x| + 1)\frac{\varepsilon}{2|x| + 1} = \varepsilon.$$

Числото  $\delta$ , което съпоставихме по този начин на  $\varepsilon$ , зависи в дадения случай не само от  $\varepsilon$ , но и от  $x$ . Ние ще си зададем сега следния въпрос: може ли, след като е направен изборът на положителното число  $\varepsilon$ , да се намери *независещо* от  $x$  положително число  $\delta$  така, че неравенството

$$|(x + h)^2 - x^2| < \varepsilon$$

да бъде изпълнено при *всички стойности* на  $x$ , щом  $|h| < \delta$ ? Отговорът на този въпрос е отрицателен. И наистина, ако такова число би могло да се намери, то бихме имали например при  $h = \frac{\delta}{2}$  и *при всички стойности* на  $x$

$$\left| \left( x + \frac{\delta}{2} \right)^2 - x^2 \right| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\left| \delta x + \frac{\delta^2}{4} \right| < \varepsilon$$

и толкова повече

$$\delta|x| - \frac{\delta^2}{4} < \varepsilon.$$

Това неравенство обаче сигурно е нарушено, ако  $|x|$  е достатъчно голямо, защото  $\delta$  е различно от нула.

Като друг пример да разгледаме функцията  $\cos x$ , дефинирана за всяко  $x$ . За да покажем, че тази функция е непрекъснатата, избираме едно положително число  $\varepsilon$  и полагаме  $\delta = \varepsilon$ . В такъв случай от неравенството

$$\begin{aligned} |\cos(x+h) - \cos x| &= \left| -2 \sin \frac{h}{2} \sin \left( x + \frac{h}{2} \right) \right| \\ &= 2 \left| \sin \frac{h}{2} \right| \cdot \left| \sin \left( x + \frac{h}{2} \right) \right| \leq 2 \left| \frac{h}{2} \right| \cdot 1 = |h| \end{aligned}$$

заклучаваме, че при  $|h| < \delta$  имаме

$$(1) \quad |\cos(x+h) - \cos x| < \varepsilon$$

*при всяко  $x$* . Ние можахме да изберем в този случай едно *независещо* от  $x$  положително число  $\delta$  така, че неравенството (1) да е изпълнено за *всяко  $x$* , щом  $|h| < \delta$ . Често тази особеност на непрекъснатата функция  $\cos x$  изразяваме, като казваме, че тя е *равномерно* непрекъснатата. Изобщо казваме, че една функция  $f(x)$  на *независимата* променлива  $x$  е *равномерно* непрекъснатата в едно множество  $M$  от точки, когато на всяко положително число  $\varepsilon$  може да се съпостави такова положително число  $\delta$ , евентуално зависещо от  $\varepsilon$ , но не и от  $x$ , че неравенството

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$$

да бъде изпълнено за *всички стойности* на  $x$  от  $M$  и за *всички стойности* на  $h$ , за които  $|h| < \delta$  и точката  $x+h$  принадлежи на  $M$ .

Ние вече видяхме, че не всяка непрекъсната функция е равномерно непрекъсната в дефиниционната си област. Ние ще докажем обаче сега следната важна теорема:

*Ако една функция  $f(x)$  е дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество  $M$ , тя е равномерно непрекъсната в  $M$ .*

Доказателството ще извършим от противното. Да допуснем, че има някое положително число  $\varepsilon$ , за което не е възможно да се избере положително число  $\delta$  така, че за всеки две числа  $x$  и  $x'$  от  $M$ , за които  $|x - x'| < \delta$ , да имаме  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ . Това значи, че при всеки избор на  $\delta$  могат да се намерят две числа  $x$  и  $x'$ , за които, макар и да имаме  $|x - x'| < \delta$ , при все това  $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$ . Специално, ако изберем  $\delta = \frac{1}{n}$ , където  $n$  е цяло положително число, ще можем да намерим две числа  $x_n$  и  $x'_n$  от  $M$ , за които

$$(2) \quad |x_n - x'_n| < \frac{1}{n},$$

но

$$(3) \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon.$$

Като дадем на  $n$  стойностите  $1, 2, 3, \dots$ , добиваме възможност да дефинираме две редици от числа

$$x_1, x_2, x_3, \dots, \\ x'_1, x'_2, x'_3, \dots,$$

удовлетворяващи неравенствата (2) и (3).

Редицата

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

е ограничена (тъй като всичките ѝ членове се намират в компактното множество  $M$ ) и следователно от тази редица можем да изберем сходяща поредица

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots \quad (n_1 < n_2 < n_3 < \dots).$$

Нека  $\xi$  е границата на тази поредица. Редицата

$$x'_{n_1}, x'_{n_2}, \dots$$

е също така сходяща и клони към  $\xi$ , както това се вижда от неравенствата

$$|\xi - x'_{n_k}| = |(\xi - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x'_{n_k})| \leq |\xi - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x'_{n_k}| \leq |\xi - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k}.$$

От друга страна, точката  $\xi$  лежи в компактното множество  $M$ , защото тя е граница на редица от числа, които лежат в  $M$ . И така функцията  $f(x)$  е дефинирана и непрекъсната в точката  $\xi$ . Оттук заключаваме, че двете редици

$$(4) \quad \begin{aligned} & f(x_{n_1}), f(x_{n_2}), \dots, \\ & f(x'_{n_1}), f(x'_{n_2}), \dots \end{aligned}$$

са сходящи и клонят към  $f(\xi)$ , тъй като двете редици

$$\begin{aligned} & x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, \\ & x'_{n_1}, x'_{n_2}, x'_{n_3}, \dots \end{aligned}$$

клонят към  $\xi$  и функцията е непрекъсната в точката  $\xi$ . Двете редици (4) обаче не могат да клонят към обща граница, защото

$$|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon.$$

И така достигнахме до противоречие, което се дължи на допускането, че функцията  $f(x)$  не е равномерно непрекъсната в  $M$ .

### § 10. Осцилация на една функция

Ако една функция е ограничена (и отгоре, и отдолу), тя притежава точна горна граница  $M$  и точна долна граница  $m$ . Разликата  $M - m$  се нарича осцилация на функцията. И така осцилация на една функция се нарича разликата между точната горна и точната долна граница на функцията.

Ако една функция  $f(x)$  е дефинирана и непрекъсната в един краен и затворен интервал  $[a, b]$ , то каквото и да бъде положителното число  $\varepsilon$ , може да се намери такова положително число  $\delta$ , че всеки път, когато разделим интервала  $[a, b]$  на подинтервали

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n],$$

чиито дължини са по-малки от  $\delta$ , с помощта на точките

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b,$$

осцилацията на функцията  $f(x)$  във всеки един от тях да бъде по-малка от  $\varepsilon$ .

Доказателството ще извършим по следния начин. Въз основа на теоремата за равномерна непрекъснатост ние можем да изберем положителното число  $\delta$  така, че щом  $|x - x'| < \delta$ , да имаме

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Нека дължината на всеки един от подинтервалите е по-малка от  $\delta$ , т.е.  $a_k - a_{k-1} < \delta$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Нека  $M_k$  е точната горна и  $m_k$  е точната долна граница на функцията в интервала  $[a_{k-1}, a_k]$ . Според теоремата на Вайерщрас има точка  $x'_k$  и точка  $x''_k$  от интервала  $[a_{k-1}, a_k]$ , за които

$$\begin{aligned} f(x'_k) &= M_k, \\ f(x''_k) &= m_k. \end{aligned}$$

От друга страна,  $|x'_k - x''_k| < \delta$ , защото дължината на интервала  $[a_{k-1}, a_k]$ , който съдържа точките  $x'_k$  и  $x''_k$ , е по-малка от  $\delta$ . Това ни дава основание да заключим, че

$$|f(x'_k) - f(x''_k)| < \varepsilon$$

или, което е същото,

$$M_k - m_k < \varepsilon.$$

С това всичко е доказано.

### § 11. Още една форма на дефиницията на понятието непрекъснатост

Нека  $f(x)$  е една функция, която е непрекъсната в точката  $x_0$  от дефиниционната ѝ област  $M$ . Ако

$$\begin{aligned} x'_1, x'_2, \dots, \\ x''_1, x''_2, \dots \end{aligned}$$

са две произволни редици от числа, принадлежащи на  $M$  и клонящи към  $x_0$ , а редицата с общ член

$$f(x''_n) - f(x'_n)$$

клонят към нула, както това се вижда от дефиницията на понятието непрекъснатост.

Това ние изразяваме накратко, като казваме, че разликата

$$f(x'') - f(x')$$

клонят към нула, когато  $x'$  и  $x''$  клонят независимо едно от друго към  $x_0$  чрез стойности от дефиниционната област на  $f(x)$ .

Обратното твърдение е също така в сила. Това значи, че ако разликата

$$f(x''_n) - f(x'_n)$$

клони към нула при всеки избор на двете клонящи към  $x_0$  редици

$$\begin{aligned} x'_1, x'_2, x'_3, \dots, \\ x''_1, x''_2, x''_3, \dots \end{aligned}$$

от числа, принадлежащи на дефиниционната област на  $f(x)$ , то функцията  $f(x)$  е непрекъсната в точката  $x_0$ .

За нашите цели е важно, че може да се установи непрекъснатостта на  $f(x)$  в дадена точка  $x_0$  при по-малко ограничителни условия: за да се твърди, че  $f(x)$  е непрекъсната в точката  $x_0$ , достатъчно е да се знае, че

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x'_n) - f(x''_n)] = 0$$

поне за онези клонящи към  $x_0$  редици

$$\begin{aligned} x'_1, x'_2, x'_3, \dots, \\ x''_1, x''_2, x''_3, \dots \end{aligned}$$

от числа, принадлежащи на дефиниционната област на  $f(x)$ , които удовлетворяват неравенствата

$$x'_n \leq x_0 \leq x''_n.$$

И наистина нека

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

е произволна редица от числа, които принадлежат на дефиниционната област на  $f(x)$  и клонят към  $x_0$ . Означаваме с  $x'_n$  по-малкото от двете числа  $x_n$  и  $x_0$ , а с  $x''_n$  — по-голямото от тези числа. В такъв случай числата  $x'_n$  и  $x''_n$  принадлежат на дефиниционната област на  $f(x)$  (защото  $x_n$  и  $x_0$  имат това свойство) и удовлетворяват неравенствата  $x'_n \leq x_0 \leq x''_n$ . Освен това двете редици

$$\begin{aligned} x'_1, x'_2, x'_3, \dots, \\ x''_1, x''_2, x''_3, \dots \end{aligned}$$

са сходящи и клонят към  $x_0$ , както се вижда от лесно доказуемите равенства

$$\begin{aligned} x'_n &= \frac{x_n + x_0 - |x_n - x_0|}{2}, \\ x''_n &= \frac{x_n + x_0 + |x_n - x_0|}{2}. \end{aligned}$$

Дадено е обаче, че за всеки две редици

$$\begin{aligned} x'_1, x'_2, x'_3, \dots, \\ x''_1, x''_2, x''_3, \dots, \end{aligned}$$

които удовлетворяват изброените условия, имаме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x'_n) - f(x'_n)] = 0.$$

Като се възползуваме от равенството

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x'_n) - f(x'_n)|,$$

заклучаваме, че

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0),$$

което показва, че функцията  $f(x)$  е действително непрекъсната в точката  $x_0$ .

Направените разсъждения ни позволяват да формулираме по следния начин дефиницията на понятието непрекъснатост на една функция:

*Казваме, че една функция  $f(x)$  е непрекъсната в точката  $x_0$  от дефиниционната си област, ако разликата*

$$f(x'') - f(x')$$

*клони към нула, когато оставим  $x'$  и  $x''$  да клонят по произволен начин (т. е. чрез произволни редици от стойности) към  $x_0$ , като удовлетворяват неравенството  $x' \leq x_0 \leq x''$  и остават в дефиниционната област на  $f(x)$ .*

### Задачи

*Забележка.* Символът  $[x]$  означава най-голямото цяло число, което не надминава  $x$  (срв. част II, § 3).

1. Покажете, че функцията  $[x]$  се прекъсва при цели стойности на  $x$  и че при останалите стойности на  $x$  тя е непрекъсната.

2. Покажете, че функцията  $f(x) = \sin \pi(x - [x])$  е непрекъсната при всяко  $x$ .

3. Покажете, че функцията  $f(x) = [x] \sin \pi x$  е непрекъсната при всяко  $x$ .

4. Покажете, че функцията  $f(x) = [x]^2 - 2x[x] + [x]$  е непрекъсната при всяко  $x$ .

5. Покажете, че функцията

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} [\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n}(m! \pi x)]$$

е дефинирана при всяко  $x$  и при всяко  $x$  е прекъсната (Дирихле).

*Упътване.* Покажете, че при рационални стойности на  $x$  имаме  $f(x) = 1$ , а при ирационални стойности на  $x$  имаме  $f(x) = 0$ .

6. Нека  $f(x)$  е функция, дефинирана при  $0 < x \leq 1$  по следния начин: ако  $x = \frac{p}{q}$ , където  $p$  и  $q$  са две цели положителни взаимно прости числа, то  $f(x) = \frac{1}{q}$ ; ако  $x$  е ирационално, то  $f(x) = 0$ . Покажете, че функцията  $f(x)$  е прекъсната при всички рационални стойности на  $x$ , но е непрекъсната за всички ирационални стойности на  $x$  в дефиниционния си интервал.

7. Нека  $f(x)$  е функция, дефинирана при  $0 < x \leq 1$  по следния начин: ако  $x = \frac{p}{q}$ , където  $p$  и  $q$  са две цели положителни взаимно прости числа, то  $f(x) = q$ ; ако  $x$  е ирационално, то  $f(x) = 0$ . Покажете, че функцията  $f(x)$  не е ограничена в никой подинтервал на интервала  $0 < x \leq 1$ .

8. Нека  $n$  е цяло положително число и  $a \geq 0$ . Покажете, че уравнението  $x^n - a = 0$  има поне едно неотрицателно решение, като използвате общите свойства на непрекъснатите функции. (Читателят вече познава някои доказателства на това твърдение; знае също така, че решението е единствено; тук се иска друго доказателство за съществуване, почиващо върху теорията на непрекъснатите функции.)

*Упътване.* Разгледайте непрекъснатата функция  $f(x) = x^n - a$  в крайния и затворен интервал  $0 \leq x \leq a + 1$  и покажете, че  $f(0) \leq 0$  и  $f(a + 1) > 0$ .

## § 12. Производна на функция

Нека е дадена една крива\* с уравнение  $y = f(x)$ , където функцията  $f(x)$  е дефинирана при  $a < x < b$ . Ще си поставим за задача да дефинираме понятието допирателна към кривата  $y = f(x)$  в една точка от тази крива. Нека координатите на точката, която ни интересува, са  $[x_0, f(x_0)]$ , където, разбира се,  $a < x_0 < b$ . Ако  $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$  са координатите на друга точка (т. е. такава, за която  $h \neq 0$ ) от кривата, ние можем да напишем уравнението\*\* на секущата, която съединява точките  $[x_0, f(x_0)]$  и  $[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ .

Уравнението на тази права е\*\*\*

$$(1) \quad \eta - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(\xi - x_0),$$

\*Често, вместо да казваме „графика на функцията  $y = f(x)$ “, ще казваме „крива с уравнение  $y = f(x)$ “.

\*\*Читателят знае, че графиката на всяка линейна функция  $y = ax + b$  е права. Поради това често пъти уравнение от вида  $y = ax + b$  се нарича уравнение на права. Променливите  $x$  и  $y$  се наричат текущи координати, а коефициентът  $a$  се нарича ъглов коефициент на правата.

\*\*\*Ако  $P_1(x_1, y_1)$  и  $P_2(x_2, y_2)$  са две точки с различни абсциси, то графиката на линейната функция

$$(*) \quad y = ax + b, \text{ където } a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ и } b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1,$$

минава през двете точки  $P_1$  и  $P_2$ , защото, както се вижда с прости пресмятания, тази линейна функция при  $x = x_1$  приема стойността  $y_1$ , а при  $x = x_2$  приема стойността  $y_2$ .

Често пъти уравнението (\*) се пише във вида

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

или

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

(ако  $y_2 \neq y_1$ ) и пр.



където с  $\xi$  и  $\eta$  сме означили текущите координати. Ние можем да напишем това уравнение, колкото и малко да е числото  $h$ , стига да е различно от нула и точката  $x_0 + h$  да принадлежи на дефиниционната област на  $f(x)$ . Поради тази причина има смисъл да поставим въпроса, дали коефициентите в уравнението (1) клонят към някакви граници, когато  $h$  клони към нула (разбира се, чрез стойности, различни от нула).

За да притежават всичките коефициенти в уравнението (1) граници, необходимо и достатъчно е изразът

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

да притежава граница при  $h \rightarrow 0$ . Тази граница ще означим с  $f'(x_0)$ . Правата с уравнение

$$\eta - f(x_0) = f'(x_0)(\xi - x_0)$$

се нарича гранична права, към която клонят секущите (1) при  $h \rightarrow 0$ , или накратко — допирателна. И така допирателна (или тангента, както се казва понякога) към кривата  $y = f(x)$  в точката  $[x_0, f(x_0)]$  се нарича правата с уравнение

$$\eta - f(x_0) = f'(x_0)(\xi - x_0).$$

В бъдеще ние ще се ползуваме често от израза

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

който е добре дефиниран, когато точките  $x_0$  и  $x_0 + h$  принадлежат на дефиниционната област на функцията  $f(x)$  и  $h$  е различно от нула. При фиксирано  $x_0$  този израз представлява една функция на  $h$ .

Разбира се, няма смисъл да се питаме каква е стойността на този израз при  $h = 0$ . При  $h = 0$  той не е дефиниран, защото знаменателят става нула. Има смисъл да си зададем въпроса обаче, дали той притежава граница или не, когато  $h$  клони към нула чрез стойности, различни от нула. С няколко прости примера ще покажем, че има функции, за които

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

съществува, но има също функции, за които тази граница не съществува. Нека  $f(x) = x^2$ . В такъв случай

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h.$$

Очевидно в този случай интересуващата ни граница съществува при всички стойности на  $x_0$  и има стойност  $2x_0$ .

Да разгледаме функцията  $f(x) = |x|$  и да изберем  $x_0 = 0$ . В такъв случай

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{|h|}{h},$$

т. е.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 1 \text{ при } h > 0 \text{ и } \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -1 \text{ при } h < 0.$$

Ако оставим  $h$  да клони към нула чрез една редица

$$h_1, h_2, h_3, \dots$$

от стойности, която съдържа както безкрайно много положителни, така и безбройно много отрицателни членове, заключаваме, че съответната редица от стойности на израза

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

не клони към никаква граница, защото има две точки на съгъстяване (безбройно много от нейните членове са равни на 1 и безбройно много други са равни на  $-1$ , поради което точките 1 и  $-1$  са точки на съгъстяване на тази редица).

В основата на всичко, което ще следва в този курс, лежи следната дефиниция.

*Нека във всяка околност на една точка  $x_0$  от дефиниционната област  $M$  на една функция  $f(x)$  има точки, принадлежащи на  $M$ , различни от  $x_0$ . Казваме, че функцията  $f(x)$  е диференцируема\* в точката  $x_0$ , ако изразът*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

*притежава граница, когато  $h$  клони към нула чрез стойности, различни от нула, за които точката  $x_0 + h$  не напуска дефиниционната област на  $f(x)$ .*

*Границата, към която клони изразът*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

*(когато функцията е диференцируема) при  $h \rightarrow 0$ , се нарича производна на функцията  $f(x)$  при  $x = x_0$ .*

---

\*Вместо да казваме, че  $f(x)$  е диференцируема в една точка, често казваме, че  $f(x)$  има производна в тази точка.

Производната на функцията  $y = f(x)$  в точката  $x$  обикновено ще означаваме със знака  $f'(x)$  или  $y'$  (четете — еф прим, игрек прим). Употребяват се обаче и означенията

$$\dot{y}, \frac{dy}{dx}, Dy$$

и пр. (четете — игрек точка, де игрек де икс, де игрек и пр.).

Понятието допирателна към една крива  $y = f(x)$  дефинирахме само в случая, когато в разглежданата точка функцията  $f(x)$  е диференцируема. В такъв случай ъгловият коефициент на допирателната в една точка от кривата с абсциса  $x_0$  е равен на стойността на производната  $f'(x_0)$  в тази точка.

Сега ще покажем, че ако една функция е диференцируема в една точка, тя е непрекъсната в тази точка. За да докажем това, образуваме си помощната функция  $\varphi(x)$  в дефиниционната област на  $f(x)$  по следния начин:

$$(2) \quad \varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

при  $x \neq x_0$  и  $\varphi(x_0) = 0$ .

В такъв случай получаваме

$$(3) \quad f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$$

за всички стойности на  $x$  от дефиниционната област на  $f(x)$ . Тъй като

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

не е трудно да се види, че при произволен избор на редицата

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

която клони към  $x_0$  и членовете на която принадлежат на дефиниционната област на  $f(x)$ , съответната редица

$$\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \dots$$

клони към нула. Като вземем това пред вид, заключаваме с помощта на равенството (3), че  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n) - f(x_0)] = 0$ , т. е. редицата

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$$

клони към  $f(x_0)$ , което показва, че функцията  $f(x)$  е непрекъсната в точката  $x_0$ .

И така, ако една функция е диференцируема в една точка, тя е непрекъснатата в тази точка.

Обратното не е вярно. И наистина функцията  $f(x) = |x|$  е непрекъснатата навсякъде, както това лесно може да се види, но ние видяхме, че тя няма производна при  $x = 0$ . През миналия век Вайерщрас показа с един пример, че има функции, които са дефинирани и непрекъснати за всяко  $x$ , но за никое  $x$  нямат производна.

Нека пак  $f(x)$  означава функция, която е диференцируема в точката  $x_0$ . Ако  $x'$  и  $x''$  клонят независимо едно от друго към  $x_0$  (чрез стойности от дефиниционната област на  $f(x)$ ) по такъв начин, че

$$x' \leq x_0 \leq x'' \quad \text{и} \quad x'' \neq x',$$

частното

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$

клонят към  $f'(x_0)$ .

Това твърдение трябва да се разбира така: каквито и да се двете клонящи към  $x_0$  редици

$$\begin{aligned} x'_1, x'_2, x'_3, \dots, \\ x''_1, x''_2, x''_3, \dots \end{aligned}$$

от числа, които принадлежат на дефиниционната област на  $f(x)$  и удовлетворяват неравенствата

$$x'_n \leq x_0 \leq x''_n, \quad x'_n \neq x''_n,$$

редицата с общ член

$$\frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n}$$

е сходяща и клонят към  $f'(x_0)$ .

За да докажем това, ще се възползуваме от равенството (3). И така

$$\begin{aligned} f(x''_n) - f(x_0) &= f'(x_0)(x''_n - x_0) + \varphi(x''_n)(x''_n - x_0), \\ f(x'_n) - f(x_0) &= f'(x_0)(x'_n - x_0) + \varphi(x'_n)(x'_n - x_0). \end{aligned}$$

Последните две равенства са валидни дори тогава, когато някое от двете числа  $x'_n$  и  $x''_n$  е равно на  $x_0$ . Като извадим почленно тези две равенства, получаваме

$$f(x''_n) - f(x'_n) = f'(x_0)(x''_n - x'_n) + \varphi(x''_n)(x''_n - x_0) + \varphi(x'_n)(x_0 - x'_n)$$

или

$$\frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'} - f'(x_0) = \varphi(x_n'') \frac{x_n'' - x_0}{x_n'' - x_n'} + \varphi(x_n') \frac{x_0 - x_n'}{x_n'' - x_n'}.$$

Избираме едно произволно положително число  $\varepsilon$  и определяме  $\nu$  така, че при  $n > \nu$  да имаме

$$|\varphi(x_n'')| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |\varphi(x_n')| < \varepsilon.$$

Това е възможно, понеже

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n'') = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n') = 0.$$

В такъв случай при  $n > \nu$  имаме

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'} - f'(x_0) \right| &\leq |\varphi(x_n'')| \frac{x_n'' - x_0}{x_n'' - x_n'} + |\varphi(x_n')| \frac{x_0 - x_n'}{x_n'' - x_n'} \\ &< \varepsilon \frac{x_n'' - x_0}{x_n'' - x_n'} + \varepsilon \frac{x_0 - x_n'}{x_n'' - x_n'} = \varepsilon, \end{aligned}$$

с което твърдението е доказано.

Нека подчертаем, че в доказателството ние използваме съществено, че  $x_n' \leq x_0 \leq x_n''$  (къде?). Ако това условие не е изпълнено, може да се случи редицата с общ член

$$\frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'}$$

да не клони към  $f'(x_0)$ , макар  $f(x)$  и да е диференцуема в точката  $x_0$ . За да се убедим в това, ние ще разгледаме функцията, дефинирана с условието

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

при  $x \neq 0$  и с условието  $f(0) = 0$  при  $x = 0$ . Тази функция е диференцуема при  $x = 0$  и  $f'(0) = 0$ . И наистина при  $h \neq 0$  имаме

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = h \sin \frac{1}{h}.$$

Но множителят  $\sin \frac{1}{h}$  остава ограничен, когато  $h$  се мени. От това заключаваме, че производението  $h \sin \frac{1}{h}$  клони към нула заедно с  $h$ , което показва, че функцията  $f(x)$  е диференцуема при  $x = 0$  и  $f'(0)$ .

Избираме

$$x'_n = \frac{2}{(4n+3)\pi} \quad \text{и} \quad x''_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}.$$

В такъв случай редицата с общ член

$$\frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n} = \frac{(4n+3)^2 + (4n+1)^2}{(4n+1)(4n+3)\pi}$$

клони към  $\frac{2}{\pi}$ , т. е. не клони към  $f'(0)$ .

Да означим пак с  $x_0$  една точка от дефиниционната област на една функция  $f(x)$ . Ако изразят

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$

клони към някаква граница  $l$ , когато  $x'$  и  $x''$  клонят\* към  $x_0$  независимо едно от друго чрез стойности от дефиниционната област на  $f(x)$ , удовлетворявайки неравенствата

$$x' \leq x_0 \leq x'', \quad x'' \neq x',$$

то може да се твърди, че функцията  $f(x)$  е диференцуема в точката  $x_0$  и  $f'(x_0) = l$ .

И наистина нека

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

е една произволна редица от числа, които принадлежат на дефиниционната област на  $f(x)$  и удовлетворяват условията

$$x_n \neq x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

Нека по-малкото от числата  $x_n$  и  $x_0$  означим с  $x'_n$ , а по-голямото — с  $x''_n$ . В такъв случай двете редици

$$\begin{aligned} x'_1, x'_2, x'_3, \dots, \\ x''_1, x''_2, x''_3, \dots \end{aligned}$$

са сходящи и клонят към  $x_0$  (вж. задача 2 към § 6 от глава II). Освен това очевидно числата  $x'_n$  и  $x''_n$  принадлежат на дефиниционната област на  $f(x)$  и удовлетворяват неравенствата

$$x''_n - x'_n = |x_0 - x_n| \neq 0 \quad \text{и} \quad x'_n \leq x_0 \leq x''_n.$$

\*Ние вече пояснихме по-горе в какъв смисъл трябва да се разбират тези думи.

Ако знаем, че редицата с общ член

$$\frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'}$$

е сходяща и клони към  $l$ , заключаваме с помощта на равенството

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{f(x_n'') - f(x_n')}{x_n'' - x_n'},$$

че функцията  $f(x)$  е диференцируема в точката  $x_0$  и  $f'(x_0) = l$ .

Направените разсъждения ни дават възможността да дадем още и следната форма на дефиницията на понятието производна:

Функцията  $f(x)$  е диференцируема в една точка  $x_0$  от дефиниционната си област\*, ако изразът

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$$

притежава граница  $l$ , когато  $x'$  и  $x''$  клонят независимо едно от друго към  $x_0$  чрез стойности от дефиниционната област на  $f(x)$ , удовлетворявайки условията

$$x' \leq x_0 \leq x'', \quad x' \neq x''.$$

Границата  $l$  се нарича производна на  $f(x)$  в точката  $x_0$ .

### § 13. Механичното значение на производната

Понятието производна е тясно свързано с понятието скорост. Решавайки задачата за определянето на скоростта на една неравномерно движеща се точка, Нютон достигна до понятието производна също както Лайбниц достигна до това понятие, решавайки задачата за допирателните.

Нека си мислим една точка  $M$ , която се движи по една права. Да изберем върху тази права една точка за начало на координатната система. В такъв случай положението на точката  $M$  се определя еднозначно с нейната абсциса. Движението на точката  $M$  считаме познато, когато абсцисата на точката  $M$  е дадена като функция на времето. Нека времето означим с  $t$  и нека  $x = f(t)$  е абсцисата на точката  $M$  в момента на  $t$ . Да разгледаме два момента  $t$  и  $t_0$ . В такъв случай, както знаем от механиката, изразът

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

\*Разбира се, тук трябва да се иска във всяка околност на  $x_0$  да има точки от дефиниционната област на  $f(x)$ , които са различни от  $x_0$ .

се нарича средна скорост на точката  $M$  в интервала от време  $(t_0, t)$ . (В случая, когато точката  $M$  се движи еднопосочно, разликата  $|f(t) - f(t_0)|$  има много прост механичен смисъл: това е точно дължината на пътя, описан от точката  $M$  през интервала от време  $(t_0, t)$ .)

Границата

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

се нарича скорост на точката  $M$  в момента  $t_0$ . Когато вземем под внимание дефиницията на понятието производна, заключаваме, че скоростта в момента  $t_0$  е  $f'(t_0)$ .

*Пример.* При равноускорително движение на точката с абсцисата  $x$ , когато в началния момент точката се намира в началото на координатната система, имаме  $x = \frac{1}{2}qt^2 + v_0t$ , където  $q$  е ускорението и  $v_0$  е началната скорост. За скоростта  $v$  в момента  $t$  получаваме  $v = x' = qt + v_0$ , както това се вижда от дефиницията на понятието производна.

#### § 14. Елементарни свойства на производните

Нека функциите  $f(x)$  и  $g(x)$  имат обща дефиниционна област  $M$ ; нека точката  $x_0$  принадлежи на  $M$  и нека във всяка околност на  $x_0$  има точки от  $M$ , различни от  $x_0$ . Ако при тези предположения функциите  $f(x)$  и  $g(x)$  са диференцуеми в точката  $x_0$ , то функцията  $F(x) = f(x) + g(x)$  е също диференцуема в тази точка и

$$F'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

За да докажем това, изхождаме от тъждеството

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}.$$

Тъй като отношенията

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ и } \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

притежават граница, когато  $h$  клони към нула, то отношението

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$

също притежава граница при  $h \rightarrow 0$ . И така функцията е диференцуема при  $x = x_0$ . От

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$



заклучаваме, че

$$F'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Аналогично при същите предположения се доказва, че функцията  $F(x) = f(x) - g(x)$  е също диференцируема в тази точка и

$$F'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$

За доказателство използваме тъждеството

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}.$$

При същите предположения се доказва, че функцията  $F(x) = f(x)g(x)$  е също диференцируема в точката  $x_0$  и

$$F'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

За да докажем това, ще положим

$$u(h) = f(x_0 + h) - f(x_0),$$

$$v(h) = g(x_0 + h) - g(x_0),$$

откъдето

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + u(h),$$

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + v(h).$$

Разглеждаме отношението

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h}.$$

Очевидно

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= \frac{[f(x_0) + u(h)][g(x_0) + v(h)] - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0)v(h) + g(x_0)u(h) + u(h)v(h)}{h} = f(x_0)\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\ &\quad + g(x_0)\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}h, \end{aligned}$$

откъдето заключаваме, като оставим  $h$  да клони към нула, че производната  $F'(x_0)$  съществува и

$$F'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0).$$

Най-сетне все при същите предположения относно функциите  $f(x)$  и  $g(x)$  и при условие, че  $g(x) \neq 0$ , ще установим, че функцията  $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  е диференцируема в точката  $x_0$  и

$$F'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

И наистина ако положим

$$\begin{aligned} u(h) &= f(x_0 + h) - f(x_0), \\ v(h) &= g(x_0 + h) - g(x_0), \end{aligned}$$

имаме

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + u(h), \\ g(x_0 + h) &= g(x_0) + v(h) \end{aligned}$$

и следователно

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= \frac{\frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} \\ &= \frac{\frac{f(x_0) + u(h)}{g(x_0) + v(h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \frac{g(x_0)u(h) - f(x_0)v(h)}{hg(x_0)[g(x_0) + v(h)]} \\ &= \frac{g(x_0)\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f(x_0)\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}{g(x_0)g(x_0 + h)}. \end{aligned}$$

От тъждество (1) заключаваме, като извършим граничния преход  $h \rightarrow 0$ , че производната  $F'(x_0)$  съществува и

$$F'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

(тук ние се ползуваме от това, че функцията  $g(x)$  е непрекъсната в точката  $x_0$  и следователно  $g(x_0 + h) \rightarrow g(x_0)$  при  $h \rightarrow 0$ ).

Нека  $u(x)$  е функция, която има производна в точката  $x_0$ , и нека  $a$  е едно число. В такъв случай функцията

$$\varphi(x) = au(x)$$

също има производна в точката  $x_0$  и

$$\varphi'(x_0) = au'(x_0),$$

както се вижда от равенството

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = a \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}.$$

Сега ще изведем правилото за диференциране на функция от функция.

Нека  $f(x)$  и  $F(u)$  са две функции. Означаваме дефиниционната област на  $f(x)$  с  $M$ , а дефиниционната област на  $F(u)$  с  $N$ . Ако функционалните стойности на  $f(x)$  не напускат  $N$ , когато  $x$  се мени, ние можем да образуваме функцията

$$\varphi(x) = F(f(x)).$$

Тази функция, както вече казахме по-рано, се нарича сложна функция или функция от функция. Ще покажем, че ако във всяка околност на една точка  $x_0$  от  $M$  има винаги точки от  $M$ , различни от  $x_0$ , и ако във всяка околност на точката  $u_0 = f(x_0)$  има точки от  $N$ , различни от  $u_0$ , и ако най-сетне функцията  $f(x)$  е диференцуема в точката  $x_0$ , а функцията  $F(u)$  е диференцуема в точката  $u_0$ , то функцията  $\varphi(x)$  е диференцуема в точката  $x_0$  и

$$\varphi'(x_0) = F'(u_0)f'(x_0).$$

За да докажем това поне в случая, когато  $f'(x_0) \neq 0$ , полагаме  $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$ , т. е.  $f(x_0 + h) = u_0 + k$ , и образуваме равенството

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{F[f(x_0 + h)] - F[f(x_0)]}{h} &= \frac{F(u_0 + k) - F(u_0)}{h} \\ &= \frac{F(u_0 + k) - F(u_0)}{k} \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

Ясно е, че когато  $h$  клони към нула чрез някаква редица стойности,  $k$  също приема редица от стойности, която клони към нула (функцията  $f(x)$  е непрекъснатата в точката  $x_0$ , защото е диференцуема в тази точка). Ако  $h \neq 0$  и  $k \neq 0$ , ние бихме могли да образуваме равенството (2). По-нататък разсъжденията се развиват така: когато оставим  $h$  да клони към нула чрез една произволна редица различни от нула стойности, за които точките  $x_0 + h$  принадлежат на  $M$ , променливата  $k$  приема също така редица от стойности, клоняща към нула. Това ни дава право да заключим, че отношенията

$$\frac{F(u_0 + k) - F(u_0)}{k} \quad \text{и} \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

клонят съответно към  $F'(u_0)$  и  $f'(x_0)$ . Оттук следва, че отношението

$$\frac{F[f(x_0 + h)] - F[f(x_0)]}{h}$$

притежава граница, когато  $h \rightarrow 0$ , и че тази граница е  $F'(u_0) \cdot f'(x_0)$ ; с други думи, функцията  $F[f(x)]$  е диференцируема при  $x = x_0$  и

$$\varphi'(x_0) = F'(u_0)f'(x_0).$$

Тези разсъждения имат обаче следната непълнота: ние не сме сигурни, че  $k \neq 0$ , макар и да знаем, че  $h \neq 0$ , и следователно не знаем дали можем да делим на  $k$ . Има един случай, при който поне за достатъчно малки стойности на  $|h|$  можем да твърдим, че  $k \neq 0$ . Това е случаят, когато  $f'(x_0) \neq 0$ . И наистина, ако допуснем, че има произволно малки по абсолютна стойност различни от нула значения на  $h$ , за които  $k = 0$ , то бихме могли да изберем една клоняща към нула редица от различни от нула числа

$$h_1, h_2, h_3, \dots,$$

за които

$$f(x_0 + h_n) - f(x_0) = 0,$$

и следователно противно на нашето допускане

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = f'(x_0) = 0.$$

И така разсъжденията, които ние направихме, водят до целта поне когато  $f'(x_0) \neq 0$ . В случая, когато  $f'(x_0) = 0$ , празнотата в направените по-горе разсъждения също може да се отстрани, обаче ние ще предпочетем да постъпим другояче, което ще ни позволи да получим изведнъж едно общо доказателство, без да има нужда да разглеждаме отделно случаите, когато  $f'(x_0) \neq 0$  и когато  $f'(x_0) = 0$ . За тази цел ние ще дефинираме една помощна функция  $\psi(t)$  на независимата променлива  $t$  по следния начин:

$$\psi(t) = \frac{F(u_0 + t) - F(u_0)}{t} - F'(u_0)$$

при  $t \neq 0$  и  $\psi(0) = 0$ . Ясно е, че функцията  $\psi(t)$  е дефинирана при всички  $t$ , за които  $u_0 + t$  принадлежи на  $N$ , и е непрекъсната при  $t = 0$ . Непрекъснатостта на  $\psi(t)$  следва от това, че

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u_0 + t) - F(u_0)}{t} = F'(u_0)$$

и следователно

$$\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 0 = \psi(0).$$

Не е трудно да се провери, че функцията  $\psi(t)$  удовлетворява уравнението

$$F(u_0 + t) - F(u_0) = F'(u_0)t + \psi(t)t$$

както при  $t \neq 0$ , така и при  $t = 0$ .

От това следва, като поставим  $t = k = f(x_0 + h) - f(x_0)$ , че

$$\frac{F[f(x_0 + h)] - F[f(x_0)]}{h} = F'(u_0) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \psi(k) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Извършваме в това равенство граничния преход  $h \rightarrow 0$ . Понеже дясната страна на равенството има граница и тази граница е  $F'(u_0)f'(x_0)$  (тия две твърдения следват от обстоятелството, че  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  и  $\psi(k)$  имат граници и те са съответно  $f'(x_0)$  и  $\psi(0) = 0$ ), то частното

$$\frac{F[f(x_0 + h)] - F[f(x_0)]}{h}$$

също притежава граница, когато  $h$  клони към нула (разбира се, чрез стойности, различни от нула), и тази граница е равна на  $F'(u_0)f'(x_0)$ . С това е показано, че функцията  $F[f(x)]$  е диференцируема при  $x = x_0$  и

$$(F[f(x_0)])' = F'(u_0)f'(x_0).$$

## § 15. Производни на елементарни функции

Казваме, че една функция  $f(x)$  е константа в един интервал, когато при всички стойности на  $x$  функцията има една и съща стойност. Сега ще покажем, че ако  $f(x)$  е константа в един интервал, то тя е диференцируема във всяка точка  $x_0$  от този интервал и производната ѝ е равна на нула. И наистина при всички различни от нула стойности на  $h$ , за които точката  $x_0 + h$  принадлежи на дефиниционния интервал на  $f(x_0)$ , имаме

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0.$$

Оттук е ясно, че каквато и да бъде клонящата към нула редица

$$h_1, h_2, h_3, \dots$$

от различни от нула стойности на  $h$ , за които точките  $x_0 + h_n$  принадлежат на дефиниционния интервал на  $f(x)$ , съответната редица от стойностите на отношението

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

е сходяща и клони към нула. И така производната  $f'(x_0)$  съществува и  $f'(x_0) = 0$ .

Да разгледаме функцията  $f(x) = x^n$  при цели положителни стойности на  $n$ . Ще докажем, че тя е диференцуема при всяко  $x$  и

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

И наистина

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \frac{\left(x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n\right) - x^n}{h} \\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1}, \end{aligned}$$

откъдето, като извършим граничния преход  $h \rightarrow 0$ , заключаваме, че  $f'(x)$  съществува и  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

Функцията  $f(x) = x^n$  е добре дефинирана и при цели отрицателни стойности на  $n$ , когато  $x \neq 0$ . Под  $x^n$  при отрицателни стойности на  $n$  се разбира  $\frac{1}{x^{-n}}$ . Тук показателят  $-n$  е вече положителен. Като се възползуваме от правилото за диференциране на частно, заключаваме, че при  $x \neq 0$  функцията  $f(x)$  е диференцуема, когато  $n$  е цяло отрицателно число, и

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{0 \cdot x^{-n} - 1 \cdot (-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1}.$$

И така формулата

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

е валидна за всички цели (както положителни, така и отрицателни) стойности на  $n$ . Когато  $n$  е отрицателно, трябва да се иска  $x$  да бъде различно от нула. Така получената формула е валидна, разбира се, и при  $n = 0$  (но  $x \neq 0$ ), защото  $f(x) = 1$ , и следователно  $f'(x) = 0$ .

Правилото за диференциране на функция от функция ни дава възможност да диференцираме и функции от вида  $y = [u(x)]^n$ , откъдето  $u(x)$  е диференцуема функция на  $x$  и  $n$  е цяло число. Съгласно това правило намираме

$$y' = nu^{n-1} \cdot u'.$$

*Пример.* Да се намери производната на  $y = \frac{1}{(x^2 + 3x + 5)^2}$ . Тук имаме да намерим производната на една функция от вида  $y = [u(x)]^n$ , където  $n = -2$  и  $u = x^2 + 3x + 5$ . Ние знаем, че  $y' = nu^{n-1} \cdot u'$ . В нашия специален случай получаваме

$$y' = -2(x^2 + 3x + 5)^{-3}(x^2 + 3x + 5)' = -2(x^2 + 3x + 5)^{-3}(2x + 3) = \frac{-2(2x + 3)}{(x^2 + 3x + 5)^3}.$$

Тук извършихме подробно пресмятанята. Тия пресмятаня обаче се правят обикновено наум. Намерете производната на функцията

$$y = \frac{1}{(x^4 + 6x^2 + x + 2)^3},$$

като извършите пресмятанята наум!

Сега ще разгледаме правилата за диференциране на тригонометричните функции. Нека  $f(x) = \sin x$ . В такъв случай имаме

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = 2 \frac{\sin \frac{h}{2}}{h} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Когато  $h$  клони към нула,  $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$  клони към  $\cos x$ , защото  $\cos x$  е непрекъснатата функция при всяко  $x$ . От друга страна, частното

$$\frac{\sin \frac{h}{2}}{h}$$

клони към  $\frac{1}{2}$ , когато  $h \rightarrow 0$ . И наистина, ако изберем една произволна редица от различни от нула числа

$$h_1, h_2, h_3, \dots,$$

която клони към нула, то редицата с общ член  $x_n = \frac{h_n}{2}$  също ще клони към нула. Отгук заключаваме, че редицата с общ член

$$\frac{\sin x_n}{x_n}$$

клони към 1. Като вземем под внимание, че

$$\frac{\sin \frac{h_n}{2}}{h_n} = \frac{1}{2} \frac{\sin x_n}{x_n},$$

заключаваме, че

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{h_n}{2}}{h_n} = \frac{1}{2}.$$

Полученият резултат е достатъчен, за да твърдим, че частното

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

има граница, когато  $h$  клони към нула чрез стойности, различни от нула, и тази граница е равна на  $\cos x$ . Това значи, че функцията  $f(x) = \sin x$  е диференцируема и

$$f'(x) = \cos x.$$

Аналогично може да се установи, че функцията  $f(x) = \cos x$  е също диференцируема при всяко  $x$  и

$$f'(x) = -\sin x.$$

За да докажем това, изхождаме от равенството

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -2 \frac{\sin \frac{h}{2}}{h} \sin \left( x + \frac{h}{2} \right).$$

Оттук е ясно, че  $f'(x)$  съществува и  $f'(x) = -\sin(x)$ .

След като знаем да диференцираме функциите  $\sin x$  и  $\cos x$ , лесно можем да намерим производните на  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$ , като си послужим с правилото за диференциране на частно. Така получаваме

$$(\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

при  $\cos x \neq 0$  и

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left( \frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

при  $\sin x \neq 0$ .

Правилото за диференциране на функция от функция ни дава възможност да дадем правила за диференциране на функциите

$$\sin u(x), \cos u(x), \operatorname{tg} u(x), \operatorname{ctg} u(x),$$

където  $u(x)$  е диференцируема функция на  $x$ . Правилата са следните:

$$\begin{aligned} (\sin u)' &= (\cos u)u', & (\cos u)' &= -(\sin u)u', \\ (\operatorname{tg} u)' &= \frac{u'}{\cos^2 u} \text{ при } \cos u \neq 0 \text{ и } (\operatorname{ctg} u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u} \text{ при } \sin u \neq 0. \end{aligned}$$



*Пример.* Да се намери производната на функцията  $y = \sin(2x^2 + 3)$ . Тук имаме да намерим производната на функция от вида  $y = \sin u$ , където  $u = 2x^2 + 3$ . Ние знаем, че  $(\sin u)' = (\cos u)u'$ . Въз основа на това получаваме

$$y' = [\cos(2x^2 + 3)](2x^2 + 3)' = 4x \cos(2x^2 + 3).$$

Да вземем друг пример. Нека  $y = \operatorname{tg} \frac{x^2 - 1}{\sin 2x}$ . В такъв случай

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\cos^2 \frac{x^2 - 1}{\sin 2x}} \left( \frac{x^2 - 1}{\sin 2x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x^2 - 1}{\sin 2x}} \cdot \frac{2x \sin 2x - (x^2 - 1)(\cos 2x)(2x)'}{\sin^2 2x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \frac{x^2 - 1}{\sin 2x}} \cdot \frac{2x \sin 2x - (x^2 - 1)(\cos 2x)2}{\sin^2 2x}. \end{aligned}$$

## § 16. Диференциал

Произведението  $f'(x)k$  на производната  $f'(x)$  на една функция  $y = f(x)$  с един постоянен множител  $k \neq 0$  се нарича диференциал на  $f(x)$  и се бележи със знака  $dy$  (четете — де игрек) или  $df(x)$ . Множителят  $k$  (освен ако изрично не е казано противното) се избира един и същ за всички функции и за всички стойности на  $x$ . Ако вземем специално функцията  $y = x$ , получаваме

$$dx = k.$$

Това ни дава възможност да пишем

$$dy = f'(x) dx,$$

като се възползуваме от това, че се съгласихме да избираме един и същ множител  $k$  за всички функции. Така например, ако

$$y = x^2, \text{ то } dy = 2x dx; \text{ ако } y = \operatorname{tg} x, \text{ то } dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

и пр.

От  $dy = f'(x) dx$  получаваме  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$  (символът  $\frac{dy}{dx}$  се чете „де игрек де икс“). Този начин за означаване на производните е въведен от Лайбниц (Leibniz).

Правилата за смятане с диференциали са съвсем аналогични на правилата за смятане с производни. Така

$$d(u + v) = du + dv.$$

Доказателството може да се извърши така: очевидно  $(u + v)' = u' + v'$ ; като умножим двете части на това равенство с  $k$ , получаваме

$$(u + v)'k = u'k + v'k$$

или

$$d(u + v) = du + dv.$$

Аналогично получаваме

$$d(u - v) = du - dv,$$

$$d(uv) = v du + u dv,$$

$$d\frac{u}{v} = \frac{v du - u dv}{v^2},$$

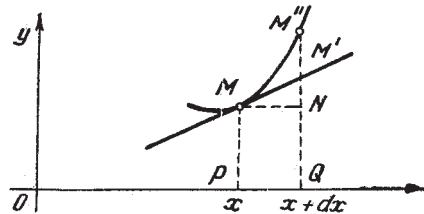
$$d[f(u)] = f'(u) du \text{ и пр.}$$

Специално когато изберем  $k = 1$ , диференциалите преминават в производни. При дефиницията на понятието диференциал ние изрично поставихме условието  $k \neq 0$ , за да имаме свободата да делим с  $k$ .

Да изберем върху кривата  $y = f(x)$  една точка  $M$  с координати  $(x, y)$ . В такъв случай, както знаем, допирателната към тази крива в точката  $(x, y)$  има уравнение

$$(1) \quad \eta - y = f'(x)(\xi - x),$$

където  $\xi$  и  $\eta$  са текущите координати. Непосредствено се вижда, че точката  $M'$  с координати  $(x + dx, y + dy)$  лежи върху допирателната (1) (координатите на  $M'$  удовлетворяват уравнението (1)).



Черт. 8

От това заключаваме, че щом сегментът  $PQ$  (черт. 8) е равен на  $dx$ , то ординатата  $QM'$  е равна на  $y + dy$ . Оттук получаваме

$$NM' = QM' - QN = (y + dy) - y = dy,$$

което показва, че сегментът  $NM'$  представлява  $dy$ .

Често разликата

$$f(x + k) - f(x)$$

се означава със знака  $\Delta y$ . Обръщаме внимание на това, че  $\Delta y$  и  $dy$  в общия случай имат различни стойности. На черт. 8 разликата  $\Delta y$  се изобразява със сегмента  $NM''$ , докато  $dy$  се изобразява, както видяхме, със сегмента  $NM'$ .

Разбира се, както стойността на  $\Delta y$ , така и стойността на  $dy$  зависи от избора на  $x$  и  $k$ , макар че в символите  $\Delta y$  и  $dy$  не участвуват нито  $x$ , нито  $k$ . Да разгледаме функцията

$$\varphi(k) = \frac{f(x+k) - f(x)}{k} - f'(x).$$

Очевидно

$$f(x+k) - f(x) = f'(x)k + \varphi(k)k.$$

При фиксирано  $x$  функцията  $\varphi(k)$  клони към нула заедно с  $k$ . Поради това  $df(x) = f'(x)k$  се нарича понякога главна част на нарастването  $f(x+k) - f(x)$ .

Най-сетне нека забележим, че символът

$$\Delta y = f(x+k) - f(x)$$

има смисъл, когато  $x$  и  $x+k$  принадлежат към дефиниционната област на  $f(x)$ , докато

$$dy = f'(x)k$$

има смисъл при всяко  $k$ , стига  $f'(x)$  да има смисъл.

## § 17. Последователни производни

Нека е дадена една функция  $y = f(x)$ , диференцируема в някой интервал. При фиксирано  $x$  производната  $f'(x)$  представлява едно добре дефинирано число. Стойността на тази производна обаче зависи от избраното число  $x$ . Ако оставим  $x$  да се мени, в общия случай се мени и стойността на производната. Стойността на производната  $f'(x)$  зависи от  $x$ . Нейната стойност е обаче еднозначно дефинирана, когато е избрано числото  $x$ . И така производната на една функция е също функция на  $x$ . Ако се случи функцията  $f'(x)$  да бъде диференцируема, то казваме, че  $f(x)$  е два пъти диференцируема и производната на  $f'(x)$  наричаме втора производна на  $f(x)$ . Втората производна се означава със символите  $y''$ ,  $f''(x)$ ,  $\ddot{y}$  и пр. (четете — игрек секунд, еф секунд, игрек две точки и пр.).

*Пример.* Да разгледаме функцията  $y = x^2$ . Очевидно  $y' = 2x$ . Производната  $y' = 2x$  от своя страна е диференцируема функция на  $x$ . Това значи, че  $y$  има втора производна; очевидно  $y'' = 2$ .

Аналогично се дефинира понятието трета производна като производна на втората производна и пр. Изобщо  $n$ -та производна се нарича производната на  $n - 1$ -вата производна.

Аналогично се дефинира понятието втори, трети и пр. диференциал на една функция. Така втори диференциал се нарича диференциалът на първия диференциал. Вторият диференциал на една функция  $y = f(x)$  се бележи със знака  $d^2y$  (четете — де две игрек). Като помним, че  $dx$  е константа, получаваме

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f''(x)dx)dx = f''(x)dx^2.$$

Трети диференциал на  $y$  се нарича диференциалът на втория диференциал и се бележи със знака  $d^3y$ . Очевидно имаме

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)dx^2) = (f'''(x)dx^2)dx = f'''(x)dx^3.$$

Изобщо  $n$ -ти диференциал се нарича диференциалът на  $n - 1$ -вия диференциал и се бележи със знака  $d^n y$ . Индуктивно намираме

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Оттук получаваме

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

(символа  $\frac{d^2y}{dx^2}$  четете — де две игрек де икс квадрат; изобщо четете символа  $\frac{d^n y}{dx^n}$  така: де ен игрек де икс на ента.)

Сега ще разгледаме няколко примера, при които може лесно да се намери закономерността, по която се получават последователните производни.

*Пример 1.* Да се намери  $n$ -тата производна на  $y = \sin x$ . Очевидно имаме

$$\begin{aligned} y' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\ y'' &= \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]\left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right), \\ y''' &= \left[\cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)\right]\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)' = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), \\ &\dots \\ y^{(n)} &= \dots = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

По аналогичен път намираме

$$\frac{d^n \cos x}{dx^n} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

*Пример 2.* Да се намерят последователните производни на  $y = \frac{x^k}{k!}$ , където  $k$  е цяло положително число.

Като извършим диференцирането, намираме

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}, \\ y'' &= \frac{x^{k-2}}{(k-2)!}, \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(k-1)} &= \frac{x}{1!}, \\ y^{(k)} &= 1. \end{aligned}$$

Производните от по-висок ред са равни на нула.

### § 18. Формула на Лайбниц (Leibniz)

Ние вече разгледахме правилото за диференциране на произведение от две функции, според което, ако  $y = uv$ , то

$$y' = u'v + uv'.$$

Формулата на Лайбниц, която ще разгледаме сега, е обобщение на правилото за диференциране на произведение, отнасящо се за производни от произволен ред. За да изясним закономерността, по която се получават последователните производни на  $y = uv$ , ще пресметнем няколко от тях. Така получаваме

$$\begin{aligned} y'' &= u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'', \\ y''' &= u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' \\ &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''. \end{aligned}$$

Законът, по който се получават пресметнатите от нас производни, може да се изрази със следата обща формула, известна под името формула на Лайбниц:

$$(1) \quad y^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \dots + \binom{n}{n}uv^{(n)},$$

където  $u$  и  $v$  означават функции, които притежават производни до  $n$ -ти ред, и, както обикновено се прави, сме положили за краткост

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

По своята структура формулата на Лайбниц напомня Нютоновия бином. За да установим, че формулата на Лайбниц е в сила при всички цели положителни стойности на  $n$ , ще си послужим с метода на пълната математическа индукция. За целта ще докажем, че ако е вярно равенството (1) при някоя стойност на  $n$ , то вярно е и равенството

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + \binom{n+1}{1}u^{(n)}v' + \binom{n+1}{2}u^{(n-1)}v'' + \dots + \binom{n+1}{n+1}uv^{(n+1)}.$$

И наистина, ако диференцираме двете части на равенството (1), получаваме

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= u^{(n+1)}v + \left[ \binom{n}{1} + 1 \right] u^{(n)}v' + \left[ \binom{n}{2} + \binom{n}{1} \right] u^{(n-1)}v'' \\ &\quad + \left[ \binom{n}{3} + \binom{n}{2} \right] u^{(n-2)}v''' + \dots + \left[ \binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} \right] u'v^{(n)} + \binom{n}{n}uv^{(n+1)}. \end{aligned}$$

От друга страна,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!} + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)!} [(n-k) + (k+1)] \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)!} (n+1) \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

и следователно

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= u^{(n+1)}v + \binom{n+1}{1}u^{(n)}v' + \binom{n+1}{2}u^{(n-1)}v'' + \binom{n+1}{3}u^{(n-2)}v''' + \dots \\ &\quad + \binom{n+1}{n}u'v^{(n)} + \binom{n+1}{n+1}uv^{(n+1)}. \end{aligned}$$

И така, ако тази формула е вярна при някоя стойност на  $n$ , тя е вярна и при следващата стойност на  $n$ . Обаче знаем, че формулата е вярна при  $n = 1$  и следователно тя е вярна при всяко цяло положително  $n$ .

*Пример.* Да се намери  $n$ -тата производна на функцията  $y = x^2 \sin x$ . Тук имаме да намерим  $n$ -тата производна на едно произведение, като знаем да намираме последователните производни на двата множителя. Прилагаме формулата на Лайбниц и получаваме

$$y^{(n)} = x^2(\sin x)^{(n)} + \binom{n}{1}(x^2)'(\sin x)^{(n-1)} + \binom{n}{2}(x^2)''(\sin x)^{(n-2)}$$

$$\begin{aligned}
& + \binom{n}{3} (x^2)''' (\sin x)^{(n-3)} + \dots \\
& = x^2 \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n \cdot 2x \sin\left(x + \frac{n-1}{2}\pi\right) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \sin\left(x + \frac{n-2}{2}\pi\right) + 0 + \dots \\
& = x^2 \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) + 2nx \sin\left(x + \frac{n-1}{2}\pi\right) + n(n-1) \sin\left(x + \frac{n-2}{2}\pi\right).
\end{aligned}$$

### § 19. Теорема на Рол (Rolle)

Сега ще докажем една от най-важните теореми в диференциалното смятане. Ето формулировката на тази теорема:

*Ако функцията  $f(x)$  е дефинирана и непрекъсната в крайния и затворен интервал  $[a, b]$ , ако е диференцируема поне в отворения интервал  $(a, b)$  и ако в краищата на този интервал приема равни стойности (т. е.  $f(a) = f(b)$ ), в такъв случай в интервала  $(a, b)$  има поне една вътрешна точка  $\xi$ , в която производната  $f'(x)$  е равна на нула.*

Преди да пристъпим към доказателството, нека обърнем внимание на това, че се иска функцията да бъде дефинирана и непрекъсната в *затворения* интервал, т. е. не само във вътрешните точки, но и в краищата на този интервал, докато съществуването на производната се изисква само за *вътрешни* точки на интервала  $(a, b)$ . В краищата на интервала функцията  $f(x)$  може да бъде диференцируема, може и да не бъде. Отсъствието на производната в краищата на интервала не е пречка за валидността на формулираната теорема. Най-сетне нека обърнем внимание още на това, че в теоремата се установява съществуването на *вътрешна* точка  $\xi$  в интервала  $(a, b)$ , за която  $f'(\xi) = 0$ , т. е. точка, различна както от  $a$ , така и от  $b$ .

След тези предварителни бележки да преминем към доказателството на теоремата.

Тъй като функцията  $f(x)$  е дефинирана и непрекъсната в крайния и затворения интервал  $[a, b]$ , то за тази функция можем да приложим теоремата на Вайерщрас, според която има точка  $x_1$ , където функцията приема най-голяма, и има точка  $x_2$ , където функцията приема най-малка стойност. Ние знаем, че точката  $x_1$  лежи в затворения интервал  $[a, b]$ , т. е. може евентуално да се намира във вътрешността, но може евентуално да се намира и в някоя от краищата на този интервал. Ще покажем най-напред валидността на интересуващата ни теорема в специалния случай, когато точката  $x_1$  се намира във вътрешността на интервала  $(a, b)$ . Разглеждаме отношението

$$(1) \quad \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h},$$

което е дефинирано за всички достатъчно малки по абсолютна стойност, различни от нула значения на  $h$ . Тъй като точката  $x_1$  е вътрешна за интервала  $[a, b]$ , а във всички вътрешни точки функцията  $f(x)$  е диференцируема, то частното (1) притежава граница, когато  $h$  клони към нула. Границата на това частно е  $f'(x_1)$ .

Точката  $x_1$  е вътрешна за интервала  $[a, b]$ , следователно ние можем да оставим  $h$  да клони към нула както чрез положителни, така и чрез отрицателни стойности, без обаче да напускаме дефиниционната област на  $f(x)$ . Да се възползуваме от тази свобода и да оставим  $h$  да клони към нула чрез положителни стойности. В такъв случай знаменателят на частното

$$(2) \quad \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

е положителен. Числителят му обаче е или отрицателен, или нула, тъй като  $f(x_1)$  е най-голямата функционална стойност на  $f(x)$ . И така

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \leq 0,$$

т. е.

$$f'(x_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \leq 0.$$

Ние в частното (2) можем да оставим  $h$  да клони към нула и чрез отрицателни стойности (точката  $x_1$  е вътрешна!). Но когато  $h < 0$ , тогава

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \geq 0,$$

понеже, както видяхме вече,  $f(x_1 + h) - f(x_1) \leq 0$ . Оттук следва, че

$$f'(x_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \geq 0.$$

От двете неравенства

$$f'(x_1) \leq 0 \quad \text{и} \quad f'(x_1) \geq 0,$$

които получихме, заключаваме, че  $f'(x_1) = 0$ . И така, когато точката  $x_1$  е вътрешна, ние намерихме вътрешна точка  $\xi$  (това е точката  $x_1$ ), за която  $f'(\xi) = 0$ . Теоремата на Вайерщрас обаче не ни осигурява ни най-малко, че точката  $x_1$  трябва да бъде във вътрешността на интервала  $[a, b]$ . По подобен начин се доказва, че ако точката  $x_2$  е вътрешна, то  $f'(x_2) = 0$ . И така валидността на теоремата засега ние установихме само в случаите, когато

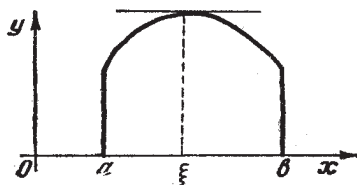


поне една от двете точки  $x_1$  или  $x_2$  е вътрешна. Остана да разгледаме случая, когато и *двете* точки  $x_1$  и  $x_2$  са крайни точки за интервала  $[a, b]$ . Обаче в краищата на интервала  $[a, b]$  функцията  $f(x)$  приема равни стойности (това условие още не сме използвали!), откъдето следва, че

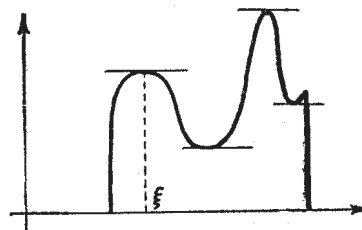
$$f(x_1) = f(x_2),$$

тъй като в разглеждания случай и *двете* точки  $x_1$  и  $x_2$  са крайни. И така най-голямата и най-малката стойност на функцията са равни помежду си. От това следва, че функцията  $f(x)$  е константа (от  $f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1)$  и от  $f(x_1) = f(x_2)$  заключаваме, че при всички стойности на  $x$  от интервала  $[a, b]$  имаме  $f(x) = f(x_1) = f(x_2)$ ). Щом функцията  $f(x)$  е константа, нейната производна е нула навсякъде, следователно и в този случай твърдението на теоремата е вярно. С това теоремата е доказана докрай.

Теоремата, която доказахме, е известна под името теорема на Рол. Нейният геометричен смисъл е прост. Според тази теорема, ако функцията  $f(x)$  е непрекъсната в затворения интервал  $[a, b]$ , диференцируема е поне в отворения интервал  $(a, b)$  и  $f(a) = f(b)$ , то върху графиката на тази функция има поне една точка (различна от краищата ѝ), в която допирателната е успоредна на оста  $OX$ . Чертежите 9 и 10 илюстрират геометрическия смисъл на теоремата на Rolle.



Черт. 9



Черт. 10

## § 20. Теорема за крайните нараствания

Сега ще дадем едно важно обобщение на теоремата на Рол, известно под името теорема на крайните нараствания. Същата теорема се нарича понякога теорема на Лагранж (Lagrange). Ето формулировката на тази теорема:

*Ако функцията  $f(x)$  е дефинирана и непрекъсната в крайния и затворен интервал  $[a, b]$  и е диференцируема поне във вътрешността на този интервал*

вал, то има поне една вътрешна точка  $\xi$ , за която е изпълнено равенството

$$(1) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Твърдението е вярно както при  $a < b$ , така и при  $a > b$ .

Тази теорема се отличава от теоремата на Рол по това, че тук не се иска да имаме непременно  $f(a) = f(b)$ . В специалния случай, когато  $f(a) = f(b)$ , получаваме:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

т. е. теоремата на Рол се явява действително специален случай от теоремата за крайните нараствания.

Доказателството на теоремата за крайните нараствания ще извършим с помощта на теоремата на Рол. За тази цел образуваме помощната функция

$$\varphi(x) = f(x) - k(x),$$

където константата  $k$  избираме така, че да имаме

$$(2) \quad \varphi(a) = \varphi(b), \text{ т. е. } f(a) - ka = f(b) - kb,$$

за да можем за функцията  $\varphi(x)$  да приложим теоремата на Рол. Равенство (2) е изпълнено при

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Функцията  $\varphi(x)$  е непрекъсната в затворения интервал  $[a, b]$ , диференцируема е поне във вътрешните му точки и  $\varphi(a) = \varphi(b)$ . Това ни дава право да приложим за функцията  $\varphi(x)$  теоремата на Рол. И така има поне една точка  $\xi$  в отворения интервал  $(a, b)$ , за която

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - k = 0$$

или

$$f'(\xi) = k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

с което доказателството на теоремата за крайните нараствания е завършено.

Ако положим

$$\frac{\xi - a}{b - a} = \theta \quad \text{и} \quad b - a = h,$$

получаваме

$$\xi = a + \theta h.$$

При тези означения равенството (1) добива вида

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h).$$

Числото  $\xi$  обаче се намира в отворения интервал  $(a, b)$ . Оттук не е трудно да се заключи, че  $0 < \theta < 1$ . И наистина при  $a < b$  имаме  $a < \xi < b$ , откъдето получаваме последователно

$$\begin{aligned} 0 < \xi - a < b - a, \\ 0 < \frac{\xi - a}{b - a} < 1. \end{aligned}$$

При  $a > b$  имаме  $a > \xi > b$ , което ни дава

$$0 > \xi - a > b - a$$

и следователно

$$0 < \frac{\xi - a}{b - a} < 1,$$

с което е установено, че наистина във всички случаи имаме  $0 < \theta < 1$ .

Равенството

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h)$$

е очевидно вярно и при  $h = 0$ .

Теоремата за крайните нараствания има следния геометричен смисъл. При направените предположения за функцията  $f(x)$  има поне една точка върху дъгата с уравнение  $y = f(x)$ ,  $a < x < b$ , допирателната в която е успоредна на хордата, съединяваща краищата на тази дъга.

### § 21. Обобщение на теоремата за крайните нараствания (Теорема на Коши)

Ще разгледаме следното обобщение на теоремата за крайните нараствания.

Ако  $f(x)$  и  $g(x)$  са две функции, дефинирани и непрекъснати в крайния и затворен интервал  $[a, b]$ , ако са диференцируеми поне в отворения интервал  $(a, b)$  и ако освен това  $g'(x) \neq 0$  за всички точки от отворения интервал  $(a, b)$ , то съществува поне една точка  $\xi$  във вътрешността на интервала  $(a, b)$ , за която

$$(1) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Тази теорема наричаме обобщение на теоремата за крайните нараствания, защото, ако изберем специално  $g(x) = x$ , равенството (1) преминава в

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),$$

т. е. теоремата за крайните нараствания е наистина специален случай от тази по-обща теорема.

Нека изрично отбележим, че не се иска от функциите  $f(x)$  и  $g(x)$  непременно да бъдат диференцуеми при  $x = a$  и  $x = b$ . Също така се позволява  $g'(x)$  да се анулира при  $x = a$  и  $x = b$  (ако функцията  $g(x)$  в тази точка е диференцуема). Обаче иска се непременно  $g'(x)$  да бъде различно от нула в отворения интервал  $(a, b)$ . За да покажем колко е съществено това условие, ще си послужим с един пример: да разгледаме двете функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , дефинирани в затворения интервал  $[-1, 1]$  по следния начин:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, \\ g(x) &= x^3. \end{aligned}$$

Функциите  $f(x)$  и  $g(x)$  са непрекъснати и диференцуеми в затворения интервал  $[-1, 1]$ . Очевидно имаме

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{0}{2} = 0.$$

От друга страна,

$$f'(x) = 2x \quad \text{и} \quad g'(x) = 3x^2,$$

откъдето намираме

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2}{3x}.$$

Сега е ясно, че както и да изберем числото  $\xi$  (за което, разбира се, частното  $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$  е дефинирано), не може да имаме

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Този пример ни най-малко не противоречи на теоремата, която ние се стремим да докажем сега, защото във вътрешността на интервала  $(-1, 1)$  има точка, в която  $g'(x) = 0$ . Тази точка е  $x = 0$ .

За да *извършим* доказателството на интересувашата ни теорема, съществено ще използваме условието, че  $g'(x) \neq 0$  във вътрешността на разглеждания интервал (както ще използваме, разбира се, всичките условия, които ние изрично формулирахме).

Накрая, преди да пристъпим към доказателството на теоремата на Коши, нека подчертаем, че в теоремата се твърди, че има поне една *вътрешна* точка  $\xi$  в интервала  $(a, b)$ , за която е изпълнено равенството (1).

След тия предварителни бележки да преминем към доказателството на теоремата на Коши. И тук, както при теоремата за крайните нараствания, ще си послужим с теоремата на Рол. За тази цел образуваме помощната функция

$$\varphi(x) = f(x) - kg(x),$$

където множителя  $k$  определяме така, че да имаме

$$(2) \quad f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b),$$

което ни е нужно, за да можем да приложим за функцията  $\varphi(x)$  теоремата на Рол. Ние можем да определим  $k$  от уравнението (2), защото  $g(b) - g(a) \neq 0$ . И наистина, ако допуснем, че  $g(b) - g(a) = 0$ , ще можем да приложим за функцията  $g(x)$  теоремата на Рол и да заключим, че има поне една точка  $x_0$  от вътрешността на интервала  $(a, b)$ , в която  $g'(x_0) = 0$ . Това обаче не е възможно, защото по предположение производната  $g'(x)$  не се анулира във вътрешността на интервала  $(a, b)$ . И така ние доказахме, че  $g(b) - g(a) \neq 0$ , и въз основа на това намираме

$$(3) \quad k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Функцията  $\varphi(x)$  е непрекъсната в затворения интервал  $[a, b]$  и диференцируема поне във вътрешните му точки. Освен това имаме

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Това ни дава право да приложим теоремата на Рол за функцията  $\varphi(x)$ . И така във *вътрешността* на интервала  $[a, b]$  има поне една точка  $\xi$ , в която

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - kg'(\xi) = 0.$$

Това равенство може да се представи още във вида

$$k = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

защото  $g'(\xi) \neq 0$ . При това преобразуване съществено използвахме условието, според което  $g'(x) \neq 0$  във вътрешността на интервала  $(a, b)$  (точката  $\xi$  е вътрешна за интервала  $(a, b)$  и следователно  $g'(\xi) \neq 0$  — нещо, което ни дава право да делим с  $g'(\xi)$ ). Като заместим  $k$  с равното му от (3), получаваме

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

с което теоремата на Коши е доказана.

## § 22. Основна теорема на интегралното смятане

Ние знаем, че ако една функция  $f(x)$  е константа в един интервал, то нейната производна е нула във всички точки на този интервал. За интегралното смятане, което ние ще изучаваме по-късно, е от основно значение обратният въпрос: знае се, че една функция  $f(x)$  е диференцируема във всяка точка на един интервал и производната ѝ навсякъде е нула; пита се дали при тези предположения може да се твърди, че функцията  $f(x)$  е константа в този интервал. Отговорът на този въпрос е утвърдителен независимо от това, дали интервалът, в който разглеждаме функцията, е краен или безкраен, отворен или затворен. И така ние ще докажем сега следната теорема:

*Ако една функция  $f(x)$  е диференцируема във всяка точка на един интервал и производната ѝ във всяка точка на този интервал има стойност нула, то функцията е константа.*

Доказателството извършваме с помощта на теоремата за крайните нараствания по следния начин: нека  $x_1$  и  $x_2$  са две произволни точки от разглеждания интервал; в такъв случай

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(\xi),$$

където точката  $\xi$  се намира между  $x_1$  и  $x_2$ ; дадено е обаче, че производната  $f'(x)$  е равна на нула при всяко  $x$  от разглеждания интервал; специално имаме  $f'(\xi) = 0$ , откъдето

$$f(x_1) - f(x_2) = 0$$

и следователно  $f(x_1) = f(x_2)$ . С това доказателството е завършено.

## § 23. Полиноми

Полином или цяла рационална функция (чиято степен не надминава  $n$ ) се нарича функция от вида

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

където  $n$  е цяло положително число и коефициентите  $a_0, a_1, \dots, a_n$  не зависят от  $x$ . Казваме, че полиномът

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

е от  $n$ -та степен, когато  $a_0 \neq 0$ . Така  $2x^2 - 3x + 1$  е полином от втора степен.

Един полином от  $n$ -та степен не може да се анулира за повече от  $n$  различни стойности на аргумента.

Доказателството ще извършим индуктивно. Да допуснем, че вече знаем, че един полином от  $n - 1$ -ва степен не може да се анулира за повече от  $n - 1$  различни стойности на  $x$ . Нека

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

е един полином от  $n$ -та степен, т. е.  $a_0 \neq 0$ . Ако допуснем, че има (поне)  $n + 1$  точки  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , в които  $f(x)$  се анулира, то към всеки един от интервалите  $(x_0, x_1)$ ,  $(x_1, x_2)$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, x_n)$  ние можем по отношение на функцията  $f(x)$  да приложим теоремата на Рол. Това ни дава право да твърдим, че във *вътрешността* на всеки един от интервалите  $(x_{k-1}, x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , има поне една точка  $\xi_k$ , в която производната  $f'(x)$  се анулира. И така ние намерихме  $n$  точки

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n,$$

в които  $f'(x)$  се анулира. Точките  $\xi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) са всички различни помежду си, защото са вътрешни в съответните им интервали  $(x_{k-1}, x_k)$  и следователно

$$x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

Полиномът

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$$

е обаче от  $n - 1$ -ва степен (тъй като  $a_0 \neq 0$ ) и следователно не може да се анулира за  $n$  различни стойности на  $x$ . Противоречието, до което достигнахме, се дължи на допускането, че полиномът  $f(x)$  се анулира за повече от  $n$  различни стойности на  $x$ . От друга страна, един полином от нулева степен представлява една различна от нула константа и следователно не може да се анулира при нито една стойност на  $x$ . От това заключаваме (като вземем пред вид доказаното), че един полином от първа степен не може да се анулира за повече от едно значение на  $x$ . От това пък следва, че един полином от втора степен не може да се анулира за повече от две стойности на  $x$  и пр.

От доказаната теорема заключаваме, че ако равенството

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

е изпълнено за повече от  $n$  различни стойности на  $x$ , то

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

и следователно това равенство е изпълнено при всички стойности на  $x$ . И наистина, ако допуснем, че  $a_0 \neq 0$ , получаваме полином от  $n$ -та степен, който се анулира за повече от  $n$  различни стойности на  $x$ , нещо, което, както знаем, не е възможно. И така  $a_0 = 0$ . Замествайки  $a_0$  с равното му, получаваме

$$a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

Като разсъждаваме по подобен начин, заключаваме, че  $a_1 = 0$ . По подобен начин намираме, че  $a_2 = 0$  и пр.

Върху това свойство на полиномите се основава важният принцип за сравняване на коефициентите при полиномите. Този принцип може да се формулира по следния начин.

*Ако равенството*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$$

*е изпълнено за повече от  $n$  стойности на  $x$ , то*

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n.$$

Доказателството се получава непосредствено, като вземем под внимание, че изразът

$$(a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \dots + (a_n - b_n)$$

се анулира за повече от  $n$  стойности на  $x$  и следователно

$$a_0 - b_0 = a_1 - b_1 = \dots = a_n - b_n = 0.$$

## § 24. Интерполация

Читателят знае, че при използването на логаритмичните таблици често си служим с така наречената линейна интерполация. По-точно ние си служим с линейната функция  $f(x)$ , която в две различни дадени точки  $x_0$  и  $x_1$  приема съответно дадени стойности  $y_0$  и  $y_1$ . Очевидно линейната функция

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

притежава това свойство (т.е.  $f(x_0) = y_0$  и  $f(x_1) = y_1$ ) и друга линейна функция с това свойство няма (защото  $y = f(x)$  е декартовото уравнение на правата, която минава през двете различни точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$ ; тази





За да покажем, че полиномът  $f(x)$  може да се представи във вида (2), образуваме си полинома

$$\psi(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}),$$

където коефициентите  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  определяме от равенствата

$$\begin{aligned} y_0 &= \psi(x_0) = c_0, \\ y_1 &= \psi(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0), \\ y_2 &= \psi(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1), \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= \psi(x_n) = c_0 + c_1(x_n - x_0) + c_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \cdots \\ &\quad + c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{3}$$

В такъв случай полиномът  $\psi(x)$  удовлетворява условията

$$\psi(x_0) = y_0, \psi(x_1) = y_1, \dots, \psi(x_n) = y_n$$

и тъй като неговата степен не надминава  $n$ , той е идентичен с полинома  $f(x)$  (съгласно теоремата за единственост, която доказахме по-горе). Формулата (2) се нарича интерполационна формула на Нютон (Newton). Определянето на коефициентите  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  се извършва твърде удобно от системата (3). Ние можем обаче без труд да намерим и общ израз за тези коефициенти. За да намерим интересувашата ни формула за  $c_k$ , образуваме си помощния полином

$$g_k(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_k(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}).$$

От равенствата

$$\begin{aligned} y_0 &= c_0, \\ y_1 &= c_0 + c_1(x_1 - x_0), \\ y_2 &= c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1), \\ &\dots\dots\dots \\ y_k &= c_0 + c_1(x_k - x_0) + c_2(x_k - x_0)(x_k - x_1) + \cdots \\ &\quad + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

заклучаваме, че полиномът  $g_k(x)$  удовлетворява условията

$$g_k(x_0) = y_0, g_k(x_1) = y_1, \dots, g_k(x_k) = y_k.$$

От друга страна, с директна проверка се вижда, че полиномът

$$\begin{aligned}
 h_k(x) = & y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_k)} \\
 & + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_k)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_k)} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})}
 \end{aligned}$$

също удовлетворява равенствата

$$h_k(x_0) = y_0, h_k(x_1) = y_1, \dots, h_k(x_k) = y_k.$$

И тъй стойностите на двата полинома  $g_k(x)$  и  $h_k(x)$  съвпадат при  $k+1$  различни стойности на  $x$ . Като вземем под внимание, че степените им не надминават  $k$ , заключаваме, че те са идентични. Като сравним коефициентите пред  $x_k$  в двата полинома  $g_k(x)$  и  $h_k(x)$ , получаваме

$$\begin{aligned}
 c_k = & \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_k)} + \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_k)} \\
 & + \dots + \frac{y_k}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})}.
 \end{aligned}$$

Полученият израз за  $c_k$  се нарича  $k$ -то Нютоново частно на  $y_0, y_1, \dots, y_k$  спрямо  $x_0, x_1, \dots, x_k$ .

### Задачи

1. Нека

$$f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4).$$

Докажете, че уравнението

$$f'(x) = 0$$

има четири различни реални корена.

*Упътване.* Приложете теорема на Рол.

2. Намерете полином  $f(x)$  от възможно най-ниска степен, който удовлетворява условията

$$f(-1) = 3, f(0) = 1, f(1) = -1, f(2) = 3, f(3) = 19.$$

Решете задачата както с помощта на интерполационната формула на Лагранж, така и с помощта на интерполационната формула на Нютон.

3. Намерете всички полиноми  $f(x)$ , които удовлетворяват условията

$$f(0) = -1, f(1) = 0, f(2) = -7, f(3) = 26.$$

4. Намерете четири константи  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  по такъв начин, че равенството

$$x^3 + 3x + 1 = A + B(x-1) + C(x-1)(x-2) + D(x-1)(x-2)(x-3)$$

да е изпълнено при всяко  $x$  (покажете, че задачата има, и то само едно решение).

5. Нека  $x_1$  и  $x_2$  са две различни реални числа. Покажете, че е възможно да се определят две реални константи  $A_1$  и  $A_2$  и то еднозначно така, че за всички стойности на  $x$ , които са различни от  $x_1$  и  $x_2$ , да е в сила равенството

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2}.$$

6. Докажете, че при всички цели положителни стойности на  $n$  е в сила равенството

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k)^2 = n(n+1)2^{n-2}.$$

*Решение.* Изхождаме от тъждеството

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} = (1+x)^n.$$

Чрез диференциране намираме

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k)x^{n-k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Умножаваме двете части на това равенство по  $x$  и диференцираме още веднъж. По този начин добиваме

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k)^2 x^{n-k-1} = n(n-1)(1+x)^{n-2}x + n(1+x)^{n-1}.$$

Специално при  $x = 1$  получаваме

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k)^2 = n(n+1)2^{n-2}.$$

7. Докажете, че при всички цели положителни стойности на  $n$  е в сила равенството

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n = n!$$

*Упътване.* Приложете метода от предната задача към тъждеството

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{n-k} = (x-1)^n.$$

8. Докажете, че

$$\sum_{\nu=0}^n \nu^2 \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = n(n-1)x^2 + nx.$$

*Решение.* Изхождаме от тъждеството

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} x^\nu a^{n-\nu} = (x+a)^n.$$

Като диференцираме спрямо  $x$ , получаваме

$$\sum_{v=0}^n \binom{n}{v} x^{v-1} a^{n-v} = n(x+a)^{n-1}.$$

Умножаваме двете части на последното равенство с  $x$ , диференцираме по  $x$  и пак умножаваме с  $x$ . Така добиваме

$$\sum_{v=0}^n v^2 \binom{n}{v} x^v a^{n-v} = n(n-1)x^2(x+a)^{n-2} + nx(x+a)^{n-1}.$$

Като поставим  $a = 1 - x$ , получаваме исканото твърдение.

9. Докажете, че при всички цели положителни стойности на  $n$  е в сила равенството

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

(По дефиниция се полага  $\binom{n}{0} = 1$ .)

*Упътване.* Сравняваме коефициентите пред  $x^n$  в твърдението

$$(x+1)^n(x+1)^n = (x+1)^{2n}.$$

10. Докажете, че при всички цели положителни стойности на  $n$  е в сила равенството

$$\binom{2n}{0}^2 - \binom{2n}{1}^2 + \binom{2n}{2}^2 - \dots - \binom{2n}{2n-1}^2 + \binom{2n}{2n}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}.$$

*Упътване.* Сравняваме коефициентите пред  $x^{2n}$  в твърдението

$$(1+x)^{2n}(1-x)^{2n} = (1-x^2)^{2n}.$$

11. Да се докаже, че при цели стойности пред  $n$ , по-големи от 1, имаме

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \dots + (-1)^{n-1} n \binom{n}{n} = 0$$

(вярно ли е твърдението при  $n = 1$ ?).

*Упътване.* Сравнете коефициентите пред  $x$  в твърдението

$$x^n = 1 + \binom{n}{1}(x-1) + \binom{n}{2}(x-1)^2 + \binom{n}{3}(x-1)^3 + \dots + \binom{n}{n}(x-1)^n.$$

12. Докажете, че при всички цели положителни стойности на  $n$  е в сила равенството

$$\binom{n}{1} - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\binom{n}{3} - \frac{1}{4}\binom{n}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}\binom{n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

*Решение.* Разглеждаме двата полинома

$$P(x) = \frac{1}{1}\binom{n}{1}x + \frac{1}{2}\binom{n}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n}\binom{n}{n}x^n,$$

$$Q(x) = \frac{1}{1}(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^2 + \dots + \frac{1}{n}(x+1)^n.$$

Очевидно

$$P'(x) = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}x + \dots + \binom{n}{n}x^{n-1} = \frac{(x+1)^n - 1}{x},$$

$$Q'(x) = 1 + (x+1) + (x+1)^2 + \dots + (x+1)^{n-1} = \frac{(x+1)^n - 1}{x},$$

т. е. двата полинома  $P(x)$  и  $Q(x)$  имат една и съща производна. Отгук заключаваме, че разликата им е константа (тъй като производната на тази разлика е нула). И така

$$Q(-1) - P(-1) = Q(0) - P(0),$$

което доказва доказва твърдението.

13. Нека

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Докажете, че ако има  $n+1$  точки  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , за които

$$f^{(k)}(x_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

то  $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

*Упътване.* От  $f^{(n)}(x_n) = n!a_0$  заключаваме, че  $a_0 = 0$ . След като вече знаем, че  $a_0 = 0$ , намираме  $f^{(n-1)}(x_{n-1}) = (n-1)!a_1$ , т. е. и  $a_1 = 0$ , и пр.

14. Нека  $f(x)$  е полином, чиято степен не надминава  $n$ . Да се докаже, че

$$f(x) = f(a) - f'(a+h)\frac{a-x}{1!} + f''(a+2h)\frac{(a-x)(a+2h-x)}{2!} - \dots$$

$$+ (-1)^k f^{(k)}(a+kh)\frac{(a-x)(a+kh-x)^{k-1}}{k!} + \dots$$

$$+ (-1)^n f^{(n)}(a+nh)\frac{(a-x)(a+nh-x)^{n-1}}{n!}.$$

(Абел).

*Упътване.* Нека

$$\varphi(x) = f(a) - f'(a+h)\frac{a-x}{1!} + f''(a+2h)\frac{(a-x)(a+2h-x)}{2!} + \dots$$

$$+ (-1)^n f^{(n)}(a+nh)\frac{(a-x)(a+nh-x)^{n-1}}{n!}.$$

Докажете, че

$$f^{(k)}(a+kh) = \varphi^{(k)}(a+kh)$$

при  $k = 0, 1, \dots, n$ , и използвайте предната задача.

## § 25. Монотонни функции

Една функция  $f(x)$  се нарича монотонно растяща, когато при всеки две точки  $x_1$  и  $x_2$  от дефиниционната ѝ област, свързани с неравенството  $x_1 < x_2$ , съответните функционални стойности са свързани с неравенството  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Ако всеки път, когато е изпълнено неравенството  $x_1 < x_2$ , имаме  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , функцията  $f(x)$  се нарича монотонно намаляваща.

В специалния случай, когато дефиниционната област на функцията  $f(x)$  е интервал (безразлично дали той е краен или безкраен, затворен или не), е в сила следната теорема.

*Ако  $f(x)$  е диференцируема в дефиниционния си интервал и производната ѝ е неотрицателна, то функцията  $f(x)$  е монотонно растяща; ако производната ѝ никъде не е положителна, то функцията е монотонно намаляваща.*

Доказателството се извършва без труд с помощта на теоремата за крайните нараствания.

Нека  $x_1$  и  $x_2$  са две точки от дефиниционния интервал на  $f(x)$ , като  $x_1 < x_2$ . Прилагайки теоремата за крайните нараствания, получаваме

$$(1) \quad f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi),$$

където  $\xi$  е едно число от вътрешността на интервала  $(x_1, x_2)$ . Ако във всяка точка от дефиниционния интервал на  $f(x)$  имаме  $f'(x) \geq 0$ , то специално и  $f'(\xi) \geq 0$ , откъдето

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0,$$

т. е. функцията  $f(x)$  е монотонно растяща. От равенството (1) се вижда, че ако  $f'(x)$  не се анулира никъде и  $x_1 \neq x_2$  то и  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Ако пък навсякъде имаме  $f'(x) \leq 0$ , то и  $f'(\xi) \leq 0$  и следователно

$$f(x_2) - f(x_1) \leq 0,$$

което показва, че функцията  $f(x)$  е монотонно намаляваща.

С това доказателството на теоремата е завършено.

Монотонно растящите и монотонно намаляващите функции се наричат с общо име монотонни функции.

*Пример.* Функцията  $f(x) = x^3$ , дефинирана при всички стойности на  $x$ , е монотонно растяща, защото  $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ . Докажете това, без да си служите с производни!

Не е трудно да се докаже, че в този специален случай имаме  $f(x_1) = f(x_2)$  само ако  $x_1 = x_2$ . И наистина не е възможно едното от числата  $x_1$  и  $x_2$  да бъде съществено положително, а другото съществено отрицателно, защото в противен случай едното от числата  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$  ще бъде съществено положително, а другото съществено отрицателно и следователно не бихме имали  $f(x_1) = f(x_2)$ . Ако допуснем, че числата  $x_1$  и  $x_2$  са различни, то пред вид  $f(x_1) = f(x_2)$  можем да приложим към  $f(x)$  теоремата на Рол. И така има поне една вътрешна точка  $x_0$  в интервала  $(x_1, x_2)$ , в която производната  $f'(x)$  се анулира. От

$$f'(x_0) = 3x_0^2 = 0$$

получаваме  $x_0 = 0$ , т. е. точката 0 е *вътрешна* за интервала  $(x_1, x_2)$ , откъдето следва, че едното от числата  $x_1$  и  $x_2$  е съществено положително, а другото съществено отрицателно, което, както знаем, не е възможно. С това ние достигнахме до исканото противоречие, което се дължи на допускането, че  $x_1 \neq x_2$ . Докажете, че от  $x_1^3 = x_2^3$  следва  $x_1 = x_2$ , без да си служите с производни!

**Глава II**  
**РАЗВИВАНЕ НА ФУНКЦИИТЕ В РЕДОВЕ**

**§ 1. Степенни редове**

Редове от вида\*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

където коефициентите  $a_0, a_1, a_2, \dots$  не зависят от  $x$ , се наричат степенни редове. Понятието степенен ред може да се разглежда като обобщение на понятието полином.

*Пример.* Геометричната прогресия

$$1 + x + x^2 + \dots$$

представява един специален степенен ред, при който всички коефициенти са равни на 1.

Когато е даден един степенен ред, може да се случи за едни стойности на  $x$  той да бъде сходящ, а за други разходящ. Множеството на всички точки, за които един степенен ред е сходящ, се нарича негова област на сходимост.

*Пример.* Редът

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

е сходящ за всички стойности на  $x$ . Неговата област на сходимост се състои от цялата ос  $x$ .

Редът

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

е сходящ при  $-1 < x < 1$ . При  $|x| \geq 1$  този ред е разходящ.

Редът

$$1 + 1!x + 2!x^2 + \dots + n!x^n + \dots$$

е сходящ само при  $x = 0$ , защото при  $x \neq 0$  общият му член не клони към нула. И наистина при  $x \neq 0$  се установява лесно с помощта на критерия на Даламбер, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!|x|^n}$$

е сходящ. От това следва, че общият му член  $\frac{1}{n!|x|^n}$  клони към нула, откъдето пък следва, че  $n!|x|^n$  расте неограничено.

---

\*Редове от вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots$$

също често пъти се наричат степенни редове.



Разбира се, при  $x = 0$  един степенен ред е непременно сходящ. Сега ще докажем, че ако степенният ред

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

е сходящ при някое  $x_0 \neq 0$ , той е абсолютно сходящ за всички стойности на  $x$ , за които  $|x| \leq |x_0|$ . Доказателството извършваме така. Щом редът

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots$$

е сходящ, редицата от членовете му

$$a_0, a_1x_0, a_2x_0^2, \dots$$

е сходяща (тя клони към нула) и следователно тя е ограничена. Да означим с  $A$  една горна граница на  $|a_nx_0^n|$ . В такъв случай имаме

$$|a_nx^n| = |a_nx_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq A \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

И така членовете на реда

$$(1) \quad |a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \dots$$

не надминават съответните членове на геометричната прогресия

$$A + A \left| \frac{x}{x_0} \right| + A \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots$$

Когато  $|x| < |x_0|$ , имаме  $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ , т. е. получената геометрична прогресия е сходяща. От това следва, че редът (1) е също сходящ или, което е същото, редът

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

е абсолютно сходящ.

Сега ще покажем, че областта на сходимост на един степенен ред е един интервал с център в началото на координатната система. Този интервал може да представлява цялата ос  $OX$ , може да се изразява в една точка и най-сетне може да представлява един истински интервал с крайна дължина.

И наистина нека  $M$  е областта на сходимост на степенния ред

$$(2) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Множеството  $M$  сигурно не е празно, защото то съдържа поне точката 0. Ако множеството  $M$  е неограничено отгоре, то съдържа всички реални числа (т. е. редът (2) е сходящ при всички стойности на  $x$ ). Това може да се установи по следния начин. Нека  $x_1$  е произволно реално число. Щом множеството  $M$  отгоре не е ограничено, винаги може да се намери число  $x_0$  в  $M$ , за което  $|x_1| < x_0$ , т. е.  $|x_1| < |x_0|$ . Но тъй като редът (2) е сходящ в точката  $x_0$  (точката  $x_0$  принадлежи на  $M$ ), въз основа на това, което доказахме преди малко, заключаваме, че той е сходящ и в точката  $x_1$ .

Сега ще разгледаме случая, когато множеството  $M$  е ограничено отгоре. Нека  $r$  е точна горна граница на  $M$ . Ще покажем, че при  $|x| < r$  редът (2) е сходящ, а при  $|x| > r$  той е разходящ. И наистина нека  $|x_1| < r$ . В такъв случай  $|x_1|$  не е горна граница на  $M$  (тъй като  $|x_1|$  е по-малко от най-малката горна граница на  $M$ ) и следователно има поне едно число  $x_0$  от  $M$  (където следователно редът е сходящ), за което  $|x_1| < x_0$ . Но щом в точката  $x_0$  редът (2) е сходящ, той трябва съгласно доказаното да бъде сходящ и в точката  $x_1$ . Нека сега  $x_2$  е една точка, за която  $|x_2| > r$ . Ще покажем, че редът (2) е разходящ в тази точка. И наистина нека  $r < x' < |x_2|$ . Тъй като  $r$  е една горна граница на  $M$ , то  $x'$  не принадлежи на  $M$ , т. е. редът (2) е разходящ в точката  $x'$ . От това следва, че редът е разходящ и в точката  $x_2$ , защото в противен случай от неравенството  $0 < x' < |x_2|$  би следвало, че редът (2) трябва да бъде сходящ и в точката  $x'$ , което не е вярно. И така ние доказахме, че редът (2) е сходящ при  $|x| < r$  и разходящ при  $|x| > r$ . При  $x = r$  и при  $x = -r$  ние не разгледахме реда. Както ще видим с помощта на примери, има редове, които в тия две точки са разходящи, има редове, които в тия две точки са сходящи, и най-сетне има редове, които в едната от точките са сходящи, а в другата разходящи. Числото  $r$  се нарича радиус на сходимост на степенния ред. Когато степенния ред е сходящ за всяко  $x$ , казваме, че неговият радиус на сходимост е безкрайност. В случай, че  $r = 0$ , редът е сходящ само при  $x = 0$ .

*Примери.* Радиусът на сходимост на реда

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

е безкрайност (този ред е сходящ при всички стойности на  $x$ ).

Радиусът на сходимост на реда

$$1 + 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots$$

е нула (този ред е сходящ само при  $x = 0$ ).

Радиусът на сходимост на реда

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

е единица (редът е сходящ при  $-1 < x < 1$  и разходящ вън от този интервал; специално при  $x = -1$  и  $x = 1$  този ред е разходящ).

Радиусът на сходимост на реда

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

е единица (редът е сходящ при  $-1 \leq x < 1$  и вън от този интервал е разходящ; специално при  $x = -1$  редът е сходящ, а при  $x = 1$  той е разходящ).

Радиусът на сходимост на реда

$$\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$$

е единица (защо?). Редът е сходящ при  $-1 \leq x \leq 1$  и вън от този интервал е разходящ; специално при  $x = -1$  и  $x = 1$  редът е сходящ.

От посочените примери е ясно, че е в краищата на интервала на сходимост редът може да бъде сходящ, може да бъде разходящ и най-сетне в единия край може да бъде сходящ, а в другия разходящ.

## § 2. Диференциране на степенни редове

Нека

$$(1) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

е един степенен ред, чийто радиус на сходимост е различен от нула. Сумата на този ред, разбира се, зависи от избора на числото  $x$ . Тя е обаче еднозначно дефинирана, когато редът е сходящ при избраната стойност на  $x$ . И така сумата на един степенен ред е функция на  $x$ , дефинирана в областта на сходимост на реда. Да означим с  $f(x)$  тази функция. Ще докажем, че  $f(x)$  е диференцируема във всички вътрешни точки на интервала на сходимост на дадения степенен ред, че редът

$$1a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

е сходящ за тия точки и че

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

Това твърдение не следва непосредствено от правилото за диференциране на сума, защото ние доказахме това правило само за суми от краен брой събираеми, а в дадения случай се касае за почленно диференциране на един безкраен ред.

Преди да пристъпим към доказателството на интересувашата ни теорема, ще докажем, че радиусът на сходимост на реда

$$(2) \quad a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

е равен на радиуса на сходимост на реда

$$(3) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Нека  $x_0$  е една точка от *вътрешността* на интервала на сходимост на реда (3). В такъв случай може да се намери число  $x_1$ , по-голямо от  $|x_0|$ , за което редът (3) все още е сходящ. От сходимостта на реда

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \dots$$

следва, че редицата

$$a_0, a_1x_1, a_2x_1^2, a_3x_1^3, \dots$$

клони към нула и следователно е ограничена. Нека  $A$  е една горна граница на  $|a_nx_1^n|$  за  $n = 1, 2, 3, \dots$ . В такъв случай получаваме неравенството

$$|na_nx_0^{n-1}| = n|a_nx_1^n| \cdot \left| \frac{x_0}{x_1} \right|^{n-1} \frac{1}{x_1} < n \frac{A}{x_1} q^{n-1},$$

където сме положили  $q = \left| \frac{x_0}{x_1} \right|$ . Това неравенство ни учи, че редът

$$1a_1 + 2a_2x_0 + 3a_3x_0^2 + \dots$$

е сходящ (дори абсолютно), тъй като членовете му членовете му не надминават по абсолютна стойност съответните членове на реда

$$\frac{A}{x_1}(1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} + \dots),$$

чиято сходимост се установява лесно, например с помощта на критерия на Даламбер, тъй като  $0 \leq q < 1$ .

От друга страна, ако  $x_0$  е една вътрешна точка от интервала на сходимост на реда (2), то редът

$$|x_0|(|a_1| + |2a_2x_0| + |3a_3x_0^2| + \dots)$$

е сходящ (понеже при  $x = x_0$  редът (2) е абсолютно сходящ). От неравенството

$$|a_nx_0^n| \leq |na_nx_0^n|, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

заклучаваме, че редът

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots$$

е също сходящ (дори абсолютно).

Направените разсъждения показват, че редовете (2) и (3) имат един и същ радиус на сходимост.

Като приложим доказаното за реда

$$1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + \dots,$$

който се получава чрез почленно диференциране на реда

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots,$$

заклучаваме, че неговият радиус на сходимост съвпада с радиуса на сходимост на реда (2), а следователно и на реда (3). Като приложим няколко пъти тези разсъждения, заключаваме, че всеки ред, получен от реда (1) чрез неколккратно почленно диференциране, има еднакъв с него (краен или безкраен) радиус на сходимост.

След тези предварителни забележки ние вече сме готови да преминем към доказателството на интересувашата ни теорема. За целта изхождаме от дефиницията на понятието производна. Нека  $x_0$  е една точка от вътрешността на интервала на сходимост на реда (1). Нека  $x_1$  е една точка също от вътрешността на интервала на сходимост на реда (1), за която  $x_1 > |x_0|$ . Такава точка може да се намери, защото точката  $x_0$  е вътрешна за интересувания ни интервал. Нека  $h$  е достатъчно малко по абсолютна стойност число, за да имаме  $|x_0 + h| < x_1$ . В такъв случай, ако  $h \neq 0$ , можем да пишем

$$(4) \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a_1 \frac{(x_0 + h) - x_0}{h} + a_2 \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} + a_3 \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} + \dots$$

Редът

$$(5) \quad \varphi(x_0) = a_1 + 2a_2x_0 + 3a_3x_0^2 + \dots$$

е сходящ, защото точката  $x_0$  лежи върху вътрешността на интервала на сходимост на реда (1), а следователно и на реда (2). От равенствата (4) и (5) получаваме

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \varphi(x_0) = a_2 \left[ \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} - 2x_0 \right] + \dots$$

$$+ a_n \left[ \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} - nx_0^{n-1} \right] + \dots$$

Като приложим теоремата за крайните нараствания, добиваме

$$\frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = n\xi_n^{n-1}, \quad \xi_n = x_0 + \theta_n h, \quad 0 < \theta_n < 1,$$

а отгук въз основа пак на теоремата за крайните нараствания —

$$\frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} - nx_0^{n-1} = n(\xi_n^{n-1} - x_0^{n-1}) = n(n-1)(\xi_n - x_0)\eta_n^{n-2},$$

$$\eta_n = x_0 + \theta'_n(\xi_n - x_0), \quad 0 < \theta'_n < 1.$$

По такъв начин, като вземем под внимание, че  $|\eta_n| < x_1$  и  $|\xi_n - x_0| < |h|$ , достигаеме до следното неравенство:

$$\left| \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} - nx_0^{n-1} \right| \leq n(n-1)x_1^{n-2}|h|,$$

откъдето

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \varphi(x_0) \right| \leq |h|(2 \cdot 1|a_2| + 3 \cdot 2|a_3x_1| + 4 \cdot 3|a_4x_1^2| + \dots).$$

Редът

$$2 \cdot 1|a_2| + 3 \cdot 2|a_3x_1| + 4 \cdot 3|a_4x_1^2| + \dots$$

обаче е сходящ, защото точката  $x_1$  е вътрешна за интервала на сходимост и сумата му ни най-малко не зависи от  $h$  и следователно, както и да изберем положително число  $\varepsilon$ , винаги може да се намери положително число  $\delta$  така, че при  $|h| < \delta$  да имаме

$$|h|(2 \cdot 1|a_2| + 3 \cdot 2|a_3x_1| + 4 \cdot 3|a_4x_1^2| + \dots) < \varepsilon,$$

а следователно и

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \varphi(x_0) \right| < \varepsilon.$$

С това ние доказахме, че функцията  $f(x)$  е диференцуема в точката  $x_0$  и нейната производна е  $\varphi(x_0)$ .

И така ние доказахме следната теорема :

Ако радиусът на сходимост на степенния ред

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

е отличен от нула, то сумата  $f(x)$  е диференцируема във всяка вътрешна точка  $x_0$  от интервала на сходимостта му и

$$f'(x_0) = a_1 + 2a_2x_0 + 3a_3x_0^2 + \dots + na_nx_0^{n-1} + \dots$$

### § 3. Редици от функции

Нека е дадена една редица от функции

$$(1) \quad f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots,$$

които са дефинирани в някой интервал  $\Delta$ . Казваме, че тази редица от функции е сходяща в разглеждания интервал, когато е сходяща редицата от функционалните стойности при всяка фиксирана стойност на  $x$  в интервала  $\Delta$ . С други думи, казваме, че редицата (1) е сходяща в интервала  $\Delta$ , когато при всяко фиксирано  $x$  от този интервал може да се намери такова число  $f(x)$ , че при всеки избор на положителното число  $\varepsilon$  може да се намери число  $\nu$  по такъв начин, че при  $n > \nu$  да е изпълнено неравенството

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Числото  $f(x)$  се нарича граница на редицата (1) при избраната стойност на  $x$ . Ние означихме границата със символа  $f(x)$ , за да напомним, че тя може евентуално да се мени, когато изменяме  $x$ . Тя обаче е еднозначно дефинирана, когато  $x$  е дадено, и следователно представлява функция на  $x$ .

Нека подчертаем изрично, че в дефиницията, която дадохме, не се забранява  $\nu$  евентуално да се мени, когато изменяме  $\varepsilon$  и  $x$ . Поради това ние често ще пишем  $\nu = \nu(\varepsilon, x)$ .

Ако при всеки избор на  $\varepsilon > 0$  е възможно да се избере число  $\nu(\varepsilon)$ , евентуално зависещо от  $\varepsilon$ , но не и от  $x$  по такъв начин, че при  $n > \nu(\varepsilon)$  да имаме

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

при всички стойности на  $x$  в интервала  $\Delta$ , казваме, че редицата (1) е *равномерно* сходяща в този интервал.

Като пример да разгледаме редицата с общ член

$$(2) \quad f_n(x) = \frac{x}{n}$$

върху цялата ос  $x$ . Тази редица е сходяща и граничната ѝ функция е константата нула. И наистина нека  $\varepsilon$  е произволно положително число. Ако поставим  $\nu = \frac{|x|}{\varepsilon}$ , ще имаме

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|x|}{n} < \varepsilon$$

при  $n > \nu$ .

Числото  $\nu$ , което ние по този начин съпоставихме на  $\varepsilon$ , зависи в този специален случай не само от  $\varepsilon$ , но и от  $x$ . Ще покажем, че не е възможно да се избере *независещо* от  $x$  число  $\nu(\varepsilon)$  така, че когато  $n > \nu(\varepsilon)$ , да имаме

$$(3) \quad |f_n(x) - 0| < \varepsilon$$

при всички стойности на  $x$ . Доказателството ще извършим, като допуснем противното. Нека в неравенството (3) фиксираме  $n$  (като му дадем, разбира се, стойност, по-голяма от  $\nu(\varepsilon)$ ). В такъв случай, ако е вярно допускането, от което изхождаме, ще имаме при всички стойности на  $x$

$$\frac{|x|}{n} < \varepsilon$$

или

$$|x| < \varepsilon n.$$

Последното неравенство обаче сигурно е нарушено, когато  $|x|$  е достатъчно голямо. С това ние доказахме, че редицата (2) не е равномерно сходяща върху цялата ос  $x$ .

Напротив, редицата с общ член

$$g_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

е равномерно сходяща върху цялата ос  $x$  (нейната граница е константата нула). И наистина да изберем едно кое да е положително число  $\varepsilon$ . В такъв случай, ако положим  $\nu = \frac{1}{\varepsilon}$ , то при  $n > \nu$  ще имаме

$$|g_n(x) - 0| = \left| \frac{\sin nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

В този пример числото  $\nu = \frac{1}{\varepsilon}$  не зависи от  $x$  и следователно разглежданата редица е равномерно сходяща.



Не е трудно да се докаже, че за да бъде редицата (1) равномерно сходяща в  $\Delta$ , необходимо и достатъчно е при всеки избор на положителното число  $\varepsilon$  да може да се намери едно независимо от  $x$  число  $\nu = \nu(\varepsilon)$  по такъв начин, че ако  $n > \nu$ , да имаме

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

при всички цели положителни стойности на  $p$  и при всяко  $x$  от  $\Delta$ . Доказателството предоставяме на читателя.

За да фиксираме идеите, ние дефинирахме понятието равномерна сходимост по отношение на един интервал. Читателят може обаче, ако иска, под  $\Delta$  да разбира произволно точково множество. Нека все пак изрично подчертаем, че понятието равномерна сходимост представлява интерес само когато множеството  $\Delta$  е съставено от безбройно много точки, защото в противен случай всяка сходяща редица от функции е и равномерно сходяща (защо?).

#### § 4. Редове, членовете на които са функции

Един ред

$$(1) \quad u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots,$$

членовете на който са функции, дефинирани в един интервал  $\Delta$ , се нарича сходящ, когато редицата от частичните му суми е сходяща. Редът се нарича *равномерно* сходящ в интервала  $\Delta$ , когато редицата от частичните му суми е *равномерно* сходяща в този интервал.

Ще дадем сега едно просто и важно достатъчно условие за равномерна сходимост на един ред. Това условие може да се формулира така: ако редът

$$(2) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

членовете на който не зависят от  $x$ , е сходящ и ако при всяко  $x$  от интервала  $\Delta$  са изпълнени неравенствата

$$(3) \quad |u_n(x)| \leq a_n,$$

то редът (1) е равномерно сходящ в този интервал.

Нека отбележим, че неравенствата (3) осигуряват сходимостта на реда (1) при всяко  $x$  в интервала  $\Delta$ . Това, което искаме да покажем, е, че сходимостта е равномерна в този интервал. Да означим с  $S(x)$  сумата на реда (1), а с  $S_n(x)$  неговата  $n$ -та частична сума. В такъв случай

$$S(x) - S_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

Да си изберем едно произволно положително число  $\varepsilon$  и да му съпоставим числото  $\nu(\varepsilon)$  така, че при  $n > \nu(\varepsilon)$  да имаме

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots < \varepsilon.$$

Това е възможно да се направи, защото редът (2) е сходящ. Нека обърнем внимание на това, че начинът, по който сме дефинирали числото  $\nu(\varepsilon)$ , ни най-малко не зависи от  $x$ . От друга страна, неравенствата (3) ни дават

$$|S(x) - S_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \dots \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots,$$

откъдето следва, че при  $n > \nu(\varepsilon)$  имаме

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon,$$

каквото и да е  $x$  в интервала  $\Delta$ . Този резултат ни учи, че редът (1) е равномерно сходящ в разглеждания интервал.

*Пример 1.* Редът

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots$$

е равномерно сходящ върху цялата ос  $x$ , защото

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

и редът  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , членовете на който не зависят от  $x$ , е сходящ.

В заключение нека отбележим, че няма връзка между абсолютната и равномерната сходимост. Така например редът

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu}(1-x^2)$$

е абсолютно сходящ при  $-1 \leq x \leq 1$ , но не е равномерно сходящ, а редът

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} x}{\nu}$$

е равномерно сходящ във всеки краен интервал, но не е абсолютно сходящ освен при  $x = 0$ .

*Пример 2.* Нека

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

е степенен ред и  $r$  е неговият радиус на сходимост. Ако  $0 \leq \rho < r$ , то този ред е равномерно сходящ при  $|x| \leq \rho$ , защото редът

$$|a_0| + |a_1 \rho| + |a_2 \rho^2| + \dots$$

е сходящ и

$$|a_n x^n| \leq |a_n \rho^n|.$$

### § 5. Редици от непрекъснати функции

Нека редицата от функциите

$$(1) \quad f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

е сходяща в интервала  $\Delta$ . Тук ще си поставим следния въпрос: може ли да се твърди, че граничната функция  $f(x)$  е непрекъсната, ако се знае, че всичките членове на редицата (1) са непрекъснати функции в интервала  $\Delta$ ? Отговорът на този въпрос е отрицателен. Ще си уясним това с един пример. Нека  $\Delta$  е затвореният интервал  $[0, 1]$  и нека  $f_n(x) = x^n$ . В такъв случай функциите  $f_n(x)$  са всички непрекъснати в разглеждания интервал. Въпреки това обаче граничната функция  $f(x)$  е прекъсната при  $x = 1$ , защото

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x < 1 \quad \text{и} \\ f(1) &= 1. \end{aligned}$$

И така непрекъснатостта на членовете на една сходяща редица не е достатъчна, за да ни осигури *непрекъснатостта на граничната функция*. Ако обаче редицата (1) е *равномерно* сходяща в интервала  $\Delta$  и членовете ѝ са непрекъснати в този интервал, то граничната функция  $f(x)$  е също тъй непрекъсната в интервала  $\Delta$ .

И наистина нека  $x_0$  е произволна точка от интервала  $\Delta$ . Да изберем едно произволно положително число  $\varepsilon$  и да му съпоставим такова число  $\nu(\varepsilon)$ , че при  $n > \nu(\varepsilon)$  да имаме

$$(2) \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

при *всички* стойности на  $x$  от  $\Delta$ . Това е възможно да се направи, защото редицата (1) е равномерно сходяща. След като е фиксирано числото  $\varepsilon > 0$ , ние можем да фиксираме и  $\nu(\varepsilon)$ , а с това да фиксираме и  $n$ , като му дадем произволна стойност, по-голяма от  $\nu(\varepsilon)$ . Функцията  $f_n(x)$  е обаче непрекъсната при  $x = x_0$ . Следователно ние можем да изберем положително число  $\delta$  така, че при  $|x - x_0| < \delta$  да имаме

$$(3) \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

разбира се, когато точката  $x$  принадлежи на  $\Delta$ . От друга страна,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Оттук, като вземем предвид неравенствата (2) и (3), получаваме при  $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

което показва, че функцията  $f(x)$  е непрекъсната в точката  $x_0$ .

*Пример.* Редът

$$S(x) = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots$$

е равномерно сходящ по цялата ос  $x$ , защото  $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ . От това заключаваме, че редицата от частичните му суми е също равномерно сходяща. Членовете на реда, а следователно и частичните му суми са непрекъснати функции на  $x$ . От това заключаваме, че сумата му  $S(x)$  е непрекъсната функция на  $x$ .

## § 6. Диференциране на безкрайни редици от функции

Нека функциите

$$(1) \quad f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

са дефинирани и диференцуеми в някой интервал  $\Delta$  и нека редицата от производните

$$f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_n'(x), \dots$$

е *равномерно сходяща* в  $\Delta$ . Ако има поне една точка  $x_0$  в  $\Delta$ , за която редицата от функционалните стойности

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_n(x_0), \dots$$

е сходяща, то редицата (1) е сходяща навсякъде в  $\Delta$ , граничната функция е диференцуема и

$$(\lim f_n(x))' = \lim f_n'(x).$$

**Доказателство.** Ние първо ще установим сходимостта на редицата (1) в целия интервал  $\Delta$ . За тази цел разглеждаме функцията

$$g(x) = f_{n+p}(x) - f_n(x).$$

Теоремата за крайните нараствания ни дава

$$g(x) - g(x_0) = (x - x_0)g'(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1, \quad h = x - x_0.$$

Оттук получаваме

$$f_{n+p}(x) - f_n(x) = f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)[f_{n+p}'(x_0 + \theta h) - f_n'(x_0 + \theta h)].$$

Избираме произволно положително число  $\varepsilon$ . В такъв случай при достатъчно големи стойности на  $n$ , при всички цели неотрицателни стойности на  $p$  и при всяко  $t$  от  $\Delta$  имаме

$$\begin{aligned} |f'_{n+p}(t) - f'_n(t)| &< \varepsilon, \\ |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

и следователно

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon(1 + |x - x_0|),$$

откъдето следва, че редицата (1) е наистина сходяща. (От направените разсъждения се вижда, че сходимостта е дори равномерна, когато  $x$  остава ограничено.)

Преминаваме към доказателството на втората част от теоремата. За тази цел полагаме

$$\begin{aligned} \lim f_n(x) &= f(x), \\ \lim f'_n(x) &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Избираме произволно положително число  $\varepsilon$  и му съпоставяме цялото\* положително число  $n$  по такъв начин, че при всички положителни стойности на  $p$  и при всяко  $x$  от  $\Delta$  да имаме

$$|f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \varepsilon.$$

В такъв случай очевидно имаме и

$$|\varphi(x) - f'_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Нека  $x_1$  е точка от  $\Delta$ . Означаваме с  $h$  едно различно от 0 число, за което точката  $x_1 + h$  принадлежи на  $\Delta$ . Нека  $h$  е толкова малко, че да имаме

$$\left| \frac{f_n(x_1 + h) - f_n(x_1)}{h} - f'_n(x_1) \right| < \varepsilon.$$

В такъв случай при всички цели положителни стойности на  $p$  имаме

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} - \varphi(x_1) \right| &\leq \left| \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} - \frac{f_{n+p}(x_1 + h) - f_{n+p}(x_1)}{h} \right| \\ &+ \left| \frac{f_{n+p}(x_1 + h) - f_{n+p}(x_1)}{h} - \frac{f_n(x_1 + h) - f_n(x_1)}{h} \right| \\ &+ \left| \frac{f_n(x_1 + h) - f_n(x_1)}{h} - f'_n(x_1) \right| + |f'_n(x_1) - \varphi(x_1)| \end{aligned}$$

\*По-нататък при нашите разсъждения  $n$  остава фиксирано.

и следователно, ако  $p$  е достатъчно голямо, то

$$\left| \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} - \varphi(x_1) \right| < 3\varepsilon + \left| \frac{f_{n+p}(x_1 + h) - f_{n+p}(x_1)}{h} - \frac{f_n(x_1 + h) - f_n(x_1)}{h} \right|.$$

Прилагаме теоремата за крайните нараствания към функцията

$$p(x) = f_{n+p}(x) - f_n(x).$$

Това ни дава

$$p(x_1 + h) - p(x_1) = hp'(x_1 + \theta_1 h) = h[f'_{n+p}(x_1 + \theta_1 h) - f'_n(x_1 + \theta_1 h)],$$

където  $0 < \theta_1 < 1$ . По такъв начин получаваме

$$\left| \frac{f_{n+p}(x_1 + h) - f_{n+p}(x_1)}{h} - \frac{f_n(x_1 + h) - f_n(x_1)}{h} \right| < \varepsilon.$$

Оттук намираме окончателно, че при всички достатъчно малки, различни от нула стойности на  $h$ , за които точката  $x_1 + h$  принадлежи на  $\Delta$ , е в сила неравенството

$$\left| \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} - \varphi(x_1) \right| < 4\varepsilon.$$

По такъв начин доказахме, че функцията  $f(x)$  е диференцуема в точката  $x_1$  и  $f'(x_1) = \varphi(x_1)$ , с което доказателството е завършено.

*Пример.* Нека

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

е степенен ред и  $r$  е неговият радиус на сходимост. Да означим с  $\rho$  едно положително число, което е по-малко от  $r$  (обаче не равно на  $r$ ). В такъв случай редът

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots,$$

чийто радиус на сходимост е също  $r$ , е равномерно сходящ при  $|x| \leq \rho$  (вж. пример 2 към § 4 от тази глава), а следователно и редицата от частичните му суми е равномерно сходяща в този интервал. Оттук се вижда, като вземем под внимание, че  $\rho$  може да се избира произволно близо до  $r$ , че функцията  $f(x)$  е диференцуема при  $|x| < r$  и

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots,$$

нещо, което доказахме директно в § 2 от тази глава.

### § 7. Формула на Тейлор (Taylor) за полиноми

Нека  $f(x)$  е произволен полином, чиято степен не надминава  $n$ , и  $a$  е едно произволно число. Ще покажем, че е в сила следната формула:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Тази формула носи името на Тейлор. Верността ѝ се установява по следния начин: нека

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n;$$

оттук получаваме

$$f(a+h) = a_0 + a_1(a+h) + a_2(a+h)^2 + \dots + a_n(a+h)^n;$$

като разкрием скобите и направим привеждане, получаваме за  $f(a+h)$  един полином на  $h$ , чиято степен не надминава  $n$ ; като означим с  $b_0, b_1, \dots, b_n$  коефициентите на този полином, получаваме

$$(1) \quad f(a+h) = b_0 + b_1h + b_2h^2 + \dots + b_nh^n;$$

това равенство е валидно при всички стойности на  $h$ ; специално като поставим  $h = 0$ , намираме

$$f(a) = b_0;$$

диференцирайки равенството (1) по  $h$ , намираме

$$(2) \quad f'(a+h) = b_1 + 2b_2h + 3b_3h^2 + \dots + nb_nh^{n-1};$$

оттук при  $h = 0$  получаваме  $f'(a) = b_1$ ; диференцираме още веднъж равенството (2) по  $h$  и получаваме

$$f''(a+h) = 2 \cdot 1b_2 + 3 \cdot 2b_3h + \dots + n \cdot (n-1)b_nh^{n-2},$$

откъдето, като положим  $h = 0$ , намираме  $f''(a) = 2 \cdot 1b_2$ ; като продължим тези разсъждения, намираме последователно

$$b_0 = f(a), \quad b_1 = \frac{f'(a)}{1!}, \quad b_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

С това интересувашата ни формула е изведена.

Ако положим  $a+h = x$ , формулата на Тейлор за полином  $f(x)$  от степен  $\leq n$  добива вида

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

### § 8. Обща формула на Тейлор

В този параграф ще разгледаме въпроса за приближено представяне на функциите с полиноми.

Нека  $f(x)$  е една функция, дефинирана и диференцируема  $n+1$  пъти в някой интервал, който съдържа точката  $a$ . Ние знаем, че в специалния случай, когато  $f(x)$  е полином, чиято степен не надминава  $n$ , е в сила формулата

$$(1) \quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

В общия случай (т. е. когато  $f(x)$  не е такъв полином) това равенство не е задължено да бъде изпълнено. Може да се постави обаче въпросът, дали равенството (1) не е поне приблизително вярно и в случая, когато  $f(x)$  не е полином от степен  $\leq n$ . Така поставеният въпрос не е достатъчно ясен, защото не е ясно какво значи „една приблизително вярна формула“. Ние по-точно ще си поставим за задача да изучим грешката, която се прави, когато вместо  $f(x)$  вземем стойността на полинома  $x$

$$f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

За тази цел означаваме с  $R_n$  разликата

$$R_n = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{1!} f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) - \dots - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

и така получаваме вече напълно точното равенство

$$(2) \quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n.$$

Интересуващата ни грешка е  $R_n$ . Обикновено  $R_n$  се нарича остатъчен член, а равенството (2) се нарича формула на Тейлор (Taylor). За да изследваме по-отблизо  $R_n$ , когато  $x$  е различно от  $a$  число от вътрешността на околността  $\Delta$ , образуваме си помощната функция на  $t$

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1!} f'(t) - \dots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \lambda(x-t)^p,$$

където  $p$  е произволно цяло положително число,  $x$  е фиксирано и константата  $\lambda$  избираме така, че да имаме

$$(3) \quad \varphi(a) = \varphi(x),$$



за да можем да приложим за функцията  $\varphi(t)$  теоремата на Рол. От равенството (3) получаваме

$$f(x) - f(a) - \frac{x-a}{1!} f'(a) - \dots - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \lambda(x-a)^p = 0$$

или

$$(4) \quad R_n - \lambda(x-a)^p = 0,$$

откъдето определяме стойността на множителя  $\lambda$ .

Функцията  $\varphi(t)$  е непрекъсната в затворения интервал\*  $[a, x]$  и диференцируема в него; освен това  $\varphi(a) = \varphi(x)$ ; това ни дава право да приложим теоремата на Рол за функцията  $\varphi(t)$  по отношение на интервала  $[a, x]$ . И така има поне една точка  $\xi$  във вътрешността на интервала  $[a, x]$ , в която  $\varphi'(\xi) = 0$ . Като вземем под внимание, че

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -f'(t) + \left[ f'(t) - \frac{x-t}{1!} f''(t) \right] + \left[ \frac{x-t}{1!} f''(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) \right] \\ &+ \dots + \left[ \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right] + p\lambda(x-t)^{p-1} \\ &= -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + p\lambda(x-t)^{p-1}, \end{aligned}$$

намираме

$$\varphi'(\xi) = -\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) + p\lambda(x-\xi)^{p-1} = 0$$

и следователно

$$\lambda = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Това ни дава възможност, като имаме пред вид равенството (4), да представим остатъчния член  $R_n$  във вида

$$R_n = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}(x-a)^p}{n! p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Ако положим, както това често се прави,

$$x-a = h \quad \text{и} \quad \frac{\xi-a}{x-a} = \theta,$$

\* Нека изрично подчертаем, че точката  $x$  може да се намира както отлясно, така и отляво на  $a$ , макар и в символа  $[a, x]$  да сме поставили  $x$  отлясно.

получаваме

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta h),$$

където  $0 < \theta < 1$ . Числото  $\theta$  зависи от функцията  $f(x)$  и от числата  $a$ ,  $x$ ,  $n$  и  $p$ . Нека припомним, че ние имаме голяма свобода в избора на  $p$ . Ако изберем специално  $p = n + 1$ , получаваме

$$(5) \quad R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Така получената форма за остатъчния член се нарича форма на Лагранж (Lagrange). Ако поставим  $p = 1$ , получаваме

$$(6) \quad R_n = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Тази форма носи името форма на Коши (Cauchy) за остатъчния член. Числото  $\theta$ , което участва във формулата (5) в общия случай, е различно от числото  $\theta$ , което участва във формулата (6).

По този начин изведохме формулите (5) и (6) при предположение, че  $a \neq x$  (ние прилагаме теоремата на Рол за интервала  $[a, x]$ ). Те са верни обаче и при  $a = x$ , защото в този случай имаме както  $R_n = 0$ , така и  $h = 0$ .

Остатъчният член може да се представи и в други форми, но за нашите нужди ще бъдат достатъчни двете форми (на Лагранж и Коши), които ние му дадохме.

Специално, когато  $a = 0$ , формулата на Тейлор се нарича формула на Маклорен (Mac Laurin). И така формулата

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n$$

се нарича формула на Маклорен (тук вместо  $h$  сме писали  $x$ ), където остатъчният член  $R_n$ , представен във формата на Лагранж, има вида

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1,$$

а във формата на Коши —

$$R_n = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

В заключение ще отбележим, че за да можем да проведем разсъжденията от този параграф, достатъчно е да се предполага, че функцията  $f(t)$  е диференцуема  $n$  пъти в затворения интервал  $[a, x]$ , а  $n$ -тата производна  $f^{(n)}(t)$  е диференцуема поне в отворения интервал  $(a, x)$  и е непрекъсната в крайните му точки.

### § 9. Отношение на два остатъчни члена

Нека в някой интервал  $\Delta$ , който съдържа точката  $a$ , са дефинирани две функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ ; нека освен това функцията  $f(x)$  е диференцуема поне  $n + 1$  пъти, функцията  $\varphi(x)$  е диференцуема поне  $k + 1$  пъти и  $\varphi^{(k+1)}(x) \neq 0$  в  $\Delta$ . При тези предположения ще намерим една проста зависимост между двата остатъчни члена

$$R_n = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{1!} f'(a) - \dots - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a),$$

$$\rho_k = \varphi(x) - \varphi(a) - \frac{x-a}{1!} \varphi'(a) - \dots - \frac{(x-a)^k}{k!} \varphi^{(k)}(a).$$

За тази цел прилагаме обобщената теорема за крайните нараствания за функциите

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1!} f'(t) - \dots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t),$$

$$\Phi(t) = \varphi(x) - \varphi(t) - \frac{x-t}{1!} \varphi'(t) - \dots - \frac{(x-t)^k}{k!} \varphi^{(k)}(t)$$

по отношение на интервала  $[a, x]$ . По такъв начин получаваме

$$\frac{F(a) - F(x)}{\Phi(a) - \Phi(x)} = \frac{F'(\xi)}{\Phi'(\xi)},$$

където  $\xi$  принадлежи на отворения интервал  $(a, x)$ .

Оттук, като вземем под внимание, че

$$F(x) = 0, \quad F(a) = R_n,$$

$$\Phi(x) = 0, \quad \Phi(a) = \rho_k,$$

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t),$$

$$\Phi'(t) = -\frac{(x-t)^k}{k!} \varphi^{(k+1)}(t),$$

намираме

$$\frac{R_n}{\rho_k} = \frac{k!(x-\xi)^{n-k} f^{(n+1)}(\xi)}{n! \varphi^{(k+1)}(\xi)}.$$

От тази обща формула получаваме при  $k = 0$  и  $\varphi(t) = (x-t)^p$ ,  $p > 0$ , познатото представяне на остатъчния член във формулата на Тейлор

$$R_n = \frac{(x-a)^p (x-\xi)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}(\xi),$$

от което, както знаем, при  $p = n + 1$  се получава представянето на Лагранж, а при  $p = 1$  се получава представянето на Коши.

Общата формула, която получихме, приема следния особено прост вид при  $k = n$ :

$$\frac{R_n}{\rho_n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)}.$$

Оттук заключаваме, че ако

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq |\varphi^{(n+1)}(t)|$$

във всички вътрешни точки на интервала  $(a, x)$ , то

$$|R_n| \leq |\rho_n|.$$

При

$$\varphi(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{b-x}, \quad b \neq a,$$

имаме

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!(b-a)^{n+1}}{(b-x)^{n+2}}, \quad \rho_n = \varphi(x)$$

и следователно при  $|x-a| < |b-a|$  равенството

$$\frac{R_n}{\rho_n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)}$$

добива вида

$$R_n = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n+1} \cdot \frac{(b-\xi)^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)! (b-x)}.$$

## § 10. Тейлоров ред

Нека функцията  $f(x)$  е безбройно много пъти диференцируема в някоя околност на точката  $a$ . В такъв случай безкрайният ред

$$f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots$$

се нарича Тейлоров ред на функцията  $f(x)$ . Така написаният ред не винаги е сходящ. И наистина да разгледаме функцията  $f(x) = \frac{1}{x}$  и да изберем  $a = 1$ .

От

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

намираме

$$f^{(k)}(1) = (-1)^k k!$$

и следователно интересуваният ни ред е

$$1 - h + h^2 - h^3 + \dots$$

Този ред е разходящ при  $|h| \geq 1$ . Има случаи, когато при някои (или при всички) стойности на  $h$  Тейлоровият ред на една функция е сходящ. В горния пример Тейлоровият ред е сходящ при  $|h| < 1$ .

Като имаме пред вид формулата на Тейлор

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n,$$

която разгледахме в предния параграф, близко е до ума да направим опит да развием функционалната стойност  $f(a+h)$  в Тейлоров ред, като оставим в Тейлоровата формула  $n$  да расте неограничено. Разбира се, ако съществува такова развитие, необходимо е преди всичко интересуваният ни ред да бъде сходящ. Това обаче все още не е достатъчно. Макар редът да е сходящ, сумата му (както ще видим по-късно) в общия случай не е задължена да бъде равна на  $f(a+h)$ . Ако се случи Тейлоровият ред

$$f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots$$

да бъде сходящ при някоя стойност на  $h$  и сумата му да е точно  $f(a+h)$ , казваме, че функцията  $f(x)$  е развиваема в Тейлоров ред при  $x = a+h$  около точката  $a$  (последните думи напомнят за това, че стойностите на последователните производни са пресметнати при  $x = a$ ). Като се възползуваме от дефиницията за понятието сходимост на един безкраен ред, заключаваме, че една функция  $f(x)$  е развиваема в Тейлоров ред в една точка  $a+h$ , когато редицата с общ член

$$S_n = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

е сходяща и клони към  $f(a+h)$ . Затова пък е необходимо и достатъчно редицата с общ член  $R_n$  да бъде сходяща и да клони към нула. И така, *да бъде функцията  $f(x)$  развиваема около точката  $a$  в Тейлоров ред при  $x = a+h$ , необходимо и достатъчно е остатъчният член  $R_n$  при така избраните стойности на  $a$  и  $h$  да клони към нула.*

Специално при  $a = 0$  получаваме реда (като поставим  $h = x$ )

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots,$$

който е познат под името Маклоренов ред. Маклореновият ред, както изобщо всеки Тейлоров ред, е степенен ред.

### § 11. Развиване на тригонометрични функции в степенни редове

Ще си поставим за задача сега да изучим Маклореновото развитие на функциите  $\sin x$  и  $\cos x$ .

Нека  $f(x) = \sin x$ . В такъв случай

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f'(x) &= \cos x, & f''(x) &= -\sin x, & f'''(x) &= -\cos x, \\ f^{IV}(x) &= \sin x, & f^V(x) &= \cos x, \dots \end{aligned}$$

Оттук намираме

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{IV}(0) = 0, \quad f^V(0) = 1, \dots$$

и следователно интересувашото ни Маклореново развитие е

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Ще установим, че този ред е сходящ за всяко  $x$  и сумата му е равна на  $\sin x$ . За тази цел разглеждаме остатъчния член

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right).$$

Очевидно имаме

$$(1) \quad |R_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Изразът  $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$  представлява общ член на един сходящ ред (при  $x = 0$  това се вижда директно, а при  $x \neq 0$  се установява с помощта на критерия на Даламбер) и следователно клони към нула, когато  $n$  расте неограничено и  $x$  е фиксирано. От неравенството (1) заключаваме, че и остатъчният член  $R_n$  клони към нула, когато  $n$  расте неограничено и  $x$  е фиксирано. Полученият

резултат ни учи, че функцията  $\sin x$  е развиваема в Маклоренов ред при всички стойности на  $x$  и

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Сега ще разгледаме въпроса за развиваемостта в степенен ред на функцията  $g(x) = \cos x$ . Очевидно

$$g(x) = \cos x, \quad g'(x) = -\sin x, \quad g''(x) = -\cos x, \quad g'''(x) = \sin x, \\ g^{IV}(x) = \cos x, \dots,$$

откъдето

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = -1, \quad g'''(0) = 0, \quad g^{IV}(0) = 1, \dots$$

и следователно Маклореновото развитие, което ни интересува, е

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Ще покажем, че този ред е сходящ при всяко  $x$  и сумата му е  $\cos x$ . За тази цел разглеждаме остатъчния член

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi\right).$$

Очевидно

$$|R_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ние обаче вече видяхме, че изразът  $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$  клони към нула, когато  $x$  е фиксирано, а  $n$  расте неограничено (тъй като е общ член на един сходящ ред). Оттук следва, че остатъчният член  $R_n$  клони към нула, когато фиксираме  $x$  и оставим  $n$  да расте неограничено. С това доказахме, че функцията  $\cos x$  е развиваема в степенен ред при всички стойности на  $x$  и

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

## Глава III

### ЕЛЕМЕНТАРНИ ТРАНСЦЕНДЕНТНИ ФУНКЦИИ

#### § 1. Дефиниция на показателна функция

В този параграф ще търсим функции, които, тъй да се каже, се възпроизвеждат при действието диференциране. По-точно ние ще търсим функции  $F(x)$ , които са дефинирани и диференцуеми при всяко  $x$  и при всяко  $x$  удовлетворяват условието

$$(1) \quad F'(x) = F(x).$$

Константата нула е една такава функция. Нас обаче това тривиално решение не ни интересува. Ние ще търсим функции, удовлетворяващи условието (1), които не се анулират тъждествено, т. е. такива, които поне при една стойност на аргумента приемат различна от нула стойност. За да намерим всички тия функции, ще си поставим първо по-специална задача — да намерим всички функции  $f(x)$  (дефинирани и диференцуеми за всяко  $x$ ), които удовлетворяват както условието

$$f'(x) = f(x),$$

така още и допълнителното условие  $f(0) = 1$ . Разбира се, ние не знаем дали така поставената задача има решение (въпрос за съществуване на решението), нито дали решението е само едно (въпрос за единственост на решението). Не ще съмнение, че не всяка задача има решение. Така например ако търсим просто число, което се дели без остатък на 4, очевидно няма да имаме решение. Ще отговорим (утвърдително) едва в края на този параграф на въпроса за съществуване на решението на интересувашата ни задача, а засега ще започнем да изучаваме задачата, като изхождаме от предположението (за което не знаем дали е вярно), че тя има решение.

И така нека  $f(x)$  е функция, дефинирана и диференцуема за всяко  $x$ , за която  $f'(x) = f(x)$  и  $f(0) = 1$ . Ще покажем, че за функцията  $f(x)$  е в сила равенството

$$f(x)f(y) = f(x + y)$$

при всеки избор на числата  $x$  и  $y$ . За да докажем това, фиксираме две числа  $x$  и  $y$ , полагаме  $x + y = a$  и си образуваме помощната функция на  $t$

$$\varphi(t) = f(t)f(a - t).$$

Очевидно имаме

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t)f(a - t) + f(t)[f(a - t)]' = f'(t)f(a - t) - f(t)f'(a - t) \\ &= f(t)f(a - t) - f(t)f(a - t) = 0, \end{aligned}$$



което показва, че функцията  $\varphi(t)$  е константа. И така при всички стойности на  $t$  имаме

$$\varphi(t) = \varphi(0)$$

или

$$f(t)f(a-t) = f(0)f(a) = f(a).$$

Като изберем специално  $t = x$ , получаваме

$$f(x)f(y) = f(x+y).$$

Сега ще докажем, че функцията  $f(x)$  не се анулира при никоя стойност на  $x$ . И наистина, ако допуснем, че в някоя точка  $x_0$  имаме  $f(x_0) = 0$ , заключаваме, че

$$f(x_0)f(-x_0) = 0.$$

Като вземем под внимание, от друга страна, че

$$f(x_0)f(-x_0) = f(x_0 - x_0) = f(0),$$

намираме

$$f(0) = f(x_0)f(-x_0) = 0,$$

което противоречи на условието  $f(0) = 1$ . При това доказателство ние същевременно се възползувахме от това, че функцията  $f(x)$  е дефинирана за всички стойности на  $x$ , а следователно и в точката  $-x_0$ .

След като установихме, че функцията  $f(x)$  не се анулира никъде, ние вече лесно можем да докажем, че всичките ѝ стойности са съществено положителни числа. И наистина при  $x = 0$  стойността на функцията е 1 и следователно е положителна. Ако допуснем, че има точка  $x_1$ , в която  $f(x_1) < 0$ , то в краищата на интервала  $[0, x_1]$  непрекъснатата функция  $f(x)$  (тя е непрекъсната, защото е диференцируема) ще приема стойности с противни знаци и следователно съгласно една теорема за непрекъснатите функции трябва да се анулира поне в една точка от интервала  $[0, x_1]$ . Ние обаче знаем, че  $f(x)$  никъде не се анулира.

От доказаното следва, че функцията  $f(x)$  е растяща. И наистина  $f'(x) = f(x)$  и следователно  $f'(x) > 0$ .

Не е трудно да се установи, че при всички стойности на  $x$  е в сила равенството

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Това се вижда непосредствено от следната верига равенства:

$$f(-x)f(x) = f(-x+x) = f(0) = 1.$$

За да пресметнем  $f(1)$ , ще използваме формулата на Маклорен

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x).$$

Като вземем под внимание, че при всички цели неотрицателни стойности на  $k$  имаме  $f^{(k)}(x) = f(x)$ , намираме  $f^{(k)}(0) = 1$  и  $f^{(n+1)}(\theta) = f(0)$  и следователно при  $x = 1$

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{f(\theta)}{(n+1)!}.$$

От друга страна, функцията  $f(x)$  е положителна, монотонно растяща и  $0 < \theta < 1$ . Въз основа на това заключаваме, че

$$0 < \frac{f(\theta)}{(n+1)!} < \frac{f(1)}{(n+1)!}$$

и следователно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\theta)}{(n+1)!} = 0.$$

Това ни позволява да твърдим, че

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

т. е.

$$f(1) = e.$$

Сега вече лесно могат да се пресметнат стойностите на функцията  $f(n)$  за цели стойности на  $n$ . И наистина нека  $n$  е цяло положително число. В такъв случай

$$f(n) = f(1 + 1 + \dots + 1) = f(1)f(1) \dots f(1) = [f(1)]^n = e^n.$$

Ако  $n$  е цяло отрицателно число, то  $-n$  е цяло положително число и следователно

$$f(n) = \frac{1}{f(-n)} = \frac{1}{e^{-n}} = e^n.$$

При  $n = 0$  имаме  $f(0) = e^0$ , защото  $f(0) = 1$  и  $e^0 = 1$ .

Ние установихме вече много свойства на функцията  $f(x)$ , но все още не сме дали отговор на двата основни въпроса, които ни интересуват — въпроса за съществуването и въпроса за единствеността на  $f(x)$ . Сега ще отговорим на по-простия и по-малко интересния въпрос — на въпроса за единственост.

Нека  $f(x)$  и  $g(x)$  са две функции, дефинирани и диференцуеми за всяко  $x$  и удовлетворяващи условията

$$f'(x) = f(x), \quad g'(x) = g(x), \quad f(0) = 1, \quad g(0) = 1.$$

Образуваме си помощната функция

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Функцията  $\varphi(x)$  е дефинирана и диференцуема за всяко  $x$ , защото, както знаем,  $f(x)$  никъде не се анулира. Очевидно имаме

$$\varphi'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{f^2(x)} = 0.$$

От това заключаваме, че функцията  $\varphi(x)$  е константа, т. е. за всяко  $x$  имаме

$$\varphi(x) = \varphi(0)$$

или

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(0)}{f(0)} = 1,$$

откъдето  $g(x) = f(x)$ . С това е доказано, че има най-много една функция, удовлетворяваща нашите условия (но дали въобще има такава функция, ние все още не знаем).

Макар и да е напълно задоволителен отговорът на въпроса за единственост, ние ще дадем сега още едно решение на същия въпрос. Новото решение ще има това предимство, че то ще ни даде същевременно и степенното развитие на функцията  $f(x)$ .

Очевидно имаме

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots,$$

откъдето

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 1.$$

Въз основа на това заключаваме, че Маклореновото развитие на функцията  $f(x)$  е

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Това развитие е сходящо при всички стойности на  $x$  и сумата му е  $f(x)$ . За да докажем това, разглеждаме остатъчния член

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f(\theta x).$$

Функцията  $f(x)$  обаче е растяща. Въз основа на това и въз основа на неравенството  $\theta x \leq |x|$  заключаваме, че  $f(\theta x) \leq f(|x|)$ .

Това ни дава право да пишем

$$|R_n| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} f(\theta x) \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} f(|x|).$$

Изразът  $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} f(|x|)$  обаче представлява общият член на един сходящ ред (при  $x \neq 0$  това се вижда с помощта на критерия на Даламбер, а при  $x = 0$  това е ясно непосредствено) и следователно при фиксирано  $x$  клони към нула, когато  $n$  расте неограничено. От това заключаваме, че  $R_n$  също клони към нула — нещо, което е достатъчно, за да твърдим, че  $f(x)$  е развиваема в Маклоренов ред при всички стойности на  $x$  и

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

За да получим повторно отговор на въпроса за единственост, да означим с  $g(x)$  една произволна функция, дефинирана и диференцуема за всички стойности на  $x$ , за която

$$g'(x) = g(x) \quad \text{и} \quad g(0) = 1.$$

Като извършим и за нея същите разсъждения, с помощта на които получихме степенното развитие на  $f(x)$ , ще получим

$$g(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

откъдето заключаваме, че  $f(x) = g(x)$ .

Преминаваме към въпроса за съществуване. Независимо от това, което знаем за степенното развитие на функцията  $f(x)$ , образуваме степенния ред

$$(2) \quad \varphi(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Той е сходящ за всяко  $x$ , както това се вижда, като приложим при  $x \neq 0$  (при  $x = 0$  сходимостта на реда (2) се вижда непосредствено) критерия на Даламбер към реда с положителни членове

$$1 + \frac{|x|}{1!} + \frac{|x|^2}{2!} + \frac{|x|^3}{3!} + \dots$$

И така функцията  $\varphi(x)$  е дефинирана за всички стойности на  $x$ . Както знаем от теоремата за почленно диференциране на степенни редове, тази функция е диференцируема за всички стойности на  $x$  и

$$\varphi'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Полученият резултат ни учи, че  $\varphi'(x) = \varphi(x)$ . От друга страна, очевидно имаме  $\varphi(0) = 1$ . С това доказахме, че действително има функция  $\varphi(x)$ , която е дефинирана и диференцируема за всяко  $x$  и удовлетворява условията

$$\varphi'(x) = \varphi(x), \quad \varphi(0) = 1.$$

По-горе доказахме, че ако функцията  $f(x)$  е дефинирана, диференцируема за всяко  $x$  и удовлетворява условията

$$f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1,$$

то при цели стойности на  $n$  имаме  $f(n) = e^n$ . В този курс предполагаме, че степента  $e^n$  е дефинирана само за цели стойности на  $n$ . Напротив, функцията  $f(x)$  е дефинирана за всички стойности на  $x$ . Ето защо за в бъдеще тази функция ще означаваме със символа  $e^x$  и тогава, когато  $x$  не е цяло число. Тази функция се нарича показателна функция (или както понякога се казва, експоненциална функция).

Да резюмираме по-главните свойства на показателната функция, като си служим с току-що въведеното означение:

- 1)  $(e^x)' = e^x$ .
- 2)  $e^0 = 1$ .
- 3) Събирателна теорема

$$e^x e^y = e^{x+y}.$$

- 4) Функцията  $e^x$  не се анулира за никоя стойност на  $x$ .
- 5)  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ .
- 6) Всички стойности на функцията  $e^x$  са съществено положителни.
- 7) Функцията  $e^x$  е растяща.
- 8) Функцията  $e^x$  е развиваема при всяко  $x$  в степенен ред:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Специално при  $x = 1$  това развитие преминава в познатото вече на читателя развитие

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

9) От степенното развитие на  $e^x$  се вижда, че при  $x > 0$  имаме

$$e^x > x.$$

Това неравенство показва, че  $e^x$  расте неограничено, когато  $x$  расте неограничено.

10) Функцията  $e^x$  клони към нула, когато  $x$  дивергира към  $-\infty$ . За да се убедим в това, достатъчно е да вземем под внимание, че при положителни стойности на  $x$  имаме

$$0 < e^{-x} = \frac{1}{e^x} < \frac{1}{x}.$$

Не е трудно да се намерят всички функции  $F(x)$ , които са дефинирани и диференцируеми навсякъде и удовлетворяват условието  $F'(x) = F(x)$ , без да се иска да удовлетворяват още и допълнителното условие  $F(0) = 1$ . За да намерим всички тези функции, образуваме си помощната функция  $\varphi(x) = F(x)e^{-x}$ . От  $\varphi'(x) = F'(x)e^{-x} - F(x)e^{-x} = 0$  заключаваме, че  $\varphi(x)$  е константа и следователно

$$\varphi(x) = \varphi(0) \quad \text{или} \quad F(x)e^{-x} = F(0), \quad \text{т. е.} \quad F(x) = F(0)e^x.$$

И така всяка функция, удовлетворяваща посочените по-горе условия, се получава от  $e^x$ , като я умножим с константа. Обратно, каквато и да е константата  $c$ , функцията  $ce^x$  удовлетворява равенството  $(ce^x)' = ce^x$ .

## § 2. Ирационалност на числото $e$

Вече споменахме (вж. част I, гл. II, § 8), че числото

$$e = 2,718281828459045 \dots,$$

дефинирано като граница на сходящата редица с общ член

$$(1) \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

е ирационално. Разбира се, ние можем да пресметнем това число с всяка желана точност, например, като си служим с израза (1) и дадем на  $n$  достатъчно голяма стойност (което е свързано с много дълги пресмятания) или (което е много по-удобно), като си служим с частичните суми на познатия вече на читателя ред

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Разбира се, тези пресмятания с нищо не изясняват въпроса за рационалност или ирационалност на числото  $e$ .

Ще си поставим за задача да установим строго ирационалността на числото  $e$ . Доказателството ще извършим от противното. Да допуснем, че числото  $e$  може да се представи във вида

$$e = \frac{p}{q},$$

където  $p$  и  $q$  са две цели положителни числа, и да означим с  $n$  едно кое да е цяло число, по-голямо от  $q$  и от  $e$ . Въз основа на формулата на Тейлор получаваме

$$(2) \quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!},$$

където  $\theta$  е едно число между 0 и 1. Остатъчният член сме представили във формата на Лагранж. От равенството (2) получаваме, след като го умножим с  $n!$  и разместим по подходящ начин членовете му,

$$(3) \quad \frac{e^\theta}{n+1} = \frac{n!p}{q} - \left[ n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} \right].$$

Полученият резултат ни учи, че числото  $\frac{e^\theta}{n+1}$  е цяло (в дясната страна на равенството (3) имаме цяло число). Това обаче не е възможно, защото числото  $\frac{e^\theta}{n+1}$  е по-малко от 1 (тъй като  $n > e$  и следователно  $n+1 > e > e^\theta$ ) и е съществено положително (тъй като  $e^x$ , както знаем, приема само съществено положителни стойности).

В разгледания случай ние можахме лесно да установим ирационалността на интересувашото ни число. Има обаче случаи, когато подобни въпроси се оказват извънредно сложни. Така например редът

$$S = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} + \cdots$$

е сходящ (защо?). Няма принципиална трудност за пресмятането на неговата сума  $S$  с всяка желана точност. Ето няколко първи десетични знака на тази сума:

$$S = 1,20205690315959428540 \dots$$

Обаче ние не знаем дали това число е рационално, или не.

## Задачи

1. Пресметнете числото  $e$  с 5 десетични знака, като си послужите с реда от предния параграф. Намерете една горна граница за грешката, която правите при тези пресмятания!

2. Намерете производната на  $y = e^{-x^2}$ .

*Решение.* Имаме да намерим производната на една функция от вида  $y = e^{u(x)}$ . В дадения случай  $u(x) = -x^2$ ; като се възползуваме от правилото за диференциране на функция от функция, заключаваме, че  $y' = e^u u'$ . В дадения случай имаме  $y' = e^{-x^2} (-x^2)' = -2xe^{-x^2}$ .

3. Намерете производната на  $y = e^{\sin 2x}$ .

*Отговор.*  $y' = 2e^{\sin 2x} \cos 2x$ .

4. Намерете границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

*Решение.* Както знаем, производната на една функция  $f(x)$  в една точка  $x_0$  се дефинира като граница на отношението

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

когато  $x$  клони към  $x_0$  (разбира се, чрез стойности, различни от  $x_0$ ). Специално, ако изберем  $f(x) = e^x$  и  $x_0 = 0$ , то получаваме

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Като вземем пред вид, че функцията  $e^x$  е диференцируема и че производната ѝ е  $e^x$ , заключаваме, че търсената граница съществува и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1.$$

## § 3. Аналитична дефиниция на тригонометричните функции

Читателят знае как по геометричен път се дефинират функциите  $\sin x$  и  $\cos x$ . Тези функции могат обаче да се дефинират и чисто аналитично, без помощта на геометрията.

Това може да стане по различни начини. Ние тук ще следваме един път, аналогичен на пътя, по който въведохме показателната функция  $e^x$ . Както знаем, функциите  $\sin x$  и  $\cos x$ , дефинирани по геометричен път, имат свойствата

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x, & \sin 0 &= 0; \\ (\cos x)' &= -\sin x, & \cos 0 &= 1. \end{aligned}$$

Ние ще изберем тези свойства за основни и без да се ползуваме от геометрията, ще докажем, че има една и само една двойка функции  $S(x)$  и  $C(x)$ , дефинирани и диференцируеми за всяко  $x$ , които удовлетворяват условията

$$(1) \quad \begin{cases} S'(x) = C(x), & S(0) = 0; \\ C'(x) = -S(x), & C(0) = 1. \end{cases}$$



Предварително ще покажем как с помощта на условията (1) могат да се изучават свойствата на тези функции. И така нека имаме две функции  $S(x)$  и  $C(x)$ , които са дефинирани и диференцируеми за всяко  $x$  и удовлетворяват условията (1). Ще покажем най-напред, че

$$(2) \quad S^2(x) + C^2(x) = 1.$$

И наистина производната на функцията

$$\varphi(x) = S^2(x) + C^2(x)$$

е нула, както това се вижда от равенствата

$$\varphi'(x) = 2S(x)S'(x) + 2C(x)C'(x) = 2S(x)C(x) - 2C(x)S(x) = 0.$$

Оттук заключаваме, че  $\varphi(x)$  е константа и следователно за всяко  $x$  имаме

$$\varphi(x) = \varphi(0),$$

т. е.

$$S^2(x) + C^2(x) = S^2(0) + C^2(0) = 0 + 1 = 1.$$

От така полученото равенство (2) заключаваме, че  $S^2(x) \leq 1$  и  $C^2(x) \leq 1$  и следователно

$$|S(x)| \leq 1 \quad \text{и} \quad |C(x)| \leq 1.$$

Функциите  $S(x)$  и  $C(x)$  удовлетворяват при всяко  $x$  и  $y$  равенствата

$$(3) \quad \begin{aligned} S(x+y) &= S(x)C(y) + S(y)C(x), \\ C(x+y) &= C(x)C(y) - S(x)S(y). \end{aligned}$$

За да докажем това, полагаме  $x+y = a$  и образуваме двете помощни функции на  $t$ :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= S(t)C(a-t) + S(a-t)C(t), \\ \psi(t) &= C(t)C(a-t) - S(t)S(a-t). \end{aligned}$$

Като диференцираме, получаваме

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= C(t)C(a-t) + S(t)S(a-t) - C(a-t)C(t) - S(a-t)S(t) = 0, \\ \psi'(t) &= -S(t)C(a-t) + C(t)S(a-t) - C(t)S(a-t) + S(t)C(a-t) = 0, \end{aligned}$$

т. е. двете функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  са константи. По-специално имаме

$$\varphi(0) = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \psi(0) = \psi(x)$$

или

$$\begin{aligned} S(a) &= S(x)C(a-x) + S(a-x)C(x), \\ C(a) &= C(x)C(a-x) - S(x)S(a-x). \end{aligned}$$

Като вземем под внимание, че  $a = x + y$ , получаваме формулите (3). Формулите (3) се наричат събирателни формули на тригонометричните функции.

Сега ще докажем, че функцията  $C(x)$  е четна, а функцията  $S(x)$  е нечетна. Това значи, че при всички стойности на  $x$  са в сила равенствата

$$C(-x) = C(x) \quad \text{и} \quad S(-x) = -S(x).$$

За да докажем това, ще разгледаме равенствата (3) при  $y = -x$ . Така получаваме

$$(4) \quad \begin{aligned} 0 &= S(x)C(-x) + C(x)S(-x), \\ 1 &= C(x)C(-x) - S(x)S(-x). \end{aligned}$$

Като умножим първото от тия равенства с  $S(x)$ , второто с  $C(x)$  и съберем, получаваме

$$C(x) = C(-x).$$

Ако умножим първото от равенствата (4) с  $C(x)$ , второто с  $S(x)$  и извадим, получаваме

$$-S(x) = S(-x).$$

И така установихме много свойства на функциите  $S(x)$  и  $C(x)$ , които удовлетворяват условията (1), обаче все още не знаем дали такива функции има. (Ние си поставихме за задача да дадем чисто аналитично изследване на интересувания ни въпрос и следователно не бива да се ползуваме от това, което знаем от геометрията!) За да покажем, че има функции, удовлетворяващи условията (1), разглеждаме двата степенни реда

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \\ v(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Тия редове са абсолютно сходящи при всички стойности на  $x$ , както това се вижда с помощта на критерия на Даламбер (критерия на Даламбер прилагаме за редовете

$$\begin{aligned} \frac{|x|}{1!} + \frac{|x|^3}{3!} + \frac{|x|^5}{5!} + \dots, \\ 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

при  $x \neq 0$ ; при  $x = 0$  сходимостта е очевидна). Съгласно теоремата за почленно диференциране на степенните редове заключаваме, че двете функции  $u(x)$  и  $v(x)$  (които са дефинирани за всички стойности на  $x$ ) са диференцуеми навсякъде и

$$u'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$v'(x) = -\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Оттук следва, че

$$u'(x) = v(x),$$

$$v'(x) = -u(x).$$

От друга страна, непосредствено се вижда, че  $u(0) = 0$  и  $v(0) = 1$ . И така ние успяхме да намерим две функции  $u(x)$  и  $v(x)$ , които удовлетворяват условията (1). С това отговорихме на интересувания ни въпрос за съществуване, без да прибегваме до помощта на геометрията.

Сега вече знаем, че има функции  $S(x)$  и  $C(x)$ , които удовлетворяват условията (1), обаче не знаем колко такива двойки има (въпрос за единственост). Както ще видим, съществува само една такава двойка. И наистина нека  $f(x)$  и  $g(x)$  са две функции, дефинирани и диференцуеми за всяко  $x$ , които удовлетворяват условията

$$f'(x) = g(x), \quad f(0) = 0,$$

$$g'(x) = -f(x), \quad g(0) = 1.$$

Образуваме си помощните функции

$$F(x) = S(x)g(x) - C(x)f(x),$$

$$G(x) = C(x)g(x) + S(x)f(x).$$

Като диференцираме, получаваме

$$F'(x) = C(x)g(x) - S(x)f(x) + S(x)f(x) - C(x)g(x) = 0,$$

$$G'(x) = -S(x)g(x) - C(x)f(x) + C(x)f(x) + S(x)g(x) = 0,$$

което показва, че двете функции  $F(x)$  и  $G(x)$  са константи. И така при всички стойности на  $x$  имаме

$$F(x) = F(0) \text{ и } G(x) = G(0)$$

или

$$(5) \quad \begin{aligned} S(x)g(x) - C(x)f(x) &= 0, \\ C(x)g(x) + S(x)f(x) &= 1. \end{aligned}$$

Като умножим първото от тия две равенства с  $S(x)$ , второто с  $C(x)$  и съберем, получаваме

$$(6) \quad g(x) = C(x).$$

Ако умножим първото от равенствата (5) с  $C(x)$ , второто с  $S(x)$  и извадим, получаваме

$$(7) \quad f(x) = S(x).$$

Равенствата (6) и (7) ни учат, че не може да има повече от една двойка функции, които са дефинирани и диференцуеми при всички стойности на  $x$  и удовлетворяват условията (1).

Ние знаем, че дефинираните по геометричен път функции  $\sin x$  и  $\cos x$  удовлетворяват условията

$$(8) \quad \begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x, & \sin 0 &= 0, \\ (\cos x)' &= -\sin x, & \cos 0 &= 1. \end{aligned}$$

Като вземем под внимание току-що доказаната теорема за единственост, заключаваме, че при всички стойности на  $x$  имаме

$$\begin{aligned} S(x) &= \sin x, \\ C(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

За в бъдеще със  $\sin x$  и  $\cos x$  ще означаваме съответно двете функции  $S(x)$  и  $C(x)$ , които удовлетворяват условията (1).

След всичко изложено досега можем да дадем следната чисто аналитична дефиниция на тригонометричните функции:  $\sin x$  и  $\cos x$  ще наричаме две функции, които са дефинирани и диференцуеми при всички стойности на  $x$  и които удовлетворяват условията (8).

След като са дефинирани двете функции  $\sin x$  и  $\cos x$ , функциите  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$  дефинираме с помощта на равенствата

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

По този начин функцията  $\operatorname{tg} x$  е дефинирана за всички стойности на  $x$ , за които  $\cos x \neq 0$ , а функцията  $\operatorname{ctg} x$  е дефинирана за всички стойности на  $x$ , за които  $\sin x \neq 0$ .

### § 4. Дефиниция на числото $\pi$ и периодичност на тригонометричните функции

Да разгледаме уравнението

$$\cos x = 0.$$

Ще докажем, че то има едно и само едно решение  $\xi$ , което удовлетворява неравенствата  $0 < \xi < 2$ . Съществуването на решението се установява просто, защото функцията  $\cos x$  е непрекъсната и в краищата на интервала  $[0, 2]$  приема стойности с противни знаци. И наистина

$$\cos 0 = 1 > 0$$

и

$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \dots = \left(1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!}\right) - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!} - \frac{2^{4n}}{4n!}\right) \\ &= -\frac{1}{3} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - \left(\frac{2^{10}}{10!} - \frac{2^{12}}{12!}\right) - \dots \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{2^6}{6!} \left(1 - \frac{2^2}{7 \cdot 8}\right) - \frac{2^{10}}{10!} \left(1 - \frac{2^2}{11 \cdot 12}\right) - \dots < 0. \end{aligned}$$

И така непрекъснатата функция  $\cos x$  действително приема в краищата на интервала  $[0, 2]$  стойности с противни знаци. Това ни позволява да твърдим въз основа на една теорема за непрекъснатите функции, която доказахме по-рано, че уравнението

$$(1) \quad \cos x = 0$$

има поне един корен в интервала  $(0, 2)$ . Това уравнение не може да има повече от един корен в същия интервал. И наистина, ако уравнението (1) би имало две различни решения  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , лежащи в интервала  $(0, 2)$ , то съгласно теоремата на Рол бихме могли да заключим, че производната  $(\cos x)' = -\sin x$  се анулира поне за една стойност на  $x$  между  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , а следователно и между 0 и 2. Това обаче е невъзможно, защото

$$\sin x = \frac{x}{1!} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!} \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \dots$$

и при  $0 < x < 2$  всичките изрази, които са затворени в скоби, са съществено положителни и следователно  $\sin x \neq 0$ .

И така уравнението (1) има едно и само едно решение, което лежи в интервала  $(0, 2)$ . Обикновено числото  $2\xi$  се означава с буквата  $\pi$  (четете — пи). Както ще видим по-късно, така дефинираната константа  $\pi$  играе много важна роля. Ние впоследствие ще покажем как може да я пресметнем с всяка желана точност.

От равенството

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

като вземем пред вид, че  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ , намираме  $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$ ; от друга страна  $0 < \frac{\pi}{2} < 2$ , а ние знаем, че при всички стойности на  $x$  от интервала  $(0, 2)$  функцията  $\sin x$  приема положителни стойности. Това ни дава право да заключим, че

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

С помощта на събирателните теореми намираме

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x,\end{aligned}$$

откъдето

$$\begin{aligned}\sin(x + \pi) &= \sin\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \\ \cos(x + \pi) &= \cos\left[\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x\end{aligned}$$

и най-сетне

$$\begin{aligned}\sin(x + 2\pi) &= \sin[(x + \pi) + \pi] = -\sin(x + \pi) = -(-\sin x) = \sin x, \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos[(x + \pi) + \pi] = -\cos(x + \pi) = -(-\cos x) = \cos x.\end{aligned}$$

Често свойството, което изразяват последните две равенства, се формулира кратко, като се казва, че функциите  $\sin x$  и  $\cos x$  са периодични с период  $2\pi$ .

Не е трудно да се покаже, че функциите  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$  са периодични с период  $\pi$ . И наистина

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x + \pi) &= \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{ctg}(x + \pi) &= \frac{\cos(x + \pi)}{\sin(x + \pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \operatorname{ctg} x.\end{aligned}$$

**Задачи**

1. Като изхождате от аналитичната дефиниция на тригонометричните функции, докажете, че

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

*Решение.* Както знаем, производната на една функция  $f(x)$  в една точка  $x_0$  се дефинира като граница на отношението

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

когато  $x$  клони към  $x_0$  (разбира се, чрез стойности, различни от  $x_0$ ). Специално, ако изберем  $f(x) = \sin x$  и  $x_0 = 0$ , получаваме

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x}{x}.$$

Като вземем под внимание, че функцията  $\sin x$  е диференцируема и че производната ѝ е  $\cos x$ , заключаваме, че търсената граница съществува и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \cos 0 = 1.$$

2. Като изхождате от аналитичната дефиниция на тригонометричните функции, докажете формулите:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2},$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

**§ 5. Хиперболични функции**

Ние дефинирахме функциите  $\sin x$  и  $\cos x$  с помощта на условията

$$(\sin x)' = \cos x, \quad \sin 0 = 0,$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad \cos 0 = 1.$$

Тук ще си поставим сродната задача да изучим функциите, които са дефинирани и диференцируеми за всяко  $x$  и удовлетворяват условията

$$(1) \quad \begin{cases} f'(x) = g(x), & f(0) = 0, \\ g'(x) = f(x), & g(0) = 1. \end{cases}$$

Засега ние не знаем дали изобщо има такива функции. Преди да разгледаме важния въпрос за съществуването на такива функции, ние ще се занимаем с по-простия въпрос за единственост. И така да допуснем, че има две функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , които са диференцируеми за всяко  $x$  и удовлетворяват условията (1). Като съберем двете равенства

$$\begin{aligned}f'(x) &= g(x), \\g'(x) &= f(x),\end{aligned}$$

получаваме

$$[f(x) + g(x)]' = g(x) + f(x),$$

т. е. функцията  $f(x) + g(x)$  се възпроизвежда, така да се каже, при действието диференциране. При това очевидно имаме

$$f(0) + g(0) = 0 + 1 = 1.$$

И така функцията  $f(x) + g(x)$  не само се възпроизвежда при действието диференциране, но при  $x = 0$  приема стойност единица. Ние обаче знаем, че има само една функция с тия свойства и тая функция е показателната функция  $e^x$ . И така докажахме, че ако има две функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , които удовлетворяват условието (1), то

$$(2) \quad f(x) + g(x) = e^x.$$

Образуваме си помощната функция

$$\varphi(x) = g(x) - f(x).$$

От равенствата (1) следва, че функцията  $\varphi(x)$  удовлетворява равенството

$$\varphi'(x) + \varphi(x) = 0.$$

Оттук, като умножим с  $e^x$ , получаваме

$$e^x \varphi'(x) + e^x \varphi(x) = 0,$$

което може да се напише още във вида

$$[e^x \varphi(x)]' = 0.$$

И така производната на функцията  $e^x \varphi(x)$  е нула за всяко  $x$ . От това следва, че тази функция е константа, т. е. за всяко  $x$  имаме

$$e^x \varphi(x) = e^0 \varphi(0) = g(0) - f(0) = 1,$$



откъдето получаваме  $\varphi(x) = e^{-x}$  или

$$(3) \quad g(x) - f(x) = e^{-x}.$$

Като съберем и извадим почленно равенствата (2) и (3), получаваме

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Така ние получихме отговор на въпроса за единственост, който ни интересуваше. Ние доказахме именно, че няма други функции освен (евентуално) функциите

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ и } \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

които са дефинирани и диференцуеми за всяко  $x$  и удовлетворяват условията (1). Разсъжденията ние извършихме досега въз основа на предположението (за което не знаем още дали е вярно, или не), че има функции с тези свойства. Досега ние не знаем дали такива функции има, или не, но изследването на въпроса за единственост, което ние извършихме, все пак дава указание как бихме могли да открием какъв е отговорът (положителен или отрицателен) на въпроса за съществуването на решение. Достатъчно е да проверим дали функциите

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ и } \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

удовлетворяват условията (1). Ако се случи тези функции да не удовлетворяват поне едно от поставените условия, можем да твърдим със сигурност, че задачата няма решение; ако пък се окаже, че намерените функции удовлетворяват всичките условия, то с това не само ще бъде показано съществуването на решението, но ние ще знаем със също кое е то.

С директна проверка се установява, че функциите

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

които са дефинирани и диференцуеми за всяко  $x$ , удовлетворяват условията (1). Тези две функции се означават често със знаците  $\operatorname{sh} x$  (четете — си-

нус хиперб̀оликус или хиперболичен синус) и  $\text{ch } x$  (четете — косинус хиперб̀оликус или хиперболичен косинус). И така

$$(4) \quad \begin{aligned} \text{sh } x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \text{ch } x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Хиперболичните функции по своите свойства твърде много приличат на тригонометричните функции (читателят е забелязал, че и дефиницията им прилича твърде много на дефиницията на тригонометричните функции). Тук ще разгледаме по-важните свойства на хиперболичните функции. Така

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1.$$

И наистина

$$\begin{aligned} \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

При хиперболичните функции са в сила и събирателни теореми, аналогични на събирателните теореми, които имаме при тригонометричните функции. Тези теореми се изразяват със следните равенства:

$$\text{sh}(x + y) = \text{sh } x \text{ ch } y + \text{sh } y \text{ ch } x,$$

$$\text{ch}(x + y) = \text{ch } x \text{ ch } y + \text{sh } x \text{ sh } y.$$

Ние ще докажем първата от тези две формули. Като се възползуваме от равенствата (4), получаваме

$$\begin{aligned} \text{sh } x \text{ ch } y + \text{sh } y \text{ ch } x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \text{sh}(x + y). \end{aligned}$$

### Задачи

1. Докажете (като се ползвате например от равенствата (4)), че функцията  $\text{sh } x$  е нечетна, а функцията  $\text{ch } x$  е четна, т. е.

$$\text{sh}(-x) = -\text{sh } x, \quad \text{ch}(-x) = \text{ch } x.$$

2. Докажете, че

$$\operatorname{ch} x \geq 1.$$

3. Докажете (като се ползвате например от равенствата (4)), че

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

4. Докажете формулите

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \\ \operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \\ 1 + \operatorname{ch} x &= 2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}, \\ -1 + \operatorname{ch} x &= 2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

5. Докажете, че при всички стойности на  $x$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \\ \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

## § 6. Логаритмична функция

Със символа  $\ln x$  (четете „естествен логаритъм  $x^{\text{e}}$ “, или по-кратко — „логаритъм  $x^{\text{e}}$ “) се означава число  $y$ , което удовлетворява уравнението

$$(1) \quad x = e^y.$$

Това уравнение сигурно няма решение, когато  $x \leq 0$ , защото, както знаем, стойностите на показателната функция  $e^y$  са съществено положителни, както и да избираме  $y$ . И така символът  $\ln x$  не е дефиниран нито при отрицателни стойности на  $x$ , нито при  $x = 0$ . Както ще видим, при  $x > 0$  уравнението (1) има едно и само едно решение. И наистина ние знаем, че показателната функция  $e^y$  расте неограничено, когато  $y$  расте неограничено. Ето защо, след като е избрано едно число  $x_0 > 0$ , ние можем да намерим достатъчно голямо число  $y_1$ , за което

$$x_0 < e^{y_1}.$$

От друга страна, показателната функция  $e^y$  клони към нула когато  $y$  дивергира към  $-\infty$ . Това ни дава право да твърдим, когато избраното число  $x_0$  е съществено положително, че може да се намери число  $y_2$ , което удовлетворява неравенството

$$e^{y_2} < x_0.$$

Разглеждаме затворения интервал  $[y_2, y_1]$ . В него функцията  $e^y$  е непрекъснатата (защото тя е непрекъсната навсякъде). В единия край на този интервал стойността на функцията  $e^y$  е по-малка от  $x_0$ , а в другия е по-голяма от  $x_0$ . Като вземем пред вид една теорема за непрекъснатите функции, заключаваме, че има поне една точка  $y_0$  в интервала  $[y_2, y_1]$ , която удовлетворява уравнението

$$(2) \quad x_0 = e^{y_0}.$$

Повече от едно решение това уравнение не може да има. И наистина, ако допуснем, че  $\eta_1$  и  $\eta_2$  са две решения на уравнението (2), можем да приложим теоремата на Рол за интервала  $[\eta_1, \eta_2]$  (тъй като  $e^{\eta_1} = e^{\eta_2} = x_0$ ) и въз основа на тази теорема да заключим, че производната  $(e^y)' = e^y$  се анулира поне за една стойност на  $y$ . А ние знаем, че показателната функция никъде не се анулира. С това достигнахме до противоречие, което се дължи на допускането, че уравнението (2) има повече от едно решение.

И така ние доказахме, че символът  $\ln x$  е еднозначно дефиниран при всички *съществено* положителни стойности на  $x$  (това значи, че при всеки избор на положителното число  $x$  уравнението

$$x = e^y$$

има едно и само едно решение). Този символ представлява следователно една функция, добре дефинирана при  $x > 0$ .

Както ще видим, функцията  $\ln x$  е диференцируема във всички точки от дефиниционната си област и

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

(от нейната диференцируемост следва, както знаем, нейната непрекъснатост).

Нека  $x_0$  е едно произволно положително число.

Избираме две произволни редици от положителни числа

$$(3) \quad x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n, \dots,$$

$$(4) \quad x''_1, x''_2, x''_3, \dots, x''_n, \dots,$$

които клонят към  $x_0$  и удовлетворяват неравенствата

$$x'_n \leq x_0 \leq x''_n, \quad x''_n \neq x'_n.$$

Полагаме

$$\ln x'_n = y'_n, \quad \ln x''_n = y''_n.$$

В такъв случай

$$x'_n = e^{y'_n}, \quad x''_n = e^{y''_n}.$$

и следователно

$$(5) \quad \frac{\ln x''_n - \ln x'_n}{x''_n - x'_n} = \frac{y''_n - y'_n}{e^{y''_n} - e^{y'_n}}.$$

Като приложим теоремата за крайните нараствания, получаваме

$$(6) \quad e^{y''_n} - e^{y'_n} = (y''_n - y'_n)e^{\eta_n},$$

където

$$(7) \quad \eta_n = y'_n + \theta_n(y''_n - y'_n), \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Да положим  $e^{\eta_n} = \xi_n$ . В такъв случай равенството (5) добива вида

$$(8) \quad \frac{\ln x''_n - \ln x'_n}{x''_n - x'_n} = \frac{1}{\xi_n}.$$

Като вземем пред вид, че  $e^{y''_n} - e^{y'_n} = x''_n - x'_n > 0$  и  $e^{\eta_n} > 0$ , заключаваме от (6), че  $y'_n < y''_n$ . Оттук с помощта на (7) получаваме  $y'_n < \eta_n < y''_n$  и следователно

$$e^{y'_n} < e^{\eta_n} < e^{y''_n},$$

откъдето

$$(9) \quad x'_n < \xi_n < x''_n.$$

Но редиците (3) и (4) са сходящи и клонят към  $x_0$ ; с помощта на (9) отгук заключаваме, че редицата

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots$$

е също сходяща и клони към  $x_0$ . От друга страна,  $x_0 \neq 0$ . Това ни позволява да твърдим, че редицата с общ член (8) е също сходяща и клони към  $\frac{1}{x_0}$ . С това ние доказахме, че функцията  $\ln x$  е диференцируема в точката  $x_0$  и че нейната производна е равна на  $\frac{1}{x_0}$ .

Ние можем да обобщим формулата

$$(10) \quad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

като се възползуваме от правилото за диференциране на функция от функция по следния начин. Ако функцията  $u(x)$  приема само положителни стойности в някой интервал и в някоя точка от този интервал тя има производна, то функцията

$$(11) \quad y = \ln u(x)$$

също има производна в тази точка и

$$(12) \quad y' = \frac{u'}{u}.$$

Читателят познава много от свойствата на логаритмичната функция. Така  $\ln 1 = 0$ . И наистина символът  $\ln 1$  е добре дефиниран, защото числото 1 е съществено положително. Да положим  $\ln 1 = x$ . От дефиницията на логаритмичната функция имаме  $1 = e^x$ . От друга страна, ние знаем, че  $e^0 = 1$ . Като вземем пред вид, че показателната функция приема всяка своя стойност само веднъж (защото нейната производна никъде не се анулира), заключаваме, че  $x = 0$ . Нека читателят сам докаже, че  $\ln e = 1$ .

Също така без труд се установява, че при всички положителни стойности на  $x$  и  $y$  е в сила равенството

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

И наистина, ако положим  $\ln x = \alpha$  и  $\ln y = \beta$ , имаме

$$\begin{aligned} x &= e^\alpha, \\ y &= e^\beta, \end{aligned}$$

откъдето

$$xy = e^{\alpha+\beta}$$

и най-сетне

$$\ln(xy) = \alpha + \beta = \ln x + \ln y.$$

Аналогично се доказва, че при  $x > 0$  и  $y > 0$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y.$$

**Задачи**

1. Докажете, че при всички положителни стойности на  $x$  и  $y$  е в сила равенството

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y.$$

2. Докажете, че за всички стойности на  $x$  е в сила равенството

$$x = \ln(e^x).$$

3. Докажете, че за всички положителни стойности на  $x$  е в сила равенството

$$x = e^{\ln x}.$$

4. Докажете, че  $\ln x$  дивергира към  $+\infty$ , когато  $x$  дивергира към  $+\infty$ .

5. Докажете, че  $\ln x$  дивергира към  $-\infty$ , когато  $x$  клони към нула (разбира се, чрез стойности, различни от нула).

6. Докажете, че функцията  $\ln x$  е растяща и приема всяка своя стойност само веднъж (понякога, за да изразим това свойство за логаритмичната функция, казваме кратко, че тя е една стриктно растяща функция).

7. Намерете производната на функцията  $y = \ln(x^2 + 1)$ .

*Решение.* Имаме да намерим производната на една функция от вида  $y = \ln u(x)$  (в нашия случай  $u(x) = x^2 + 1$ ). Като използваме правилото за диференциране на логаритмичната функция и на функция от функция, получаваме

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

8. Намерете границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

*Решение.* Както знаем, производната на една функция  $f(x)$  в една точка  $x_0$  се дефинира като граница на отношението

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

когато  $x$  клони към  $x_0$ . Специално ако изберем  $f(x) = \ln(1+x)$  и  $x_0 = 0$ , получаваме

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Като вземем пред вид, че функцията  $f(x) = \ln(1+x)$  е диференцируема при  $x > -1$  и  $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ , заключаваме, че търсената граница съществува и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

9. Намерете границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}.$$

*Решение.* Като имаме пред вид предната задача, заключаваме, че каквато и да е редицата от числа

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots,$$

които принадлежат на дефиниционната област на функцията  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$  и клонят към нула, съответната редица

$$f(\xi_1), f(\xi_2), \dots$$

е сходяща и клони към 1.

Да изберем една редица от числа

$$x_1, x_2, x_3, \dots,$$

които принадлежат на дефиниционната област на функцията

$$\varphi(x) = \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$$

и клонят към нула. Да положим

$$y_n = \sin x_n.$$

В такъв случай  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ . Тъй като  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , но  $x_n \neq 0$ , то при всички достатъчно големи стойности на  $n$  имаме  $\sin x_n \neq 0$ . Това ни дава основание да пишем при достатъчно големи стойности на  $n$

$$\varphi(x_n) = \frac{\ln(1 + y_n)}{y_n} \cdot \frac{\sin x_n}{x_n}.$$

Ние знаем обаче, че

$$\frac{\ln(1 + y_n)}{y_n} \rightarrow 1$$

и

$$\frac{\sin x_n}{x_n} \rightarrow 1.$$

Оттук заключаваме, че функцията  $\varphi(x)$  има граница при  $x \rightarrow 0$  и че

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x} = 1.$$

10. Намерете границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}.$$

*Упътване.*

$$\frac{\ln \cos x}{x^2} = \frac{\ln \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{x^2}.$$

11. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

*Решение.* При  $x \neq 0$

$$a_n = e^{n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)}.$$

Ние знаем, че  $n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = x \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}$  клони към  $x$ , когато  $n$  расте неограничено (вж.

задача 8). Като се възползуваме от непрекъснатостта на показателната функция, намираме  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^x$ . При  $x = 0$  имаме  $a_n = 1$  и следователно  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .



**§ 7. Развиване на логаритмичната функция в степенен ред**

Тук ще си поставим за задача да развием функцията  $f(x) = \ln(1 + x)$  по степените на  $x$ .

Като вземем пред вид, че

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1 + x), \\ f'(x) &= \frac{1}{1 + x}, \\ f''(x) &= \frac{-1}{(1 + x)^2}, \\ f'''(x) &= \frac{1 \cdot 2}{(1 + x)^3}, \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} \frac{(n - 1)!}{(1 + x)^n}, \end{aligned}$$

намираме

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, f'''(0) = 1 \cdot 2, \dots, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n - 1)!$$

и следователно Малкореновият ред на функцията  $f(x) = \ln(1 + x)$  е

$$(1) \quad \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Този степенен ред е сходящ при  $x = 1$  (защо?) и следователно неговият радиус на сходимост не е по-малък от 1. От друга страна, той е разходящ при  $x = -1$  (защо?) и следователно неговият радиус на сходимост не е по-голям от 1. И така редът (1) е сходящ в затворения отлясно и отворения отляво интервал  $-1 < x \leq 1$  и вън от него е разходящ. Поради това ние ще се ограничим при разглеждането на реда (1) само с интервала  $-1 < x \leq 1$ .

Ще докажем, че сумата на реда (1) е равна на  $\ln(1 + x)$  при всички стойности на  $x$ , за които този ред е сходящ. За тази цел разглеждаме формулата на Маклорен

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n,$$

в която представяме остатъчния член  $R_n$  във формата на Коши:

$$R_n = \frac{x^{n+1}(1 - \theta)^n}{n!} f^{n+1}(\theta x) = x^{n+1} \left( \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} \right)^n \cdot \frac{(-1)^n}{1 + \theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Като вземем пред вид, че  $0 < \theta < 1$  и  $-1 < x \leq 1$ , заключаваме, че

$$\frac{1 - \theta}{1 + \theta x} > 0$$

и

$$1 - \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} = \frac{\theta(x + 1)}{1 + \theta x} > 0,$$

т. е.

$$0 < \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} < 1,$$

нещо, което ни дава право да пишем

$$|R_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1 + \theta x}.$$

Ако числото  $x$  се намира във вътрешността на интервала  $(-1, 1)$ , то  $1 + \theta x \geq 1 - |x| > 0$  и следователно

$$|R_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|},$$

откъдето заключаваме, че

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

или, което е същото, както се вижда от дефиницията на понятието сума на един ред,

$$\ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Остана още неразгледан случай  $x = 1$ . Направените досега разсъждения тук не водят до целта. В този случай остатъчният член  $R_n$  ще представим във формата на Лагранж. Така получаваме

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\theta x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}},$$

т. е.

$$|R_n| < \frac{1}{n+1},$$

откъдето  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$  или, което е същото,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Ако в равенството

$$(2) \quad \ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

валидно при  $-1 < x \leq 1$ , заместим  $x$  с  $-x$ , получаваме

$$(3) \quad \ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots,$$

което е валидно при  $-1 \leq x < 1$ .

Ако извадим почленно двете равенства (2) и (3), намираме при  $|x| < 1$

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right).$$

Нека  $n$  е произволно цяло положително число. В такъв случай, ако положим  $x = \frac{1}{2n+1}$ , намираме

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$$

и следователно

$$\ln(n+1) - \ln n = 2 \left[ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right].$$

Тази формула ни позволява да пресметнем последователно логаритмите (при основа  $e$ ) на целите положителни числа с всяка желана точност. Така например при  $n = 1$

$$\ln 2 = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9^2} + \dots \right)$$

и пр.

### § 8. Дефиниция на степен, показателят на която не е цяло число

Ние дефинирахме степента  $e^x$  при всички стойности на  $x$ . Нека обаче изрично припомним, че степента  $a^x$  е дефинирана за нас при  $a \neq e$  само когато  $x$  е цяло число. Сега ще дефинираме общо степента  $a^x$  при произволни съществено положителни стойности на основата  $a$  и при произволни реални стойности на показателя  $x$ , като под  $a^x$  при  $a > 0$  се условим да разбираме  $e^{x \ln a}$ . Изразът  $e^{x \ln a}$  има смисъл при всички стойности на  $x$ , щом  $a > 0$ , защото логаритмичната функция е дефинирана при всички съществено положителни стойности на аргумента, а показателната функция  $e^u$  е дефинирана при всички стойности на показателя  $u$ . Специално при  $a = e$  имаме  $\ln a = 1$  и следователно дефинираната сега функция  $a^x$  съвпада с дефинираната в § 1 функция  $e^x$ , когато  $a = e$ . При цели положителни стойности на  $n$  получаваме въз основа на новата дефиниция

$$a^n = e^{n \ln a} = e^{\ln a} e^{\ln a} \dots e^{\ln a} = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ пъти}};$$

когато  $n$  е цяло отрицателно число, то числото  $m = -n$  е цяло положително и

$$a^n = e^{n \ln a} = e^{-m \ln a} = \frac{1}{e^{m \ln a}} = \frac{1}{a^m}$$

и най-сетне

$$a^0 = e^{0 \ln a} = e^0 = 1.$$

И тъй като в случая, когато  $a = e$  и показателят  $x$  е произволен, така и в случая, когато показателят  $x$  е цяло число, но основата  $a$  е съществено положително число, понятието степен, което ние въведохме сега, се редуцира на понятието степен в познатия ни смисъл от по-рано. При новата дефиниция обаче степента  $a^x$  има смисъл при всички съществено положителни стойности на  $a$  и при всички реални стойности на  $x$ . От това гледище понятието, което ние въвеждаме сега, е обобщение на познатото от по-рано понятие степен с положителна основа.

Като изхождаме от дефиниционното равенство

$$(1) \quad a^x = e^{x \ln a},$$

заклучаваме веднага, че

$$\begin{aligned} a^x a^y &= a^{x+y}, \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}, \\ (a^x)^y &= a^{xy}, \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x}, \\ a^1 &= a, \\ a^0 &= 1. \end{aligned}$$

Дефиниционното равенство (1) ни учи също така, че функцията  $a^x$  е диференцуема при всички стойности на  $x$  и

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Ние знаем, че  $\sqrt[n]{a}$  се дефинира при цели положителни стойности на  $n$  и  $a \geq 0$  като неотрицателен корен на уравнението

$$(2) \quad x^n = a.$$

Това уравнение не може да има повече от един неотрицателен корен, защото в противен случай бихме заключили с помощта на теоремата на Рол, че

има съществено положителна стойност на аргумента, за която се анулира производната  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , нещо, което не е вярно. В настоящите лекции ние имахме случай вече няколко пъти да разглеждаме както този въпрос за единственост, така и съответния въпрос за съществуване на неотрицателно решение на уравнението (2). Сега ние имаме възможност да установим с други средства съществуването на интересувашото ни решение. При  $a = 0$  уравнението очевидно има решение — то е  $x = 0$ . При  $a > 0$  уравнението (2) също има решение — то е  $x = a^{\frac{1}{n}}$ , както това се вижда от веригата равенства

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a.$$

По този начин обобщеното понятие степен ни даде възможност да установим съществуването на  $\sqrt[n]{a}$  при всички неотрицателни стойности на  $a$ . Като вземем пред вид, че дефиницията на  $\sqrt[n]{a}$  е еднозначна, заключаваме, че

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

От дефиниционното равенство (1) се получава веднага степенното развитие на функцията  $a^x$  по следния начин:

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{x}{1!} \ln a + \frac{x^2}{2!} (\ln a)^2 + \dots + \frac{x^n}{n!} (\ln a)^n + \dots$$

### Задачи

1. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n = n \left( \sqrt[n]{a} - 1 \right).$$

*Решение.* Като изхождаме от дефиницията на понятието производна, заключаваме, че изразът

$$\frac{a^h - 1}{h}$$

има граница при  $h \rightarrow 0$  и тя е равна на стойността на производната на функцията  $a^x$  при  $x = 0$ , т. е. на  $\ln a$  (тъй като  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ). Като дадем на  $h$  редицата от стойности  $h_n = \frac{1}{n}$ , които клонят към нула, получаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ln a.$$

2. Да се намери границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

*Решение.*

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}.$$

Като вземем под внимание, че

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

(вж. зад. 8, § 6), заключаваме въз основа на непрекъснатостта на показателната функция, че търсената граница съществува и

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

3. Да се намери границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}.$$

4. Да се намери границата на редицата с общ член

$$a_n = \left( \frac{\sqrt[n]{a} + 1}{2} \right)^n,$$

където  $a > 0$ .

*Упътване.* Положете

$$\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$$

и използвайте представянето

$$\ln a_n = \frac{\ln a}{2} \cdot \frac{\ln \left( 1 + \frac{\alpha_n}{2} \right)}{\frac{\alpha_n}{2}} \frac{\alpha_n}{\ln(1 + \alpha_n)}.$$

*Отговор.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{a}.$$

## § 9. Десетични логаритми и тяхната връзка с неперовите логаритми

Логаритмите, които ние въведохме в § 6 от част II на този курс, се наричат неперови или естествени логаритми. Тяхната основа представлява числото  $e$ . В практиката се употребява обаче логаритмична система при основа 10. Изобщо под  $\log_a b$  се разбира решение на уравнението

$$(1) \quad b = a^x.$$

Като представим уравнението (1) във вида

$$b = e^{x \ln a}$$

и логаритмуваме двете му страни при основа  $e$ , получаваме

$$\ln b = x \ln a$$

или

$$(2) \quad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Ние знаем как се пресмятат неперовите логаритми и числата. Равенството (2) ни позволява, след като сме изчислили неперовите логаритми, да пресметнем логаритмите на числата при произволна положителна основа  $a \neq 1$ . Специално при  $a = 10$  имаме

$$\log_{10} b = \frac{\ln b}{\ln 10}.$$

Числото

$$\mu = \frac{1}{\ln 10} = 0,43429448 \dots$$

се нарича модул на десетичните логаритми.

### § 10. Функцията $x^n$ , когато показателят $n$ не е цяло число

Когато показателят  $n$  не е цяло число, ние дефинирахме функцията  $x^n$  само при  $x > 0$ . Като изхождаме от дефиниционното равенство

$$x^n = e^{n \ln x},$$

заклучаваме, че функцията  $x^n$  е диференцуема при  $x > 0$  и

$$(x^n)' = (e^{n \ln x})' = e^{n \ln x} (n \ln x)' = e^{n \ln x} \frac{n}{x} = \frac{nx^n}{x} = nx^{n-1}.$$

Тази формула ни е вече известна, когато  $n$  е цяло число. Тя е валидна, както виждаме, и тогава, когато числото  $n$  не е цяло. Като пример да намерим производната на функцията  $y = \sqrt{x}$ . Тъй като  $y = x^{\frac{1}{2}}$ , то

$$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2 \sqrt{x}}.$$

Ние, разбира се, можем да обобщим формулата

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

като се възползуваме от теоремата за диференциране на функция от функция. Така, ако функцията  $u(x)$  е диференцуема и приема положителни стойности, то функцията  $[u(x)]^n$  е също диференцуема и

$$(1) \quad (u^n)' = nu^{n-1}u'.$$

Като пример да намерим производната на функцията  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ . Според (1) получаваме

$$y' = \left[ (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (x^2 + 1)' = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

В заключение нека отбележим, че функцията  $x^n$  е монотонно растяща при  $n \geq 0$  и е монотонно намаляваща при  $n \leq 0$ . Това се вижда от равенството  $x^n = e^{n \ln x}$ , като се вземе пред вид монотонността на показателната и на логаритмичната функция.

### § 11. Нютонов бином

Читателят знае, че при цели неотрицателни стойности на  $m$  е в сила формулата\*

$$(1+x)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \dots + \binom{m}{m}x^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}x^k.$$

Това развитие може да се представи във вид на безкрайния ред

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k}x^k,$$

защото

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\dots 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1)\dots (m-k+1)}{k!} = 0$$

при  $k > m$ . Ние ще изучим сега степенния ред

$$(1) \quad \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots$$

при предположение, че  $m$  не е цяло неотрицателно число. В този случай редът (1) е действително безкраен. Както ще видим, неговият радиус на сходимост е равен на единица. И наистина, като приложим критерия на Даламбер за реда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{m}{k}x^k \right|,$$

\* Нека припомним, че по дефиниция  $\binom{m}{0} = 1$  и

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}.$$



получаваме\* при  $x \neq 0$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left| \binom{m}{k} x^k \right| : \left| \binom{m}{k-1} x^{k-1} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|m-k+1|}{k} |x| = |x|,$$

откъдето заключаваме, че редът (1) е сигурно сходящ (дори абсолютно) при  $|x| < 1$ . Напротив, при  $|x| > 1$  този ред е разходящ.

И наистина редът

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{m}{k} x^k \right|}$$

е сходящ при  $|x| > 1$ , както това се вижда с помощта на критерия на Даламбер, и следователно общият му член клони към нула. От това заключаваме, че общият член на реда (1) расте по абсолютна стойност неограничено, нещо, което осигурява неговата разходимост. От направените разсъждения е ясно, че радиусът на сходимост на реда (1) е равен на единица.

Да означим с  $f(x)$  сумата на реда (1). Функцията  $f(x)$  е дефинирана във всички точки, в които редът (1) е сходящ. Тази функция е сигурно диференцируема във всички вътрешни точки на интервала  $(-1, 1)$  и при това

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{m}{k} x^{k-1}.$$

Оттук намираме

$$\begin{aligned} (1+x)f'(x) &= (1+x) \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{m}{k} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (k+1) \binom{m}{k+1} + k \binom{m}{k} \right] x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (k+1) \frac{m(m-1)\dots(m-k)}{(k+1)!} + k \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} \right] x^k \\ &= m \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k = mf(x) \end{aligned}$$

и следователно

$$(1+x)f'(x) = mf(x).$$

\* Нека припомним, че  $m$  в разглеждания случай не е цяло неотрицателно. От това следва, че членовете на реда (1) са различни от нула при  $x \neq 0$  и следователно ние можем да делим с тях.

От така полученото уравнение вече не е трудно да се определи функцията  $f(x)$ . За тази цел разглеждаме помощната функция

$$g(x) = \frac{f(x)}{(1+x)^m}.$$

Тази функция е добре дефинирана в отворения интервал  $(-1, 1)$ , защото  $1+x > 0$ .

Очевидно имаме

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x)(1+x)^m - m(1+x)^{m-1}f(x)}{(1+x)^{2m}} \\ &= \frac{mf(x)(1+x)^{m-1} - m(1+x)^{m-1}f(x)}{(1+x)^{2m}} = 0, \end{aligned}$$

което ни учи, че функцията  $g(x)$  е една константа. И така  $g(x) = g(0)$ . Като вземем пред вид, че

$$g(0) = \frac{f(0)}{1} = \binom{m}{0} = 1,$$

намираме

$$f(x) = (1+x)^m$$

или, което е същото,

$$(2) \quad (1+x)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots$$

И така формулата (2), която ние познавахме при цели неотрицателни стойности на  $m$ , се оказва валидна при всички стойности на  $m$ , когато  $|x| < 1$ .

До същия резултат достигаем, като развием функцията

$$(1+x)^m$$

в Маклоренов ред:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots$$

За тази цел намираме най-напред

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

откъдето

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1)$$

и следователно интересувашото ни развитие добива вида

$$1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Ние ще установим, че това развитие е сходящо и представлява функцията  $(1+x)^m$  при  $|x| < 1$ , като представим остатъчния член във формата на Коши:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x) \\ &= \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} m(m-1)\dots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1} \\ &= x^{n+1} \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!} \left( \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n (1+\theta x)^{m-1}. \end{aligned}$$

Като вземем пред вид, че  $|x| < 1$  и  $0 < \theta < 1$ , намираме

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$$

и следователно

$$|R_n| \leq |x|^{n+1} \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!} \right| (1+\theta x)^{m-1}.$$

От друга страна,

$$1 - |x| \leq 1 + \theta x \leq 1 + |x|$$

и следователно множителят  $(1+\theta x)^{m-1}$  притежава горна граница, която не зависи от  $n$ . В това можем да се убедим така. Да фиксираме  $x$  и да разгледаме функцията  $t^{m-1}$  в крайния и затворен интервал  $1 - |x| \leq t \leq 1 + |x|$ . Тази функция е дефинирана и непрекъсната в избрания интервал (защото  $1 - |x| > 0$ ) и следователно е ограничена. Да означим с  $M$  една нейна горна граница. В такъв случай

$$(1+\theta x)^{m-1} \leq M$$

и следователно

$$|R_n| \leq |x|^{n+1} \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!} \right| M.$$

От друга страна, редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{n+1} \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!} \right|$$

е сходящ при  $|x| < 1$ , както това се установява с критерия на Даламбер при  $x \neq 0$  (при  $x = 0$  това е тривиално). Оттук заключаваме, че

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^{n+1} \left| \frac{m(m-1) \dots (m-n)}{n!} \right| = 0$$

и следователно

$$\lim R_n = 0,$$

защото  $M$  не зависи от  $n$ .

## § 12. Сравняване растежа на функциите $a^x$ , $x^n$ и $\ln x$

Нека  $a > 1$  и  $n > 0$ . В такъв случай трите функции

$$f(x) = a^x, \quad g(x) = x^n, \quad h(x) = \ln x$$

растат неограничено, когато  $x$  расте неограничено. И наистина колкото и голямо да е положителното число  $A$ , имаме

$$\begin{aligned} a^x > A & \quad \text{при} \quad x > \frac{\ln A}{\ln a}, \\ x^n > A & \quad \text{при} \quad x > A^{\frac{1}{n}}, \\ \ln x > A & \quad \text{при} \quad x > e^A. \end{aligned}$$

Ще покажем обаче, че от разглежданите три функции показателната функция расте най-бързо, а логаритмичната функция расте най-бавно. Това значи, че отношенията

$$\frac{a^x}{x^n} \quad \text{и} \quad \frac{x^n}{\ln x}$$

растат неограничено заедно с  $x$ . Нека  $k$  е едно цяло число, по-голямо от  $n$ . В такъв случай при  $x > 0$  (и  $a > 1$ ,  $n > 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{a^x}{x^n} &= \frac{e^{x \ln a}}{x^n} = \frac{1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 (\ln a)^2}{2!} + \dots + \frac{x^k (\ln a)^k}{k!} + \dots}{x^n} \\ &\geq \frac{x^k (\ln a)^k}{x^n} = x^{k-n} \frac{(\ln a)^k}{k!} \end{aligned}$$

и следователно отношението  $\frac{a^x}{x^n}$  действително расте неограничено, когато  $x$  расте неограничено.

От друга страна, при  $x > 1$

$$\frac{x^n}{\ln x} = \frac{e^{n \ln x}}{\ln x} = \frac{1 + \frac{n \ln x}{1!} + \frac{(n \ln x)^2}{2!} + \dots}{\ln x} \geq \frac{\frac{n^2 \ln^2 x}{2!}}{\ln x} = \frac{n^2}{2} \ln x.$$

Този резултат ни учи, че частното  $\frac{x^n}{\ln x}$  също расте неограничено, когато  $x$  расте неограничено. С това всичко е доказано.

### § 13. Обратни функции

Нека  $f(t)$  е една функция, дефинирана в някое точково множество  $M$ . Да означим с  $N$  множеството от функционалните стойности на  $f(t)$ . Ще казваме, че  $\varphi(x)$  е обратна функция\* на  $f(t)$ , ако

- 1) дефиниционната област на  $\varphi(x)$  е  $N$ ;
- 2) стойностите на  $\varphi(x)$  принадлежат на  $M$ ;
- 3) при всички стойности на  $x$  от  $N$  е изпълнено равенството

$$(1) \quad f[\varphi(x)] = x.$$

Не е трудно да се убедим, че всяка функция има поне една обратна. И наистина да разгледаме уравнението

$$(2) \quad f(t) = x.$$

При всяко  $x$  от  $N$  това уравнение се удовлетворява при поне едно значение на  $t$  от  $M$ , защото всяко число от  $N$  е функционална стойност на  $f(t)$ . Да изберем при всяко  $x$  от  $N$  кое да е от решенията на (2) и да го означим с  $\varphi(x)$ . По такъв начин ние получаваме функция  $\varphi(x)$ , която е дефинирана навсякъде в  $N$ , приема стойности от  $M$  и удовлетворява условието

$$f(\varphi(x)) = x,$$

т. е. ние намерихме една обратна функция на  $f(t)$ .

Читателят вижда, че третото условие изразява главния момент на дефиницията. Второто условие се налага само, за да можем да образуваме  $f(\varphi(x))$ , а първото условие е поставено, за да бъде дефиниционната област на  $\varphi(x)$  по възможност по-голяма.

Да изясним смисъла на дефиницията с няколко примера.

\*Ние предпочитаме в случая да означаваме аргументите на  $f(t)$  и  $\varphi(x)$  с различни букви.

Да разгледаме функцията  $f_1(t) = t^2$ , дефиниционната област  $M_1$  на която е съставена от всичките реални числа. Множеството  $N_1$  от функционалните стойности в случая представлява множеството на неотрицателните числа. Да разгледаме функцията  $\varphi_1(x) = \sqrt{x}$ , дефиниционната област на която е  $N_1$ . Стойностите на тази функция, разбира се, принадлежат на  $M_1$ , защото  $M_1$  съдържа всичките реални числа. Най-сетне имаме

$$f_1[\varphi_1(x)] = (\sqrt{x})^2 = x,$$

т. е.  $\sqrt{x}$  е една обратна функция на функцията  $f_1(t)$ . С това не се изчерпват обаче всичките обратни функции на  $f_1(t)$ . И наистина нека  $\varepsilon(x)$  е произволна функция, дефинирана при  $x \geq 0$ , която приема само стойностите 1 или  $-1$  (при едни стойности на  $x$  можем да имаме  $\varepsilon(x) = 1$ , а при други  $\varepsilon(x) = -1$ ). Читателят лесно ще се убеди, че функцията  $\varepsilon(x)\sqrt{x}$ , дефинирана по този начин при всички неотрицателни стойности на  $x$ , е също обратна функция на  $f_1(t)$ .

Да разгледаме друг пример. Нека дефинираме  $f_2(t)$  с условието  $f_2(t) = t^2$  при неотрицателни стойности на  $t$  (при  $t < 0$  ние не дефинираме  $f_2(t)$ ). Тази функция се различава от току-що разглежданата функция  $f_1(t)$  по дефиниционната си област. Не е трудно да се види, че функцията  $\sqrt{x}$  е обратна на функцията  $f_2(t)$ . Функцията  $f_2(t)$  обаче няма друга обратна функция (читателят си спомня, че функцията  $f_1(t)$  имаше безбройно много обратни). И наистина нека  $g(x)$  е една обратна функция на  $f_2(t)$ . Това значи, че функцията  $g(x)$  е дефинирана при всички неотрицателни стойности на аргумента си, приема неотрицателни стойности (защото стойностите ѝ трябва да принадлежат на дефиниционната област на  $f_2(t)$ ) и удовлетворява уравнението

$$[g(x)]^2 = x.$$

Ние обаче знаем, че при всеки избор на неотрицателното число  $x$  единственото *неотрицателно* число  $y$ , което удовлетворява уравнението

$$y^2 = x,$$

е числото  $\sqrt{x}$ , т. е.  $g(x) = \sqrt{x}$ .

Като трети пример да разгледаме функцията  $f_3(t) = e^t$ , дефинирана с това равенство при всички реални стойности на  $t$ . Множеството  $N_3$  от функционалните стойности на  $f_3(t)$  е съставено от всички съществено положителни числа. Функцията  $\varphi_3(x) = \ln x$ , дефинирана по този начин при всички съществено положителни стойности на  $x$ , е една обратна функция на  $f_3(t)$ ,

защото дефиниционната област на  $\varphi_3(x)$  е  $N_3$ , никоя от стойностите на  $\varphi_3(x)$  не напуска дефиниционната област на  $f_3(t)$  и най-сетне

$$f_3[\varphi_3(x)] = e^{\ln x} = x.$$

Не е трудно да се види, че  $f_3(t)$  няма друга обратна функция. Казваме, че една функция  $f(t)$  е *обратима*, когато тя притежава *само една* обратна функция. Така функциите  $f_2(t)$  и  $f_3(t)$ , които ние разгледахме току-що като примери, са обратими. Напротив, функцията  $f_1(t)$  не е обратима.

Ако функцията  $f(t)$  е обратима и  $\varphi(x)$  е нейната обратна функция, то при всички стойности на  $t$  от дефиниционната област на  $f(t)$  имаме

$$(3) \quad \varphi[f(t)] = t.$$

И наистина да допуснем, че в някоя точка  $t_0$  от дефиниционната област на  $f(t)$  имаме

$$\varphi[f(t_0)] \neq t_0.$$

Да положим за краткост

$$f(t_0) = x_0$$

и да означим с  $M$  и  $N$  дефиниционните области съответно на  $f(t)$  и  $\varphi(x)$ . Очевидно  $x_0$  е една точка от  $N$ , защото  $N$  е същевременно множеството от функционалните стойности на  $f(t)$ . Да разгледаме помощната функция  $\psi(x)$ , дефинирана в множеството  $N$  по следния начин:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \varphi(x) \quad \text{при } x \neq x_0 \\ \psi(x) &= t_0 \quad \text{при } x = x_0. \end{aligned}$$

Стойностите на функцията  $\psi(x)$  не напускат  $M$ , защото, от една страна,  $t_0$  принадлежи на  $M$ , а, от друга страна, стойностите на  $\varphi(x)$  също принадлежат на  $M$ . Не е трудно да се види, че функцията  $\psi(x)$  е една обратна функция на  $f(t)$ . И наистина след всичко казано досега е достатъчно да покажем, че

$$f(\psi(x)) = x$$

при всички стойности на  $x$  от  $N$ . Това може да се види така: при  $x \neq x_0$  имаме

$$f(\psi(x)) = f(\varphi(x)) = x,$$

а при  $x = x_0$  имаме

$$f(\psi(x_0)) = f(t_0) = x_0.$$

И така функцията  $\psi(x)$  е действително една обратна функция на  $f(t)$ . Тя обаче сигурно е различна от  $\varphi(x)$ , защото

$$\begin{aligned}\psi(x_0) &= t_0, \\ \varphi(x_0) &= \varphi(f(t_0)) \neq t_0,\end{aligned}$$

нещо, което противоречи на допускането, че функцията  $f(t)$  е обратима. С това е показано, че равенството (3) е наистина вярно при всяко  $t$  от  $M$ .

Една обратима функция  $f(t)$  не може да приема никоя своя стойност повече от един път. И наистина равенството (3) ни учи, че от  $f(t_1) = f(t_2)$  следва  $t_1 = t_2$ .

Обратно, нека  $f(t)$  приема всяка своя стойност само веднъж и нека  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  са две обратни функции на  $f(t)$ . В такъв случай

$$\begin{aligned}f[\varphi_1(x)] &= x, \\ f[\varphi_2(x)] &= x\end{aligned}$$

и следователно

$$f[\varphi_1(x)] = f[\varphi_2(x)].$$

Дадено е обаче, че функцията  $f(t)$  не може да приема равни стойности при различни стойности на аргумента си. Оттук заключаваме, че

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x),$$

т. е. че функцията  $f(t)$  има само една обратна функция.

След всичко казано ние можем да дефинираме понятието обратима функция така: *една функция се нарича обратима, когато тя приема всяка своя стойност само веднъж*. Тази дефиниция е еквивалентна на дефиницията, от която тръгнахме, но се прилага по-често и следователно е по-важна.

Множеството  $M'$  от стойностите на обратната\* функция  $\varphi(x)$  на една обратима функция  $f(t)$  съвпада с дефиниционната област  $M$  на  $f(t)$ . Това се вижда от равенството (3). И наистина, каквато и точка  $t_0$  да вземем от  $M$ , тя представлява функционална стойност на  $\varphi(x)$  при  $x = f(t_0)$ . Този резултат и равенството (3) ни учат, че ако функцията  $f(t)$  е обратима и  $\varphi(x)$  е обратната ѝ функция, то  $f(t)$  е обратна на  $\varphi(x)$ .

Ако на всяка точка  $t_0$  от дефиниционната област  $M$  на една функция  $f(t)$  съпоставим точката  $f(t_0)$  от съвкупността  $N$  на функционалните стойности на  $f(t)$ , получаваме еднозначно съответствие, което се нарича изображение

\*Засега е ясно, че  $M'$  е едно подмножество на  $M$ .



на  $M$  върху  $N$ . Специално, ако функцията  $f(t)$  е обратима, при това съответствие различни точки се изобразяват върху различни точки. Такова съответствие се нарича обратимо. И така *едно съответствие се нарича обратимо, когато при него различни точки се изобразяват върху различни точки.*

#### Задачи

1. Нека  $f(t)$  е произволна функция. Да се докаже, че всяка нейна обратна функция е обратима (независимо от това, дали  $f(t)$  е обратима, или не).

2. Нека  $f(t)$  е една обратима функция и  $\varphi(x)$  е обратната функция на  $f(t)$ . Нека  $t_0$  е произволна точка от дефиниционната област на  $f(t)$  и нека  $x_0 = f(t_0)$ . Да се докаже, че  $t_0 = \varphi(x_0)$ .

3. Докажете, че функцията  $\operatorname{sh} t$ , разглеждана върху цялата ос  $t$ , е обратима и нейната обратна функция е

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

4. Докажете, че функцията  $\operatorname{ch} t$ , разглеждана при  $t \geq 0$ , е обратима и нейната обратна функция е

$$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

където  $x \geq 1$ .

### § 14. Обратни функции на непрекъснати функции

Нека функцията  $f(t)$  е дефинирана и непрекъсната в едно компактно множество  $M$ . Ние знаем, че в такъв случай множеството  $N$  от нейните функционални стойности е също тъй компактно.

**Теорема.** *Ако функцията  $f(t)$  е непрекъсната в едно компактно множество  $M$  и обратима в него, то обратната ѝ функция  $\varphi(x)$  е също тъй непрекъсната във всички точки от дефиниционната си област.*

И наистина нека  $x_0$  е произволна точка от дефиниционната област на  $\varphi(x)$  и нека

$$(1) \quad x_1, x_2, x_3, \dots$$

е произволна редица от числа, които също принадлежат на дефиниционната област на  $\varphi(x)$  и клонят към  $x_0$ . Трябва да покажем, че редицата

$$\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \dots$$

е сходяща. Полагаме за краткост

$$\varphi(x_0) = t_0 \quad \text{и} \quad \varphi(x_n) = t_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

откъдето

$$f(t_0) = f[\varphi(x_0)] = x_0 \quad \text{и} \quad f(t_n) = f[\varphi(x_n)] = x_n.$$

Числата  $t_n$  лежат в множеството  $M$  и следователно образуват ограничена редица, тъй като множеството  $M$  е компактно. Нашата цел е да покажем, че тази редица е сходяща. За тази цел е достатъчно да покажем, че редицата

$$(2) \quad t_1, t_2, t_3, \dots$$

не може да има друга точка на съгъстяване освен  $t_0$ . И наистина нека  $\tau$  е някоя нейна точка на съгъстяване. В такъв случай ние можем да изберем от редицата (2) подредица

$$t_{m_1}, t_{m_2}, t_{m_3}, \dots \\ m_1 < m_2 < m_3 < \dots,$$

която да клони към  $\tau$ . Точката  $\tau$  обаче лежи в  $M$ , защото множеството  $M$  е компактно. От това следва, че функцията  $f(t)$  е дефинирана и непрекъсната в тази точка. По такъв начин заключаваме, че

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(t_{m_k}) = f(\tau).$$

Редицата

$$x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \dots$$

е обаче подредица на редицата (1) и следователно клони към  $x_0$ . От това заключаваме, че

$$f(\tau) = x_0.$$

Като вземем пред вид, че функцията  $f(t)$  е обратима, получаваме

$$\varphi(x_0) = \varphi(f(\tau)) = \tau$$

или, което е същото,

$$\tau = t_0.$$

С това всичко е доказано.

## § 15. Диференциране на обратните функции

Нека функцията  $f(t)$  е дефинирана, непрекъсната и обратима в едно компактно множество  $M$ . Да означим с  $\varphi(x)$  обратната ѝ функция. Нека  $t_0$  е точка от  $M$ , във всяка околност на която има точки от  $M$ , различни от  $t_0$ . Да положим  $f(t_0) = x_0$ . В такъв случай във всяка околност на точката  $x_0$  има точки от дефиниционната област на  $\varphi(x)$ , които са различни от  $x_0$ . За да се убедим в това, достатъчно е да изберем редица от точки, които са различни от  $t_0$ ,

принадлежат на  $M$  и клонят към  $t_0$ . Функцията  $f(t)$  изобразява тези точки в точки от дефиниционната област на  $\varphi(x)$ , които са различни от  $x_0$  и клонят към  $x_0$ .

Нека (освен изброеното по-горе) функцията  $f(t)$  има производна в точката  $t_0$  и нека тази производна е различна от нула. При тези предположения функцията  $\varphi(x)$  притежава производна в точката  $x_0$  и

$$\varphi'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)}.$$

И наистина нека  $x_0 + h$  е произволна точка от дефиниционната област на  $\varphi(x)$ , която е различна от  $x_0$ . Да положим

$$k = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0).$$

Очевидно  $k \neq 0$ , защото в противен случай бихме имали

$$x_0 = f[\varphi(x_0)] = f[\varphi(x_0 + h)] = x_0 + h,$$

което не е вярно, защото  $h \neq 0$ . Поради непрекъснатостта на функцията  $\varphi(x)$  (която ние установихме в предния параграф) заключаваме, че  $k$  клони към нула, когато  $h$  клони към нула.

По-нататък имаме

$$\varphi(x_0) = \varphi(f(t_0)) = t_0$$

и следователно

$$f(t_0 + k) = f[\varphi(x_0) + k] = f[\varphi(x_0 + h)] = x_0 + h = f(t_0) + h.$$

Оттук получаваме

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \frac{k}{f(t_0 + k) - f(t_0)} = \frac{1}{\frac{f(t_0 + k) - f(t_0)}{k}}.$$

Като вземем под внимание, че изразът

$$\frac{f(t_0 + k) - f(t_0)}{k}$$

притежава граница, когато  $k$  клони към нула, и че тази граница е различна от нула, заключаваме, че изразът

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$$

също притежава граница, когато  $h$  клони към нула, т. е. функцията  $\varphi(x)$  е диференцируема в точката  $x_0$ , и

$$\varphi'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)}.$$

### § 16. Обратни кръгови функции

Ние дефинирахме функцията  $\sin t$  при всички реални стойности на  $t$ . Тази функция не е обратима, защото е периодична и следователно приема всяка своя стойност безбройно много пъти. Напротив, ако разгледаме функцията

$$\varphi(t) = \sin t$$

само в интервала  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , то получаваме вече една обратима функция. И наистина, ако допуснем, че функцията  $\varphi(t)$  приема в две различни точки една и съща стойност, заключаваме с помощта на теоремата на Рол, че производната

$$\varphi'(t) = \cos t$$

се анулира поне за една вътрешна точка на интервала  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Това обаче не е вярно, защото от  $\cos t = 0$  получаваме  $\cos |t| = 0$  (поради четността на функцията  $\cos t$ ) и следователно  $|t| \geq \frac{\pi}{2}$  (защото  $\frac{\pi}{2}$  е най-малкият положителен корен на уравнението  $\cos t = 0$ ). И така функцията  $\varphi(t)$  приема всяка своя стойност само веднъж и следователно е обратима. Единствената ѝ обратна функция се бележи със знака

$$\arcsin x$$

(четете „аркус синус икс“).

Дефиниционната област на функцията  $\arcsin x$  представлява затвореният интервал  $[-1, 1]$ , защото, както знаем, тази дефиниционна област не е нищо друго освен множеството от функционалните стойности на функцията  $\varphi(t) = \sin t$ .

Функцията

$$\arcsin x$$

удовлетворява неравенствата

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2},$$

защото стойностите ѝ принадлежат на дефиниционната област на функцията  $\varphi(t)$ .

Най-сетне при всички стойности на  $x$  от затворения интервал  $[-1, 1]$  имаме

$$(1) \quad \sin(\arcsin x) = x,$$

както това се вижда от дефиницията на понятието обратна функция. Нека припомним тук, че ние доказахме в началото на този параграф, че не може да има повече от едно число  $t$ , което да удовлетворява равенството

$$(2) \quad \sin t = x$$

и неравенствата

$$(3) \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Въз основа на казаното ние можем да дефинираме понятието  $\arcsin x$  като число  $t$ , което удовлетворява равенството (2) и неравенствата (3). Такова число, както видяхме, има и то е едно единствено, когато  $-1 \leq x \leq 1$ .

Като вземем пред вид, че функцията  $\varphi(t)$  е обратима, заключаваме, че

$$\arcsin(\sin t) = t,$$

когато  $t$  принадлежи на дефиниционната област на  $\varphi(t)$ , т. е. когато

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Теоремата за диференциране на обратните функции ни учи, че функцията  $\arcsin x$  е сигурно диференцируема поне когато  $x \neq \pm 1$ , т. е. когато  $\alpha = \arcsin x \neq \pm \frac{\pi}{2}$ , защото в такъв случай  $\varphi'(\alpha) = \cos \alpha \neq 0$ . За да пресметнем производната ѝ, полагаме  $y = \arcsin x$ , т. е.  $x = \sin y$ . В такъв случай теоремата за диференциране на обратните функции ни дава

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Като вземем пред вид, че  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ , заключаваме, че  $\cos y > 0$  и следователно  $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$  или

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

При  $x = \pm 1$  функцията  $y = \arcsin x$  не е диференцируема. И наистина да положим

$$\varphi(x) = \arcsin x.$$

В такъв случай

$$\sin \varphi(x) = x.$$

Ако допуснем, че функцията  $\varphi(x)$  е диференцируема при  $x = \pm 1$ , то като диференцираме по правилото за диференциране на функция от функция, намираме

$$\cos \varphi(\pm 1) \cdot \varphi'(\pm 1) = 1,$$

което не е вярно, защото  $\varphi(\pm 1) = \arcsin(\pm 1) = \pm \frac{\pi}{2}$  и следователно  $\cos \varphi(\pm 1) = \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$ , т. е.

$$\cos \varphi(\pm 1) \cdot \varphi'(\pm 1) = 0.$$

По подобен начин се дефинира функцията

$$y = \arccos x$$

(четете „аркус косинус  $x$ “) като обратна функция на функцията  $\cos t$ , разглеждана в интервала  $0 \leq t \leq \pi$ , или, което е същото, като онова решение  $y$  на уравнението

$$\cos y = x,$$

което удовлетворява неравенствата  $0 \leq y \leq \pi$ .

Функцията  $\arccos x$  е дефинирана в затворения интервал  $[-1, 1]$  и стойностите ѝ се намират в интервала  $[0, \pi]$ . Освен това не е трудно да се види, че

$$\cos(\arccos x) = x \quad \text{при} \quad -1 \leq x \leq 1$$

и

$$\arccos(\cos t) = t \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Нека читателят сам обмисли всичките подробности. От правилото за диференциране на обратни функции имаме

$$y' = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Сега ще разгледаме обратната функция на функцията

$$f(t) = \operatorname{tg} t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Функцията  $\operatorname{tg} t$  не е дефинирана при онези стойности на  $t$ , за които  $\cos t = 0$ . Специално тя не е дефинирана при  $t = \pm \frac{\pi}{2}$ . В отворения интервал  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  тя обаче е дефинирана. За нас е важно, че тя е и обратима в този интервал. Читателят лесно ще установи нейната обратимост, като вземе пред вид, че производната ѝ

$$f'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$$

никъде не се нулира. И наистина, ако допуснем, че функцията  $\operatorname{tg} t$  приема някоя своя стойност повече от един път в интервала  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , ще можем да заключим с помощта на теоремата на Рол, че производната  $f'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$  се анулира поне в една точка, което, както вече отбелязахме, не е вярно. Обратната функция на функцията  $\operatorname{tg} t$ , разглеждана при

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

се означава със символа

$$\operatorname{arctg} x$$

(четете „аркус тангенс икс“). Функцията  $\operatorname{arctg} x$  е дефинирана при всички реални стойности на  $x$ , защото нейната дефиниционна област съвпада, както знаем, с множеството от функционалните стойности на функцията  $\operatorname{tg} t$  и следователно не е нищо друго освен множеството от всичките реални числа.

От дефиницията на понятието обратна функция имаме

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$$

при всички стойности на  $x$ . Като вземем пред вид, че функцията  $\operatorname{tg} t$  при  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$  е обратима, заключаваме, че

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = t$$

при всички стойности на  $t$  от интервала  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ .

Ще покажем, че при всички стойности на  $x$  е в сила равенството

$$(4) \quad \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

И наистина да положим

$$\alpha = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

В такъв случай

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ще докажем, че

$$(5) \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Ясно е преди всичко, че  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . Остава да докажем, че  $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$ . Това може да се установи така: ако допуснем, че  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ , получаваме

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1,$$

откъдето

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

или  $x^2 = 1 + x^2$ , което очевидно не е вярно.

Неравенствата (5) ни дават право да образуваме  $\operatorname{tg} t$ . Като вземем пред вид, че  $\cos \alpha > 0$  и следователно  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ , намираме

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} = x.$$

Този резултат и неравенствата (5) ни дават

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha,$$

с което равенството (4) е установено. Това равенство ни учи, че функцията  $\operatorname{arctg} x$  е диференцируема при всяко  $x$  и

$$\begin{aligned} (\operatorname{arctg} x)' &= \left( \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Най-сетне нека читателят сам докаже, че функцията

$$g(y) = \operatorname{ctg} y,$$

разглеждана при  $0 < y < \pi$ , е обратима. Обратната ѝ функция се означава със символа  $\operatorname{arcctg} x$  (четете „аркус котангенс икс“). Нека читателят също сам докаже, че

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x,$$

и от това да извлече заключението, че функцията  $\operatorname{arcctg} x$  е диференцируема за всяко  $x$  и че

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$



### § 17. Пресмятане на числото $\pi$

Ще покажем, че при  $-1 \leq x \leq 1$  имаме

$$(1) \quad \operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

За тази цел разглеждаме функцията

$$(2) \quad \varphi(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Правилото за диференциране на степенни редове ни дава

$$(3) \quad \varphi'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

По такъв начин получаваме геометрична прогресия, чийто радиус на сходимост е 1. Това ни дава право да твърдим, че радиусът на сходимост на реда (2) е също тъй 1. Като пресметнем сумата на геометричната прогресия (3), получаваме

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

По такъв начин функциите  $\operatorname{arctg} x$  и  $\varphi(x)$  имат една и съща производна при  $-1 < x < 1$  и следователно можем да пишем при тези стойности на  $x$

$$\operatorname{arctg} x = \varphi(x) + C,$$

където  $C$  е константа. За да пресметнем стойността на тази константа, достатъчно е да вземем под внимание, че  $\operatorname{arctg} 0 = 0$  и  $\varphi(0) = 0$ . По такъв начин получаваме  $C = 0$  и следователно

$$(4) \quad \operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

при  $-1 < x < 1$ . Ще покажем, че така полученото равенство (4) е вярно и при  $x = 1$ ,  $x = -1$ . Достатъчно е очевидно да се занимаем със случая  $x = 1$ , защото, когато сменим знака на  $x$ , сменя се знакът на  $\operatorname{arctg} x$  и същевременно се сменят знаците на всичките събираеми на реда, който стои от дясната страна на равенството (4). Доказателството ще извършим така. Нека  $0 \leq x < 1$ . В такъв случай знаците на членовете на реда

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

се сменят алтернативно, а редицата

$$\frac{x}{1}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^5}{5}, \dots,$$

монотонно намалявайки, клони към нула. Това ни дава право да пишем (вж. част I, глава II, § 9)

$$\left| \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Да оставим в това неравенство  $x$  да клони към единица. В такъв случай ще получим след граничен преход

$$\left| \operatorname{arctg} 1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n-1} \right| \leq \frac{1}{2n+1},$$

откъдето се вижда че равенството (4) е валидно и при  $x = 1$ .

При  $x = 1$  равенството (4) добива вида

$$(5) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

защото

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

и следователно

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

(докажете сами, че  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ , като изхождате от аналитичната дефиниция на тригонометричните функции). Равенството (5) се нарича формула на Лайбниц. Както забеляза още Нютон, тази формула е крайно неудобна за приближеното пресмятане на числото  $\pi$  поради извънредно бавната ѝ сходимост.

За да получим по-бързо сходящ ред за пресмятане на числото  $\pi$ , полагаме

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{5},$$

откъдето

$$(6) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$$

и

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

От друга страна, при  $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 0$  бихме имали  $\operatorname{tg} \alpha \leq 0$  и следователно

$$(7) \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

защото  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5} > 0$

От равенството (6) получаваме

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{5}{12}.$$

Неравенствата (7) ни дават  $0 < 2\alpha < \pi$ . Като вземем под внимание обаче, че  $\operatorname{tg} 2\alpha > 0$ , намираме

$$0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично получаваме

$$(8) \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{120}{119}$$

и

$$(9) \quad 0 < 4\alpha < \frac{\pi}{2},$$

тъй като

$$0 < 4\alpha < \pi \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} 4\alpha > 0.$$

От равенството (8) намираме

$$\operatorname{tg} \left( 4\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - 1}{\operatorname{tg} 4\alpha + 1} = \frac{1}{239},$$

а от неравенствата (9) получаваме

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < 4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2},$$

откъдето

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

или

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

След като развием  $\operatorname{arctg} \frac{1}{5}$  и  $\operatorname{arctg} \frac{1}{239}$  по формулата (1), намираме

$$(10) \quad \frac{\pi}{4} = 4 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots \right) - \left( \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots \right).$$

Формулата (10) е твърде удобна за приближеното пресмятане на числото  $\pi$ .  
Ето първите няколко десетични знака на това число:

$$\pi = 3,141592653589793238462643383279 \dots$$

### Задачи

1. В § 16 доказахме, че

$$\arcsin(\sin x) = x$$

при  $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ . Вярно ли е това равенство, ако  $|x| > \frac{\pi}{2}$ ?

*Отговор.* Не.

2. Докажете, че  $\arctg(\ctg x) = x$  тогава и само тогава, когато  $0 < x < \pi$ .

3. Докажете, че

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

при  $|x| \leq 1$ .

*Решение.* Полагаме

$$\arcsin x = \alpha.$$

В такъв случай  $x = \sin \alpha$  и  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . Въз основа на това намираме

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\cos^2 \alpha} = |\cos \alpha| = \cos \alpha = \cos(\arcsin x).$$

4. Докажете, че

$$\sin(2 \arcsin x) = 2x \sqrt{1 - x^2} \quad \text{при} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \sin(2 \arcsin x) &= 2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) \\ &= 2 \sin(\arcsin x) \sqrt{1 - [\sin(\arcsin x)]^2} = 2x \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

5. Докажете, че при всяко  $x$

$$\sin(2 \arctg x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

*Решение.*

$$\sin(2 \arctg x) = \frac{2 \sin(\arctg x) \cos(\arctg x)}{\cos^2(\arctg x) + \sin^2(\arctg x)} = \frac{2 \operatorname{tg}(\arctg x)}{1 + (\operatorname{tg}(\arctg x))^2} = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

6. Докажете, че

$$\arctg \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = \arccos x$$

при  $0 < x \leq 1$  и

$$\arctg \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = -\pi + \arccos x$$

при  $-1 \leq x < 0$ .

*Решение.* Полагаме  $\arccos x = \alpha$ . Тогава  $x = \cos \alpha$  и  $0 \leq \alpha \leq \pi$ . Въз основа на това намираме

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \operatorname{arctg} \frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha).$$

При  $0 < x \leq 1$  имаме  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  и следователно

$$(1) \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha$$

или

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \arccos x.$$

Напротив, при  $-1 \leq x < 0$  равенството (1) не е вярно, защото  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ . Обаче, като вземем предвид, че

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha - \pi),$$

получаваме

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(\alpha - \pi)]$$

и тъй като при  $-1 \leq x < 0$  имаме  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ , то

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \pi \leq 0$$

и следователно

$$\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(\alpha - \pi)] = \alpha - \pi$$

или

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -\pi + \arccos x.$$

7. Докажете, че

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{при } 0 \leq x \leq \pi.$$

8. Докажете, че

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } |x| \leq 1.$$

9. Докажете, че

$$2 \arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

10. Докажете, че

$$\arcsin \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 - 2x}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \arcsin x \quad \text{при } |x| \leq 1.$$

11. Докажете, че

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\arcsin x}{2} \quad \text{при } -1 \leq x < 1.$$

12. Докажете, че

$$\arcsin(2x^2 - 1) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - 2 \arcsin x & \text{за } -1 \leq x \leq 0; \\ -\frac{\pi}{2} + 2 \arcsin x & \text{за } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

13. Докажете, че

$$\arccos(4x^3 - 3x) = \begin{cases} 3 \arccos x & \text{при } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 2\pi - 3 \arccos x & \text{при } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -2\pi + 3 \arccos x & \text{при } -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

14. Намерете първата производна на функцията

$$y = \arcsin(2x^2 - 1) \quad \text{при } -1 < x < 0 \quad \text{и при } 0 < x < 1.$$

*Решение.* Имаме да намерим производната на функция от вида  $y = \arcsin u(x)$ . В случая  $u(x) = 2x^2 - 1$ . Съгласно правилото за диференциране на функция от функция имаме  $y' = (\arcsin u)'u'$ , т. е. в нашия специален случай

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (2x^2 - 1)^2}} (2x^2 - 1)' = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 4x^4}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2} \sqrt{1 - x^2}} = \frac{4x}{2|x| \sqrt{1 - x^2}}.$$

При  $0 < x < 1$  имаме  $|x| = x$  и следователно  $y' = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$ . При  $-1 < x < 0$  имаме  $|x| = -x$  и

следователно  $y' = \frac{-2}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

15. Докажете, че функцията

$$f(x) = \arcsin(2x^2 - 1), \quad |x| \leq 1,$$

не е диференцируема при  $x = 0$ .

*Упътване.* Използвайте дефиницията на понятието производна и приложете теоремата за крайните нараствания.

16. Докажете, че

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} &= \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4} & \text{при } x > -1, \\ \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} &= \operatorname{arctg} x + \frac{3\pi}{4} & \text{при } x < -1, \end{aligned}$$

като се сравнят производните на двете страни на това равенство.

*Решение.* Функцията

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$$

не е дефинирана при  $x = -1$ , затова ние ще изучим отделно двата безкрайни интервала  $x > -1$  и  $x < -1$ .

Във всеки един от тези два интервала имаме

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{1 + x^2},$$

откъдето заключаваме, че производната на функцията

$$\varphi(x) = f(x) - \operatorname{arctg} x$$

е нула както в безкрайния интервал  $x > -1$ , така и в безкрайния интервал  $x < -1$ . От това заключаваме, че функцията  $\varphi(x)$  е константа както при  $x > -1$ , така и при  $x < -1$  (тези две константи могат да бъдат различни).

Като вземем предвид, че

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = -\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \frac{3\pi}{4},$$

заключаваме, че  $\varphi(x) = -\frac{\pi}{4}$  при  $x > -1$  и  $\varphi(x) = \frac{3\pi}{4}$  при  $x < -1$ .

17. Докажете, че

$$\arcsin \frac{1}{2} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = \frac{\arcsin x}{2} \quad \text{при } |x| \leq 1,$$

като сравните производните на двете части на това равенство при  $|x| < 1$ .

18. Докажете, че

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \begin{cases} 2 \operatorname{arctg} x & \text{при } x \geq 0, \\ -2 \operatorname{arctg} x & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

като сравните производните на двете части на това равенство при  $x \neq 0$ .

19. Докажете, че

$$\arcsin(2x^2 - 1) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - 2 \arcsin x & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ -\frac{\pi}{2} + 2 \arcsin x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

като сравните производните на двете страни на това равенство при  $|x| < 1$  и  $x \neq 0$ .

20. Докажете, че

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2 \operatorname{arctg} x & \text{при } 1 \leq x, \\ 2 \operatorname{arctg} x & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ -\pi - 2 \operatorname{arctg} x & \text{при } x \leq -1, \end{cases}$$

като сравните производните на двете страни на това равенство при  $|x| \neq 1$ .

21. Докажете, че функциите  $\arcsin x$  и  $\operatorname{arctg} x$  са нечетни.

22. Докажете, че при  $|x| \leq 1$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

23. При какви стойности на  $x$  е валидно равенството

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}?$$

24. При какви стойности на  $x$  и  $y$  е валидно равенството

$$(2) \quad \arcsin x + \arcsin y = \arcsin (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}).$$

*Упътване.* Докажете, че

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

От това заключаваме, че равенството (2) е валидно тогава и само тогава, когато

$$(3) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Като вземем под внимание, че

$$-\pi \leq \arcsin x + \arcsin y \leq \pi,$$

заклучаваме, че неравенствата (3) са изпълнени тогава и само тогава, когато

$$\cos(\arcsin x + \arcsin y) \geq 0$$

(защо?), т. е. когато

$$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \geq xy \quad \text{и} \quad |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1.$$

Кои точки от равнината на една декартова координатна система удовлетворяват последните неравенства?

25. Докажете, че при  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{d^n}{dx^n} \operatorname{arctg} x = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{2} + n \operatorname{arctg} x\right).$$

26. Докажете, без да се ползвате от геометрични съображения, че системата

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \end{aligned}$$

където  $x$  и  $y$  са дадени, а  $\rho$  и  $\varphi$  са неизвестни, има решения при всеки избор на  $x$  и  $y$ .

*Упътване.* Проверете, че при  $x^2 + y^2 \neq 0$  числата

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = 2k\pi + \varepsilon \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

удовлетворяват системата (4), когато  $k$  е цяло число, а  $\varepsilon = 1$  при  $y \geq 0$  и  $\varepsilon = -1$  при  $y < 0$ ; за да получим едно решение при  $x^2 + y^2 = 0$ , избираме  $r = 0$  и  $\varphi$  произволно.

27. Намерете всичките решения на системата (4) ( $x$  и  $y$  са дадени;  $\rho$  и  $\varphi$  са неизвестни), без да си служите с геометрични съображения.

28. Докажете, че при цели неотрицателни стойности на  $n$  и при  $|x| \leq 1$  функцията

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

е полином от  $n$ -та степен.

*Упътване.* Извършете доказателството индуктивно, като предварително покажете, че

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

*Забележка.* Полиномите  $T_n(x)$  се наричат полиноми на Чебишев (Чебышёв) и играят важна роля в много въпроси от анализа.

29. Докажете, че коефициентът пред  $x^n$  в  $n$ -тия полином на Чебишев

$$\cos(n \arccos x)$$

е равен на  $2^{n-1}$ .

*Упътване.* Извършете доказателството индуктивно, като използвате рекурентната зависимост от предната задача.

30. Докажете, че при  $|x| \leq 1$  и  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n} \sin(n \arccos x).$$



*Упътване.* Извършете доказателството индуктивно. За тази цел образувайте помощната функция

$$\varphi(x) = \frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} - (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{n+1} \sin((n+1) \arccos x).$$

Докажете, че при  $|x| < 1$

$$\varphi'(x) = -(2n+1) \frac{d^n}{dx^n} \left[ x \cdot (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right] + (-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1) \frac{\cos((n+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

като развиете

$$\frac{d^n}{dx^n} \left[ x \cdot (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right]$$

по формулата на Лайбниц. По този начин се показва, че функцията  $\varphi(x)$  е една константа. За да пресметнете нейната стойност, покажете, че  $\varphi(1) = 0$ , като развиете по формулата на Лайбниц израза

$$\frac{d^n}{dx^n} \left[ (1-x)^{n+\frac{1}{2}} (1+x)^{n+\frac{1}{2}} \right].$$

31. Докажете, че при  $|x| \leq 1$  и  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\cos(n \arccos x) = \frac{(-1)^n (n-1)! 2^{n-1}}{(2n-1)!} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n}.$$

*Упътване.* Използвайте предната задача.

32. Намерете всички корени на уравнението

$$\cos(n \arccos x) = 0,$$

където  $n$  е цяло положително число.

33. Докажете, че функцията

$$y = \cos(n \arccos x)$$

удовлетворява диференциалното уравнение

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

## § 18. Таблица на формулите, върху които се основава техниката на диференцирането

Тук ще припомним накратко по-важните формули, с помощта на които става намирането на производните. *Читателят трябва да помни тези формули наизуст.*

Производни на елементарни функции:\*

$$(a)' = 0,$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

\* Буквите  $a$  и  $n$  означават константи,  $x$  означава, както обикновено, независимата променлива,  $u$  и  $v$  означават функции на  $x$ .

Така например  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,  $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$  и пр.

$$(e^x)' = e^x$$

или по-общо

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0.$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Общи правила:

$$(au)' = au'.$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$[f[u(x)]]' = f'[u(x)]u'(x).$$

Така например

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \text{ и пр.}$$

Ако функциите

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad x = \varphi(y)$$

са обратни една на друга, то, грубо казано,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

или малко по-точно

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'[f(x)]}$$

### Задачи

Да се намерят производните на следните функции:

1.  $y = 5x^3 - 7x^2 + 6x - 13$ .

2.  $y = \frac{x^3}{3}$ .

3.  $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ .

4.  $y = x^4(x^2 - 1)^2$ .

5.  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ .

6.  $y = \frac{x}{1 - x^2}$ .

7.  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ .

8.  $y = x \cos x$ .

9.  $y = (x^2 - 2x + 2) \sin x$ .

10.  $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$ .

11.  $y = \frac{1}{\cos x}$ .

12.  $y = x \operatorname{tg} x$ .

13.  $y = (ax + b)^3$ .

14.  $y = (x^2 - 1)^{15}$ .

15.  $y = x^2 \operatorname{ctg} x$ .

16.  $y = \sin^3 x$ .

17.  $y = (1 - x)^5$ .

18.  $y = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ .

19.  $y = \cos^2 x$ .

20.  $y = \cos x^2$ .

21.  $y = \cos^4 2x$ .

22.  $y = \sin 2x$ .

23.  $y = (\cos ax^2) \cdot \sin bx^2$ .

24.  $y = \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg}^2 2x$ .

25.  $y = \cos \frac{2x}{1 + x^2} + \sin^2 x$ .

26.  $y = \sin x^2 + \sin^2 x$ .

27.  $y = \operatorname{tg} \frac{1 - x}{1 + x}$ .

28.  $y = e^{-x^2}$ .

29.  $y = e^{\sin 2x}$ .

30.  $y = e^{ax} \cos bx$ .

31.  $y = e^{-x}(x^2 - 4)$ .

32.  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

33.  $y = e^{\frac{1+x}{x}}$ .

34.  $y = x^3 e^{\frac{1}{x}}$ .

35.  $y = \frac{x^4}{4} \left[ (\ln x)^2 - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{8} \right]$ .

36.  $y = \ln \operatorname{tg} \left[ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right]$ .

37.  $y = \ln \cos x$ .

38.  $y = \ln(1 - x)$ .

39.  $y = \frac{1}{\ln(1 - x)}$ .

40.  $y = \sqrt{x}$ .

41.  $y = \sqrt[3]{x}$ .

42.  $y = \sqrt{x} + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

43.  $y = \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x}$ .

44.  $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ .

45.  $y = \sqrt{3x - 5}$ .

46.  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ .

47.  $y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

48.  $y = \frac{1}{(1 + x^2) \sqrt{1 + x^2}}$ .

49.  $y = x \sqrt{x^2 + 1}$ .

50.  $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ .

51.  $y = \sqrt[3]{(2x + 1)^2}$ .

52.  $y = \ln \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$ .

53.  $y = \ln \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} - \sqrt{x^2 + 1}$ .

54.  $y = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ .

57.  $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ .

55.  $y = \arcsin \frac{1}{x}$ .

58.  $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ .

56.  $y = \arccos \sqrt{1-x^2}$ .

59.  $y = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right), a > b \geq 0$ .

60.  $y = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arccos \frac{a \cos x + b}{a + b \cos x}, a > b \geq 0$ .

61.  $y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

Отг.  $y' = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}$ .

62.  $y = e^{\arcsin x} (x + \sqrt{1-x^2}), |x| < 1$ .

Отг.  $y' = 2e^{\arcsin x}$ .

63.  $y = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)], x > 0$ .

Отг.  $y' = \sin(\ln x)$ .

64.  $y = x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2}(\arcsin x - x), |x| < 1$ .

Отг.  $y' = \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})$ .

65.  $y = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}, |x| < 1$ .

Отг.  $y' = \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

66.  $y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}, |x| \neq 1$ .

Отг.  $y' = \frac{1}{1+x^4}$ .

67.  $y = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$ .

Отг.  $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ .

68.  $y = 2 \arcsin \frac{1}{2} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}), |x| < 1$ .

Отг.  $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

69.  $y = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, |x| < 1$ .

Отг.  $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

70.  $y = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} \arccos \frac{au - a^2 + b^2 + c^2}{u\sqrt{b^2+c^2}}$ , където  $u = a + b \cos x + c \sin x, u \neq 0$ ,

$a^2 > b^2 + c^2 \neq 0$ .

Отг.  $y' = \pm \frac{1}{u}$ .

71.  $y = x^x, x > 0$ .

*Решение.* Чрез логаритмуване намираме  $\ln y = x \ln x$ . Оттук  $\frac{y'}{y} = \ln x + 1$  и следователно

$y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$ .

72.  $y = (\ln x)^{\ln x}, x > 0$ .

Отг.  $y' = (\ln x)^{\ln x} \left( \frac{\ln(\ln x)}{x} + \frac{1}{x} \right)$ .

73.  $y = x^{\sin x}$ .

Отг.  $y' = x^{\sin x} \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$ .

## Глава IV

### НАЙ-ПРОСТИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНОТО СМЯТАНЕ

#### § 1. Максимум и минимум

Казваме, че една функция  $f(x)$  притежава локален максимум (минимум), в една точка  $x_0$ , когато около точката  $x_0$  може да се избере такава околност  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , където  $\delta > 0$ , че:

1) околността  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  изцяло да лежи в дефиниционната област на функцията;

2) функционалната стойност  $f(x_0)$  да бъде най-голяма (най-малка) измежду функционалните стойности на  $f(x)$  в околността  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

(Тук не се изключва възможността тази най-голяма или най-малка стойност да се достига и в точки, различни от  $x_0$ . Казваме, че локалният максимум или минимум в точката  $x_0$  е строг, когато равенството  $f(x) = f(x_0)$  е изпълнено в достатъчно малка околност на  $x_0$  само при  $x = x_0$ .)

В дефиницията, която дадохме, се иска точката  $x_0$  да притежава поне една околност, лежаща изцяло в дефиниционната област на функцията. Това е вече едно ограничително условие за точката  $x_0$ . Така например, ако дефиниционната област на  $f(x)$  е един интервал, а точката  $x_0$  се намира в един от краищата му, то тази точка сигурно не удовлетворява поставеното изискване. Да си мислим едно точково множество  $M$ . Казваме, че една точка  $x_0$  е вътрешна за това множество, когато може да се намери поне една околност  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  на точката (разбира се,  $\delta > 0$ ), която е съставена само от точки, принадлежащи на множеството  $M$ . С тази терминология ние можем по-кратко да формулираме нашата мисъл така: в дефиницията, която дадохме, се иска точката  $x_0$  да бъде вътрешна за дефиниционната област на  $f(x)$ .

Сега ще дадем няколко примера, които ще изяснят по-добре смисъла на понятията локален максимум и локален минимум.

Да разгледаме функцията

$$f(x) = x^4 - x^2,$$

дефинирана с това уравнение при всички стойности на  $x$ . При  $x = 0$  тази функция притежава локален максимум, защото при  $-1 < x < 1$  и  $x \neq 0$

$$f(x) = x^2(x^2 - 1) < 0 = f(0),$$

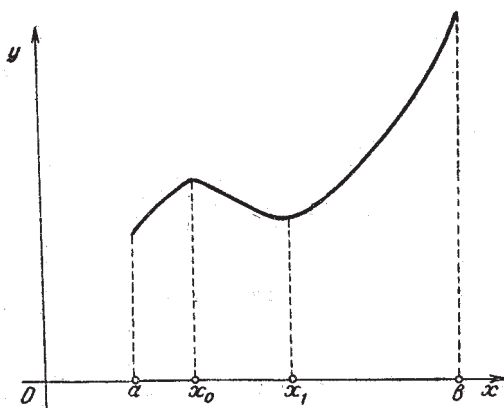
т. е.  $f(0)$  е най-голямата измежду стойностите на функцията в околността  $(-1, 1)$  на точката 0 (в случая  $x_0 = 0$  и  $\delta = 1$ ; ние бихме могли да дадем

на  $\delta$  коя да е стойност, по малка от 1, но, разбира се, по-голяма от нула). Нека обърнем внимание върху това, че  $f(0)$  не е най-голямата от *всичките* стойности на  $f(x)$ . Такова нещо съвсем не се иска в дефиницията, която дадохме. Очевидно

$$f(2) > f(0).$$

Това обаче не е пречка да имаме *локален* максимум при  $x = 0$ . Функционалната стойност  $f(0)$  е най-голяма в околността  $(-1, 1)$  на точката 0 и това е

достатъчно, за да имаме локален максимум.



Черт. 11

На черт. 11 е изобразена графиката на една функция, която при  $x = x_0$  има локален максимум. Този локален максимум не е най-голямата стойност на функцията в дефиниционния ѝ интервал  $[a, b]$ . При  $x = b$  функцията приема най-голямата си стойност, която обаче не представлява локален максимум, защото точката  $b$  не е вътрешна. При  $x = x_1$  функцията има локален минимум.

## § 2. Необходимо условие за съществуване на локален екстремум при диференцируеми функции

Понякога ще си служим с термина *екстремум* като общо наименование на максимум и минимум.

Ние ще докажем сега следната теорема: *ако една функция  $f(x)$  е диференцируема в една точка  $x_0$  и притежава локален екстремум в тази точка, то  $f'(x_0) = 0$ .*

(Геометрически това означава, че ако функцията е диференцируема за  $x = x_0$  и притежава локален екстремум в тази точка, то тангентата към графиката ѝ в тази точка е успоредна на абсцисната ос.)

**Доказателство.** Да разгледаме например случая, когато в точка  $x_0$  имаме локален максимум. В такъв случай в някоя достатъчно малка околност  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , на точката  $x_0$  имаме

$$f(x) \leq f(x_0),$$

или, което е същото,

$$f(x) - f(x_0) \leq 0.$$

Да разгледаме отношението

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Точката  $x_0$  е вътрешна за дефиниционната област на  $f(x)$ . Това позволява да се приближаваме към точката  $x_0$  както отдясно, така и отляво, без при това да напускаме дефиниционната област на функцията  $f(x)$ . Ще се възползуваме от тази свобода и ще оставим  $x$  да клони към  $x_0$  чрез стойности, по-големи от  $x_0$ . В такъв случай знаменателят на дробта

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

е положителен. От друга страна, числителят, както видяхме, е или отрицателен, или нула. От това заключаваме, че

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Като извършим граничния преход  $x \rightarrow x_0$  в последното неравенство, заключаваме, че

$$f'(x_0) \leq 0.$$

Ако обаче даваме на  $x$  стойности, по-малки от  $x_0$ , получаваме

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

защото в такъв случай знаменателят на дробта че бъде отрицателен, а числителят и в този случай е или отрицателен, или нула (тъй като имаме максимум в точката  $x_0$ ). Като извършим в последното неравенство граничния преход  $x \rightarrow x_0$ , получаваме

$$f'(x_0) \geq 0.$$

Двете неравенства  $f'(x_0) \leq 0$  и  $f'(x_0) \geq 0$  ни учат, че

$$f'(x_0) = 0.$$

Аналогично се извършва доказателството и в случая, когато имаме минимум в точката  $x_0$ .

С това ние намерихме едно необходимо условие за съществуване на локален екстремум на една диференцируема функция. Това условие съвсем не

е достатъчно. И наистина функцията  $f(x) = x^3$  е диференцируема и  $f'(x) = 3x^2$ , т. е.  $f'(0) = 0$ . Въпреки това тази функция не притежава при  $x = 0$  нито локален максимум, нито локален минимум, защото колкото и малка околност да вземем около началото, винаги  $f(x) > f(0)$  при  $x > 0$ , но  $f(x) < f(0)$  при  $x < 0$ . Графиката на тази функция е изобразена на черт. 3 (част II, глава I, § 2). Разбира се, една функция може да притежава локален екстремум в една точка и без да бъде диференцируема в тази точка. Така например функцията  $|x|$  не е диференцируема при  $x = 0$ , но притежава локален минимум в тази точка. (Това е дори изобщо най-малката стойност на функцията.) Графиката на тази функция е изобразена на черт. 4 (част II, глава I, § 2).

### § 3. Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум

Нека функцията  $f(x)$  е два пъти диференцируема в някоя околност на точката  $x_0$  и втората ѝ производна  $f''(x)$  нека е непрекъсната в точката  $x_0$ . При тези предположения ще докажем следната теорема: ако  $f'(x_0) = 0$ , но  $f''(x_0) \neq 0$ , функцията  $f(x)$  сигурно притежава локален екстремум в точката  $x_0$ ; при това, ако  $f''(x_0) < 0$ , имаме локален максимум, а ако  $f''(x_0) > 0$ , имаме локален минимум. И наистина теоремата на Тейлор ни дава

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0 + \theta h) = f(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0 + \theta h),$$

$$0 < \theta < 1$$

(където сме представили остатъчния член във формата на Лагранж) или

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^2}{2!} f''(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Дадено е, че  $f''(x_0) \neq 0$ . Нека например  $f''(x_0) > 0$ . Като се възползуваме от непрекъснатостта на  $f''(x)$  при  $x = x_0$ , заключаваме, че при всички достатъчно малки стойности на  $|h|$  ще имаме  $f''(x_0 + \theta h) > 0$  (вж. § 8 на глава I от част II).

И така за всички достатъчно малки стойности на  $|h|$  имаме

$$f''(x_0 + \theta h) > 0$$

и следователно при  $h \neq 0$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^2}{2!} f''(x_0 + \theta h) > 0,$$



т. е.

$$f(x_0 + h) > f(x_0),$$

което показва, че имаме локален минимум в точката  $x_0$  и този минимум е строг. Аналогично се доказва, че при  $f''(x_0) < 0$  имаме локален максимум. Извършете сами доказателството!

При  $f''(x_0) = 0$  тези разсъждения не ни дават никакво указание за съществуване или несъществуване на локален екстремум. Ето няколко примера, при които разгледаният критерий се оказва *безполезен*. Функцията  $\varphi(x) = x^4$  притежава минимум при  $x = 0$ , защото при  $x \neq 0$  имаме  $x^4 > 0$  или (което е същото)  $\varphi(x) > \varphi(0)$ , при все че  $\varphi''(x) = 4 \cdot 3x^2$  и следователно  $\varphi''(0) = 0$ . Напротив, функцията  $\psi(x) = x^3$ , както вече видяхме, не притежава локален екстремум при  $x = 0$ , при все че  $\psi'(0) = 0$ ; тук също  $\psi''(0) = 0$ . По-общо, ако функцията  $f(x)$  е диференцируема три пъти в някоя околност на точката  $x_0$ , ако  $f'''(x)$  е непрекъсната при  $x = x_0$  и най-сетне, ако  $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ , но  $f'''(x_0) \neq 0$ , то  $f(x)$  не притежава нито локален максимум, нито локален минимум при  $x = x_0$ . И наистина формулата на Тейлор ни дава

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0 + \theta h) \\ &= f(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1, \end{aligned}$$

или

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^3}{3!}f'''(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Като вземем пред вид, че  $f'''(x)$  е непрекъсната при  $x = x_0$  и  $f'''(x_0) \neq 0$ , заключаваме, че  $f'''(x_0 + \theta h)$  не си мени знака и не се анулира, когато  $|h|$  е достатъчно малко. Множителят  $h^3$  обаче си мени знака, когато  $h$  си мени знака, поради което разликата

$$f(x_0 + h) - f(x_0)$$

приема както положителни, така и отрицателни стойности във всяка околност на точката  $x_0$ . Този резултат ни показва, че в точката  $x_0$  нямаме локален екстремум.

След тия предварителни бележки ще докажем следната обща теорема:

*Нека функцията  $f(x)$  е диференцируема  $n$  пъти в някоя околност на точката  $x_0$  и нека  $f^{(n)}(x)$  е непрекъсната при  $x = x_0$ , като освен това*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

но  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . В такъв случай, ако числото  $n$  е четно, то имаме локален екстремум, като при  $f^{(n)}(x_0) < 0$  имаме строг локален максимум, а при  $f^{(n)}(x_0) > 0$  имаме строг локален минимум. Напротив, ако числото  $n$  е нечетно, то нямаме нито локален максимум, нито локален минимум.

**Доказателство.** Теоремата на Тейлор ни дава

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^{n-1} f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + \frac{h^n f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{n!}, \quad 0 < \theta < 1,$$

или като вземем под внимание, че  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{n!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Тук ние сме представили остатъчния член във формата на Лагранж. Като вземем пред вид, че  $f^{(n)}(x)$  е непрекъснатата функция при  $x = x_0$  и  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ , заключаваме, че  $f^{(n)}(x_0 + \theta h)$  сигурно не си мени знака и дори не се анулира, когато  $|h|$  е достатъчно малко. Когато  $n$  е четно число, то  $h^n$  също не си мени знака, когато  $h$  си мени знака. От това заключаваме, че при  $f^{(n)}(x_0) < 0$  имаме

$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0,$$

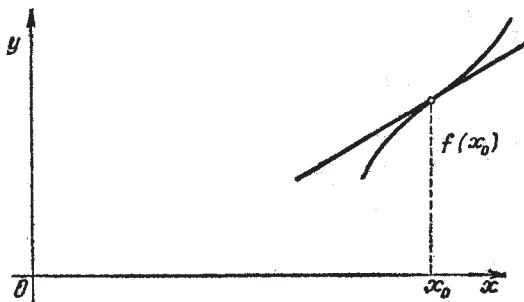
когато  $|h|$  е достатъчно малко, т. е. функцията притежава локален максимум в точката  $x_0$ ; при  $f^{(n)}(x_0) > 0$  имаме (разбира се, пак при достатъчно малки стойности на  $|h|$ )

$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0,$$

т. е. функцията притежава локален минимум в точката  $x_0$ . Напротив когато числото  $n$  е нечетно, то множителят  $h^n$  си мени знака, когато  $h$  си мени знака. Като вземем пред вид, че  $f^{(n)}(x_0 + \theta h)$  не си мени знака и не се анулира, когато  $|h|$  е достатъчно малко, заключаваме, че разликата

$$f(x_0 + h) - f(x_0)$$

си мени знака заедно с  $h$  във всяка околност на точката  $x_0$ , т. е. функцията  $f(x)$  в този случай не притежава нито локален максимум, нито локален минимум при  $x = x_0$ . В този случай точката  $x_0$  е една инфлексна точка върху кривата. Това значи, че във всяка кръгова област с център в точката  $[x_0, f(x_0)]$  (или, както се казва понякога, във всяка двуизмерима околност на тази точка) има точки от графиката на функцията  $y = f(x_0)$ , разположени



Черт. 12

от различни страни на тангентата към тази графика в точката  $[x_0, f(x_0)]$ . На черт. 3 е изобразена крива, която при  $x = 0$  има инфлексна точка с хоризонтална тангента (нас ни интересува сега този случай, защото при нас по предположение  $f'(x_0) = 0$ ). На черт. 12 е изобразена крива, която притежава инфлексна точка с наведена тангента при  $x = x_0$ .

*Пример.* Да се намерят локалните екстремуми на функцията

$$f(x) = (x - 1)^3(x - 2).$$

Очевидно имаме

$$f'(x) = 3(x - 1)^2(x - 2) + (x - 1)^3$$

или още

$$f'(x) = (x - 1)^2(4x - 7).$$

От това представяне е ясно, че производната  $f'(x)$  се анулира само при  $x = \frac{7}{4}$  и  $x = 1$ . От друга страна,

$$f''(x) = 2(x - 1)(4x - 7) + 4(x - 1)^2,$$

т. е.  $f''\left(\frac{7}{4}\right) = 4\left(\frac{7}{4} - 1\right)^2 > 0$ , и следователно при  $x = \frac{7}{4}$  имаме локален минимум. Неговата стойност е  $f\left(\frac{7}{4}\right) = -\frac{27}{256}$ . Тъй като  $f''(1) = 0$ , търсим третата производна

$$f'''(x) = 2(4x - 7) + 8(x - 1) + 8(x - 1).$$

Очевидно  $f'''(1) \neq 0$ . От това заключаваме, че при  $x = 1$  функцията  $f(x)$  няма нито локален максимум, нито локален минимум.

Нека  $f(x)$  е функция, която е дефинирана и диференцуема в някой интервал  $\Delta$ . Казваме, че функцията  $f(x)$  има инфлексия в една точка  $x_0$  от  $\Delta$ , ако производната ѝ притежава локален екстремум в  $x_0$ .

### Задачи

1. Да се намерят локалните екстремуми на функцията  $f(x) = -x^3 - 12x$ .

2. Да се намерят локалните екстремуми на функцията  $f(x) = \sin 3x - 3 \sin x$ .
3. Да се намерят локалните екстремуми на функцията  $f(x) = x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2 + 1$ .
4. Да се намерят локалните екстремуми на функцията  $f(x) = (x - 1)^4 x$ .
5. Измежду правоъгълниците с даден периметър да се намери онзи, който има най-голямо лице.
6. Измежду правоъгълниците, вписани в дадена окръжност с радиус  $r$ , да се намери онзи, който има най-голямо лице.
7. Известно е от физиката, че силата на осветлението  $f$  се изразява с формулата  $f = \frac{m \sin \varphi}{r^2}$ , където  $\varphi$  е ъгълът между осветяваната площадка и лъчите,  $r$  е разстоянието до светлинния източник и  $m$  е константа, която зависи от силата на източника и от приетите единици. На каква височина  $h$  трябва да се окачи върху един даден стълб един светлинен източник, така че в дадена точка  $A$  от една хоризонтална площадка, която се намира на разстояние  $a$  от стълба, силата на осветлението да бъде най-голяма?
8. От един кръгов изрез (сектор) с даден радиус  $r$  е направена конична фуния. Колко голям трябва да бъде централният ъгъл на изреза, за да има фунията най-голям обем?
9. Една права  $a$  разделя една равнина на две полуравнини — I и II. Една точка  $M$  се движи в полуравнината I със скорост  $v_1$ , а в полуравнината II със скорост  $v_2$ . Нека  $A$  е една точка от полуравнината I, а  $B$  е една точка от полуравнината II. Точката  $M$  описва начупената  $ACB$ , където  $AC$  и  $CB$  са две праволинейни отсечки и точката  $C$  лежи на правата  $a$ . Докажете, че точката  $M$  изминава пътя  $ACB$  при фиксирани  $A$  и  $B$  за най-малко време, когато

$$\frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

където  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  са ъглите, които сключват посоките на векторите  $AC$  и  $CB$  с една (коя да е) от посоките на правата  $a$ . Сравнете този резултат със закона за пречупване на светлината.

#### § 4. Изпъкнали функции

Нека  $f(x)$  е функция, дефинирана в някой интервал  $\Delta$ . Функцията  $f(x)$  се нарича изпъкнала, ако при всеки избор на точките  $x_1, x_2, \dots, x_n$  от  $\Delta$  и при всеки избор на положителните числа  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , за които

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$

е в сила неравенството

$$(1) \quad f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n).$$

Не е трудно да се убедим, че точката  $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$  също принадлежи на  $\Delta$ . Така например, ако  $\Delta$  е крайният и затворен интервал  $[a, b]$ , то

$$a \leq x_v \leq b \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

и следователно

$$p_v a \leq p_v x_v \leq p_v b \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

Когато съберем почленно последните неравенства, ще получим

$$p_1a + p_2a + \cdots + p_na \leq p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leq p_1b + p_2b + \cdots + p_nb$$

и следователно

$$a \leq p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leq b,$$

защото

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

Различните случаи, които могат да се представят, когато интервалът не е краен и затворен, се разглеждат също тъй просто.

Ако функцията  $f(x)$  е диференцируема поне два пъти в  $\Delta$  и при всяко  $x$  от  $\Delta$  имаме  $f''(x) \geq 0$ , то функцията  $f(x)$  е изпъкнала в  $\Delta$ . Ако  $f''(x)$  приема само строго положителни стойности, то в (1) имаме равенство само при  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ .

За да докажем това, ще положим

$$x_0 = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n.$$

Формулата на Тейлор ни дава

$$(2) \quad f(x_\nu) = f(x_0) + \frac{x_\nu - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x_\nu - x_0)^2}{2!} f''(\xi_\nu),$$

където  $\xi_\nu$  е точка, избрана по подходящ начин в  $\Delta$ . Като умножим двете страни на равенството (2) с  $p_\nu$  и сумираме по  $\nu$ , ще получим

$$\sum_{\nu=1}^n p_\nu f(x_\nu) = f(x_0) + \sum_{\nu=1}^n \frac{p_\nu(x_\nu - x_0)^2}{2} f''(\xi_\nu)$$

и следователно

$$\sum_{\nu=1}^n p_\nu f(x_\nu) \geq f(x_0).$$

Очевидно, за да имаме

$$\sum_{\nu=1}^n p_\nu f(x_\nu) = f(x_0),$$

е необходимо и достатъчно да имаме

$$\sum_{\nu=1}^n p_\nu(x_\nu - x_0)^2 f''(\xi_\nu) = 0,$$

което в случая, когато  $f''(x)$  приема само строго положителни стойности, е изпълнено тогава и само тогава, когато

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_0 = \dots = x_n - x_0 = 0,$$

защото числата  $p_1, p_2, \dots, p_n$  са строго положителни. С това доказателството е завършено.

### Задачи

1. Нека  $a > 0$ . Докажете, че функцията  $a^x$  е изпъкнала върху цялата ос  $x$ .
2. Нека числата,  $a, b, p$  и  $q$  са положителни и  $p + q = 1$ . Докажете, че

$$ab \leq pa^{\frac{1}{p}} + qb^{\frac{1}{q}}.$$

Равенството се достига само когато  $a^q = b^p$ .

*Решение.* Разглеждаме функцията

$$f(x) = e^x.$$

Тази функция е изпъкнала, защото  $f(x) = e^x > 0$ , т. е. при всеки избор на  $x$  и  $y$  имаме

$$f(px + qy) \leq pf(x) + qf(y).$$

Ако поставим  $x = \frac{\ln a}{p}$  и  $y = \frac{\ln b}{q}$ , получаваме исканото неравенство. Като вземем пред вид, че  $f''(x) = e^x \neq 0$ , заключаваме, че неравенството преминава в равенство само когато  $x = y$ , т. е. когато  $a^{\frac{1}{p}} = b^{\frac{1}{q}}$ .

3. Нека  $a_1, a_2, \dots, a_n$  са  $n$  положителни числа. Докажете, че

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Знакът равенство е възможен само при  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

*Забележка.* Това неравенство се нарича неравенство на Коши между средното аритметично и средното геометрично на  $n$  числа.

*Упътване.* Докажете, че функцията  $f(x) = -\ln x$  е изпъкнала при  $x > 0$ .

4. Нека  $p_1, p_2, \dots, p_n$  са  $n$  положителни числа, свързани с равенството

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Докажете, че

$$p_1^{p_1} p_2^{p_2} \dots p_n^{p_n} \geq \frac{1}{n}.$$

Равенството се достига само при  $p_1 = p_2 = \dots = p_n$ .

*Упътване.* Докажете, че функцията  $f(x) = x \ln x$  е изпъкнала при  $x > 0$ .

**§ 5. Изследване на квадратичната форма  $ax^2 + 2bxy + cy^2$**

Изразът

$$(1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2$$

се нарича квадратична форма на двете независими променливи  $x$  и  $y$ . Досега ние сме разглеждали само функции на една независима променлива. Тук за пръв път срещаме функция на две независими променливи.

Квадратичната форма  $x^2 - y^2$  е способна да приема, както положителни, така и отрицателни стойности. Така например при  $x = 1, y = 0$  тя има положителна стойност, а при  $x = 0, y = 1$  тя има отрицателна стойност. Напротив, квадратичната форма  $x^2 + y^2$  приема само неотрицателни стойности и се анулира само при  $x = y = 0$  (нека изрично припомним, че ние работим само с реални числа). *Една квадратична форма се нарича положително дефинитна, когато тя приема само неотрицателни стойности и се анулира само при  $x = y = 0$ .* Една квадратична форма се нарича отрицателно дефинитна, когато тя приема само неположителни стойности и се анулира само при  $x = y = 0$ . Така например квадратичната форма

$$-x^2 + 2xy - 2y^2 = -(x - y)^2 - y^2$$

е очевидно отрицателно дефинитна. Ние често ще казваме накратко „дефинитна форма“, когато ще имаме пред вид квадратична форма, която е или положително, или отрицателно дефинитна.

За да бъде една квадратична форма  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  дефинитна, необходимо е  $a$  да бъде различно от нула. Нещо повече, за да бъде тази форма положително дефинитна, необходимо е да имаме  $a > 0$ , а за да бъде тя отрицателно дефинитна, необходимо е да имаме  $a < 0$ . В това се убеждаваме, като дадем на  $x$  стойност 1, а на  $y$  стойност 0. Така например, ако формата е положително дефинитна, то стойността ѝ е съществено положителна, когато поне едно от числата  $x$  и  $y$  е различно от нула; в случая, който ни интересува, получаваме

$$a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 \cdot 0 + c \cdot 0^2 > 0,$$

или, което е същото,  $a > 0$ . Намереното по този начин условие за дефинитност е необходимо, но съвсем не е достатъчно. Ние ще си поставим за задача да намерим едно необходимо и достатъчно условие, за да бъде квадратичната форма (1) дефинитна. За тази цел ще разгледаме формата  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  при постоянно  $y$  като функция само на  $x$  и ще пишем за краткост

$$\varphi(x) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Производната

$$\varphi'(x) = 2ax + 2by$$

се анулира при  $x = -\frac{by}{a}$ . Като развием функцията  $\varphi(x)$  по формулата на Тейлор около точката  $-\frac{by}{a}$  и като пишем за краткост  $-\frac{by}{a} = x_0$ , получаваме

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} \varphi'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \varphi''(x_0)$$

(нямаме остатъчен член, защото  $\varphi(x)$  е полином) или

$$(2) \quad \varphi(x) = \varphi(x_0) + a(x - x_0)^2.$$

Нека квадратичната форма (1) е положително дефинитна. В такъв случай при  $y \neq 0$

$$\varphi(x_0) > 0,$$

или, което е същото,

$$y^2 \frac{ac - b^2}{a} > 0.$$

Ние обаче знаем, че  $a > 0$ . От това заключаваме, че за да бъде квадратичната форма (1) положително дефинитна, необходимо е

$$(3) \quad a > 0,$$

$$(4) \quad b^2 - ac < 0.$$

Както ще видим, това условие е и достатъчно. И наистина, ако са изпълнени неравенствата (3) и (4), то

$$(5) \quad \varphi(x_0) \geq 0,$$

защото

$$\varphi(x_0) = y^2 \frac{ac - b^2}{a}.$$

От равенството (2) и от неравенствата (3) и (5) заключаваме, че  $\varphi(x) \geq 0$ . Остава да покажем, че квадратичната форма (1) се анулира само при  $x=y=0$ , ако са изпълнени неравенствата (3) и (4). Това може да се направи така: ако  $\varphi(x) = 0$ , то

$$(6) \quad \varphi(x_0) = 0,$$

$$(7) \quad (x - x_0)^2 = 0,$$



което се вижда от равенството (2), защото

$$\varphi(x_0) \geq 0$$

и

$$a > 0.$$

Равенството (6) ни дава  $y^2 \frac{ac - b^2}{a} = 0$ , т. е.  $y = 0$ , а равенството (7) ни дава  $x = x_0$ , т. е.  $x = 0$ , защото

$$x_0 = \frac{-by}{a} = 0.$$

Нека читателят сам докаже, че квадратичната форма (1) е отрицателно дефинитна тогава и само тогава, когато

$$(8) \quad a < 0,$$

$$(9) \quad b^2 - ac < 0.$$

Поради симетрията ясно е, че ние можем да разменим ролята на  $a$  и  $c$  в неравенствата (3), (4), (8) и (9).

От неравенството  $b^2 - ac < 0$  следва, че  $a \neq 0$ . Това ни дава право да твърдим, че квадратичната форма (1) е дефинитна тогава и само тогава, когато  $b^2 - ac < 0$ .

От неравенството  $b^2 - ac < 0$  следва също, че  $a$  и  $c$  имат еднакви знаци; тази знаци съвпадат, разбира се, със знака на квадратичната форма (1).

Изразът  $b^2 - ac$  се нарича дискриминанта на квадратичната форма.

Една квадратична форма се нарича полудефинитна, ако тя не си мени знака, както и да се менят  $x$  и  $y$ , обаче се анулира поне при една система значения на  $x$  и  $y$ , различна от системата  $x = 0, y = 0$ . Ще покажем, че за да бъде квадратичната форма  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  полудефинитна, необходимо и достатъчно е да имаме

$$b^2 - ac = 0.$$

И тук, както при дефинитните форми, избирайки  $x = 1$  и  $y = 0$ , заключаваме, че при  $a \neq 0$  знакът на квадратичната форма съвпада със знака на  $a$ . Ще разгледаме на първо време случая, когато  $a \neq 0$ . В такъв случай можем да използваме представянето (2), което може да се напише във вида

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = y^2 \frac{ac - b^2}{a} + a(x - x_0)^2.$$

Ако  $ac - b^2 = 0$ , то

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a(x - x_0)^2$$

и квадратичната форма е очевидно полудефинитна. Обратно, ако квадратичната форма е полудефинитна, то има поне една двойка числа  $(x_1, y_1)$ , различна от двойката  $(0, 0)$ , за която

$$ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 = 0,$$

и следователно, ако положим  $x_0 = \frac{-by_1}{a}$ , то

$$ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 = ax_0^2 + 2bx_0y_1 + cy_1^2 + a(x_1 - x_0)^2 = 0.$$

От друга страна, двата израза

$$ax_0^2 + 2bx_0y_1 + cy_1^2 \quad \text{и} \quad a(x_1 - x_0)^2$$

имат знака на  $a$  (ако не са нули) и следователно

$$\begin{aligned} ax_0^2 + 2bx_0y_1 + cy_1^2 &= 0, \\ a(x_1 - x_0)^2 &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} y_1^2 \frac{b^2 - ac}{a} &= 0, \\ x_1 &= \frac{-by_1}{a}. \end{aligned}$$

От последното равенство заключаваме, че  $y_1 \neq 0$  (защото в противен случай бихме имали  $x_1 = y_1 = 0$ ). Въз основа на това и на предпоследното равенство намираме

$$b^2 - ac = 0.$$

Ако  $c \neq 0$ , то като разменим ролята на  $x$  и  $y$  и на  $a$  и  $c$  и извършим пак горните разсъждения, ще установим, че и в този случай, за да бъде разглежданата квадратична форма полудефинитна, е необходимо и достатъчно да имаме  $b^2 - ac = 0$ . Остава да се направят изследванията при  $a = c = 0$ . В този случай обаче квадратичната форма има вида  $2bxy$  и е полудефинитна тогава и само тогава, когато  $b = 0$ , т. е. когато  $b^2 - ac = 0$ .

#### Задачи

1. Да се изследва дали са дефинитни, или не следните квадратични форми:

- $x^2 - xy + y^2$ ;
- $4x^2 - 4xy + y^2$ ;
- $x^2 - 5xy + 6y^2$ .

2. Нека двете квадратични форми

$$\begin{aligned} a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2, \\ b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2 \end{aligned}$$

са дефинитни и имат еднакви знаци. Докажете, че

$$a_0b_0 + 2a_1b_1 + a_2b_2 > 0.$$

*Решение.* От

$$\begin{aligned} a_1^2 &< a_0a_2, \\ b_1^2 &< b_0b_2 \end{aligned}$$

получаваме

$$\begin{aligned} a_0b_0 + 2a_1b_1 + a_2b_2 &> a_0b_0 + 2a_1b_1 + \frac{a_1^2 b_1^2}{a_0 b_0} = \frac{a_0^2 b_0^2 + 2a_0 b_0 a_1 b_1 + a_1^2 b_1^2}{a_0 b_0} \\ &= \frac{(a_0 b_0 + a_1 b_1)^2}{a_0 b_0} \geq 0. \end{aligned}$$

3. Докажете, че при всеки избор на числата

$$\begin{aligned} a_1, a_2, \dots, a_n, \\ b_1, b_2, \dots, b_n \end{aligned}$$

е в сила неравенството

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

Знакът равенство се достига тогава и само тогава, когато

$$a_k x_0 + b_k y_0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

при някой избор на двете числа  $x_0$  и  $y_0$ , от които поне едното е различно от нула.

*Забележка.* Това неравенство се нарича неравенство на Коши—Буняковски—Шварц.

*Решение.* Разглеждаме помощната квадратична форма

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k y)^2 = \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) x^2 + 2 \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right) xy + \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) y^2.$$

Тази квадратична форма не си мени знака и следователно нейната дискриминанта не е положителна, т. е.

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \leq 0.$$

Ако

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) = 0,$$

то квадратичната форма не е дефинитна и следователно могат да се изберат две числа (от които поне едното е различно от нула) по такъв начин, че

$$\sum_{k=1}^n (a_k x_0 + b_k y_0)^2 = 0$$

и следователно

$$a_k x_0 + b_k y_0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Обратно, ако са изпълнени последните равенства, то разглежданата форма не е дефинитна (понеже тя се анулира при  $x = x_0$  и  $y = y_0$ , при все че поне едното от тези две числа е различно от нула) и следователно не може да имаме

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) < 0.$$

От това заключаваме, че

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) = 0,$$

което се вижда, разбира се, и директно.

4. Нека квадратичната форма

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$$

е дефинитна. Докажете, че функцията

$$\varphi(x) = |a \cos^2 x + 2b \cos x \sin x + c \sin^2 x|$$

притежава съществено положителна долна граница.

*Решение.* Да разгледаме функцията  $\varphi(x)$  в затворения интервал  $[0, 2\pi]$  и да означим с  $m$  точната ѝ долна граница в този интервал. Очевидно  $m \geq 0$ . Остава да покажем, че  $m \neq 0$ . Това ще извършим по следния начин. Функцията  $\varphi(x)$  е непрекъсната, а интервалът  $[0, 2\pi]$  е затворен и има крайна дължина. Следователно съгласно теоремата на Вайерштрас има поне една точка  $x_0$ , в която  $\varphi(x_0) = m$ . Ако допуснем, че  $m = 0$ , ще получим

$$a \cos^2 x_0 + 2b \cos x_0 \sin x_0 + c \sin^2 x_0 = 0,$$

което не е вярно, защото квадратичната форма  $a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$  е дефинитна, а измежду числата  $\cos x_0$  и  $\sin x_0$  поне едно е различно от нула (тъй като  $\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0 = 1$ ). И тъй числото  $m$  е съществено положително. Числото  $m$  е долна граница на  $\varphi(x)$ , когато  $x$  се мени в интервала  $[0, 2\pi]$ . Функцията  $\varphi(x)$  е обаче периодична с период  $2\pi$ . От това заключаваме, че  $m$  е долна граница на  $\varphi(x)$  и тогава, когато  $x$  се мени върху цялата абсцисна ос.

5. Нека двата реда

$$\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2 \quad \text{и} \quad \sum_{v=1}^{\infty} b_v^2$$

са сходящи. Покажете, че редът

$$\sum_{v=1}^{\infty} a_v b_v$$

е абсолютно сходящ.

*Упътване.* Използвайте, че

$$\left( \sum_{v=n+1}^{n+p} |a_v b_v| \right)^2 \leq \left( \sum_{v=n+1}^{n+p} a_v^2 \right) \left( \sum_{v=n+1}^{n+p} b_v^2 \right).$$

### § 6. Теорема на Лопитал (L'Hôpital)

В някои случаи ние можем с успех да използваме теоремата на Коши (обобщената теорема за крайните нараствания) за намиране на граничните стойности на функциите. Настоящият параграф е посветен на този въпрос.

Нека ни са дадени две функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , които са дефинирани в някоя околност  $\Delta$  на една точка  $a$ , и нека  $g(a) = 0$ . В такъв случай отношението

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

не е дефинирано при  $x = a$ , защото  $g(a) = 0$ . Така например нека  $a = 0$ ,  $\Delta$  е цялата абсцисна ос,  $f(x) = x$  и  $g(x) = x$ . Частното

$$F(x) = \frac{x}{x}$$

не е дефинирано при  $x = 0$  (при  $x \neq 0$  то е дефинирано и има стойност 1).

Да се върнем към общия случай. Разбира се, няма смисъл да се питаме каква е стойността на функцията  $F(x)$  при  $x = a$ . В тази точка тя не е дефинирана. Ако обаче в разглежданата околност  $g(x) \neq 0$  при  $x \neq a$ , то бихме могли да поставим въпроса, дали функцията  $F(x)$  притежава граница, или не, когато  $x$  клони към  $a$  чрез стойности, различни от  $a$ , както и въпроса за пресмятането на тази граница. В много случаи може да се получи отговор на тези въпроси с помощта на следната теорема на Лопитал (L'Hôpital):

*Нека функциите  $f(x)$  и  $g(x)$  са дефинирани в някой интервал, който съдържа точката  $a$ , диференцируеми поне при  $x \neq a$  и непрекъснати при  $x = a$ . Нека  $g'(x) \neq 0$  при  $x \neq a$  и  $f(a) = g(a) = 0$ . Нека най-сетне частното  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  притежава граница, когато  $x$  клони към  $a$ . В такъв случай частното  $\frac{f(x)}{g(x)}$  също притежава граница, когато  $x$  клони към  $a$ , и*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

И наистина, като приложим обобщената теорема за крайните нараствания (теоремата на Коши, вж. част II, гл. I, § 21), получаваме при  $x \neq a$

$$(1) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

\*Условието  $g'(x) \neq 0$  при  $x \neq a$  ни осигурява също така, че  $g(x) \neq 0$  при  $x \neq a$ , както това се вижда веднага с помощта на теоремата на Рол.

\*\*Чрез стойности, различни от  $a$ .

където  $\xi$  е някое подходящо избрано число между  $a$  и  $x$ . Да положим

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Когато оставим  $x$  да клони към  $a$ , то  $\xi$  също клони към  $a$ . Оттук заключаваме, че  $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ , а следователно и  $\frac{f(x)}{g(x)}$  клони към  $l$ . С това всичко е доказано.

*Пример 1.* Да се намери границата на  $\frac{\cos 3x}{\cos x}$ , когато  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Тук са изпълнени всичките условия, при които е валидна теоремата на Лопитал. По-специално числителят и знаменателят се анулират при  $x = \frac{\pi}{2}$ . Като приложим правилото на Лопитал, получаваме

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos 3x)'}{(\cos x)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-3 \sin 3x}{-\sin x} = -3.$$

*Пример 2.* Ще разгледаме един пример, при който намирането на границата става с неколккратно прилагане на теоремата на Лопитал. Да се намери границата на  $\frac{2x - \sin 2x}{x - x \cos x}$ , когато  $x \rightarrow 0$ . С помощта на теоремата на Лопитал намираме

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{x - x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{1 - \cos x + x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 2x}{2 \sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cos 2x}{3 \cos x - x \sin x} = \frac{8}{3}.$$

Нека обърнем внимание върху това, че границата

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

може да съществува и без да съществува границата

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ще изясним това с един пример. Да разгледаме функцията

$$F(x) = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}.$$

Функцията  $F(x)$  притежава граница, когато  $x \rightarrow 0$ , защото

$$F(x) = \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x}$$

и следователно

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Въпреки това частното

$$\frac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

не притежава граница, когато  $x$  клони към нула (защо?).

При доказателството на теоремата на Лопитал ние си послужихме с равенството (1). Нека си дадем сметка какво бихме могли да извлечем от него, ако е дадено, че съществува границата

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ние разполагаме със свободата да избираме  $x$  в това равенство произволно, стига да принадлежи на  $\Delta$  и да бъде различно от  $a$  (поради това ние можахме да оставим  $x$  да клони към  $a$  чрез произволна редица от стойности, разбира се, принадлежащи на  $\Delta$  и различни от  $a$ ). Напротив,  $\xi$  не е произволно, а се избира в зависимост от  $x$ . И така да предположим, че границата

$$l = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

съществува. От равенството (1) заключаваме, че може да се избере (и то по безбройно много начини) редица от числа

$$(2) \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots,$$

различни от  $a$ , принадлежащи на  $\Delta$  и клонящи към  $a$  по такъв начин, че редицата

$$\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}, \frac{f'(\xi_2)}{g'(\xi_2)}, \dots$$

да бъде сходяща и да клони към  $l$ . Нека подчертаем, че редицата (2) е подходяща (а не произволно) избрана. С това ние още далеч не сме доказали, че частното

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

притежава граница, когато  $x$  клони към  $a$  чрез произволна редица от стойности (разбира се, принадлежащи на  $\Delta$  и различни от  $a$ ). Такова нещо ние можем да докажем, защото то не е вярно, както това се вижда от примера, който разгледахме по-горе.

Накрая ще докажем следната теорема:

Нека функциите  $f(x)$  и  $g(x)$  са дефинирани и диференцируеми в отворения интервал  $(a, b)$ , като  $g'(x) \neq 0$ . Нека освен това  $g(x)$  расте неограничено, когато  $x \rightarrow a$ . В такъв случай, ако частното  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  има граница при  $x \rightarrow a$ , то частното  $\frac{f(x)}{g(x)}$  също има граница, когато  $x \rightarrow a$ , и

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Доказателство.** Да изберем едно положително число  $\varepsilon$  и да положим

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

В такъв случай може да се избере такова положително число  $\delta$ , че при  $|x - a| < \delta$  да имаме

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека  $x_0$  и  $x$  са две произволни, различни помежду си числа от интервала  $(a, b)$ , за които  $|x - a| < \delta$  и  $|x_0 - a| < \delta$ . Обобщената теорема за крайните нараствания ни дава

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

където  $\xi$  е число между  $x$  и  $x_0$ . Не е трудно да се докаже, че  $|a - \xi| < \delta$ . Това ни дава

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

или

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

От последното неравенство получаваме

$$|f(x) - f(x_0) - lg(x) + lg(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} |g(x) - g(x_0)|$$

или като делим\* с  $|g(x)|$ ,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - l + l \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \left| 1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} \right|.$$

\*Тук  $g(x) \neq 0$ , ако  $\delta$  е достатъчно малко, защото  $|g(x)|$  расте неограничено, когато  $x$  клони към  $a$ .



Оттук намираме

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| - \left| \frac{f(x_0)}{g(x)} \right| - \left| l \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{g(x_0)}{g(x)} \right|$$

и най-сетне

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left| \frac{f(x_0)}{g(x)} \right| + \left| l \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{g(x_0)}{g(x)} \right|.$$

В последното неравенство разполагаме със свободата да избираме числата  $x_0$  и  $x$  произволно в интервала  $(a, b)$ , стига да имаме  $|x_0 - a| < \delta$ ,  $|x - a| < \delta$  и  $x \neq x_0$ . Ще се възползуваме от тази свобода по следния начин: ще фиксираме  $x_0$  и ще даваме на  $x$  стойности, толкова близки до  $a$ , че да имаме

$$\left| \frac{f(x_0)}{g(x)} \right| + \left| l \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| + \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Това е възможно, защото  $|g(x)|$  расте неограничено, когато  $x$  клони към  $a$ , докато  $x_0$ , а следователно както  $f(x_0)$ , така и  $g(x_0)$  ни най-малко не зависят от  $x$ . И така, ако положителното число  $\eta$  е достатъчно малко, то при всички стойности на  $x$  от интервала  $(a, b)$ , за които  $|a - x| < \eta$ , имаме

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

или

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

#### Задачи

Да се намерят следните граници:

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{\cos 3x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

*Упътване.* Приведете под общ знаменател и приложете правилото на Лопитал.

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) \ln x.$$

*Упътване.* Приложете правилото на Лопитал за частното

$$\frac{\ln x}{x - \sin x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\ln x}.$$

*Упътване.*  $(x-1)^{\ln x} = e^{(\ln x) \ln(x-1)}$ .

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin x}{x} \right]^{\frac{1}{x}}.$$

*Упътване.*

$$\left[ \frac{\sin x}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln \frac{\sin x}{x}}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} x^x.$$

9. Покажете, че двете теореми на Лопитал, които доказахме в § 6 на тази глава, запазват своята валидност и тогава, когато при извършвания граничен преход аргументът  $x$  расте неограничено (в § 6 разгледахме случая, когато  $x$  клони към някоя крайна точка  $a$ ). Направете нужните за този случай изменения във формулировките на тези теореми.

*Упътване.* Положете  $\frac{1}{x} = t$ .

10. Намерете границата

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

13. Нека функцията  $f(x)$  е два пъти диференцуема в някоя околност на точката  $x_0$ . Докажете, че

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

14. Намерете границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}},$$

като си послужите с методите, разгледани в § 6 на тази глава.

15. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n.$$

*Упътване.* Използвайте предната задача, като оставите  $x$  да клони към нула чрез редицата с общ член  $x_n = \frac{2}{n}$ .

16. Намерете границата на редицата с общ член

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n.$$

*Упътване.* Използвайте задача 14.

17. Нека функцията  $f(x)$  е дефинирана, диференцуема при  $x > a$  и  $f'(x)$  клони към  $l$ , когато  $x$  расте неограничено. Да се докаже, че  $\frac{f(x)}{x}$  също клони към  $l$ , когато  $x$  расте неограничено.

## § 7. Безкрайно малко

Ако  $f(x)$  клони към нула, когато  $x$  клони към нула, казваме, че  $f(x)$  е безкрайно малко заедно с  $x$ .

*Пример 1.* Нарастването

$$\Delta y = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$$

е безкрайно малко заедно с  $h$  тогава и само тогава, когато функцията  $y = \varphi(x)$  е непрекъсната в точката  $x_0$ .

*Пример 2.* Нека функцията  $y = \varphi(x)$  е диференцируема в точката  $x_0$ . Диференциалът

$$dy = \varphi'(x_0)dx$$

е безкрайно малко заедно с  $dx$ .

Нека  $\alpha$  е едно положително число. Казваме, че  $f(x)$  е безкрайно малко от ред  $\alpha$  спрямо  $x$ , ако отношението

$$\frac{f(x)}{x^\alpha}$$

клони към различна от нула граница, когато  $x$  клони към нула.

*Пример 1.* Ако функцията  $y = \varphi(x)$  е диференцируема в някоя точка  $x_0$  и  $\varphi'(x_0) \neq 0$ , то нарастването

$$\Delta y = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$$

е безкрайно малко от първи ред спрямо  $h$ .

*Пример 2.* Ако функцията  $\varphi(x)$  е диференцируема поне  $n + 1$  пъти в някоя околност на точката  $a$  и ако  $f^{(n+1)}(x)$  е непрекъсната и различна от нула при  $x = a$ , то остатъчният член

$$R_n = f(a + h) - f(a) - \frac{h}{1!} f'(a) - \frac{h^2}{2!} f''(a) - \dots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

във формулата на Тейлор е безкрайно малко от ред  $n + 1$  спрямо  $h$ .

*Забележка.* На нас не са ни известни случаи, когато се налага използването на въведената в този параграф терминология. По-специално ние няма да си служим с нея в курса, който излагаме.

### Общи задачи

1. Докажете, че при  $x \neq 1$  имаме

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2},$$

като диференцирате двете части на равенството

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

2. Докажете, че при  $\cos x \neq 1$  имаме

$$\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \dots + n \sin nx = \frac{(n+1) \sin nx - n \sin(n+1)x}{2(1 - \cos x)},$$

като диференцирате двете части на равенството

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Обикновено под нулева производна на една функция  $f(x)$  се разбира функцията  $f(x)$ . Съобразно с това в задачите, които следват, трябва да се има пред вид, че  $f^{(0)}(x) = f(x)$ .

3. Намерете  $n$ -тите производни на функциите

$$\text{a) } y = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$\text{b) } y = \frac{x}{a+bx}.$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{x^2-1}.$$

*Упътване.* Послужете си с тъждеството  $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$ .

$$\text{d) } y = \sin^2 x.$$

*Упътване.* Послужете си с тъждеството  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ .

$$\text{e) } y = \sin ax.$$

$$\text{f) } y = x^2 \cos ax.$$

$$\text{g) } y = x^2 e^{-x}.$$

$$\text{h) } y = \ln(1+x).$$

4. Намерете  $n$ -тата производна на функцията

$$y = \frac{\ln x}{x}.$$

*Отговор.*

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} - \frac{n!}{x^{n+1}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln x \right).$$

5. Докажете, че при  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{d^n}{dx^n} (\sin^4 x + \cos^4 x) = 4^{n-1} \cos \left( 4x + \frac{n\pi}{2} \right).$$

Вярна ли формулата при  $n = 0$ ?

6. Докажете, че при  $n = 2, 3, \dots$

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{x^2}{1-x} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Вярна ли формулата при  $n = 1$ ?

7. Намерете  $n$ -тата производна на функцията  $y = e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$ , където  $\alpha$  е една константа.

8. Намерете  $n$ -тата производна на функцията

$$y = e^{ax} \cos bx.$$

*Упътване.* Вместо двете константи  $a$  и  $b$  въвеждаме две други константи  $r$  и  $\varphi$ , свързани с  $a$  и  $b$  посредством равенствата

$$(1) \quad \begin{aligned} a &= r \cos \varphi, \\ b &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Тази система има решение относно  $r$  и  $\varphi$  при всеки избор на  $a$  и  $b$ . Това ние можем да си уясним със следните геометрични съображения: разглеждаме в равнината на една декартова координатна система  $OXY$  точката  $M$  с координати  $(a, b)$ ; означаваме с  $\varphi$  кой да е от ъглите между положителната посока на оста  $OX$  и посоката на вектора  $OM$ , а с  $r$  означаваме големината на вектора  $OM$ ; в такъв случай, както това непосредствено се вижда,

$$\begin{aligned} a &= r \cos \varphi, \\ b &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

По-късно ще покажем по чисто аналитичен път, че системата (1) има решение при всеки избор на  $a$  и  $b$ . Числата  $r$  и  $\varphi$  се наричат полярни координати на точката  $M$ . След въвеждане на константите  $r$  и  $\varphi$  функцията  $y$  добива вида

$$y = e^{xr \cos \varphi} \cos(xr \sin \varphi).$$

Намерете няколко последователни производни на тази функция, като извършвате съответните опростявания. След като откриете закономерността, по която се получават последователните производни, установете общата валидност на резултата с помощта на пълната индукция.

9. Докажете, че при  $n \geq 2$

$$\frac{d^n}{dx^n} (x \ln x) = \frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}.$$

10. Покажете, че функцията  $f(x) = xe^{-x}$  удовлетворява равенствата  $f^{(n)}(n) = 0$  при всички цели неотрицателни стойности на  $n$ .

11. Докажете, че при всички цели неотрицателни стойности на  $n$  е в сила равенството

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{n-1} \sin \frac{1}{x} = \frac{(-1)^n \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right)}{x^{n+1}}.$$

*Решение.* Доказателството извършваме индуктивно. При  $n = 0$  проверката е непосредствена. С помощта на формулата на Лайбниц получаваме

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} x^n \sin \frac{1}{x} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} x \cdot \left( x^{n-1} \sin \frac{1}{x} \right) = x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} x^{n-1} \sin \frac{1}{x} + (n+1) \frac{d^n}{dx^n} x^{n-1} \sin \frac{1}{x}.$$

Ако допуснем, че при някоя стойност на  $n$  имаме

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{n-1} \sin \frac{1}{x} = \frac{(-1)^n \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right)}{x^{n+1}},$$

то

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} x^n \sin \frac{1}{x} &= x \left[ \frac{(-1)^n \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right)}{x^{n+1}} \right]' + (n+1) \frac{(-1)^n \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right)}{x^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \sin \left( \frac{1}{x} + \frac{n+1}{2} \pi \right)}{x^{n+2}}. \end{aligned}$$

12. Докажете, че при всички цели неотрицателни стойности на  $n$  е в сила равенството

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}) = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} \quad (\text{G. H. Halphen}).$$

13. Докажете, че при всички цели положителни стойности на  $n$  е в сила равенството

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^{n-1} \ln x) = \frac{(n-1)!}{x}.$$

14. Нека функцията  $f(x)$  е диференцируема поне  $n$  пъти при  $x > 0$ . Докажете, че при  $x > 0$

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} [x^{n-1} f(x)] = t^{n+1} \frac{d^n}{dt^n} f(x),$$

където  $t = \frac{1}{x}$  и  $n$  е цяло неотрицателно число.

*Забележка.* Сравнете със задачи 11, 12 и 13.

*Упътване.* Извършете доказателството индуктивно. За тази цел проверете верността на равенството при  $n=0$  и използвайте веригата равенства

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} x^{n-1} f(x) &= (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} x \cdot x^{n-2} f(x) \\ &= (-1)^n x \frac{d^n}{dx^n} x^{n-2} f(x) + (-1)^n n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^{n-2} f(x) \\ &= (-1)^n x \frac{d}{dx} \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^{n-2} f(x) \right] + (-1)^n n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} x^{n-2} f(x) \\ &= -x \frac{d}{dx} \left[ t^n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(x) \right] - n t^n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(x) \\ &= -x \frac{d}{dx} \left[ t^n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(x) \right] - n t^n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(x) = t^{n+1} \frac{d^n}{dt^n} f(x). \end{aligned}$$

15. Нека функцията  $f(x)$  е диференцируема поне  $k+n$  пъти при  $x > 0$ . Докажете, че при  $x > 0$  е в сила равенството

$$(-1)^{n-1} \frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}} x^{n-1} f(x) = t^{k+n+1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} t^{-k-2} f^{(k+1)}(x),$$

където  $t = \frac{1}{x}$ , а числата  $k$  и  $n$  са цели неотрицателни.

*Забележка.* Тъждеството от предната задача се получава от това по-общо тъждество при  $k=0$  (как?).

*Упътване.* Доказателството извършете индуктивно по отношение на  $n$ .

16. Ако елементите на детерминантата

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) & \dots & u_{1n}(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) & \dots & u_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1}(x) & u_{n2}(x) & \dots & u_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

са диференцируеми функции на  $x$ , то

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} u'_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u'_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u'_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u'_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u'_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u'_{n2} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u'_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u'_{nn} \end{vmatrix}.$$

17. Нека  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  и  $f_3(x)$  са три функции, непрекъснати в затворения интервал  $[a, b]$  и диференцуеми поне във вътрешността му. Да се докаже, че има точка  $\xi$  в отворения интервал  $(a, b)$ , за която

$$\begin{vmatrix} f_1'(\xi) & f_2'(\xi) & f_3'(\xi) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix} = 0.$$

*Упътване.* Приложете за функцията

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \end{vmatrix}$$

теоремата на Рол (разбира се, трябва да проверите предварително, че  $\varphi(x)$  удовлетворява всичките условия, при които е доказана теоремата на Рол).

18. Нека  $f(x)$  е полином, чиято степен не надминава  $n$ . Докажете, че

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{a-x}{1!} f'(x) + \frac{(a-x)^2}{2!} f''(x) + \frac{(a-x)^3}{3!} f'''(x) + \dots + \frac{(a-x)^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

не зависи от  $x$  и се равнява на  $f(a)$ .

*Упътване.* Докажете, че  $\varphi'(x) = 0$ , а следователно  $\varphi(x) = \varphi(a) = f(a)$ .

19. Нека  $f(x)$  и  $g(x)$  са два полинома, чиято степен не надминава  $n$ . Докажете, че функцията

$$\varphi(x) = f^{(n)}(x)g(x) - f^{(n-1)}(x)g'(x) + f^{(n-2)}(x)g''(x) - \dots + (-1)^n f(x)g^{(n)}(x)$$

е константа (срв. предната задача).

20. Функцията

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

се нарича  $n$ -ти полином на Лежандър (Legendre). Докажете, че  $P_n(x)$  е полином от  $n$ -та степен.

21. Докажете, че  $n$ -тият Лежандров полином (срв. предната задача) се анулира при  $n$  различни стойности на  $x$ , разположен в интервала  $(-1, 1)$ .

*Упътване.* Нека  $\varphi(x) = (x^2 - 1)^n$ . Очевидно  $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ . Това ни дава право да приложим за функцията  $\varphi(x)$  теоремата на Рол. И така има поне една точка  $\xi$  във вътрешността на интервала  $(-1, 1)$ , в която  $\varphi'(\xi) = 0$ . При  $n > 0$  обаче имаме  $\varphi'(-1) = \varphi'(1) = 0$ , защото  $\varphi'(x) = n(x^2 - 1)^{n-1} \cdot 2x$ . Това ни дава право да приложим теоремата на Рол по отношение на  $\varphi'(x)$  за двата интервала  $(-1, \xi)$  и  $(\xi, 1)$  и пр.

22. Докажете, че  $n$ -тият Лежандров полином

$$y = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

удовлетворява диференциалното уравнение

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

*Решение.* Полагаме

$$u = (x^2 - 1)^n.$$

Очевидно

$$u' = n(x^2 - 1)^{n-1} \cdot 2x$$

и следователно

$$u'(x^2 - 1) = 2nxi.$$

Диференцираме двете части на това равенство  $n+1$  пъти с помощта на формулата на Лайбниц и получаваме

$$u^{(n+2)}(x^2 - 1) + (n+1) \cdot 2xi^{(n+1)} + (n+1)ni^{(n)} = 2nxi^{(n+1)} + 2n(n+1)u^{(n)}$$

или

$$u^{(n+2)}(x^2 - 1) + 2xi^{(n+1)} - n(n+1)u^{(n)} = 0.$$

Като вземем пред вид, че  $y = u^{(n)}$ , намираме

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

23. Нека

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

Как трябва да се избере константата  $C_n$ , за да имаме  $C_n P_n(1) = 1$ ?

*Упътване.* Приложете формулата на Лайбниц за произведението  $(x-1)^n(x+1)^n$ .

*Отговор.*  $C_n = \frac{1}{2^n \cdot n!}$ .

24. Докажете, че функцията  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  монотонно намалява при  $0 < x \leq \pi$ .

*Решение.* Изучаваме знака на производната

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

Тъй като знаменателят  $x^2$  е положителен, достатъчно е да изследваме знака на числителя

$$g(x) = x \cos x - \sin x.$$

От друга страна,

$$g'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x,$$

т. е. при  $0 < x \leq \pi$  имаме  $g'(x) \leq 0$ . Това показва, че функцията  $g(x)$  монотонно намалява в интервала  $0 < x \leq \pi$ . И така при  $0 < x \leq \pi$  имаме

$$g(x) < g(0) = 0,$$

откъдето заключаваме, че производната  $f'(x)$  е отрицателна и следователно функцията  $f(x)$  е монотонно намаляваща.

25. Докажете, че функцията  $\frac{x}{1+x^2}$  расте монотонно в интервала  $[-1, 1]$  и намалява монотонно както в безкрайния интервал  $x \geq 1$ , така и в безкрайния интервал  $x \leq -1$ .

26. Изследвайте кога расте и кога намалява функцията

$$x^3 - 3x^2 + 24.$$

27. Нека  $n$  е едно цяло положително четно число. Докажете, че при всички стойности на  $x$  е в сила неравенството

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

*Решение.* Образуваме си помощната функция

$$\varphi(x) = (1+x)^n - 1 - nx.$$



Очевидно имаме

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= n(1+x)^{n-1} - n, \\ \varphi''(x) &= n(n-1)(1+x)^{n-2}.\end{aligned}$$

Тъй като  $n-2$  е четно число, то при всички стойности на  $x$  имаме  $\varphi''(x) \geq 0$ , което показва, че функцията  $\varphi'(x)$  монотонно расте. И така при  $x \geq 0$  имаме  $\varphi'(x) \geq \varphi'(0) = 0$ , а при  $x \leq 0$  имаме  $\varphi'(x) \leq \varphi'(0) = 0$ . Това показва, че функцията  $\varphi(x)$  расте при  $x \geq 0$  и намалява при  $x \leq 0$ , т. е. неравенството  $\varphi(x) \geq \varphi(0)$  е изпълнено както при  $x \geq 0$ , така и при  $x \leq 0$ .

От неравенството  $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$  получаваме

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

28. Нека  $n \geq 1$ . Докажете, че при  $x \geq -1$  е валидно неравенството

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

29. Докажете, че при  $x \geq 0$  е в сила неравенството

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

*Упътване.* Разгледайте помощната функция

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

30. Докажете, че при всички стойности на  $x$  е в сила неравенството

$$(-1)^{n-1} \left[ \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right] \geq 0$$

и при  $x \geq 0$  е в сила неравенството

$$(-1)^{n-1} \left[ \sin x - \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \geq 0$$

каквото и да е цялото положително число  $n$ .

*Упътване.* Извършете доказателството индуктивно, като изучите производните на двете функции

$$\begin{aligned}f(x) &= (-1)^{n-1} \left[ \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right], \\ g(x) &= (-1)^{n-1} \left[ \sin x - \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right].\end{aligned}$$

31. Докажете, че при  $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$  е в сила неравенството

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}.$$

32. Докажете, че ако  $x > 0$ , то  $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ .

*Упътване.* Изучете производната на функцията

$$\varphi(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}.$$

33. Докажете, че ако  $x > -1$ , то  $\ln(1+x) \leq x$ .

34. Докажете, че ако  $x > -1$  и ако цялото положително число  $n$  е нечетно, то

$$\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n}.$$

35. Докажете, че при всички стойности на  $x$  е в сила неравенството  $xe^{1-x} \leq 1$ .

*Упътване.* Докажете, че функцията  $f(x) = xe^{1-x}$  расте в интервала  $x \leq 1$  и намалява в интервала  $x \geq 1$ .

36. Докажете, че при всички стойности на  $x$  е в сила неравенството  $e^x \geq 1+x$ .

*Решение.* Прилагаме към функцията  $e^x$  формулата на Маклорен и представяме остатъчния член към формата на Лагранж

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Като вземем пред вид, че изразът  $\frac{x^2 e^{\theta x}}{2!}$  е неотрицателен и е нула само при  $x = 0$ , заключаваме, че

$$e^x \geq 1+x,$$

където равенството се достига само при  $x = 0$ .

37. Докажете, че при всички стойности на  $x$  и при нечетни стойности на  $n$  имаме

$$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

38. Намерете Маклореновото развитие на функцията  $e^x \cos x$ .

*Отговор.*

$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi n}{4}}{n!} x^n.$$

Изучавайки остатъчния член, заключаваме, че това развитие представлява функцията при всички стойности на  $x$ .

39. Да разгледаме функцията  $f(x)$ , дефинирана по следния начин:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ при } x \neq 0, \\ f(0) = 0.$$

Докажете, че функцията  $f(x)$  е диференцируема безбройно много пъти при всички стойности на  $x$  (включително и  $x = 0$ ) и всичките нейни производни

$$f(0), f'(0), f''(0), \dots$$

при  $x = 0$  имат стойност нула.

*Забележка.* По този начин ние получаваме пример за една функция, чийто Тейлоров ред

$$f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots$$

е сходящ при всяко  $x$ , без да представлява функцията.

*Упътване.* Функцията е очевидно диференцируема безбройно много пъти при  $x \neq 0$ . Покажете, че при  $x \neq 0$

$$f^{(n)}(x) = P_n \left( \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

където  $P_n(u)$  е един полином на  $u$ . Докажете индуктивно, че функцията  $f(x)$  е диференцируема безбройно много пъти в началото и  $f^{(n)}(0) = 0$ , като се възползвате от дефиницията на понятието производна

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P_n\left(\frac{1}{h}\right) e^{-\frac{1}{h^2}} = 0.$$

40. Нека функцията  $f(x)$  е два пъти диференцируема в някой интервал и втората ѝ производна е нула във всяка точка на този интервал. Докажете, че  $f(x)$  е линейна функция на  $x$ .

*Решение.* Дадено е, че във всички точки на разглеждания интервал  $f''(x) = 0$ . От това заключаваме, че  $f'(x)$  е константа (понеже производната на  $f'(x)$  е равна на нула в целия интервал). Да означим с  $a$  тази константа. И така за всяко  $x$  от разглеждания интервал имаме  $f'(x) = a$ , което може да се напише още във вида  $[f(x) - ax]' = 0$ . И така производната на функцията  $f(x) - ax$  е нула във всички точки от разглеждания интервал. Оттук заключаваме, че  $f(x) - ax$  е константа. Като означим с  $b$  тази константа, получаваме  $f(x) - ax = b$  или  $f(x) = ax + b$ .

41. Не е трудно да се види, че при всеки избор на константите  $a$  и  $b$  функцията  $y = (ax + b)e^x$  удовлетворява уравнението

$$(2) \quad y'' - 2y' + y = 0$$

(проверете, че това е действително така!). Докажете, че няма други функции, които са дефинирани и два пъти диференцируеми за всяко  $x$  и които при всяко  $x$  удовлетворяват уравнението (2).

*Упътване.* Нека  $y$  е една функция, която удовлетворява уравнението. Разгледайте помощната функция  $u = ye^{-x}$  и докажете, че втората ѝ производна е нула при всички стойности на  $x$ . Използвайте предната задача.

42. Докажете, че няма други функции освен

$$y = A \cos x + B \sin x,$$

където  $A$  и  $B$  са произволни константи, които са диференцируеми два пъти при всяко  $x$  и удовлетворяват диференциалното уравнение

$$y'' + y = 0.$$

*Упътване.* Образувайте двете помощни функции

$$(3) \quad \begin{aligned} f(x) &= y \cos x - y' \sin x, \\ g(x) &= y \sin x + y' \cos x \end{aligned}$$

и докажете, че  $f'(x) = 0$  и  $g'(x) = 0$ . След това решете системата (3) относно  $y$ , като елиминирате  $y'$ .

43. Нека функцията  $f(x)$  е непрекъсната в затворения интервал  $[a, b]$ , диференцируема е поне във вътрешността му и в двата края на този интервал се анулира. Докажете, че при всеки избор на числото  $\lambda$  може да се намери число  $\xi$  във вътрешността на интервала  $(a, b)$ , за което

$$\lambda f(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

*Упътване.* Приложете теоремата на Рол за функцията

$$\varphi(x) = e^{\lambda x} f(x).$$

44. Нека функцията  $f(x)$  е диференцируема  $n + 1$  пъти в някой интервал  $\Delta$  и  $f^{(n+1)}(x) = 0$  за всяко  $x$  от този интервал. Докажете, че  $f(x)$  е полином в разглеждания интервал, чиято степен не надминава  $n$ .

*Решение.* Формулата на Тейлор ни дава

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n,$$

където

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

45. Докажете, че редът

$$\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots + \frac{1}{n^x} + \dots$$

е сходящ при  $x > 1$  и разходящ при  $x \leq 1$ .

*Забележка.* Ние сме изучавали досега този ред само при цели стойности на  $x$ .

*Упътване.* При  $x > 1$  приложете критерия на Раабс—Дюамел или разсъждавайте например така: да положим

$$S_n = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \dots + \frac{1}{n^x}.$$

В такъв случай

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^x} = \left[ \frac{1}{1^x} + \frac{1}{3^x} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^x} \right] + \left[ \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \dots + \frac{1}{(2n)^x} \right] \\ &< 1 + \frac{S_n}{2^x} + \frac{S_n}{2^x} \end{aligned}$$

и следователно

$$S_n < 1 + \frac{S_n}{2^{x-1}},$$

т. е. при  $x > 1$

$$S_n < \frac{2^{x-1}}{2^{x-1} - 1};$$

при  $x \leq 1$  сравнете реда с хармоничния ред.

46. Докажете, че редицата с общ член

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

е сходяща.

*Упътване.* Докажете, че редът

$$(4) \quad a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) + \dots$$

е сходящ, като установите с помощта на формулата на Тейлор, че

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta}{n}\right)^2}$$

и следователно

$$0 < a_n - a_{n-1} < \frac{1}{n^2}.$$

От сходимостта на реда (4) следва сходимостта на изучаваната редица, защото  $a_n$  е точно  $n$ -тата частична сума на (4).

*Забележка.* Границата на разглежданата редица се означава обикновено с буквата  $C$  и се нарича Euler'ова константа. Нейната числена стойност е

$$C = 0,5772156\dots$$

Досега не е известно дали това число е рационално или ирационално. Константата  $C$  играе важна роля в много въпроси на анализа.

47. Докажете, че при  $|x| \leq 1$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

*Упътване.* Разгледайте функцията

$$(5) \quad f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Покажете, че във вътрешността на интервала  $(-1, 1)$  имаме

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

като използвате Нютоновото развитие на  $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ . По-нататък вземете пред вид, че производната на функцията  $\arcsin x$  при  $|x| < 1$  е също  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  и още, че

$$\arcsin 0 = f(0) = 0.$$

Оттук заключете, че

$$\arcsin x = f(x)$$

при  $|x| < 1$ . За да установите валидността на последното равенство при  $x = \pm 1$ , покажете, че редът (5) е равномерно сходящ в затворения интервал  $[-1, 1]$  и следователно  $f(x)$  е непрекъсната функция. За тази цел покажете, че редът

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1},$$

членовете на който не зависят от  $x$ , е сходящ.

48. Нека

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n$$

са произволни положителни числа, а числата  $p$  и  $q$  удовлетворяват условията  $p > 1$ ,  $q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Докажете, че

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Кога е възможен знакът равенство?

*Забележка.* Това важно неравенство, известно под името неравенство на Хьолдер (Hölder), се обръща в неравенството на Коши–Буняковски–Шварц при  $p = q = 2$  (вж. задача 3 към § 5 на тази глава). Нека припомним обаче, че в неравенството на Коши–Буняковски–Шварц не се иска числата  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$  да бъдат непременно положителни.

*Упътване.* Разгледайте функцията  $f(x) = x^p$  и покажете, че тя е изпъкнала при  $x > 0$ , когато  $p > 1$ . Използвайте неравенството

$$f\left(\sum_{k=1}^n p_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n p_k f(x_k),$$

като поставите

$$x_k = a_k b_k^{-\frac{q}{p}}, \quad p_k = \frac{b_k^q}{b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q}.$$

49. Нека числата

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \\ b_1, b_2, \dots, b_n$$

са положителни и  $p > 1$ . Докажете, че

$$\left[ \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Забележка.* Това неравенство се нарича неравенство на Минковски.

*Решение.* Очевидно имаме

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^n a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^n b_k (a_k + b_k)^{p-1}.$$

Като приложим за двете последни суми неравенството на Хьолдер и положим  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ , получаваме

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p &\leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{(p-1)q} \right]^{\frac{1}{q}} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^{(p-1)q} \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[ \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left[ \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Оттук получаваме исканото неравенство, като съкратам на последния множител.

50. Докажете, че измежду всичките полиноми от  $n$ -та степен, на които коефициентът пред  $x^n$  е равен на 1, само полиномът на Чебишев

$$P(x) = \frac{\cos(n \arccos x)}{2^{n-1}}$$

удовлетворява неравенството

$$|P(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ при } |x| \leq 1.$$

*Забележка.* Вижте задачи 28 и 29 към § 17, глава III, част II. Като разгледате тези задачи, ще се убедите, че наистина при  $|x| \leq 1$  функцията  $P(x)$  е като полином на  $x$  от  $n$ -та степен и коефициентът пред  $x^n$  е равен на 1.

*Упътване.* Не е трудно да се види, че при  $|x| \leq 1$

$$|P(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Тук равенството се достига при  $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$ , където  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , като

$$P(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}.$$

По-интересно е да се види, че няма друг полином  $Q(x)$  от  $n$ -та степен, за който коефициентът пред  $x^n$  е 1 и за който е изпълнено неравенството

$$|Q(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

при  $|x| \leq 1$ . Доказателството извършете от противното. Образувайте си помощния полином

$$\varphi(x) = P(x) - Q(x),$$

степенна на който е очевидно по-малка от  $n$ . Покажете, че

$$(6) \quad (-1)^k \varphi(x_k) \geq 0.$$

Като сравните коефициентите пред  $x^n$  в двете части на интерполационната формула на Лагранж

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \varphi(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \varphi(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots \\ & + \varphi(x_n) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}, \end{aligned}$$

докажете, че

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \frac{\varphi(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots \\ & + \frac{\varphi(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} = 0. \end{aligned}$$

Покажете, че всичките събираеми на тази сума са неотрицателни, като се възползвате от неравенствата (6) и от неравенствата

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n.$$

Използвайте този резултат, за да покажете, че  $\varphi(x)$  се анулира тъждествено.

*Забележка.* Тази теорема на П. Л. Чебишев изразява в същност, че измежду всичките полиноми от дадена степен  $n$ , за които коефициентът пред  $x^n$  е равен на единица, модулет на полинома

$$P(x) = \frac{\cos(n \arccos x)}{2^{n-1}}$$

при  $|x| \leq 1$  има най-малка точна горна граница. Това се изразява понякога накратко, като се казва, че от всичките разглеждани полиноми полиномите на Чебишев се отклоняват най-малко от нулата. Изследванията на П. Л. Чебишев в това направление послужиха за основа на изследванията на многобройни автори, като по този начин беше създадена обширна област от анализа, известна под името конструктивна теория на функциите.

51. Докажете, че при  $0 < x < 2\pi$  имаме

$$\frac{\pi - x}{2} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n} + \dots$$

*Упътване.* Разгледайте помощната функция

$$F(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n} + \frac{x}{2} + \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2}},$$

която е добре дефинирана в отворения интервал  $(0, 2\pi)$ . Изберете числото  $x$  произволно в този интервал и приложете към функцията  $F(x)$  по отношение на интервала  $(x, \pi)$  теоремата на крайните нараствания. Това ще ви даде

$$(7) \quad F(x) - F(\pi) = (x - \pi)F'(\xi),$$

където  $\xi$  е едно число между  $x$  и  $\pi$ . Докажете, че

$$(8) \quad F'(x) = -\frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \cdot \cos\frac{x}{2}}{(4n+2)\sin^2\frac{x}{2}},$$

като предварително установите (например индуктивно), че

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Като се възползвате от равенствата (7) и (8), покажете, че

$$\left| \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n} - \frac{\pi - x}{2} \right| \leq \frac{|x - \pi|}{(4n+2)\sin^2\frac{\xi}{2}} \leq \frac{|x - \pi|}{(4n+2)\sin^2\frac{x}{2}},$$

и приложете дефиницията на понятието сума на един ред.

*Забележка.* Редът

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots$$

играе важна роля в теорията на тригонометричните редове.

52. Нека функцията  $f(x)$  е безбройно много пъти диференцируема и удовлетворява неравенствата

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$$

при  $a < x \leq b$  и при всички цели неотрицателни стойности на  $k$ . Докажете, че функцията  $f(x)$  може да се развие в Тейлоров ред

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(b)(b-x)^\nu}{\nu!}$$

при  $a < x \leq b$  (С. Н. Бернщайн).

*Упътване.* От формулата на Тейлор имаме при  $a < c < x \leq b$

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(x)(x-c)^\nu}{\nu!} + \frac{(-1)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

и следователно

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{f(c)n!}{(x-c)^n}.$$



Използвайте това неравенство, за да покажете, че остатъчният член във формулата

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(b)}{\nu!} (b-x)^\nu + R_n$$

клони към нула при  $c < x \leq b$ . За целта е удобно да използвате представянето

$$R_n = \left( \frac{x-b}{c-b} \right)^{n+1} \frac{(c-\xi)^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!(c-x)}.$$

Полученият резултат е валиден при  $a < x \leq b$ , тъй като  $c$  може да се избере произволно близо до  $a$ .

53. Нека функцията  $f(x)$  е безбройно много пъти диференцуема при  $x > 0$  и удовлетворява неравенствата

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$$

при всички положителни стойности на  $x$  и всички цели неотрицателни стойности на  $k$ . В такъв случай при всички неотрицателни стойности на  $x$  и всички реални стойности на  $\lambda$  имаме

$$\lambda^2 f(x) + 2\lambda f'(x) + f''(x) \geq 0$$

(С. Н. Бернщайн).

*Упътване.* Използвайте, че при  $a < x < b$  и при произволни  $\lambda$  и  $\beta$

$$\begin{aligned} \lambda^2 f(x) + 2\lambda\beta(b-x)f'(x) + \beta^2[(b-x)^2 f''(x) - (b-x)f'(x)] \\ = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu f^{(\nu)}(b) \frac{(b-x)^\nu}{\nu!} (\lambda - \nu\beta)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Фиксирайте  $\lambda$  и  $x$ , положете  $\beta = \frac{1}{b-x}$  и оставете  $b$  да расте неограничено.

54. Нека функцията  $f(x)$  е безбройно много пъти диференцуема при  $x > 0$  и удовлетворява неравенствата

$$0 \leq (-1)^k f^{(k)}(x) \leq e^{-x}$$

при всички положителни стойности на  $x$  и при всички неотрицателни стойности на  $k$ . Докажете, че

$$f(x) = ce^{-x},$$

където  $c$  е константа.

*Упътване.* Приложете предната задача за двете функции  $f(x)$  и  $\varphi(x) = e^{-x} - f(x)$ , като използвате, че

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) \geq 0$$

и

$$\varphi(x) + 2\varphi'(x) + \varphi''(x) \geq 0$$

и следователно

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 0.$$

55. Функция от вида

$$P(\varphi) = a_0 + \sum_{\nu=1}^n (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi)$$

се нарича тригонометричен полином, чийто ред не надминава  $n$ . Докажете, че ако един тригонометричен полином, чийто ред не надминава  $n$ , се анулира за повече от  $2n$  стойности на

аргумента в полуотворения интервал  $-\pi < \varphi \leq \pi$ , то всичките му коефициенти са равни на нула.

*Упътване.* Положете  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$  и като използвате, че

$$\begin{aligned}\cos v\varphi &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \cos(v-1)\varphi - \frac{2t}{1+t^2} \sin(v-1)\varphi, \\ \sin v\varphi &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \sin(v-1)\varphi + \frac{2t}{1+t^2} \cos(v-1)\varphi,\end{aligned}$$

представете  $\cos v\varphi$  и  $\sin v\varphi$  във вида

$$\cos v\varphi = \frac{f(t)}{(1+t^2)^v}, \quad \sin v\varphi = \frac{g(t)}{(1+t^2)^v},$$

където  $f(t)$  и  $g(t)$  са полиноми съответно от степени  $2v$  и  $2v-1$ .

56. Нека

$$P(\varphi) = \sum_{\nu=0}^n (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi)$$

е тригонометричен полином, чийто ред не надминава  $n$ . Да се покаже, че

$$P(\varphi) = a_n \cos n\varphi + \frac{\cos n\varphi}{2n} \sum_{r=1}^{2n} P(\varphi_r) (-1)^r \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_r}{2},$$

където  $\varphi_r = \frac{2r-1}{2n}\pi$  (М. Рис – Riesz).

*Упътване.* Като използвате, че

$$\begin{aligned}(-1)^r \cos n\varphi \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_r}{2} &= \sin n(\varphi - \varphi_r) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_r}{2} \\ &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\varphi - \varphi_r)}{\sin \frac{\varphi - \varphi_r}{2}} - \cos n(\varphi - \varphi_r) \\ &= 2 \left( \frac{1}{2} + \cos(\varphi - \varphi_r) + \cos 2(\varphi - \varphi_r) + \dots + \cos n(\varphi - \varphi_r) \right) - \cos n(\varphi - \varphi_r).\end{aligned}$$

покажете, че функцията

$$F(\varphi) = \frac{\cos n\varphi}{2n} \sum_{r=1}^{2n} P(\varphi_r) (-1)^r \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_r}{2}$$

е тригонометричен полином, чийто ред не надминава  $n$ . Този тригонометричен полином не съдържа  $\cos n\varphi$ , защото  $\cos n\varphi_r = 0$ . Оттук следва, че тригонометричният полином

$$F(\varphi) + F(-\varphi)$$

е най-много от ред  $n-1$ . Покажете, че той съвпада с тригонометричния полином

$$P(\varphi) + P(-\varphi) - 2a_n \cos n\varphi$$

в точките  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n}$  и следователно съвпада с него тъждествено.

Разгледайте тригонометричния полином

$$F(\varphi) - F(-\varphi),$$

чийто ред не надминава  $n$ , и покажете, че той съвпада с тригонометричния полином

$$P(\varphi) - P(-\varphi)$$

в точките  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n}, 0$  и следователно съвпада с него тъждествено. Заключете оттук, че

$$P(\varphi) = a_n \cos n\varphi + F(\varphi).$$

57. Нека

$$P(\theta) = \sum_{\nu=0}^n (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta)$$

е тригонометричен полином, чийто ред не надминава  $n$ . Да се докаже, че

$$P'(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{r=1}^{2n} P(\theta + \varphi_r) \frac{(-1)^{r+1}}{2 \sin^2 \frac{\varphi_r}{2}},$$

където

$$\varphi_r = \frac{2r-1}{2n} \pi$$

(М. Рис — М. Riesz).

*Упътване.* Приложете интерполационната формула от предната задача към тригонометричния полином

$$f(\varphi) = P(\theta + \varphi),$$

диференцирайте по  $\varphi$  и положете  $\varphi = 0$ .

58. Нека тригонометричният полином

$$P(\theta) = \sum_{\nu=0}^n (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta)$$

удовлетворява неравенството

$$|P(\theta)| \leq 1.$$

Покажете, че

$$|P'(\theta)| \leq n,$$

където равенството се достига само при тригонометричните полиноми от вида  $P(\theta) = \sin n(\theta + c)$  ( $c$  е константа) (С. Бернщайн).

*Упътване.* Използвайте интерполационната формула от предната задача.

59. Нека функцията  $f(x)$  е диференцируема при  $a \leq x \leq b$  и нека  $f'(a)f'(b) < 0$ . Да се покаже, че производната  $f'(x)$  се анулира поне веднъж в интервала  $(a, b)$  (Дарбу — G. Darboux).

*Упътване.* Нека например  $f'(a) < 0$  и  $f'(b) > 0$ . Избираме  $h > 0$  толкова малко, че да имаме

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &< 0, \\ \frac{f(b-h) - f(b)}{-h} &> 0. \end{aligned}$$

Разглеждаме непрекъснатата функция

$$\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

в интервала  $[a, b-h]$ . Очевидно  $\varphi(a) < 0$  и  $\varphi(b-h) > 0$  и следователно има точка  $\xi$  в интервала  $(a, b-h)$ , за която  $\varphi(\xi) = 0$ , т. е.

$$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = 0$$

или още  $f'(\xi + \theta h) = 0$ , където  $\theta$  е подходящо число между 0 и 1.

60. Ако редът

$$s = \sum_{v=0}^{\infty} a_v$$

е сходящ, то функцията

$$f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v$$

клони към  $s$ , когато  $x$  клони към 1 чрез стойности, по-малки от 1 (Абел — N. H. Abel).

*Упътване.* Полагаме

$$s_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_v.$$

В такъв случай

$$f(x) = (1-x) \sum_{v=0}^{\infty} s_v x^v$$

и следователно

$$|s - f(x)| \leq (1-x) \sum_{v=0}^{\infty} |s - s_v| x^v.$$

61. Да се докаже, че ако трите реда

$$S' = u_0 + u_1 + u_2 + \dots,$$

$$S'' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots,$$

$$S = u_0 v_0 + (u_1 v_0 + u_0 v_1) + \dots + (u_n v_0 + u_{n-1} v_1 + \dots + u_0 v_n) + \dots$$

са сходящи, то  $S = S'S''$ .

*Упътване.* Приложете теоремата на Мертенс (или пък теоремата на Коши за умножаване на абсолютно сходящи редове) към двата абсолютно сходящи реда

$$u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \dots,$$

$$v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + \dots$$

при  $|t| < 1$  и оставете  $t$  да клони към 1, като използвате предната задача.

62. Нека  $0 < b < 1$ . Очевидно редът

$$F(x) = \sum_{v=0}^{\infty} b^v \cos(a^v \pi x)$$

е равномерно сходящ върху цялата ос  $x$  и следователно представлява непрекъснатата функция на  $x$ . Покажете, че тази непрекъснатата функция няма производна при никое  $x$ , ако  $a$  е достатъчно голямо цяло нечетно число (Вайерщрас).

*Упътване.* Нека  $m$  е цяло положително число. Винаги можем да пишем

$$a^m x = \alpha_m + \xi_m,$$

където  $\alpha_m$  е цяло число и  $|\xi_m| \leq \frac{1}{2}$ . Положете

$$h = \frac{1 - \xi_m}{a^m}$$

и разгледайте отношението

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = S_m + R_m,$$

където

$$S_m = \frac{1}{h} \sum_{\nu=0}^{m-1} b^\nu [\cos a^\nu \pi(x+h) - \cos(a^\nu \pi x)],$$

$$R_m = \frac{1}{h} \sum_{\nu=m}^{\infty} b^\nu [\cos a^\nu \pi(x+h) - \cos(a^\nu \pi x)].$$

Теоремата за крайните нараствания ни дава

$$|S_m| \leq \sum_{\nu=0}^{m-1} b^\nu a^\nu \pi = \pi \frac{a^m b^m - 1}{ab - 1}.$$

От друга страна, при  $\nu \geq m$

$$\cos a^\nu \pi(x+h) = (-1)^{\alpha_{m+1}},$$

$$\cos(a^\nu \pi x) = (-1)^{\alpha_m} \cos(a^{\nu-m} \xi_m \pi)$$

и следователно

$$R_m = \frac{(-1)^{\alpha_{m+1}}}{h} \sum_{\nu=m}^{\infty} b^\nu [1 + \cos(a^{\nu-m} \xi_m \pi)],$$

откъдето

$$|R_m| \geq \frac{b^m}{|h|} = \frac{b^m a^m}{1 - \xi_m} \geq \frac{2a^m b^m}{3},$$

т. е.

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right| \geq |R_m| - |S_m| \geq \frac{(ab)^m (2ab - 2 - 3\pi) + 3\pi}{3(ab - 1)}.$$

Оттук е ясно, че е достатъчно да имаме

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2},$$

за да сме сигурни, че отношението

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

расте неограничено заедно с  $m$ .

63. Да се установи тъждеството

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (\nu - nx)^2 x^\nu (1-x)^{n-\nu} = nx(1-x).$$

*Упътване.* Разгледайте функцията

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} t^\nu (1-x)^{n-\nu} = (t+1-x)^n$$

и пресметнете

$$t\varphi'(t)$$

и

$$t\varphi'(t) + t^2\varphi''(t).$$

Оттук ще получите при  $t = x$

$$\sum_{\nu=0}^n \nu \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = nx,$$

$$\sum_{\nu=0}^n \nu^2 \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = n(n-1)x^2 + nx$$

и следователно

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (\nu - nx)^2 x^\nu (1-x)^{n-\nu} = nx(1-x).$$

64. Всяка непрекъсната в краен и затворен интервал функция  $f(x)$  може да се апроксимира равномерно в този интервал с полиноми (Вайерщрас).

*Упътване.* Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че разглежданият интервал е интервалът  $[0, 1]$ . Покажете, че полиномите на Бернщайн

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^n f\left(\frac{\nu}{n}\right) \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}$$

клонят равномерно към непрекъснатата функция  $f(x)$  в интервала  $[0, 1]$ , когато  $n \rightarrow \infty$ . За целта изберете  $\varepsilon > 0$  и му съпоставете  $\delta > 0$  по такъв начин, че при  $|x_1 - x_2| < \delta$ , да имате

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

След това фиксирайте  $x$  и разгледайте неравенството

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \sum_{\nu=0}^n \left| f\left(\frac{\nu}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

където  $\Sigma_1$  е сумата на онези събираеми от

$$\sum_{\nu=0}^n \left| f\left(\frac{\nu}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu},$$

при които  $\left| \frac{\nu}{n} - x \right| < \delta$ , а  $\Sigma_2$  е сумата на останалите събираеми. Най-сетне използвайте, че

$$\Sigma_1 \leq \varepsilon \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu} = \varepsilon$$

и

$$\Sigma_2 \leq \frac{2M}{\delta^2} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \left(\frac{\nu}{n} - x\right)^2 x^\nu (1-x)^{n-\nu} = \frac{2M}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{n},$$

където  $M$  е една горна граница на  $|f(x)|$ , когато  $x$  се мени в интервала  $[0, 1]$ . Последното неравенство се установява с помощта на предната задача.

65. Да означим с  $K$  множеството от функциите  $f(x)$ , които са монотонно растящи в интервала  $a \leq x \leq b$  и които са нормирани с условието  $f(a) = 0$ . Ще казваме, че една функция от  $K$ , която не е тъждествено нула, е неразложима в  $K$ , ако от

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

където  $g(x)$  и  $h(x)$  принадлежат на  $K$ , следва, че съществуват такива неотрицателни константи  $\lambda$  и  $\mu$ , че

$$g(x) = \lambda f(x) \quad \text{и} \quad h(x) = \mu f(x)$$

при всяко  $x$  от  $[a, b]$ . Намерете функциите, които са неразложими в  $K$ .

*Упътване.* Нека  $f(x)$  е една функция от  $K$ , която не се нулира тъждествено. Покажете, че двете функции

$$g(x) = \frac{f^2(x)}{2f(b)},$$

$$h(x) = f(x) - \frac{f^2(x)}{2f(b)}$$

също принадлежат на  $K$  и използвайте, че

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

Това ще ви даде

$$\frac{f^2(x)}{2f(b)} = \lambda f(x),$$

където  $\lambda$  е константа. По такъв начин  $f(x)$  удовлетворява квадратно уравнение и следователно не може да има повече от две различни функционални стойности. Тъй като обаче функцията  $f(x)$  не се анулира тъждествено и същевременно  $f(a) = 0$ , то тя трябва да приема точно две различни стойности. Покажете, че и обратното е вярно, т. е. ако една функция от  $K$  има точно две функционални стойности, то тя е неразложима в  $K$ . Как изглежда графиката на такава функция?

## Част III

# ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ НА НЯКОЛКО НЕЗАВИСИМИ ПРОМЕНЛИВИ

## Глава I

### ФУНКЦИИ НА НЯКОЛКО НЕЗАВИСИМИ ПРОМЕНЛИВИ

#### § 1. Основни понятия

Много от понятията, които разгледахме досега, могат да бъдат обобщени. Такова обобщаване може да се извърши по различни начини. Така ние въведохме понятието околност на една точка върху една права. Аналогично можем да въведем понятието околност на една точка  $P_0$  в една равнина. Така под кръгова околност на точката  $P_0$  с радиус  $\delta$  (където  $\delta > 0$ ) разбираме множеството от точките  $P$ , разстоянието на които до  $P_0$  е по-малко\* от  $\delta$ . Ако въведем една декартова координатна система и означим с  $(x_0, y_0)$  координатите на  $P_0$ , то координатите  $(x, y)$  на точките  $P$  от разглежданата околност (и само те) удовлетворяват неравенството

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Около една точка  $P_0$  можем да построим безбройно много кръгови околности (с център в точката  $P_0$ ) в зависимост от избора на радиуса.

Познатото ни понятие околност обаче може да се пренесе за двуизмерния случай и другояче. Така всеки квадрат, образуван от точките  $(x, y)$ , които удовлетворяват неравенствата

$$\begin{aligned} |x - x_0| &< \delta, \\ |y - y_0| &< \delta, \end{aligned}$$

се нарича квадратна околност на точката  $(x_0, y_0)$ . Това е квадрат със страна  $2\delta$ , центърът на който се намира в точката  $(x_0, y_0)$  и две от страните му са успоредни на абсцисната ос (а следователно другите му две страни са успоредни на ординатната ос). Към този квадрат не са причислени точките, които лежат върху страните му. Терминът квадратна околност се употребява понякога и за всеки отворен квадрат (т. е. квадрат, към който не са причислени точките от страните му), центърът на който се намира в точката  $(x_0, y_0)$  без

---

\* Нека изрично подчертаем, че се иска разстоянието  $PP_0$  да бъде *по-малко* от  $\delta$ , т. е. към околността не причисляваме контурните ѝ точки.



оглед на неговото разположение по отношение на координатните оси (т. е. и тогава, когато този квадрат не притежава успоредни страни на някоя от координатните оси). Ние няма да си служим с такива околности, освен ако не е казано противното.

В пространството под сферична околност на една точка  $(x_0, y_0, z_0)$  ще разбираме вътрешността на една сфера (без точките от контура ѝ), центърът на която се намира в точката  $(x_0, y_0, z_0)$ . Аналогично всеки куб, определен чрез неравенствата

$$\begin{aligned} |x - x_0| &< \delta, \\ |y - y_0| &< \delta, \\ |z - z_0| &< \delta \\ (\delta > 0), \end{aligned}$$

ще наричаме *кубична околност на точката*  $(x_0, y_0, z_0)$ .

За читателя, който има наклонност към обобщения, ще отбележим, че множеството от всичките системи от  $n$  числа

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

се нарича често пространство с  $n$  измерения (тъй както множеството от всичките двойки числа  $(x, y)$  се нарича равнина или двуизмеримо пространство, а множеството от всички тройки числа  $(x, y, z)$  се нарича триизмеримо пространство). Всяка система от числа  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  се нарича точка от разглежданото пространство, а числата  $x_1, x_2, \dots, x_n$  се наричат нейни координати. Под сферична околност на една точка  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  с радиус  $\delta > 0$  се разбира множеството от всичките точки  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , които удовлетворяват неравенството

$$\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + \dots + (\xi_n - x_n)^2} < \delta.$$

Изразът

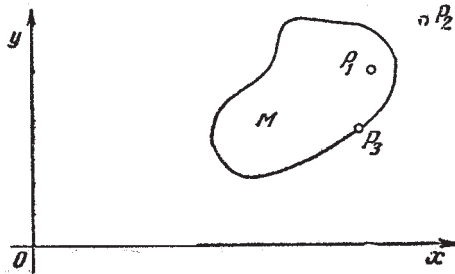
$$\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + \dots + (\xi_n - x_n)^2}$$

се нарича разстояние между двете точки

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad \text{и} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тази терминология ни дава възможност да дефинираме понятието околност по-кратко така. Сферична околност с радиус  $\delta > 0$  на една точка  $P_0$  се нарича множеството на всички точки, разстоянието на които до  $P_0$  е по-малко от  $\delta$ .

За в бъдеще често ще се ограничаваме само с двуизмеримия случай, но резултатите почти винаги ще бъдат в сила и при произволен брой измерения.



Черт. 13

Нека ни е дадено едно точково множество  $M$  в равнината. Една точка  $P_0$  се нарича вътрешна за  $M$ , когато около  $P_0$  може да се построи околност, всичките точки на която принадлежат на  $M$ . Ако около  $P_0$  може да се построи околност, която не съдържа нито една точка от  $M$ , казваме, че  $P_0$  е външна точка за множеството  $M$ . Ако точката  $P_0$  не е нито вътрешна,

нито външна за  $M$  (т.е. ако във всяка околност на  $P_0$  има както точки, принадлежащи на  $M$ , така и точки, принадлежащи на  $M$ ), казваме, че точката  $P_0$  е контурна за това множество. Множеството от контурните точки на едно множество  $M$  се нарича негов контур. На черт. 13 е изобразено едно точково множество  $M$ . Точката  $P_1$  е вътрешна точка за това множество, точката  $P_2$  е външна, а точката  $P_3$  е контурна.

Едно точково множество се нарича затворено, когато към него са причислени всичките му контурни точки (сравнете тази дефиниция с дефиницията на понятието затворен интервал, която дадохме по-рано). Едно точково множество се нарича отворено, когато към него не е причислена нито една от контурните му точки. Разбира се, едно точково множество може да не бъде нито затворено, нито отворено (това се случва, когато някои от контурните му точки са причислени към него, а други не са).

Едно точково множество  $M$  се нарича ограничено, когато може да се намери квадрат (или, ако искате, кръг) с крайни размери, който да съдържа всичките точки на това множество.

Нека  $M$  е едно ограничено точково множество. Да изберем две точки  $P$  и  $Q$  от  $M$  и да означим с  $d$  разстоянието между тях. Това разстояние зависи от избора на точките  $P$  и  $Q$ . Множеството от тези разстояния обаче е ограничено отгоре, понеже множеството  $M$  е ограничено (никое от тези разстояние не може да надмине например диаметъра на един кръг, който съдържа всичките точки на  $M$ ). Точната горна граница на множеството от разстоянията  $d$  (които се получават, когато оставим  $P$  и  $Q$  да се менят в  $M$ ) се нарича *диаметър* на  $M$ . Така диаметърът на една елипса представлява дължината на голямата ѝ ос; диаметърът на един квадрат е равен на дължината на неговия диагонал и пр.

Ние знаем какво значи сходимост на една редица от числа или (което е същото) на една редица от точки върху една права. Сега ще дефинираме

понятието сходимост на една редица от точки

$$(1) \quad P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$$

в една равнина.

За тази цел ще дефинираме предварително понятието точка на съгъстяване на една такава редица. Една точка  $P_0$  се нарича *точка на съгъстяване* на редицата (1), ако във всяка околност на  $P_0$  има безбройно много членове на редицата (1).

Преди да минем по-нататък, ще отбележим, че понятието точка на съгъстяване ни дава възможност да формулираме следната важна особеност, която имат затворените множества. *Ако членовете на една редица*

$$P_1, P_2, P_3, \dots$$

*лежат в едно затворено точково множество  $M$ , то всичките точки на съгъстяване на тази редица също лежат в  $M$ .*

И наистина да допуснем, че разглежданата редица притежава поне една точка на съгъстяване в  $P_0$ , която не принадлежи на  $M$ . В такъв случай точката  $P_0$  е сигурно външна на  $M$ . Действително тя не е вътрешна за  $M$ , защото всяка вътрешна точка на  $M$  принадлежи на това множество. Тя обаче не е контурна, защото множеството  $M$  е затворено и следователно съдържа всичките си контурни точки. И така  $P_0$  не е нито вътрешна, нито контурна за  $M$ , т. е. тя е външна. В такъв случай обаче около  $P_0$  може да се избере околност, която не съдържа нито една точка от множеството  $M$ , а следователно и нито една точка от редицата

$$P_1, P_2, P_3, \dots,$$

нещо, което противоречи на допускането, че  $P_0$  е точка на съгъстяване на тази редица.

Това свойство притежават само затворените точкови множества. И наистина нека имаме едно множество  $N$ , което съдържа точките на съгъстяване на всяка редица от точки, които му принадлежат. Нека  $Q_0$  е контурна точка на  $N$ . В такъв случай във всяка околност на  $Q_0$  има точки от  $N$ . Да означим с  $Q_n$  точка от  $N$ , която се намира в кръгова околност на  $Q_0$  с радиус  $\frac{1}{n}$ , където  $n$  е цяло положително число. По такъв начин получаваме редица от принадлежащи на  $N$  точки

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots,$$

за която  $Q_0$  е точка на съгъстяване. От това следва, че точката  $Q_0$  принадлежи на  $N$ . От направените разсъждения се вижда, че  $N$  съдържа всичките

си контурни точки и следователно е затворено множество. Това характерно свойство на затворените множества се избира често за дефиниционно свойство.

Казваме, че една редица от точки

$$(2) \quad P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$$

е сходяща и клони към  $P_0$ , когато разстоянието  $P_n P_0$  клони към нула. Точката  $P_0$  се нарича граница на редицата (2).

Нека координатите на  $P_n$  са  $(x_n, y_n)$ . Читателят лесно ще докаже сам, че редицата (2) е сходяща тогава и само тогава, когато са сходящи двете редици

$$(3) \quad x_1, x_2, x_3, \dots$$

$$(4) \quad y_1, y_2, y_3, \dots,$$

като редицата (3) клони към абсцисата на границата  $P_0$  на редицата (2), а редицата (4) клони към ординатата на  $P_0$ .

Лесно се вижда, че едно точково множество е затворено тогава и само тогава, когато съдържа границата на всяка сходяща редица от точки, които му принадлежат.

Едно точково множество се нарича компактно, когато е ограничено и затворено.

## § 2. Теорема на Болцано—Вайерщрас (Bolzano—Weierstrass)

Нека е дадена една редица от правоъгълници

$$(1) \quad \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n, \dots,$$

$n$ -тият от които  $\Delta_n$  се дефинира като множество от точки  $(x, y)$ , координатите на които удовлетворяват неравенствата

$$(2) \quad a_n \leq x \leq b_n,$$

$$(3) \quad c_n \leq y \leq d_n.$$

Две от страните на  $\Delta_n$  са успоредни на абсцисната ос, а другите две са успоредни на ординатната ос. Освен това нека отбележим, че към всеки от правоъгълниците  $\Delta_n$  са причислени и контурните му точки (това ние често ще изразяваме накратко, като казваме, че правоъгълниците  $\Delta_n$  са затворени).

Ако всеки един от правоъгълниците  $\Delta_n$  от разглежданата редица (1) съдържа следващия  $\Delta_{n+1}$ , то има поне една точка  $P_0$ , която лежи във всеки един

от правоъгълниците на редицата (1). (Ние поставихме нарочно изискването правоъгълниците  $\Delta_n$  да бъдат затворени, защото не е изключено точката  $P_0$  да се намира по контура на някой от тези правоъгълници.)

За да докажем това, вземаме пред вид, че интервалите (2) са затворени и всеки един от тях съдържа следващия.\*

Оттук заключаваме, че има поне една точка  $x_0$ , която лежи във всеки един от тези интервали, т. е. при всяка цяла положителна стойност на  $n$  са изпълнени неравенствата

$$(4) \quad a_n \leq x_0 \leq b_n.$$

Аналогично се доказва, че има поне една точка  $y_0$ , която удовлетворява неравенствата

$$(5) \quad c_n \leq y_0 \leq d_n$$

при всички цели положителни стойности на  $n$ . Неравенствата (4) и (5) ни учат, че точката  $(x_0, y_0)$ , лежи във всичките правоъгълници  $\Delta_n$ . С това твърдението е доказано.

Ние вече сме запознати с важната теорема на Болцано–Вайерщрас (вж. § 3, глава II, част I). Там ставаше дума за редица от точки, лежащи на една права. Теоремата на Болцано–Вайерщрас обаче е валидна и тогава, когато имаме ограничена редица от точки в едно пространство с произволен брой измерения. Така например в двуизмеримия случай тази теорема може да се формулира по следния начин: *всяка ограничена редица от точки в една равнина притежава поне една точка на съгъстяване.*

Доказателството може да се извърши по следния начин. Нека ни е дадена една ограничена редица

$$(6) \quad P_1, P_2, P_3, \dots$$

от точки в една равнина. Да означим с  $\Delta$  един затворен квадрат със страни, успоредни на съответните координатни оси, който съдържа всичките точки на редицата (6). Такъв квадрат съществува, защото редицата (6) е ограничена. Делим квадрата  $\Delta$  на четири части със средните му линии и означаваме с  $\Delta_1$  една негова четвъртина\*\*, която съдържа безбройно много членове на редицата (6). Такава четвъртина\*\*\* сигурно съществува, защото в противен случай (т. е. в случай, че всяка една от тези четвъртини съдържа най-много

\* Защото всеки един от правоъгълниците  $\Delta_n$  съдържа следващия.

\*\* Към всяка една от четвъртините причисляваме контурните ѝ точки.

\*\*\* Защото всеки един от правоъгълниците  $\Delta_n$  съдържа следващия.

краен брой членове) бихме имали и в квадрата  $\Delta$  само краен брой членове на редицата (6) — нещо което не е вярно, защото  $\Delta$  съдържа безбройно много (всичките) членове на редицата (6). След това делим квадрата  $\Delta_1$  също на четири части с помощта на средните му линии и означаваме с  $\Delta_2$  една негова четвъртина, която съдържа безбройно много членове на редицата (6). Този процес продължаваме неограничено. Така получаваме една редица от затворени квадрати

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots,$$

всеки един от които съдържа следващия. Съгласно това, което ние току-що доказахме, съществува точка  $P_0$ , която лежи във всеки един от тези квадрати. Ще покажем, че  $P_0$  е една точка на сгъстяване на редицата (6). За целта е достатъчно да покажем, че всяка околност на  $P_0$  съдържа безбройно много членове на редицата (6). Нека  $G$  е една околност на  $P_0$ . Всеки един от квадратите  $\Delta_n$  съдържа точката  $P_0$ . От друга страна, дължината на страната на  $\Delta_n$  клони към нула, когато  $n$  расте неограничено. От това заключаваме, че квадратът  $\Delta_n$  сигурно ще лежи изцяло в околността  $G$ , когато индексът  $n$  е достатъчно голям. Това обаче ни осигурява, че в околността  $G$  има безбройно много членове от редицата (6), защото в  $\Delta_n$  има безбройно много членове от тази редица. С това е показано, че  $P_0$  е наистина една точка на сгъстяване за редицата (6).

Като приложение ще покажем, че от всяка ограничена редица от точки

$$(7) \quad P_1, P_2, P_3, \dots$$

може да се избере сходяща подредица.

И наистина съгласно теоремата на Болцано—Вайерщрас редицата (7) има поне една точка на сгъстяване. Нека  $Q$  е една нейна точка на сгъстяване. Построяваме кръгова околност на точката  $Q$  с радиус 1 и избираме член  $P_{n_1}$  от редицата (7), който принадлежи към тази околност. След това разглеждаме околност на точката  $Q$  с радиус  $\frac{1}{2}$  и избираме член  $P_{n_2}$ , който принадлежи на тази околност и за който  $n_2 > n_1$ . Продължаваме този процес и получаваме по такъв начин редицата

$$P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}, \dots,$$

която е подредица на редицата (7), защото

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Тази подредица клони към  $P$ . По такъв начин видяхме, че може да се избере даже такава подредица, която да клони към отнапред избрана точка на сгъстяване на редицата (7).

### § 3. Функции на няколко независими променливи

Нека ни е дадено едно множество  $M$  от точки в равнината  $XOY$ . Казваме, че в множеството  $M$  е дефинирана една функция  $f(x, y)$  на двете независими променливи  $x$  и  $y$ , когато на всяка точка  $(x, y)$  от  $M$  е съпоставено по едно число  $f(x, y)$ . Нека например  $M$  е кръговата област

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

На всяка точка  $(x, y)$  от тази област да съпоставим числото

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

С това ние сме дефинирали една функция  $f(x, y)$  в множеството  $M$ . Обикновено множеството  $M$ , в което е дефинирана една функция, се нарича дефиниционна област на тази функция.

По аналогичен начин се дефинира и понятието функция на три или повече променливи. Така казваме, че е дефинирана една функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в едно множество  $M$  от точки  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , когато на всяка система от числа  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , принадлежаща на  $M$ , е съпоставено по едно число  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

### § 4. Непрекъснатост

Нека  $f(x, y)$  е една функция на двете независими променливи  $x$  и  $y$  и нека  $(x_0, y_0)$  е една точка от дефиниционната област на  $f(x, y)$ . Казваме, че функцията  $f(x, y)$  е непрекъсната в точката  $(x_0, y_0)$ , когато при всеки избор на редицата

$$(1) \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$$

от точки, които принадлежат на дефиниционната област на  $f(x, y)$  и клонят към  $(x_0, y_0)$ , съответната редица от функционални стойности

$$(2) \quad f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3), \dots$$

е сходяща. Впрочем от това следва, че границата на редицата (2) не може да бъде друга освен  $f(x_0, y_0)$ . И наистина, ако редицата

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$$

клонят към  $(x_0, y_0)$ , то редицата

$$(x_1, y_1), (x_0, y_0), (x_2, y_2), (x_0, y_0), (x_3, y_3), (x_0, y_0), \dots$$

е също сходяща и клони към  $(x_0, y_0)$ . От това следва, че редицата

$$(3) \quad f(x_1, y_1), f(x_0, y_0), f(x_2, y_2), f(x_0, y_0), \dots$$

е сходяща. И така двете редици

$$(4) \quad f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots$$

и

$$(5) \quad f(x_0, y_0), f(x_0, y_0), \dots$$

клонят към една и съща граница, защото са подредици на една и съща сходяща редица (3). Като вземем под внимание, че редицата (5) клони към  $f(x_0, y_0)$ , заключаваме, че редицата (4) клони също към  $f(x_0, y_0)$ .

Понятието непрекъснатост може да се дефинира още по следния начин: казваме, че една функция  $f(x, y)$  е непрекъсната в една точка  $(x_0, y_0)$  от дефиниционната си област, когато при всеки избор на положителното число  $\varepsilon$  може да се намери положително число  $\delta$  по такъв начин, че ако точката  $(x, y)$  принадлежи на дефиниционната област на  $f(x, y)$  и удовлетворява неравенствата

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta,$$

то

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Двете дефиниции на понятието непрекъснатост, които даваме, са напълно еквивалентни помежду си. Аналогичен въпрос ние разгледахме в случая на една независима променлива. Направените там разсъждения могат без съществени изменения да се приложат и тук. Предоставяме на читателя сам да обмисли подробностите.

Ако в една функция  $f(x, y)$  на две независими променливи  $x$  и  $y$  фиксираме едната променлива, получаваме функция на една независима променлива. Така

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$

е функция само на  $x$ , а

$$\psi(y) = f(x_0, y)$$

е функция само на  $y$ .

Не е трудно да се види, че от непрекъснатостта на  $f(x, y)$  в точката  $(x_0, y_0)$  следва непрекъснатостта на  $f(x, y_0)$  в точката  $x_0$  и непрекъснатостта на  $f(x_0, y)$  в точката  $y_0$  (за целта може да се използва коя да е от дефинициите на понятието непрекъснатост). Нека обаче изрично подчертаем, че



обратното не е вярно, т. е. от непрекъснатостта на  $\varphi(x) = f(x, y_0)$  в точката  $x_0$  и от непрекъснатостта на  $\psi(y) = f(x_0, y)$  в точката  $y_0$  още не следва непрекъснатостта на  $f(x, y)$  в точката  $(x_0, y_0)$ . Един пример ще ни убеди в това. Нека

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

при

$$x^2 + y^2 \neq 0$$

и

$$f(0, 0) = 0.$$

С това имаме една функция, дефинирана при всички стойности на  $x$  и  $y$ . Да разгледаме двете функции

$$\varphi(x) = f(x, 0) = 0,$$

$$\psi(y) = f(0, y) = 0.$$

Те са непрекъснати навсякъде (защото са константи). Въпреки това функцията  $f(x, y)$  е прекъсната в точката  $(0, 0)$ . За да се убедим в това, избираме редицата от точки

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \dots, \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \dots,$$

която клони очевидно към точката  $(0, 0)$ . В такъв случай

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

и следователно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0),$$

което показва, че функцията  $f(x, y)$  не удовлетворява условието за непрекъснатост в точката  $(0, 0)$ .

## § 5. Свойства на непрекъснатите функции

Много от свойствата на непрекъснатите функции на една независима променлива запазват своята валидност и в случая, когато имаме функция

на няколко независими променливи. Тук ще посочим без доказателства по-важните от тези свойства (доказателството се извършва по същия начин, както в случая на една независима променлива).

*Ако една функция е дефинирана и непрекъсната е едно компактно, т. е. ограничено и затворено точково множество, тя е ограничена\** (и отгоре, и отдолу).

*Ако една функция е дефинирана и непрекъсната е едно компактно, т. е. ограничено и затворено точково множество, тя достига както точната си горна, така и точната си долна граница* (теорема на Вайерщрас).

Най-сетне ще споменем без съответно прецизиране (което е съвсем непосредствено), че непрекъсната функция от непрекъсната функция е непрекъсната. По-специално сума, разлика, произведение и частно (стига знаменателят да не се анулира) от непрекъснати функции е непрекъсната функция.

## § 6. Равномерна непрекъснатост

Нека функцията  $f(x, y)$  е дефинирана в някое точково множество  $M$  и нека  $(x_0, y_0)$  е една точка от  $M$ . Дефиницията на понятието непрекъснатост може да се формулира така: функцията  $f(x, y)$  се нарича непрекъсната в точката  $(x_0, y_0)$ , когато при всеки избор на положителното число  $\varepsilon$  може да се намери положително число  $\delta$  (евентуално зависещо от  $\varepsilon$ ) по такъв начин, че всеки път, когато  $|h| < \delta$ ,  $|k| < \delta$  и точката  $(x_0 + h, y_0 + k)$  принадлежи на дефиниционната област  $M$  на функцията  $f(x, y)$ , да е изпълнено неравенството

$$|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Ако функцията  $f(x, y)$  е непрекъсната във всички точки на множеството  $M$ , ще казваме накратко, че тя е непрекъсната в  $M$ . И така, ако функцията  $f(x, y)$  е непрекъсната в  $M$ , то при всеки избор на положителното число  $\varepsilon$  може да се намери положително число  $\delta(\varepsilon, x, y)$  по такъв начин, че ако  $|h| < \delta$ ,  $|k| < \delta$  и ако точката  $(x + h, y + k)$  принадлежи на  $M$ , да е изпълнено неравенството

$$|f(x + h, y + k) - f(x, y)| < \varepsilon,$$

както и да избираме точката  $(x, y)$  в  $M$ .

Нека подчертаем изрично при това, че в дефиницията не се изключва числото  $\delta$  да се мени, когато изменяме числото  $\varepsilon$  или точката  $(x, y)$ . За да изтъкнем, че се позволява числото  $\delta$  да зависи от  $\varepsilon$ ,  $x$  и  $y$ , ние писахме

\*Една функция се нарича ограничена, когато е ограничено множеството от функционалните ѝ стойности.

$\delta(\varepsilon, x, y)$ . Ако обаче при всеки избор на положителното число  $\varepsilon$  може да се намери положително число  $\delta$ , евентуално зависещо от  $\varepsilon$ , но не и от точката  $(x, y)$  по такъв начин, че ако  $|h| < \delta$ ,  $|k| < \delta$  и ако точката  $(x + h, y + k)$  принадлежи на  $M$ , да е изпълнено и неравенството

$$|f(x + h, y + k) - f(x, y)| < \varepsilon$$

при всеки избор на точката  $(x, y)$  в  $M$ , казваме, че функцията  $f(x, y)$  е *равномерно непрекъсната* в множеството  $M$ .

Подобно на това, което имаме при функции на една независима променлива, и тук е в сила следната теорема:

*Ако една функция  $f(x, y)$  е дефинирана и непрекъсната в едно компактно, т. е. ограничено и затворено точково множество, тя е и равномерно непрекъсната в това множество.*

Доказателството се извършва по същия начин, както в случая на една независима променлива.

Накрая ще отбележим, че ако дефиниционната област  $M$  на една функция е ограничена и затворена, а функцията е непрекъсната навсякъде в дефиниционната си област, то на всяко положително число  $\varepsilon$  може да се съпостави положително число  $\delta$  (евентуално зависещо от  $\varepsilon$ ) по такъв начин, че ако разделим множеството  $M$  на подмножества

$$M_1, M_2, \dots, M_n,$$

диаметрите на които са по-малки от  $\delta$ , осцилацията\* на функцията във всяко едно от тези подмножества да е по-малка от  $\varepsilon$ .

И тук доказателството се извършва по същия начин, както в случая на една независима променлива.

### § 7. Частни производни на функции, зависещи от няколко независими променливи

Нека  $f(x, y)$  е една функция на две независими променливи, дефинирана в някое множество  $M$  от точки в равнината, и нека точката  $(x_0, y_0)$  принадлежи на  $M$ . Ако фиксираме едната от независимите променливи на функцията  $f(x, y)$ , получаваме функция, зависеща само от една независима променлива. Така например функцията

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$

\* Осцилация на една функция се нарича разликата между точната ѝ горна и точната ѝ долна граница.

зависи само от  $x$ . Нека във всяка околност на  $x_0$  има числа  $x$ , различни от  $x_0$ , за които точката с координати  $(x, y_0)$  принадлежи на  $M$ . Това условие е изпълнено например, ако точката  $(x_0, y_0)$  е вътрешна за  $M$ . Да допуснем, че функцията  $\varphi(x)$  има производна в точката  $x_0$  (ние знаем какво значи производна на една функция, която зависи само от една независима променлива). Производната  $\varphi'(x_0)$  се нарича първа частна производна спрямо  $x$  на функцията  $f(x, y)$  в точката  $(x_0, y_0)$ . Това изразяваме обикновено символично, като пишем

$$(1) \quad \varphi'(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Аналогично символът  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$  означава частната производна спрямо  $y$  на функцията  $f(x, y)$  в точката  $(x_0, y_0)$ . По-точно  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$  означава производната  $\psi'(y_0)$  на функцията

$$\psi(y) = f(x_0, y).$$

Така например да разгледаме функцията

$$f(x, y) = xe^y + \sin(xy + y^2),$$

дефинирана с това равенство при всички стойности на  $x$  и  $y$ . В такъв случай

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} &= e^{y_0} + y_0 \cos(x_0 y_0 + y_0^2), \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} &= x_0 e^{y_0} + (x_0 + 2y_0) \cos(x_0 y_0 + y_0^2). \end{aligned}$$

Понякога (когато от това няма да произлязат опасности от недоразумения) ние ще пишем по-кратко

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= e^y + y \cos(xy + y^2), \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= xe^y + (x + 2y) \cos(xy + y^2) \end{aligned}$$

или още по-кратко

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^y + y \cos(xy + y^2), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xe^y + (x + 2y) \cos(xy + y^2). \end{aligned}$$

Този начин на означаване е действително по-кратък, но по-малко точен. Така например в символа  $\frac{\partial f}{\partial x}$  (четете — *де еф де икс*) въобще не са посочени координатите на точката, в която се извършва диференцирането.

В бъдеще ние често ще си служим и с други начини за означаване на частните производни. Така вместо  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$  ние често ще пишем  $f'_x(x_0, y_0)$ , а вместо  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$  ще пишем  $f'_y(x_0, y_0)$ .

Нека изрично подчертаем, че символът  $\frac{\partial f}{\partial x}$  не представлява дроб (при все че има дробна черта).

Аналогично се дефинира понятието частна производна и на функция с три и повече независими променливи. Така под частна производна на  $f(x, y, z)$  спрямо  $x$  се разбира производната на функцията, която се получава, като фиксираме всички независими променливи освен  $x$ . Така под  $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$  се разбира производната  $\varphi'(x_0)$  на функцията

$$\varphi(x) = f(x, y_0, z_0)$$

и пр.

Ние знаем, че от диференцируемостта на една функция на една независима променлива следва нейната непрекъснатост. Не стои така въпросът, когато имаме функция на няколко независими променливи. Ние ще изясним това с един пример. Да разгледаме функцията  $f(x, y)$ , дефинирана по следния начин:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

при  $x^2 + y^2 \neq 0$  и  $f(0, 0) = 0$ . В такъв случай

$$f(x, 0) = 0$$

и

$$f(0, y) = 0.$$

От това заключаваме, че функцията  $f(x, y)$  е диференцируема в началото както частно спрямо  $x$ , така и частно спрямо  $y$ , защото функциите  $f(x, 0)$  и  $f(0, y)$  са константи и следователно са диференцируеми. Въпреки това функцията  $f(x, y)$  е прекъсната в началото, защото

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

и следователно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq f(0, 0).$$

### § 8. Диференциране на съставни функции

Нека двете функции

$$u = f(t), \quad v = g(t)$$

са дефинирани в някоя околност  $\Delta$  на точката  $t_0$ . Ние ще положим за краткост

$$f(t_0) = x_0, \quad g(t_0) = y_0.$$

Нека функцията

$$z = F(x, y)$$

е дефинирана в някоя околност  $D$  на точката  $(x_0, y_0)$ . Ако точката с координати  $[f(t), g(t)]$  не напуска околността  $D$ , когато  $t$  се мени в околността  $\Delta$ , функцията

$$(1) \quad \varphi(t) = F[f(t), g(t)]$$

е дефинирана за всички точки на  $\Delta$ . Нашата цел е да докажем следната теорема, която многократно ще прилагаме в бъдеще:

*Нека функциите  $f(t)$  и  $g(t)$  са диференцируеми в точката  $t_0$ ; нека точката с координати  $(f(t), g(t))$  принадлежи на  $D$ , когато  $t$  принадлежи на  $\Delta$ ; нека функцията  $F(x, y)$  е диференцируема в околността  $D$  както спрямо  $x$ , така и спрямо  $y$ ; нека най-сетне двете първи частни производни на  $F(x, y)$  са непрекъснати в точката  $(x_0, y_0)$ ; при тези предположения функцията  $\varphi(t)$  е диференцируема в точката  $t_0$  и*

$$\varphi'(t_0) = F'_x(x_0, y_0)f'(t_0) + F'_y(x_0, y_0)g'(t_0).$$

Доказателството ще извършим, като изхождаме от дефиницията на понятието производна. За целта разглеждаме отношението

$$\frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h} = \frac{F[f(t_0 + h), g(t_0 + h)] - F[f(t_0), g(t_0)]}{h}.$$

Ако положим

$$(2) \quad \begin{aligned} k &= f(t_0 + h) - f(t_0), \\ l &= g(t_0 + h) - g(t_0) \end{aligned}$$

и вземем пред вид, че  $f(t_0) = x_0$ ,  $g(t_0) = y_0$ , получаваме

$$\begin{aligned} f(t_0 + h) &= x_0 + k, \\ g(t_0 + h) &= y_0 + l, \end{aligned}$$

което ни дава право да пишем

$$\frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h} = \frac{F(x_0 + k, y_0 + l) - F(x_0, y_0)}{h}.$$

Оттук, като прибавим и извадим  $F(x_0, y_0 + l)$ , получаваме

$$\frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h} = \frac{F(x_0 + k, y_0 + l) - F(x_0, y_0 + l)}{h} + \frac{F(x_0, y_0 + l) - F(x_0, y_0)}{h}.$$

Нека обърнем внимание на това, че ние можем да говорим за  $F(x_0, y_0 + l)$ , защото точката  $(x_0 + k, y_0 + l)$ , а следователно и точката  $(x_0, y_0 + l)$  принадлежи на околността  $D$ . Това е вярно както в случая, когато  $D$  е кръгова околност на точката  $(x_0, y_0)$ , така и в случая, когато  $D$  е квадратна околност на тази точка (със страни, успоредни на съответните координатни оси).

Като приложим теоремата за крайните нараствания към функцията

$$p(x) = F(x, y_0 + l),$$

получаваме

$$\begin{aligned} F(x_0 + k, y_0 + l) - F(x_0, y_0 + l) &= p(x_0 + k) - p(x_0) = kp'(x_0 + \theta k) \\ &= kF'_x(x_0 + \theta k, y_0 + l), \end{aligned}$$

където  $\theta$  е едно число, подходящо избрано между 0 и 1. Аналогично, като приложим теоремата за крайните нараствания към функцията

$$q(y) = F(x_0, y),$$

получаваме

$$F(x_0, y_0 + l) - F(x_0, y_0) = lF'_y(x_0, y_0 + \theta_1 l), \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Това ни дава право да пишем

$$\frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h} = \frac{k}{h}F'_x(x_0 + \theta k, y_0 + l) + \frac{l}{h}F'_y(x_0, y_0 + \theta_1 l),$$

откъдето, като вземем пред вид равенствата (2), получаваме

$$(3) \quad \frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} F'_x(x_0 + \theta k, y_0 + l) + \frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h} F'_y(x_0, y_0 + \theta_1 l).$$

По предположение функциите  $f(t)$  и  $g(t)$  са диференцуеми в точката  $t_0$ . Оттук заключаваме, че отношенията

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}, \quad \frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h}$$

клонят съответно към  $f'(t_0)$  и  $g'(t_0)$ , когато  $h \rightarrow 0$ . От диференцируемостта на  $f(t)$  и  $g(t)$  в точката  $t_0$  следва обаче и тяхната непрекъснатост в тази точка. Това ни дава право да твърдим, че

$$k = f(t_0 + h) - f(t_0), \\ l = g(t_0 + h) - g(t_0)$$

клонят към нула заедно с  $h$ . Като вземем най-сетне пред вид, че производните  $F'_x, F'_y$  са непрекъснати функции в точката  $(x_0, y_0)$ , заключаваме, извършвайки граничния преход  $h \rightarrow 0$ , че дясната страна на равенството (3) клони към

$$f'(t_0)F'_x(x_0, y_0) + g'(t_0)F'_y(x_0, y_0).$$

Този резултат ни дава право да твърдим, че функцията  $\varphi(t)$  е диференцуема в точката  $t_0$  и

$$(4) \quad \varphi'(t_0) = F'_x(x_0, y_0)f'(t_0) + F'_y(x_0, y_0)g'(t_0).$$

С това интересувашата ни теорема е доказана.

Така установената теорема представлява в известен смисъл обобщение на теоремата за диференциране на функция от функция, която ние разгледахме по-рано.

Функции от вида (1) ще наричаме съставни функции за разлика от сложните функции, които разгледахме в диференциалното смятане на функции от една независима променлива.

Като използваме означенията

$$u = f(t), \quad v = g(t), \quad z = F(x, y),$$

ние често ще записваме равенството (4) по следния по-кратък, но по-малко прецизен начин:

$$z'_t = F'_u u'_t + F'_v v'_t,$$



или още

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Това правило за диференциране на съставни функции може да се обобщава. Така нека функцията

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

зависи от  $n$  независими променливи  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Нека са дадени освен това  $n$  функции на независимата променлива  $t$ :

$$u_1 = f_1(t), u_2 = f_2(t), \dots, u_n = f_n(t).$$

Образуваме функцията

$$\varphi(t) = F[u_1, u_2, \dots, u_n] = F[f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]$$

на независимата променлива  $t$ . В такъв случай поне когато са изпълнени някои условия, които ние изрично тук няма да формулираме и които читателят лесно може да формулира сам по образаца на случая  $n = 2$ , е в сила следното правило за диференциране:

$$\varphi'(t) = \frac{\partial F}{\partial u_1} \cdot \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \cdot \frac{du_2}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_n} \cdot \frac{du_n}{dt}.$$

### Задачи

Намерете първите частни производни на функциите

1.  $z = xe^{xy} \sin 2y$ .

Отговор.  $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} \sin 2y + xye^{xy} \sin 2y$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 e^{xy} \sin 2y + 2xe^{xy} \cos 2y$ .

2.  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ .

3.  $z = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$ .

4.  $z = \sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ .

5.  $z = x^y$ .

6.  $z = \ln \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$ .

7.  $z = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$  при  $x^2 + y^2 < 1$ ,  $xy > 0$ .

Отговор.  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ .

8.  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

9. Нека функциите  $u = f(x)$  и  $v = g(x)$  са диференцируеми и  $f(x) > 0$ . Намерете първата производна на функцията

$$y = \varphi(x) = u^v.$$

*Решение.* Използуваме правилото за диференциране на съставни функции:

$$\varphi'(x) = \frac{\partial y}{\partial u} u' + \frac{\partial y}{\partial v} v'.$$

Като вземем пред вид, че

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v u^{v-1}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u^v \ln u,$$

намираме

$$\varphi'(x) = v u^{v-1} u' + u^v (\ln u) v'.$$

10. Намерете производната на функцията  $y = x^x$  при  $x > 0$ , като се възползвате от предната задача. Намерете след това производната на  $y$ , като логаритмувате предварително двете части на равенството  $y = x^x$ . Сравнете резултатите.

11. Нека функцията  $f(x, y)$  е дефинирана и диференцируема както частно спрямо  $x$ , така и частно спрямо  $y$  в някоя околност на точката  $(x_0, y_0)$  и нека двете частни производни  $f'_x$  и  $f'_y$  са непрекъснати в точката  $(x_0, y_0)$ . Не е трудно да се види, че функцията

$$\varphi(t) = f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$$

е дефинирана, когато  $t$  е достатъчно малко. Докажете, че функцията  $\varphi(t)$  е диференцируема в точката  $t = 0$  и че

$$\varphi'(0) = \alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta f'_y(x_0, y_0).$$

*Упътване.* Приложете теоремата за диференциране на съставни функции, след като проверите дали са изпълнени условията, при които тя е доказана.

12. Нека функцията  $f(x, y)$  е дефинирана и диференцируема в някоя околност  $\Delta$  на точката  $(x_0, y_0)$  и нека двете частни производни  $f'_x$  и  $f'_y$  са непрекъснати в тази околност. Нека точката  $(x_0 + h, y_0 + k)$  лежи в околността  $\Delta$ . Докажете, че в такъв случай може да се намери число  $\theta$  от отворения интервал  $(0, 1)$ , за което е изпълнено равенството

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k f'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

*Упътване.* Разгледайте помощната функция

$$\varphi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

Покажете, че тази функция е дефинирана и диференцируема в затворения интервал  $[0, 1]$ . Това ще ви позволи да приложите към функцията  $\varphi(t)$  теоремата за крайните нараствания по отношение на интервала  $[0, 1]$ :

$$\varphi(1) - \varphi(0) = (1 - 0)\varphi'(\theta) = \varphi'(\theta),$$

където  $0 < \theta < 1$ . Пресметнете  $\varphi'(\theta)$ , като си послужите с правилото за диференциране на съставни функции. Това ще ви даде

$$\varphi'(\theta) = h f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k f'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

Използувайте най-сетне, че

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= f(x_0 + h, y_0 + k) \\ \varphi(0) &= f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

*Забележка.* Доказаната теорема се нарича понякога теорема за крайните нараствания при функции на две независими променливи. Обобщете тази теорема за случая, когато функцията зависи от произволен брой аргументи.

13. Нека  $u$ ,  $v$  и  $w$  са функции на  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Детерминантата

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

се нарича функционална или Якобиева детерминанта на функциите  $u$ ,  $v$ ,  $w$  спрямо независимите променливи  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и се означава със символа  $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ . Покажете, че при

$$u = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$v = x + y + z,$$

$$w = xy + yz + zx$$

имаме

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = 0.$$

14. Нека

$$u_1 = f_1(x_1, x_2, x_3),$$

$$u_2 = f_2(x_1, x_2, x_3),$$

$$u_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

и

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, t_3),$$

$$x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, t_3),$$

$$x_3 = \varphi_3(t_1, t_2, t_3).$$

Докажете, че поне при известни условия (формулирайте тези условия) имаме

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)}.$$

(Значението на тези символи е изяснено в предната задача.)

## § 9. Хомогенни функции

Нека  $f(x, y)$  е една функция, дефинирана в някоя околност  $\Delta$  на точката  $(x_0, y_0)$ . Казваме, че функцията  $f(x, y)$  е хомогенна от  $n$ -та степен в точката  $(x_0, y_0)$ , когато е изпълнено равенството

$$f(tx_0, ty_0) = t^n f(x_0, y_0)$$

за всички стойности на  $t$ , които се намират в достатъчно малка околност на числото 1.

Казваме, че една функция  $f(x, y)$  е хомогенна от  $n$ -та степен в едно отворено точково множество  $D$ , ако тя е дефинирана и е хомогенна от  $n$ -та степен във всяка точка на множеството  $D$ .

Така например функцията  $x^2 + xy + y^2$  е хомогенна от втора степен в цялата равнина; функцията  $\sqrt{x^2 + y^2}$  е хомогенна от първа степен в цялата равнина; функцията  $\sqrt{x + y}$  е хомогенна от степен  $\frac{1}{2}$  в полуравнината  $x + y > 0$ ; функцията  $\frac{xy}{x^2 + y^2}$  е хомогенна от нулева степен при  $x^2 + y^2 \neq 0$ ; функцията  $\frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$  е хомогенна от степен  $-2$  при  $y \neq 0$  и пр.

Понятието хомогенност може да се обобщи по очевиден начин и за функции на произволен брой независими променливи. Така функцията

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

зависеща от трите аргумента  $x, y, z$ , е хомогенна от първа степен.

Нека функцията  $f(x, y)$  е хомогенна от  $n$ -та степен в точката  $(x_0, y_0)$ . Ако функцията  $f(x, y)$  е диференцируема както частно спрямо  $x$ , така и спрямо  $y$  в някоя околност  $\Delta$  на точката  $(x_0, y_0)$  и ако тези частни производни са непрекъснати в точката  $(x_0, y_0)$ , то е в сила равенството

$$f'_x(x_0, y_0)x_0 + f'_y(x_0, y_0)y_0 = nf(x_0, y_0).$$

За да докажем това, разглеждаме помощната функция

$$\varphi(t) = f(x_0t, y_0t),$$

която е дефинирана за всички стойности на  $t$ , които са достатъчно близки до 1. Не е трудно да се провери, че тук са налице за точката  $t = 1$  всичките условия, при които ние изведохме правилото за диференциране на съставни функции (вижте предния параграф). Това ни дава право да твърдим, че функцията  $\varphi(t)$  е диференцируема в точката  $t = 1$  и

$$(1) \quad \varphi'(1) = f'_x(x_0, y_0)x_0 + f'_y(x_0, y_0)y_0.$$

От друга страна, условието за хомогенност ни дава

$$f(x_0t, y_0t) = t^n f(x_0, y_0),$$

т. е.

$$\varphi(t) = t^n f(x_0, y_0).$$

Това ни позволява да твърдим, че

$$(2) \quad \varphi'(1) = nf(x_0, y_0).$$

Като сравним двете равенства (1) и (2), получаваме

$$f'_x(x_0, y_0)x_0 + f'_y(x_0, y_0)y_0 = nf(x_0, y_0).$$

Това равенство се нарича тждество на Ойлер (L. Euler).

#### Задачи

1. Нека функцията  $f(x, y)$  е дефинирана в някоя околност на началото, нека в началото е хомогенна и нека степента ѝ е различна от нула. Докажете, че  $f(0, 0) = 0$ .

*Решение.* За всички стойности на  $t$ , достатъчно близки до 1, имаме

$$f(t0, t0) = t^n f(0, 0),$$

откъдето  $f(0, 0) = t^n f(0, 0)$  и най-сетне  $(1 - t^n)f(0, 0) = 0$ .

2. Докажете, че тждеството на Ойлер е в сила (при съответните предположения) и за хомогенни функции, които зависят от повече от два аргумента.

3. Проверете чрез директно пресмятане на производните, че е в сила тждеството на Ойлер за следните хомогенни функции:

$$u = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz,$$

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$z = \sin \frac{x+y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$u = \frac{x}{y} e^{\frac{x}{y}}.$$

### § 10. Тотален диференциал

Нека функцията  $z = f(x, y)$  е диференцируема както частно спрямо  $x$ , така и частно спрямо  $y$  в някоя точка. Под *тотален диференциал*  $dz$  на функцията  $z$  в тази точка разбираме линейната комбинация

$$(1) \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} \lambda + \frac{\partial z}{\partial y} \mu,$$

където стойностите на частните производни са пресметнати в разглежданата точка (макар че това изрично не е посочено в равенството (1)), а стойностите на параметрите  $\lambda$  и  $\mu$  се избират едни и същи, както и да избираме

точката, по отношение на която пресмятаме тоталния диференциал, и както и да избираме функцията, чийто тотален диференциал търсим. Ние обаче си запазваме правото да им даваме такива стойности, каквито желаем.

Специално за функцията  $f(x, y) = x$  получаваме

$$dx = 1\lambda + 0\mu = \lambda.$$

Аналогично при  $f(x, y) = y$  намираме

$$dy = \mu.$$

Като се възползуваме от това, че стойностите на параметрите  $\lambda$  и  $\mu$  се избират едни и същи за всички функции, получаваме

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Понятието тотален диференциал може, разбира се, да се въведе и за функции, които зависят от произволен брой аргументи. Така под тотален диференциал  $dz$  на функцията

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

се разбира линейната комбинация

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} \lambda_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \lambda_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \lambda_n,$$

където множителите  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  се избират независимо от разглежданата точка и независимо от разглежданата функция. Като изберем специалната функция  $z = x_k$ , получаваме  $dx_k = \lambda_k$ , което ни дава право да пишем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n,$$

като при това ние се ползуваме от обстоятелството, че се съгласихме да даваме на множителите  $\lambda_k$  едни и същи стойности за всички функции.

Правилата за смятане с тотални диференциали са съвсем аналогични на правилата за смятане с диференциали на функции, които зависят само от един аргумент. Така например, ако  $z = u + v$ , то

$$(2) \quad dz = du + dv,$$

където двете функции  $u$  и  $v$  зависят от  $n$  аргумента  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Доказателството на формулата (2) може да се извърши така:

$$\begin{aligned}
dz &= \frac{\partial z}{\partial x_1} \lambda_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \lambda_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \lambda_n \\
&= \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \lambda_1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \lambda_2 + \cdots + \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} + \frac{\partial v}{\partial x_n} \right) \lambda_n \\
&= \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \lambda_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \lambda_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \lambda_n \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \lambda_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} \lambda_2 + \cdots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \lambda_n \right) \\
&= du + dv.
\end{aligned}$$

Аналогично се доказва, че

$$\begin{aligned}
d(u - v) &= du - dv, \\
d(uv) &= vdu + u dv, \\
d\frac{u}{v} &= \frac{vdu - u dv}{v^2}, \\
df(u) &= f'(u)du \text{ и пр.}
\end{aligned}$$

Ще споменем по-специално следното обобщение на правилото за диференциране на функция от функция. Ако

$$z = f(u_1, u_2, \dots, u_n),$$

където функциите  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , зависят от  $k$  аргумента  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , то при предположенията, при които е в сила теоремата за диференциране на съставни функции,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n} du_n.$$

Извършете сами доказателството, като си послужите с теоремата за диференциране на съставни функции.

Читателят знае как се намират частните производни на една функция, която зависи от няколко аргумента. Ако се търсят всичките първи частни производни, то ние можем да решим тази задача, като диференцираме функцията частно спрямо всеки един от аргументите. Понятието тотален диференциал ни дава възможност да решим тази задача с едно единствено диференциране. Ние ще изясним с един пример как може да се направи това. Да разгледаме например функцията

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad x \neq 0.$$

Правилата, които изведохме преди малко за смятане с тотални диференциали, ни дават

$$dz = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} d\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Като вземем пред вид, че

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

намираме

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Ще се възползуваме сега от свободата да избираме, както желаем, константите  $dx$  и  $dy$ . Ако изберем  $dx = 1$ ,  $dy = 0$ , получаваме

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Ако изберем  $dx = 0$ ,  $dy = 1$ , намираме

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

По този начин тоталният диференциал ни позволи да намерим едновременно двете частни производни  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

### Задачи

1. Намерете с помощта на тоталния диференциал частните производни спрямо  $x$  и  $y$  на следните функции:

a)  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ .

Отговор.  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ .

б)  $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ .

Отговор.  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}$ .

в)  $z = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$ .

2. Намерете с помощта на тоталния диференциал частните производни спрямо  $x$  и  $z$  на следните функции:

a)  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ;

б)  $u = \frac{xyz}{x+y+z}$ ;

в)  $u = \sin \sqrt{\frac{x+z}{x-y}}$ .



### § 11. Частни производни от по висок ред

Частните производни  $f'_x$  и  $f'_y$  на една функция  $z = f(x, y)$  на две независими променливи са също функции на две независими променливи (дефинирани, разбира се, само в онези точки, в които функцията  $f(x, y)$  притежава тези частни производни), поради което ние бихме могли да поставим въпроса за съществуване или несъществуване на частните производни на  $f'_x$  и  $f'_y$ . Частната производна на  $f'_x$  спрямо  $x$  се означава със знака  $f''_{xx}$  или  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  (четете — де две зет де икс квадрат), а частната производна на  $f'_x$  спрямо  $y$  се означава със знака  $f''_{xy}$  или  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  (четете — де две зет де икс де игрек). Ако искаме да посочим изрично, че пресмятането на една производна, например  $f''_{xx}$ , се извършва в точката  $(x_0, y_0)$ , ще пишем  $f''_{xx}(x_0, y_0)$  или  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0, y_0)$ . По-точно под  $f''_{xx}(x_0, y_0)$  се разбира производната  $\varphi'(x_0)$  на функцията

$$\varphi(\xi) = f'_x(\xi, y_0).$$

Аналогично се дефинират символите  $f''_{yx}$ ,  $f''_{yy}$ . Така например символът  $f''_{yx}$  означава производната, която получаваме, като диференцираме  $f$  спрямо  $y$  и след това диференцираме  $f'_y$  спрямо  $x$ .

Аналогично се дефинират частните производни от по-висок ред. Така под  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$  (или, както се пише понякога,  $f'''_{xxy}$ ) разбираме  $\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]$ .

С един пример ние ще изясним как става намирането на частните производни от по-висок ред. Да разгледаме функцията

$$z = xe^y + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \text{ при } x \neq 0.$$

В този случай

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-y}{x^2 + y^2} + e^y, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} + xe^y. \end{aligned}$$

Отгук получаваме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + e^y; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + e^y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} + xe^y$$

и пр.

Нека читателят обърне внимание на това, че в разгледания пример имаме  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ . Това явление не е случайно. Както ще видим по-късно,

това равенство е изпълнено винаги, ако производните  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  са непрекъснати (дори, както ще покажем, достатъчно е едната от тях да бъде непрекъсната; точната формулировка на условията, при които ще докажем тази теорема, ще бъде дадена на съответното място). Тук ще покажем с един пример, че условието за непрекъснатост, за което споменахме, е съществено. Ако то не е изпълнено, може да се случи двете производни  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  да имат различни стойности. В това ще се убедим с един пример. Да разгледаме функцията  $f(x, y)$ , дефинирана в цялата равнина по следния начин:

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ при } x^2 + y^2 \neq 0$$

и

$$f(0, 0) = 0.$$

Да разгледаме отношението

$$\frac{f(h, y) - f(0, y)}{h}$$

при  $h \neq 0$ . Като вземем пред вид, че  $f(0, y) = 0$  при всички стойности на  $y$  (включително и в точката  $y = 0$ ), намираме

$$\frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \frac{f(h, y)}{h}.$$

Като вземем още пред вид, че  $h \neq 0$ , получаваме

$$f(h, y) = hy \frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2},$$

откъдето

$$\frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = y \frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2}.$$

Това ни дава право да заключим, че

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = -y$$

както при  $y \neq 0$ , така и при  $y = 0$ . С това ние установихме съществуването на производната  $f'_x(0, y)$  и покажахме, че

$$(1) \quad f'_x(0, y) = -y.$$

Аналогично се показва, че

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, k) - f(x, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} x \frac{x^2 - k^2}{x^2 + k^2} = x,$$

което ни дава

$$(2) \quad f'_y(x, 0) = x$$

при всички стойности на  $x$  (включително и  $x = 0$ ).

Равенствата (1) и (2) ни дават

$$f''_{xy}(0, 0) = -1,$$

$$f''_{yx}(0, 0) = 1,$$

т. е.

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

В разгледания пример двете частни производни  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$  са прекъснати в началото. И наистина при  $\xi \neq 0$  имаме

$$f'_x(\xi, \eta) = \eta \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{4\xi\eta^3}{(\eta^2 + \xi^2)^2},$$

откъдето намираме

$$f''_{xy}(\xi, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f'_x(\xi, k) - f'_x(\xi, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \left( \frac{\xi^2 - k^2}{\xi^2 + k^2} + \frac{4\xi^2 k^2}{(\xi^2 + k^2)^2} \right) = 1,$$

т. е.

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} f''_{xy}(\xi, 0) = 1 \neq f''_{xy}(0, 0),$$

защото, както видяхме,  $f''_{xy}(0, 0) = -1$ . Аналогично се установява прекъснатостта и на  $f''_{yx}$  в началото.

След тези примери ще докажем следната теорема за независимостта на резултата на диференцирането от реда, в който се извършва диференцирането:

Нека функцията  $f(x, y)$  е дефинирана в някоя околност  $\Delta$  на точката  $(x_0, y_0)$ , като във всяка точка от тази околност съществуват производните  $f'_x$ ,  $f'_y$  и  $f''_{xy}$ . Ако производната  $f''_{xy}$  е непрекъсната в точката  $(x_0, y_0)$ , то в тази точка съществува и производната  $f''_{yx}$ , като при това

$$f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0).$$

Преди да пристъпим към доказателството, нека отбележим, че в теоремата не се поставят никакви изисквания за непрекъснатост на производните  $f'_x$ ,  $f'_y$  (иска се само тяхното съществуване във всяка точка на  $\Delta$ ). За производната  $f''_{xy}$  се предполага непрекъснатост само в точката  $(x_0, y_0)$ , обаче нейното съществуване се иска в цялата околност  $\Delta$ . За производната  $f''_{yx}$  пък въобще не се правят никакви предположения. Така например ние не предполагаме съществуването на производната  $f''_{yx}$  в точката  $(x_0, y_0)$ , а ще докажем това.

След тези предварителни бележки преминаваме към доказателството.

За да фиксираме идеите, нека си мислим, че околността  $\Delta$  е квадратна със страни, успоредни на съответните координатни оси, и нека дължината на страната на тази околност е  $2\delta$  (разбира се, разсъжденията протичат без всякакви затруднения и тогава, когато околността  $\Delta$  е кръгова). Образоваме си помощната функция\*

$$\varphi_k(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0),$$

където  $k \neq 0$  и  $|k| < \delta$ . Тази функция е дефинирана и диференцируема при  $|x - x_0| < \delta$ , защото функцията  $f(x, y)$  е диференцируема частно спрямо  $x$  във

\*При съставянето на тази функция ние се ръководим от следните съображения. Дадено е, че съществува производната  $f''_{xy}(x_0, y_0)$ . Обаче

$$\begin{aligned} f''_{xy}(x_0, y_0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f'_x(x_0, y_0 + k) - f'_x(x_0, y_0)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{h} \right]. \end{aligned}$$

Продължава на следващата страница.

всички точки на околността  $\Delta$ . Очевидно имаме

$$\varphi'_k(x) = f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0).$$

Като приложим към функцията  $\varphi_k(x)$  теоремата за крайните нараствания, получаваме

$$\varphi_k(x_0 + h) - \varphi_k(x_0) = h\varphi'_k(x_0 + \theta h) = h[f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)],$$

където  $0 < \theta < 1$ . Засега фиксираме  $h$  и  $k$ . С това добиваме право да разглеждаме и  $\theta$  като фиксирано. Прилагаме теоремата за крайните нараствания към функцията

$$\psi(y) = f'_x(x_0 + \theta h, y)$$

(където  $\theta$  е фиксирано по казания по-горе начин). Ние можем да приложим теоремата за крайните нараствания, защото по предположение функцията  $f(x, y)$  е диференцуема частно спрямо  $y$  във всички точки на околността  $\Delta$  и следователно функцията  $\psi(y)$  е също диференцуема. Това ни дава

$$\psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta_1 k), \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

или

$$f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0) = kf''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k),$$

откъдето

$$(3) \quad \varphi_k(x_0 + h) - \varphi_k(x_0) = hkf''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k).$$

Ние предположихме обаче, че смесената производна  $f''_{xy}$  е непрекъсната в точката  $(x_0, y_0)$ . Това ни позволява да твърдим, че при всеки избор на положителното число  $\varepsilon$  може да се намери положително число  $\eta$  по такъв начин, че при  $|h| < \eta$  и  $|k| < \eta$  да имаме

$$\left| f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k) - f''_{xy}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon,$$

а следователно и

$$\left| \frac{1}{h} \left[ \frac{\varphi_k(x_0 + h)}{k} - \frac{\varphi_k(x_0)}{k} \right] - f''_{xy}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon,$$

Изразът

$$\frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{h},$$

до който достигнахме, представлява диференчното частно на функцията

$$\varphi_k(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0),$$

която образувахме в нашето доказателство.

ако  $h \neq 0$  и  $k \neq 0$ , както се вижда това от равенството (3). Да извършим в последното неравенство граничен преход  $k \rightarrow 0$  при фиксирано  $h$ . Като вземем предвид, че

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi_k(x_0 + h)}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} = f'_y(x_0 + h, y_0), \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi_k(x_0)}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = f'_y(x_0, y_0),\end{aligned}$$

намираме

$$\left| \frac{f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{h} - f''_{xy}(x_0, y_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Този резултат ни учи, че отношението

$$\frac{f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{h}$$

има граница при  $h \rightarrow 0$  и че неговата граница е  $f''_{xy}(x_0, y_0)$ . С други думи, функцията  $f'_y(x, y_0)$  е диференцуема в точката  $x_0$  и производната ѝ в тази точка е равна на  $f''_{xy}(x_0, y_0)$ , т. е. производната  $f''_{yx}(x_0, y_0)$  съществува и е равна на  $f''_{xy}(x_0, y_0)$ .

Внимателният читател ще забележи, че в изложеното доказателство се използва съществуването на производната  $f'_y(x, y)$  само при  $y = y_0$ . По такъв начин би било достатъчно, когато формулирахме теоремата, да поискаме производната  $f'_y(x, y)$  да съществува само в онези точки на  $\Delta$ , чиято ордината е  $y_0$ .

Прилагайки няколко пъти доказаната теорема, можем да докажем, че и при производните от по-висок ред резултатът не зависи от реда, в който извършваме диференцирането, стига съответните частни производни да са непрекъснати. За пример ще покажем, че

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2},$$

като предположим, че всичките частни производни на функцията  $z$  до трети ред включително съществуват и са непрекъснати в някоя околност на разглежданата точка. Като приложим няколко пъти доказаната преди малко теорема, получаваме

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}.$$

Ние предполагаме (за улеснение) непрекъснатостта на *всичките* частни производни до трети ред. Разбира се, толкова много нямаше нужда да се предполага. Изискванията за непрекъснатост могат да се намалят. Това може да стане по различни начини. Покажете един такъв начин.

Всичко това, което изложихме в този параграф, се обобщава без затруднения и за случая, когато имаме функция, която зависи от произволен брой аргументи.

### Задачи

1. Проверете с непосредствено пресмятане на частните производни, че е в сила равенството  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  за следните функции:

$$z = x^y,$$

$$z = xe^{xy}.$$

В следните задачи се иска функциите  $\varphi$  и  $\psi$  да бъдат диференцуеми достатъчен брой пъти.

2. Покажете, че функцията  $z = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$  удовлетворява уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3. Покажете, че функцията  $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$  удовлетворява уравнението

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

4. Покажете, че функцията  $z = \varphi(x+at) + \psi(x-at)$  удовлетворява уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

5. Покажете, че функцията  $z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^{-n} \psi\left(\frac{y}{x}\right)$  удовлетворява уравнението

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = n^2 z.$$

## § 12. Производни от по-висок ред на съставни функции

Нека

$$z = F(u, v),$$

където

$$u = f(t), \quad v = g(t).$$

В този случай  $z$  е функция на  $t$ , която зависи от  $t$  посредством  $u$  и  $v$ . Ние знаем как се намира производната на тази съставна функция, когато са налице условията, при които изведохме правилото за диференциране на съставни функции. Това правило ни дава

$$z' = \frac{\partial F}{\partial u} u' + \frac{\partial F}{\partial v} v'.$$

С помощта на това правило ние можем да намерим и производните от по-висок ред. Така например

$$\begin{aligned} z'' &= \left( \frac{\partial F}{\partial u} u' \right)' + \left( \frac{\partial F}{\partial v} v' \right)' = \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right)' u' + \frac{\partial F}{\partial u} u'' + \left( \frac{\partial F}{\partial v} \right)' v' + \frac{\partial F}{\partial v} v'' \\ &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} u' + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} v' \right) u' + \frac{\partial F}{\partial u} u'' + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} u' + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} v' \right) v' + \frac{\partial F}{\partial v} v'', \end{aligned}$$

откъдето намираме при предположение, че смесените производни са равни помежду си,

$$z'' = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} u'^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} u' v' + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} v'^2 + \frac{\partial F}{\partial u} u'' + \frac{\partial F}{\partial v} v''.$$

След като сме намерили втората производна, можем да намерим третата производна, като диференцираме още веднъж:

$$\begin{aligned} z''' &= \left( \frac{\partial^3 F}{\partial u^3} u' + \frac{\partial^3 F}{\partial u^2 \partial v} v' \right) u'^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} u' u'' + 2 \left( \frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v \partial u} u' + \frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v^2} v' \right) u' v' \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} (u'' v' + u' v'') + \left( \frac{\partial^3 F}{\partial v^2 \partial u} u' + \frac{\partial^3 F}{\partial v^3} v' \right) v'^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} v' v'' \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} u' + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} v' \right) u'' + \frac{\partial F}{\partial u} u''' + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} u' + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} v' \right) v'' + \frac{\partial F}{\partial v} v''' \end{aligned}$$

и пр.

С оглед на нашите нужди ще разгледаме специално случая, когато функциите  $u$  и  $v$  са линейни, т. е. когато те имат вида

$$\begin{aligned} u &= a + ht, \\ v &= b + kt. \end{aligned}$$

В такъв случай при съответните предложения за диференцируемост на функцията  $F(x, y)$  и за непрекъснатост на нейните частни производни получаваме последователно:

$$z' = \frac{\partial F}{\partial u} h + \frac{\partial F}{\partial v} k,$$



$$\begin{aligned}
z'' &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} h + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} k \right) h + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} h + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} k \right) k \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} h k + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} k^2, \\
z''' &= \left( \frac{\partial^3 F}{\partial u^3} h + \frac{\partial^3 F}{\partial u^2 \partial v} k \right) h^2 + 2 \left( \frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v \partial u} h + \frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v^2} k \right) h k + \left( \frac{\partial^3 F}{\partial v^2 \partial u} h + \frac{\partial^3 F}{\partial v^3} k \right) k^2 \\
&= \frac{\partial^3 F}{\partial u^3} h^3 + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial u^2 \partial v} h^2 k + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v^2} h k^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial v^3} k^3, \\
&\dots\dots\dots \\
z^{(n)} &= \frac{\partial^n F}{\partial u^n} h^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n F}{\partial u^{n-1} \partial v} h^{n-1} k + \binom{n}{2} \frac{\partial^n F}{\partial u^{n-2} \partial v^2} h^{n-2} k^2 + \dots + \frac{\partial^n F}{\partial v^n} k^n.
\end{aligned}$$

Този резултат ще записваме често символично по следния начин:

$$z^{(n)} = \left( \frac{\partial}{\partial u} h + \frac{\partial}{\partial v} k \right)^n F.$$

### Задачи

1. Нека функцията  $f(x, y)$  е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни до  $n$ -ти ред включително в някоя околност на точката  $(x_0, y_0)$ . Докажете, че ако функцията  $f(x, y)$  е хомогенна от степен  $k$  в точката  $(x_0, y_0)$ , то е изпълнено равенството

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} x_0 + \frac{\partial}{\partial y} y_0 \right)^n f(x_0, y_0) = k(k-1) \dots (k-n+1) f(x_0, y_0).$$

*Упътване.* Намерете производната  $\varphi^{(n)}(1)$  на функцията

$$\varphi(t) = f(x_0 t, y_0 t)$$

и използвайте, че

$$\varphi(t) = t^k f(x_0, y_0).$$

2. Нека функцията  $f(x, y)$  е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни до  $n+1$ -ви ред включително в някоя околност на точката  $(x_0, y_0)$ , като всичките производни от ред  $n+1$  са равни на нула в тази околност. Докажете, че  $f(x, y)$  е полином на  $x$  и  $y$  в разглежданата околност, степента на който не надминава  $n$ , т. е. че  $f(x, y)$  може да се представи във вида

$$f(x, y) = \sum_{k+i \leq n} \sum a_{ki} \cdot x^k y^i,$$

където  $a_{ki}$  са константи, а индексите  $k$  и  $i$  приемат всевъзможни цели неотрицателни стойности, чиято сума не надминава  $n$ .

*Упътване.* Фиксирайте една точка  $(x, y)$  от разглежданата околност и образувайте помощната функция

$$\varphi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt),$$

където

$$h = x - x_0, \quad k = y - y_0.$$

Покажете, че във формулата на Тейлор

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + R_n$$

остатъчният член

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta), \quad 0 < \theta < 1,$$

е равен на нула, като вземете предвид, че

$$\varphi^{(n+1)}(\theta) = \left( \frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

Покажете, че  $\varphi^{(m)}(0)$  е полином на  $x$  и  $y$ , степента на който не надминава  $m$ , като си послужите с формулата

$$\varphi^{(m)}(0) = \left( \frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k \right)^m f(x_0, y_0).$$

Вземете най-сетне под внимание, че

$$\varphi(1) = f(x, y).$$

### § 13. Тотални диференциали от по-висок ред

Ние дефинирахме тоталния диференциал  $dz$  на една функция  $z = f(x, y)$  с помощта на равенството

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

където  $dx$  и  $dy$  са константи. Тоталният диференциал на функцията  $dz$  се нарича втори тотален диференциал и се означава със символа  $d^2z$ . Така при съответните предположения за диференцируемост на функцията  $f(x, y)$  и за непрекъснатост на нейните частни производни, като вземем пред вид, че  $dx$  и  $dy$  са константи, намираме

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \right) \right] dx + \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \right) \right] dy \\ &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy \right) dx + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy \right) dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2. \end{aligned}$$

Аналогично получаваме

$$d^3z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3,$$

.....

$$d^n z = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \dots + \binom{n}{n} \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n.$$

Този резултат ще запишваме символично по следния начин:

$$d^n z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f.$$

По-рано имахме случай да видим как първият тотален диференциал можеше да се използва за пресмятане на първите производни. Сега ще покажем с един пример как тоталните диференциали от по-висок ред ще могат да се използват за пресмятане на производните от по-висок ред. Нека

$$z = y^2 e^x.$$

В такъв случай

$$dz = 2ye^x dy + y^2 e^x dx,$$

$$d^2 z = 2e^x dy^2 + 2ye^x dx dy + 2ye^x dy dx + y^2 e^x dx^2 \text{ или}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = y^2 e^x dx^2 + 4ye^x dx dy + 2e^x dy^2.$$

В последното равенство ние разполагаме със свободата да избираме  $dx$  и  $dy$  произволно. Ще фиксираме  $dy$ . По такъв начин получаваме едно равенство между два полинома на  $dx$ , което е валидно при всички стойности на  $dx$ . Като се възползуваме от принципа за сравняване на коефициентите при полиномите, получаваме, като положим  $dy = 1$ ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2ye^x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^x.$$

### Задачи

1. Намерете с помощта на тоталните диференциали всички частни производни от втори ред на функциите

$$z = xe^{xy},$$

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

2. Намерете с помощта на тоталните диференциали всички частни производни от трети ред на функциите

$$z = x^3 e^y,$$

$$z = \sin(x+y).$$

3. Намерете с помощта на тоталните диференциали всички частни производни от  $n$ -ти ред на функциите

$$z = e^{ax+by},$$

$$z = xe^y.$$

## § 14. Тейлоров ред при функции на няколко независими променливи

Нека функцията  $f(x, y)$  е дефинирана и притежава непрекъснати частни производни до  $n+1$ -ви ред включително в някое отворено точково множество  $M$ . Непрекъснатостта на самата функция не се предполага. Нека затворената отсечка

$$[(x_0, y_0), (x_0 + h, y_0 + k)]$$

изцяло лежи в  $M$ . Това значи, че всичките точки с координати

$$(x_0 + th, y_0 + tk),$$

където  $t$  се мени в затворения интервал  $[0, 1]$ , принадлежат на  $M$ . При тези предположения е в сила равенството

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f(x_0, y_0) + R_n,$$

където

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

и числото  $\theta$  е избрано по подходящ начин в отворения интервал  $(0, 1)$ . За да докажем това, образуваме помощната функция

$$\varphi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

Тази функция е дефинирана и  $n + 1$  пъти диференцируема в затворения интервал  $[0, 1]$ , както това се вижда от теоремата за диференциране на съставни функции. Въз основа на това ние можем да приложим към функцията  $\varphi(t)$  формулата на Тейлор, което ни дава

$$(1) \quad \varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

Като се възползуваме от правилото за диференциране на съставни функции, получаваме

$$\varphi^{(m)}(0) = \left( \frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k \right)^m f(x_0, y_0), \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta) = \left( \frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

Като вземем пред вид още, че

$$\varphi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k) \quad \text{и} \quad \varphi(0) = f(x_0, y_0),$$

от равенството (1) намираме

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k \right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k \right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k \right)^n f(x_0, y_0) + R_n,$$

където

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

При горните разсъждения ние предполагахме, че частните производни на  $f(x, y)$  са непрекъснати в  $M$ , обаче нищо не предполагахме за непрекъснатостта на самата функция  $f(x, y)$ . Не е трудно да се убедим обаче, че от съществуването на *непрекъснатостта* на първите производни следва непрекъснатостта и на  $f(x, y)$ . И наистина нека  $(x_0, y_0)$  е коя да е точка от  $M$ .

Тъй като множеството  $M$  е отворено, точката  $(x_0, y_0)$  е вътрешна за  $M$  и следователно точките

$$(x_0 + th, y_0 + tk),$$

където  $0 \leq t \leq 1$ , ще принадлежат на  $M$ , щом  $|h|$  и  $|k|$  са достатъчно малки. Използваме формулата на Тейлор при  $n = 0$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k),$$

където  $0 < \theta < 1$ . Оттук се вижда веднага непрекъснатостта на функцията  $f(x, y)$  в точката  $(x_0, y_0)$ , защото, ако оставим точката  $(x_0 + h, y_0 + k)$  да описва произволна редица от точки, клоняща към  $(x_0, y_0)$ , членовете на която принадлежат на  $M$ , съответната редица от стойностите на

$$f(x_0 + h, y_0 + k)$$

ще клони към  $f(x_0, y_0)$ .

В заключение ще споменем, че от теоремата на Тейлор при  $n = 0$ , с която си послужихме сега, се нарича често теорема за крайните нараствания при функции на няколко променливи.

### § 15. Максимум и минимум при функции на две независими променливи

Нека функцията  $f(x, y)$  е дефинирана в някое точково множество  $D$  и нека  $(x_0, y_0)$  е една вътрешна точка за това множество. Казваме, че функцията  $f(x, y)$  притежава локален максимум в точката  $(x_0, y_0)$ , ако в някоя околност на тази точка е изпълнено неравенството

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Казваме, че локалният максимум е строг, ако в някоя околност на точката  $(x_0, y_0)$  е изпълнено равенството

$$f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

само при  $x = x_0$  и  $y = y_0$ . Ако пък в някоя околност на точката  $(x_0, y_0)$  е изпълнено неравенството

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0),$$

казваме, че функцията  $f(x, y)$  притежава локален минимум в тази точка. Казваме, че този локален минимум е строг, ако в някоя околност на точката

$(x_0, y_0)$  равенството се достига само в точката  $(x_0, y_0)$ . Ние и тук често ще си служим с термина локален екстремум, както правихме това, когато разглеждахме функции на една променлива.

Ако една функция  $f(x, y)$  е диференцируема както частно спрямо  $x$ , така и частно спрямо  $y$  в една вътрешна точка  $(x_0, y_0)$  от дефиниционната си област и ако тази функция притежава в точката  $(x_0, y_0)$  локален екстремум, то двете частни производни  $f'_x$  и  $f'_y$  имат стойност нула в разглежданата точка.

Преди да пристъпим към доказателството, нека обърнем внимание на това, че в дефиницията на понятието екстремум не се иска съществуването на частните производни. Така например функцията  $\varphi(x, y)$ , дефинирана с равенството

$$\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

при всички стойности на  $x$  и  $y$ , притежава минимум и началото на координатната система, защото  $\varphi(x, y) \geq 0$ , но  $\varphi(0, 0) = 0$ . Въпреки това тази функция не притежава в началото например частна производна спрямо  $x$ , защото функцията

$$\varphi(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|,$$

както знаем, не е диференцируема в точката  $x = 0$ . В теоремата, която предстои да докажем, се иска обаче от функцията  $f(x, y)$  не само да притежава локален екстремум в точката  $(x_0, y_0)$ , но и да има частни производни в тази точка. Последното условие се налага, за да има въобще смисъл да се питаме каква е стойността на тези частни производни в точката  $(x_0, y_0)$ .

И така нека функцията  $f(x, y)$  има локален екстремум в една вътрешна точка  $(x_0, y_0)$  от дефиниционната си област и нека в тази точка съществуват двете частни производни  $f'_x$  и  $f'_y$ . Трябва да докажем, че

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Ние ще извършим доказателството за случая, когато функцията  $f(x, y)$  притежава локален максимум. Случаят, когато имаме локален минимум, се разглежда по същия начин. Щом функцията  $f(x, y)$  притежава локален максимум в точката  $(x_0, y_0)$ , може да се намери положително число  $\delta$  по такъв начин, че за всички точки от околността

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$$

да е изпълнено неравенството

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Специално, ако изберем  $y = y_0$ , получаваме

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$$

при  $|x - x_0| \leq \delta$ , което ни учи, че функцията

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$

има локален максимум в точката  $x = x_0$ . Функцията  $\varphi(x)$  обаче зависи само от един аргумент и е диференцируема в точката  $x_0$  (последното не означава в същност нищо друго освен това, че функцията  $f(x, y)$  е диференцируема частно спрямо  $x$  в точката  $(x_0, y_0)$ ). Като се възползуваме от това, което знаем за максимумите и минимумите на функциите, които зависят от един аргумент (вж. § 2, глава IV от част II), получаваме

$$\varphi'(x_0) = 0$$

или, което е същото,

$$f'_x(x_0, y_0) = 0.$$

Аналогично се доказва, че  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ .

С това ние получихме едно необходимо условие за съществуване на локален екстремум на диференцируеми функции. Сега ще потърсим достатъчно условие.

Нека функцията  $f(x, y)$  притежава непрекъснати частни производни поне до втори ред в някоя околност  $\Delta$  на точката  $(x_0, y_0)$  и нека

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Ако при тези условия квадратичната форма на  $\lambda$  и  $\mu$

$$(1) \quad f''_{xx}(x_0, y_0)\lambda^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\lambda\mu + f''_{yy}(x_0, y_0)\mu^2$$

е положително дефинитна, функцията  $f(x, y)$  има строг локален минимум в точката  $(x_0, y_0)$ ; ако ли пък квадратичната форма (1) е отрицателно дефинитна, функцията  $f(x, y)$  има строг локален максимум.

Ще разгледаме само случая, когато квадратичната форма (1) е положително дефинитна. Случаят, когато тя е отрицателно дефинитна, се разглежда по същия начин. Имаме да докажем, че функцията  $f(x, y)$  има строг локален минимум в точката  $(x_0, y_0)$ . Да допуснем противното. В такъв случай във всяка околност на точката  $(x_0, y_0)$  ще може да се намери поне една точка  $(x_0 + h, y_0 + k)$ , различна от точката  $(x_0, y_0)$ , за която

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \leq f(x_0, y_0).$$



Това ни дава възможност да изберем редица от точки

$$(x_0 + h_1, y_0 + k_1), (x_0 + h_2, y_0 + k_2), \dots, (x_0 + h_n, y_0 + k_n), \dots,$$

които са различни от точката  $(x_0, y_0)$  и които клонят към тази точка по такъв начин, че да имаме

$$(2) \quad f(x_0 + h_n, y_0 + k_n) \leq f(x_0, y_0).$$

От друга страна, формулата на Тейлор ни дава

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_n, y_0 + k_n) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} (f'_x(x_0, y_0)h_n + f'_y(x_0, y_0)k_n) \\ + \frac{1}{2!} (f''_{xx}(x_0 + \theta_n h_n, y_0 + \theta_n k_n)h_n^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta_n h_n, y_0 + \theta_n k_n)h_n k_n \\ + f''_{yy}(x_0 + \theta_n h_n, y_0 + \theta_n k_n)k_n^2), \end{aligned}$$

където  $0 < \theta_n < 1$ . По такъв начин, като вземем под внимание, че

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

намираме

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_n, y_0 + k_n) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} (f''_{xx}(x_0 + \theta_n h_n, y_0 + \theta_n k_n)h_n^2 \\ + 2f''_{xy}(x_0 + \theta_n h_n, y_0 + \theta_n k_n)h_n k_n + f''_{yy}(x_0 + \theta_n h_n, y_0 + \theta_n k_n)k_n^2), \end{aligned}$$

което заедно с неравенството (2) ни дава

$$(3) \quad f''_{xx}(x_0 + \theta_n h_n, y_0 + \theta_n k_n)h_n^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta_n h_n, y_0 + \theta_n k_n)h_n k_n \\ + f''_{yy}(x_0 + \theta_n h_n, y_0 + \theta_n k_n)k_n^2 \leq 0.$$

Да положим

$$\frac{h_n}{\sqrt{h_n^2 + k_n^2}} = \lambda_n \quad \text{и} \quad \frac{k_n}{\sqrt{h_n^2 + k_n^2}} = \mu_n.$$

Това ние можем да направим, защото точката  $(x_0 + h_n, y_0 + k_n)$  е различна от точката  $(x_0, y_0)$  и следователно  $h_n^2 + k_n^2 \neq 0$ . В такъв случай очевидно

$$(4) \quad \lambda_n^2 + \mu_n^2 = 1,$$

а неравенството (3) добива вида

$$(5) \quad f''_{xx}(x_0 + \theta_n h_n, y_0 + \theta_n k_n) \lambda^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta_n h_n, y_0 + \theta_n k_n) \lambda \mu_n + f''_{yy}(x_0 + \theta_n h_n, y_0 + \theta_n k_n) \mu_n^2 \leq 0.$$

От (4) получаваме

$$|\lambda_n| \leq 1, \quad |\mu_n| \leq 1,$$

т. е. двете редици

$$(6) \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$$

$$(7) \quad \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$$

са ограничени. Да изберем строго растяща редица от цели положителни числа

$$m_1 < m_2 < m_3 < \dots$$

по такъв начин, че двете подредици

$$\lambda_{m_1}, \lambda_{m_2}, \lambda_{m_3}, \dots$$

$$\mu_{m_1}, \mu_{m_2}, \mu_{m_3}, \dots$$

да бъдат сходящи. Това може да стане така: първо избираме от редицата (6) сходяща подредица

$$\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{k_3}, \dots,$$

а след това от редицата

$$\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \mu_{k_3}, \dots$$

избираме сходяща подредица и означаваме с

$$m_1, m_2, m_3, \dots$$

номерата на нейните членове. Да поставим  $m_n$  вместо  $n$  в равенството (4) и неравенството (5). По такъв начин получаваме

$$(8) \quad \lambda_{m_n}^2 + \mu_{m_n}^2 = 1,$$

$$(9) \quad f''_{xx}(x_0 + \theta_{m_n} h_{m_n}, y_0 + \theta_{m_n} k_{m_n}) \lambda_{m_n}^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta_{m_n} h_{m_n}, y_0 + \theta_{m_n} k_{m_n}) \lambda_{m_n} \mu_{m_n} + f''_{yy}(x_0 + \theta_{m_n} h_{m_n}, y_0 + \theta_{m_n} k_{m_n}) \mu_{m_n}^2 \leq 0.$$

Да положим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{m_n} = \lambda_0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{m_n} = \mu_0$$

и да извършим граничен преход в (8) и (9). Така получаваме

$$\lambda_0^2 + \mu_0^2 = 1,$$

$$f''_{xx}(x_0, y_0)\lambda_0^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\lambda_0\mu_0 + f''_{yy}(x_0, y_0)\mu_0^2 \leq 0,$$

което противоречи на допускането, че квадратичната форма (1) е положително дефинитна. С това е установено, че функцията  $f(x, y)$  наистина има локален минимум в точката  $(x_0, y_0)$ .

Ние знаем (вж. § 5, глава IV на част II), че ако

$$\begin{aligned} f''_{xy}(x_0, y_0) - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) &< 0, \\ f''_{xx}(x_0, y_0) &> 0, \end{aligned}$$

то квадратичната форма (1) е положително дефинитна, а ако

$$\begin{aligned} f''_{xy}(x_0, y_0) - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) &< 0, \\ f''_{xx}(x_0, y_0) &< 0, \end{aligned}$$

то тя е отрицателно дефинитна. Това ни дава възможност да формулираме получения резултат още така:

*Ако функцията  $f(x, y)$  е дефинирана и притежава непрекъснати производни до втори ред в някоя околност на точката  $(x_0, y_0)$ , ако*

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

*и*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) < 0,$$

*то в точката  $(x_0, y_0)$  имаме локален екстремум; при  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$  имаме локален минимум, а при  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$  имаме локален максимум.*

Ако функцията  $f(x, y)$  има непрекъснати частни производни до втори ред в някоя околност на точката  $(x_0, y_0)$  и притежава локален минимум в тази точка, то квадратичната форма

$$g(\lambda, \mu) = f''_{xx}(x_0, y_0)\lambda^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\lambda\mu + f''_{yy}(x_0, y_0)\mu^2$$

приема само неотрицателни стойности, каквито и да бъдат стойностите на  $\lambda$  и  $\mu$ . За да докажем това, избираме произволно числата  $\lambda$  и  $\mu$  и разглеждаме помощната функция

$$\varphi(t) = f(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t),$$

която е очевидно дефинирана за всички достатъчно малки стойности на  $t$ . По предположение функцията  $f(x, y)$  има локален минимум в точката  $(x_0, y_0)$ . Това ни дава основание да твърдим, че при всички достатъчно малки стойности на  $t$

$$f(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t) \geq f(x_0, y_0)$$

и следователно

$$\varphi(t) \geq \varphi(0).$$

Последното неравенство ни учи, че функцията  $\varphi(t)$  има локален минимум в точката  $t = 0$  и следователно  $\varphi'(0) = 0$ . От това можем да заключим, че

$$\varphi''(0) \geq 0.$$

И наистина, като се възползуваме от формулата на Тейлор

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1!}\varphi'(0) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(\theta t), \quad 0 < \theta < 1,$$

Като вземем пред вид, че  $\varphi'(0) = 0$ , при достатъчно малки, но различни от нула стойности на  $t$  получаваме

$$\varphi''(\theta t) = \frac{2}{t^2}[\varphi(t) - \varphi(0)] \geq 0$$

и след като извършим граничния преход  $t \rightarrow 0$ , намираме  $\varphi''(0) \geq 0$ . Като вземем пред вид, че

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'_x(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t)\lambda + f'_y(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t)\mu, \\ \varphi''(t) &= f''_{xx}(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t)\lambda^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t)\lambda\mu + f''_{yy}(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t)\mu^2, \end{aligned}$$

при  $t = 0$  добиваме

$$f''_{xx}(x_0, y_0)\lambda^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\lambda\mu + f''_{yy}(x_0, y_0)\mu^2 = \varphi''(0) \geq 0.$$

С това нашето твърдение е доказано. Аналогично се установява, че ако функцията  $f(x, y)$  има локален максимум в точката  $(x_0, y_0)$  (и ако са изпълнени, разбира се, останалите условия), то

$$f''_{xx}(x_0, y_0)\lambda^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\lambda\mu + f''_{yy}(x_0, y_0)\mu^2 \leq 0.$$

Тези разсъждения не ни дават право обаче да заключим, че квадратичната форма

$$g(\lambda, \mu) = f''_{xx}(x_0, y_0)\lambda^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\lambda\mu + f''_{yy}(x_0, y_0)\mu^2$$

е дефинитна, защото не е изключено да имаме  $g(\lambda, \mu) = 0$ , без да имаме  $\lambda = \mu = 0$ .

По този начин получихме още едно необходимо условие за съществуване на локален екстремум, което се отнася обаче за двукратно диференцуеми

функции, частните производни на които са непрекъснати. Този резултат ни дава право да твърдим, че при

$$f''_{xy}(x_0, y_0) - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$$

функцията  $f(x, y)$  сигурно няма локален екстремум в точката  $(x_0, y_0)$ , защото, както знаем, квадратичната форма

$$a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2$$

не си мени знака само когато

$$b^2 - ac \leq 0.$$

В заключение нека подчертаем, че направените разсъждения не ни дават никакво указание за съществуване или несъществуване на екстремум в случая, когато

$$f''_{xy}(x_0, y_0) - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) = 0.$$

В този случай може да имаме, но може и да нямаме екстремум. В това ще се убедим със следните примери:

1. Функцията

$$f(x, y) = x^4 + y^4$$

има минимум в точката  $(0, 0)$ . Въпреки това за нея

$$f''_{xy}(0, 0) - f''_{xx}(0, 0)f''_{yy}(0, 0) = 0.$$

2. За функцията

$$f(x, y) = x^3 - y^3$$

имаме

$$f''_{xy}(0, 0) - f''_{xx}(0, 0)f''_{yy}(0, 0) = 0.$$

Въпреки това тя не притежава екстремум в началото, защото разликата

$$f(x, y) - f(0, 0) = x^3 - y^3$$

си сменя знака във всяка околност на началото.

Ще покажем с един пример как могат да се използват резултатите от изследванията в този параграф за намиране на локални екстремуми на функции, които зависят от два аргумента.

Да разгледаме функцията

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

където  $b^2 - ac \neq 0$ . В такъв случай

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2ax + 2by, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2bx + 2cy.\end{aligned}$$

Тези производни се анулират само в началото, следователно в никоя друга точка не можем да имаме локален екстремум. От друга страна,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2a, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2b, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 2c.\end{aligned}$$

Това ни дава

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(b^2 - ac).$$

И така, ако  $b^2 - ac < 0$ , то разглежданата функция притежава локален екстремум в точката  $(0, 0)$ . Когато  $a < 0$ , имаме локален максимум, а когато  $a > 0$ , имаме локален минимум. Ако  $b^2 - ac > 0$ , то разглежданата функция няма локален екстремум. В този случай повърхнината с уравнение

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

е хиперболичен параболоид и точката  $(0, 0)$  е седловидна точка върху него.

### Задачи

1. Намерете локалните екстремуми на функцията

$$z = x^3 - y^3 - 3x + 3y.$$

*Отговор.* В точката  $(1, -1)$  имаме локален минимум, а в точката  $(-1, 1)$  — локален максимум.

2. Покажете, че функцията

$$z = 2x^4 + 2y^4 + 4x^2y^2 - 16x + 16y + 1$$

има локален минимум в точката  $(1, -1)$ .

3. Намерете три неотрицателни числа  $x$ ,  $y$  и  $z$ , сумата на които е равна на  $a > 0$ , за които произведението  $xyz$  има най-голяма стойност.

*Решение.* Имаме да намерим най-голямата стойност на функцията

$$f(x, y) = xy(a - x - y),$$

където  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  и  $x + y \leq a$ . Не е трудно да се покаже, че разглежданата функция има един локален максимум, и не е трудно да се намери къде се намира този локален максимум. С това обаче задачата съвсем няма да бъде решена, защото ние знаем, че един локален максимум не е задължен да представлява най-голямата от *всичките* стойности на функцията. Поради това ние ще разсъждаваме другояче. Областта, в която разглеждаме функцията, е ограничена и затворена и според една теорема на Вайерщрас има поне една точка, в която непрекъснатата функция  $f(x, y)$  приема най-голяма стойност. Тази функция приема очевидно в някои точки от разглежданата област съществено положителни стойности. Така например  $f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27} > 0$  и точката  $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$  лежи в интересувашата ни област, защото  $\frac{a}{3} > 0$ ,  $\frac{a}{3} + \frac{a}{3} < a$ . Въз основа на казаното ние можем да твърдим, че най-голямата стойност на функцията  $f(x, y)$  е също съществено положителна; тази най-голяма стойност се достига във вътрешна точка от разглежданата област, защото по контура имаме  $f(x, y) = 0$ , както това читателят лесно ще провери. И така всяка точка  $(x, y)$ , в която  $f(x, y)$  има най-голяма стойност, е вътрешна за разглежданата област и следователно тя е точка на един локален максимум. От това заключаваме, че в разглежданата точка имаме

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= ay - 2xy - y^2 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= ax - x^2 - 2xy = 0. \end{aligned}$$

Като вземем пред вид, че интересувашата ни точка е вътрешна и че следователно  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ , намираме

$$\begin{aligned} a - 2x - y &= 0, \\ a - x - 2y &= 0, \end{aligned}$$

откъдето  $x = \frac{a}{3}$ ,  $y = \frac{a}{3}$ . Максималната стойност на  $f(x, y)$  е следователно  $f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}$ .

4. Дадени са  $n$  точки  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , в равнината  $XOY$  и  $n$  положителни числа  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Да се намери точка  $(x, y)$ , за която сумата

$$S = \sum_{i=1}^n m_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]$$

има най-малка стойност.

*Отговор.*

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

5. Да се докаже, че измежду всички правоъгълни паралелепипеди, вписани в дадена сфера, кубът има най-голям обем.

6. Измежду всички правоъгълни паралелепипеди с дадена пълна повърхнина да се намери онзи, които има най-голям обем.

7. Нека  $G$  е затворено и ограничено точково множество в едно пространство с  $n$  измерения, което има вътрешни точки. Нека  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  е непрекъснатата функция в  $G$ , която притежава частни производни от първи ред спрямо всичките независими променливи във всички вътрешни точки на  $G$ . Ако  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  е константа върху контура на  $G$ , то има поне една вътрешна за  $G$  точка  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , в която

$$f'_{x_1}(a_1, a_2, \dots, a_n) = f'_{x_2}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \dots = f'_{x_n}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0.$$



**Глава II**  
**НЕЯВНИ ФУНКЦИИ**

**§ 1. Основни понятия**

Нека  $F(x, y)$  е една функция и нека  $M$  е нейната дефиниционна област. Казваме, че функцията  $\varphi(x)$  е една неявна функция, определена от уравнението

$$F(x, y) = 0,$$

когато:

1) точката с координати  $[x, \varphi(x)]$  се намира в дефиниционната област  $M$  на  $F(x, y)$ , както и да избираме  $x$  от дефиниционната област на  $\varphi(x)$ ;

2) при всички стойности на  $x$  от дефиниционната област на  $\varphi(x)$  е изпълнено равенството

$$F[x, \varphi(x)] = 0.$$

Ние ще изясним смисъла на тази дефиниция с няколко примера. Да разгледаме функцията  $F(x, y)$ , дефинирана с условието

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

в цялата равнина. В такъв случай функцията  $\varphi(x)$ , дефинирана с равенството  $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$  при  $-1 \leq x \leq 1$ , е една неявна функция, която се определя от уравнението  $F(x, y) = 0$ . И наистина точката с координати  $[x, \varphi(x)]$  сигурно лежи в дефиниционната област на  $F(x, y)$ , защото функцията  $F(x, y)$  е дефинирана в цялата равнина. Освен това при всички стойности на  $x$ , за които функцията  $\varphi(x)$  е дефинирана, имаме

$$F(x, \varphi(x)) = x^2 + \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 = x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0.$$

Ние можем обаче да си образуваме и други функции, които се определят като неявни от същото уравнение  $F(x, y) = 0$ . И наистина нека  $\varepsilon(x)$  е една произволна функция, която е дефинирана в някое подмножество  $R$  на интервала  $[-1, 1]$  и приема само стойностите  $+1$  и  $-1$ . Всяка функция  $\psi(x)$ , дефинирана с равенството

$$\psi(x) = \varepsilon(x) \sqrt{1 - x^2}$$

в множеството  $R$ , е една неявна функция, която се определя от уравнението  $F(x, y) = 0$ , защото

$$F[x, \varphi(x)] = x^2 + \left[\varepsilon(x) \sqrt{1 - x^2}\right]^2 - 1 = x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0.$$

Като друг пример може да ни послужи понятието обратна функция. И наистина нека  $f(y)$  е една функция и нека  $\varphi(x)$  е една нейна обратна функция. Читателят знае от дефиницията на понятието обратна функция, че при всички стойности на  $x$  от дефиниционната област на  $\varphi(x)$  имаме

$$f[\varphi(x)] = x$$

или, което е същото,

$$x - f[\varphi(x)] = 0,$$

като точката  $\varphi(x)$  не напуска никоя път дефиниционната област на  $f(y)$ .

Това обаче означава, че функцията  $\varphi(x)$  е една неявна функция, която се определя от уравнението

$$x - f(y) = 0.$$

Нека обърнем внимание на читателя, че далеч не всяко уравнение  $F(x, y) = 0$  определя неявни функции. Нека например при всички стойности на  $x$  и  $y$  имаме  $F(x, y) = 1$ . В такъв случай на уравнението  $F(x, y) = 0$  не отговаря никаква неявна функция по простата причина, че  $F(x, y)$  никъде не се анулира. Разбира се, в този пример бихме могли вместо константата 1 да поставим коя да е функция, която не приема стойност нула. И така на едно уравнение  $F(x, y) = 0$  може да не отговаря нито една неявна функция. Може обаче едно такова уравнение да определя дори безбройно много неявни функции.

Понятието неявна функция може да бъде обобщено. Така ние можем да въведем понятието неявна функция на произволен брой независими променливи. Това става по следния начин. Нека ни е дадено уравнението

$$(1) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0.$$

Казваме, че функцията  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  е една неявна функция, която отговаря на уравнението (1), когато за всички точки  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  от дефиниционната област на  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  е изпълнено равенството

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0,$$

като при това точките  $[x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)]$  не напускат дефиниционната област на  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ , когато точката  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  се мени в дефиниционната област на  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Понятието неявна функция може да се обобщи още по-нататък, като вместо едно уравнение разглеждаме система от уравнения. За простота ние ще разгледаме случая, когато ни са дадени две уравнения

$$(2) \quad \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ G(x, y, z) &= 0, \end{aligned}$$

които свързват  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Казваме, че двете функции

$$\begin{aligned}y &= f(x), \\z &= g(x),\end{aligned}$$

които са дефинирани в едно и също точково множество  $R$ , са неявни функции, отговарящи на системата (2), когато при всички стойности на  $x$  от  $R$  са изпълнени равенствата

$$\begin{aligned}F(x, f(x), g(x)) &= 0, \\G(x, f(x), g(x)) &= 0,\end{aligned}$$

като точката с координати  $[x, f(x), g(x)]$  не напуска дефиниционните области на функциите  $F(x, y, z)$  и  $G(x, y, z)$ , когато  $x$  се мени в  $R$ .

Ние няма да изясняваме по-подробно как става дефинирането на неявни функции, когато броят на уравненията и когато броят на независимите променливи е произволен. Нека читателят сам обмисли подробностите.

## § 2. Диференциране на неявни функции, които зависят от един аргумент

В този параграф ще си поставим за задача да изясним принципите, върху които почива техниката на диференцирането на неявните функции. При това ние няма да формулираме точно условията, при които ще бъдат валидни нашите разсъждения. Читателят ще може сам да направи това, като се възползува от указанията, които ние ще дадем в края на параграфа.

Нека  $y = f(x)$  е една неявна функция, която се определя от уравнението

$$F(x, y) = 0.$$

Да разгледаме функцията\*

$$\varphi(x) = F[x, f(x)].$$

Ние можем да диференцираме тази функция по правилото за диференциране на съставни функции (разбира се, ако са изпълнени условията, при които установихме това правило). По такъв начин получаваме

$$\varphi'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'.$$

---

\*Ние често ще пишем  $F(x, y)$  вместо  $F[x, f(x)]$ . Трябва да напомним в такъв случай, че  $y$  е кратко означение на  $f(x)$ , а не е независима променлива. При такова означение изразът  $F(x, y)$  е една съставна функция на  $x$ , която зависи от  $x$  непосредствено и посредством  $y$ .

От друга страна,  $\varphi(x)$  е константа (нейната стойност е нула), защото  $f(x)$  е една неявна функция, която се определя от уравнението  $F(x, y) = 0$ . Оттук заключаваме, че  $\varphi'(x) = 0$  и следователно

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0.$$

Като решим това уравнение относно  $y'$ , намираме

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

ако, разбира се,  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ . По този начин ние намерихме един израз за производната  $y'$  на неявната функция  $y = f(x)$ .

Аналогично, пак като се ползуваме от правилото за диференциране на съставни функции, ние можем да намерим  $y''$ . Това може да стане по следния начин: като вземем пред вид, че  $\frac{\partial F}{\partial x}$  и  $\frac{\partial F}{\partial y}$  зависят от  $x$  непосредствено и посредством  $y$ , получаваме с помощта на правилото за диференциране на съставни функции

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y', \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'; \end{aligned}$$

пресмятаме производната  $\psi'(x)$  на функцията

$$\psi(x) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$$

и получаваме

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' \right) + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y' \right) y' + \frac{\partial F}{\partial y} y'' \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y''; \end{aligned}$$

като имаме предвид, че  $\psi(x)$  е константа (равенството (1) ни учи, че  $\psi(x) = 0$ ), получаваме  $\psi'(x) = 0$  или, което е същото,

$$(2) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0.$$

От това равенство определяме  $y''$ , стига да имаме  $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ . Аналогично можем да пресметнем  $y'''$ . За тази цел диференцираме двете части на равенството (2) спрямо  $x$  и получаваме

$$\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} y'\right) + 2 \left[\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial x} + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} y'\right] y' + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y'' + \left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} y'\right) y'^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot 2y' y'' + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'\right] y'' + \frac{\partial F}{\partial y} y''' = 0$$

или

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} y' + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} y'^3 + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y' y'' + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y'' + \frac{\partial F}{\partial y} y''' = 0.$$

Аналогично намираме  $y^{IV}$  и пр.

Разсъжденията, които направихме досега, се извършваха, без да се посочват условията за тяхната валидност. В случая, когато се търси първата производна на функцията  $y = f(x)$  в точката  $x_0$ , ние можем да формулираме по следния начин една система от достатъчни условия, за да могат да се извършат пресмятанятията, за които говорихме по-горе: за функцията  $F(x, y)$  се иска да бъде дефинирана в някоя околност  $\Delta$  на точката  $(x_0, y_0)$ , където сме положили  $y_0 = f(x_0)$ , да има частни производни  $F'_x$  и  $F'_y$  в  $\Delta$ , които да бъдат непрекъснати в точката  $(x_0, y_0)$ ; за неявната функция  $f(x)$ , която е определена от уравнението  $F(x, y) = 0$ , достатъчно е да искаме да бъде дефинирана в някоя околност на точката  $x_0$  и да бъде диференцируема при  $x = x_0$ . В такъв случай правилото за диференциране на съставни функции ни дава

$$F'_x(x_0, y_0) + F'_y(x_0, y_0) f'(x_0) = 0.$$

Ако искаме да делим с  $F'_y(x_0, y_0)$ , трябва да искаме още това число да бъде различно от нула.

Тези условия са само достатъчни за валидността на горните пресмятания. Те не са необходими.

Накрая ще отбележим, че ако производните  $F'_x$  и  $F'_y$  са непрекъснати не само в точката  $(x_0, y_0)$ , но и в някоя околност на тази точка и ако  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , то не е нужно да се иска от функцията  $f(x)$  да бъде диференцируема. Достатъчно е да се иска тази функция да бъде дефинирана в някоя околност на точката  $x_0$  и *непрекъсната* в тази околност. От това вече следва нейната диференцируемост във всяка достатъчно малка околност  $D$  на точката  $x_0$ . И наистина нека  $x_1$  е една точка от  $D$ . Ако положим

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = k \text{ и } f(x_1) = y_1,$$

получаваме с помощта на теоремата на Тейлор за функции на две променливи

$$F(x_1 + h, y_1 + k) = F(x_1, y_1) + F'_x(x_1 + \theta h, y_1 + \theta k)h + F'_y(x_1 + \theta h, y_1 + \theta k)k,$$

където  $0 < \theta < 1$ . Като вземем пред вид, че

$$F(x_1 + h, y_1 + k) = F(x_1, y_1) = 0,$$

намираме

$$\frac{k}{h} = -\frac{F'_x(x_1 + \theta h, y_1 + \theta k)}{F'_y(x_1 + \theta h, y_1 + \theta k)}$$

или още

$$(3) \quad \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = -\frac{F'_x(x_1 + \theta h, y_1 + \theta k)}{F'_y(x_1 + \theta h, y_1 + \theta k)},$$

тъй като

$$k = f(x_1 + h) - f(x_1).$$

Да извършим в равенството (3) граничния преход  $h \rightarrow 0$ . В такъв случай от непрекъснатостта на  $f(x)$  при  $x = x_1$  заключаваме, че  $k \rightarrow 0$ . От друга страна,  $F'_y(x_1, y_1) \neq 0$ , стига околността  $D$  да е достатъчно малка, защото частната производна  $F'_y(x, y)$  е непрекъсната и  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Като вземем под внимание това обстоятелство и се възползуваме от непрекъснатостта на частните производни  $F'_x$  и  $F'_y$ , заключаваме, че изразът

$$\frac{F'_x(x_1 + \theta h, y_1 + \theta k)}{F'_y(x_1 + \theta h, y_1 + \theta k)}$$

притежава граница, когато  $h \rightarrow 0$ , и тази граница е

$$-\frac{F'_x(x_1, y_1)}{F'_y(x_1, y_1)}.$$

Полученият резултат ни дава право да твърдим, че отношението

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

също има граница, когато  $h$  клони към нула, т. е. функцията  $f(x)$  е диференцируема в точката  $x_1$  и

$$f'(x_1) = -\frac{F'_x(x_1, y_1)}{F'_y(x_1, y_1)}.$$

### Задачи

1. Намерете  $y'$ , като знаете, че  $y$  е една диференцируема функция на  $x$ , която удовлетворява уравнението

$$x^2 + y^2 = 1.$$

*Забележка.* За да се убедим в съществуването на такива функции, достатъчно е да решим уравнението относно  $y$ . Така например функцията  $y = \sqrt{1 - x^2}$  има исканото свойство. Очевидно и  $y = -\sqrt{1 - x^2}$  е една такава функция. Не е трудно да се намерят *всичките* диференцируеми функции в отворения интервал  $(-1, 1)$ , които удовлетворяват уравнението

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Очевидно всяка такава функция може да се представи във вида

$$y = \varepsilon(x) \sqrt{1 - x^2},$$

където функцията  $\varepsilon(x)$  приема само стойностите 1 и  $-1$ . От друга страна,

$$\varepsilon(x) = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Като имаме предвид, че функцията  $y$  е непрекъсната (защото е диференцируема), а функцията  $y = \sqrt{1 - x^2}$  е също непрекъсната и различна от нула в отворения интервал  $(-1, 1)$ , заключаваме, че и  $\varepsilon(x)$  е една непрекъсната функция на  $x$ . Това ни дава право да заключим, че  $\varepsilon(x)$  е константа. И наистина, ако допуснем, че има две точки  $x_1$  и  $x_2$ , за които  $\varepsilon(x_1) = 1$  и  $\varepsilon(x_2) = -1$ , ще можем да заключим поради непрекъснатостта на  $\varepsilon(x)$ , че има поне една точка между  $x_1$  и  $x_2$ , в която  $\varepsilon(x)$  се анулира, нещо, което не е възможно, защото  $\varepsilon(x)$  приема само стойностите 1 и  $-1$ . И така други диференцируеми функции освен  $\sqrt{1 - x^2}$  и  $-\sqrt{1 - x^2}$  няма в отворения интервал  $(-1, 1)$ , които да удовлетворяват уравнението  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

*Решение.* Като вземем предвид, че

$$y = \varepsilon \sqrt{1 - x^2},$$

където при всички стойности на  $x$  имаме или  $\varepsilon = 1$ , или  $\varepsilon = -1$ , получаваме

$$y' = \frac{-\varepsilon x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

Ние можем да намерим  $y'$  и без да решаваме уравнението  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  относно  $y$ . За тази цел диференцираме израза

$$\varphi(x) = x^2 + y^2 - 1,$$

като помним, че  $y$  е една функция на  $x$  и че  $\varphi(x)$  е една константа. Това ни дава

$$\varphi'(x) = 2x + 2yy' = 0,$$

откъдето

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Този начин за намиране на производните на неявните функции се използва, когато не можем или не искаме да решаваме уравнението, което определя неявната функция.

2. Намерете  $y''$  за онези стойности на  $x$ , за които  $y^2 - ax \neq 0$ , като знаете, че  $y$  е една диференцируема функция на  $x$ , която удовлетворява уравнението

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a \neq 0.$$

*Забележка.* Такива функции има. За да покажем това, разглеждаме помощната функция

$$f(t) = \frac{3at}{1+t^3}$$

в който да е краен и затворен интервал  $[p, q]$ , който не съдържа точките  $-1$  и  $2^{-\frac{1}{3}}$ . Функцията  $f(t)$  е дефинирана и диференцируема в този интервал (защото точката  $-1$  не лежи в него) и производната

$$f'(t) = 3a \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$$

е различна от 0 (защото точката  $2^{-\frac{1}{3}}$  лежи вън от разглеждания интервал). От това заключаваме, че функцията  $f(t)$  приема всяка своя стойност само веднъж (в противен случай от теоремата на Рол бихме заключили, че  $f'(t)$  се анулира в интервала  $(p, q)$ , което не е вярно) и следователно е обратима. Нека  $g(x)$  е обратната функция на  $f(t)$ , т. е.

$$\frac{3ag(x)}{1+g^3(x)} = x.$$

Дефиниционната област на  $g(x)$ , както знаем, е един краен и затворен интервал и функцията  $g(x)$  е диференцируема в него. От това заключаваме, че функцията

$$\varphi(x) = xg(x)$$

е също диференцируема в дефиниционната област на  $g(x)$ . За функцията  $\varphi(x)$  не е трудно да се провери, че удовлетворява уравнението

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

както се вземе пред вид, че

$$\frac{3ag(x)}{1+g^3(x)} = x.$$

В дефиниционния интервал на  $\varphi(x)$  сигурно има точки, за които  $y^2 - ax \neq 0$ , защото системата

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 3axy &= 0, \\ y^2 - ax &= 0 \end{aligned}$$

има само краен брой решения, както това се вижда например, като елиминираме  $x$ .

*Решение.* Диференцираме израза

$$F(x) = x^3 + y^3 - 3axy,$$

както помним, че  $y$  е функция на  $x$  и че  $F(x)$  е константа. Това ни дава

$$F'(x) = 3x^2 + 3y^2y' - 3ay - 3axy' = 0.$$

Оттук намираме

$$y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

Като вземем пред вид, че  $y$  е диференцируема функция на  $x$  и че

$$y^2 - ax \neq 0,$$



заклучаваме, че  $y'$  е също така диференцируема функция на  $x$ . Производната на  $y'$  можем да намерим например, като диференцираме  $F'(x)$ . Това ни дава

$$F''(x) = 6x + 6yy'^2 + 3y^2y'' - 3ay' - 3axy'' = 0.$$

Като заместим  $y'$  с равното му и вземем под внимание уравнението

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

намираме

$$y'' = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}.$$

Къде използвахме  $y^2 - ax \neq 0$ ?

3. Намерете  $y'$ , като се знае, че  $y$  е диференцируема функция на  $x$ , определена от уравнението

$$-1 + x^3 e^x + x \sin y + \cos 2y = 0.$$

*Забележка.* В съществуването на такава функция можем да се убедим, като решим разглежданото уравнение относно  $y$ .

4. Намерете  $y'$  и  $y''$ , като знаете, че  $y$  е диференцируема функция на  $x$ , която удовлетворява уравнението

$$x = y - \alpha \sin y, \quad |\alpha| < 1.$$

*Забележка.* Съществуването на такава функция може да се установи по следния начин. Нека  $g(x)$  е една обратна функция на функцията

$$f(y) = y - \alpha \sin y.$$

Функцията  $g(x)$  е дефинирана при всички стойности на  $x$ , защото  $f(y)$  може да приема всяка стойност. Функцията  $y = g(x)$  удовлетворява също така уравнението  $x = f(y)$ . Остава да покажем, че функцията  $g(x)$  е диференцируема. Като вземем пред вид, че функцията

$$F(x, y) = x - y + \alpha \sin y$$

притежава непрекъснати частни производни спрямо  $x$  и  $y$  и че

$$F'_y = -1 + \alpha \cos y < 0,$$

заклучаваме, че е достатъчно да покажем непрекъснатостта на  $g(x)$ , за да сме сигурни, че тази функция е диференцируема (нека обърнем внимание на това, че непрекъснатостта на функцията  $g(x)$  не следва непосредствено от общата теорема, която ние доказахме по-рано за непрекъснатост на обратни функции).

Непрекъснатостта на функцията  $g(x)$  може да се установи по следния начин:

$$x - x_0 = f[g(x)] - f[g(x_0)] = [g(x) - g(x_0)]f'(\eta) = [g(x) - g(x_0)](1 - \alpha \cos \eta),$$

където  $\eta$  е едно число, подходящо избрано между  $g(x)$  и  $g(x_0)$ . Това ни дава

$$|g(x) - g(x_0)| = \left| \frac{x - x_0}{1 - \alpha \cos \eta} \right| \leq \frac{|x - x_0|}{1 - |\alpha|},$$

с което е установена непрекъснатостта на  $g(x)$  в произволно избрана точка  $x_0$ .

5. Нека  $y$  е една диференцуема намаляваща функция, определена от уравнението

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{при} \quad 0 < x < 1$$

(има ли такива?). Докажете, че

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

6. Нека  $y$  е една диференцуема намаляваща функция, определена при  $0 < x < 1$  от уравнението

$$x^2 y^2 + x^2 + y^2 = 1$$

(има ли такива?). Докажете, че

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

7. Нека  $y = F(x)$  е една два пъти диференцуема функция, която е дефинирана в някоя околност на началото и удовлетворява уравнението

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a \neq 0$$

(има ли такава функция?). Пресметнете  $F'(0)$ .

*Упътване.* За да се убедите в съществуването на такава функция, разгледайте помощната функция

$$f(t) = \frac{3at}{1+t^3}$$

в кой да е затворен интервал  $[p, q]$ , който не съдържа точките  $t = -1$  и  $t = 2^{-\frac{1}{3}}$ , обаче съдържа точката  $t = 0$ . Покажете, че тази функция е обратима и обратната ѝ функция е диференцуема. Нека  $g(x)$  е нейната обратна. Покажете, че функцията  $g(x)$  е диференцуема поне два пъти. (Това ще бъде достатъчно за нашите нужди. Не е трудно да се види обаче, че тази функция е диференцуема дори безбройно много пъти.) За тази цел се възползвайте от равенството

$$\frac{3ag(x)}{1+g^3(x)} = x.$$

Покажете, че дефиниционният интервал на  $g(x)$  съдържа началото във вътрешността си. Покажете най-сетне, че функцията  $y = xg(x)$  удовлетворява уравнението

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

За да намерите  $y'$ , диференцирайте последното уравнение. Това ще ви даде

$$x^2 - ay + y'(y^2 - ax) = 0.$$

Оттук обаче все още не можем да определим  $y'$ , защото  $F(0) = 0$  и следователно изразът  $y^2 - ax$  се анулира при  $x = 0$ . Ние все пак можем да намерим  $y'$ . За целта диференцирайте още веднъж. Това ще ви даде

$$2x - ay' + y'(2yy' - a) + y''(y^2 - ax) = 0.$$

Като вземете под внимание, че за  $x = 0$  имаме  $y = 0$ , ще получите  $F'(0) = 0$ . Сравнете със задача 2.

8. Намерете  $z''$ , като знаете, че  $y$  и  $z$  са две функции на  $x$ , които удовлетворяват уравненията

$$\begin{aligned} f(y, z) &= 0, \\ g(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

(Тук се предполага, че са налице всичките условия, при които можем да извършим интересувашите ни пресмятания. Така например предполага се, че функциите допускат производни, които ни трябва, и пр.).

*Решение.* С еднократно диференциране намираме

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' = 0, \\ (2) \quad & \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y' = 0. \end{aligned}$$

Като диференцираме още веднъж, получаваме

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} z' \right) y' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} z' \right) z' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' &= 0, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} y' + \left( \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} y' \right) y' + \frac{\partial g}{\partial y} y'' &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (3) \quad & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} y' z' + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} z'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' = 0, \\ (4) \quad & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial g}{\partial y} y'' = 0. \end{aligned}$$

От уравненията (1), (2), (3) и (4) елиминираме  $y'$ ,  $z'$  и  $y''$  и получаваме уравнение, от което определяме  $z''$ .

9. Намерете  $y''$  и  $z''$ , като знаете, че  $y$  и  $z$  са функции на  $x$ , които удовлетворяват уравненията

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ G(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

(Тук се предполага, както и в предната задача, че са налице всичките условия, при които можем да извършим пресмятанията, които ни трябва.)

*Решение.* Като диференцираме един път уравненията, получаваме

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} y' + \frac{\partial G}{\partial z} z' &= 0. \end{aligned}$$

Като диференцираме още веднъж, намираме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} z'^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} z' + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} y' z' + \frac{\partial F}{\partial y} y'' + \frac{\partial F}{\partial z} z'' &= 0, \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} z'^2 + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} y' + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z} z' + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} y' z' + \frac{\partial G}{\partial y} y'' + \frac{\partial G}{\partial z} z'' &= 0. \end{aligned}$$

*Забележка.* Сравнете с предната задача. В специалния случай, когато функцията  $F(x, y, z)$  не зависи от  $x$ , а функцията  $G(x, y, z)$  не зависи от  $z$ , получаваме задача 8. От това е ясно, че ние можем да получим решението на задача 8 от решението на задача 9, като поставим  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  и  $\frac{\partial G}{\partial z} = 0$ .

10. Нека  $y$  е една достатъчен брой пъти диференцируема функция на  $x$ , която удовлетворява уравнението

$$f(y) = x,$$

където функцията  $f(y)$  също допуска достатъчен брой производни. Пресметнете  $y'''$  при предположение, че  $f'(y) \neq 0$ .

*Забележка.* Очевидно  $y$  е една обратна функция на функцията  $f(y)$ .

*Решение.* С последователно диференциране намираме

$$\begin{aligned} f'(y)y' &= 1, \\ f''(y)y'^2 + f'(y)y'' &= 0, \\ f'''(y)y'^3 + 3f''(y)y'y'' + f'(y)y''' &= 0, \end{aligned}$$

откъдето

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{f'(y)}, \\ y'' &= -\frac{f''(y)}{f'^3(y)}, \\ y''' &= \frac{3f''^2(y) - f'(y)f'''(y)}{f'^5(y)}. \end{aligned}$$

### § 3. Диференциране на неявни функции, които зависят от няколко аргумента

Нека  $u = \varphi(x, y)$  е една функция на  $x$  и  $y$ , която удовлетворява уравнението

$$F(x, y, u) = 0.$$

Като вземем предвид, че функцията

$$f(x, y) = F[x, y, \varphi(x, y)]$$

е константа (нейната стойност е нула), получаваме с помощта на правилото за диференциране на съставни функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

От тези уравнения можем да определим  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , стига да имаме  $\frac{\partial F}{\partial u} \neq 0$ .

Аналогично намираме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

От тези уравнения можем да определим  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ , стига, както и по-горе, да имаме  $\frac{\partial F}{\partial u} \neq 0$ . Аналогично се пресмятат третите производни и пр.

### Задачи

*Забележка.* В задачите, които следват, се предполага, че функциите, за които става дума, са такива че е възможно да се извършат за тях интересующите ни пресмятания. Така например ще се предполага (при все че ние няма всеки път да казваме това), че тези функции са достатъчен брой пъти диференцируеми и пр.

1. Намерете производните  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  на  $z$ , като знаете, че  $z$  е една функция на  $x$  и  $y$ , която удовлетворява уравнението

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(Има ли такава функция?)

*Отговор.*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^4(b^2 - y^2)}{a^2 b^2 z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^4(a^2 - x^2)}{a^2 b^2 z^3}.$$

2. Нека  $z$  е една функция на  $x$  и  $y$ , която удовлетворява уравнението

$$y = x\varphi(z) + \psi(z).$$

Покажете, че

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

*Упътване.* Покажете, че

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\varphi}{x\varphi' + \psi'}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{x\varphi' + \psi'}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\varphi(2x\varphi'^2 + 2\varphi'\psi' - x\varphi\varphi'' - \varphi\psi'')}{(x\varphi' + \psi')^3}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\varphi'(x\varphi' + \psi') - \psi''\varphi - x\varphi\varphi''}{(x\varphi' + \psi')^3}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{x\varphi'' + \psi''}{(x\varphi' + \psi')^3}, \end{aligned}$$

и заместваме в уравнението (1).

3. Нека  $y$  е една функция на  $x$  и  $\alpha$ , която удовлетворява уравнението

$$y = \alpha + x\varphi(y).$$

Докажете, че

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \left[ \varphi^n(y) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right],$$

където  $u = u(y)$  е една функция на  $y$ .

*Упътване.* Извършете доказателството индуктивно по следния начин:

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \left( \varphi^n(y) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \right] = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi^n(y) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \right].$$

Преобразувайте израза

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi^n(y) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right),$$

като се възползвате от тъждеството

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( F(y) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( F(y) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

при

$$F(y) = \varphi^n(y).$$

Верността на това тъждество се проверява с непосредствено диференциране така:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( F(y) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) &= F'(y)u' \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + F(y) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( F(y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= F'(y)u' \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial x} + F(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \alpha}. \end{aligned}$$

След като е установено, че

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi^n(y) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \varphi^n(y) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

разсъжденията се развиват по-нататък по следния начин:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= u' \frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial \alpha} &= u' \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \\ [1 - x\varphi'(y)] \frac{\partial y}{\partial x} &= \varphi(y), \quad [1 - x\varphi'(y)] \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 1, \end{aligned}$$

следователно

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y) \frac{\partial u}{\partial \alpha}.$$

Оттук получаваме

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \varphi^n(y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \varphi^{n+1}(y) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right]$$

и най-сетне

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \alpha^{n-1}} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \varphi^{n+1}(y) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \right] = \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left[ \varphi^{n+1}(y) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right].$$

*Забележка.* При  $x = 0$  имаме  $y = \alpha$ . Ако положим  $u = f(y)$ , получаваме

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} f[y(0, \alpha)] = \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} [\varphi^n(\alpha) f'(\alpha)].$$

Редът на Маклорен

$$f(y) = f[y(0, \alpha)] + \frac{x}{1!} \frac{\partial}{\partial x} [f[y(0, \alpha)]] + \dots$$

добива в този случай вида

$$f(y) = f(\alpha) + \frac{x}{1!} \varphi(\alpha) f'(\alpha) + \frac{x^2}{2!} \frac{d}{d\alpha} [\varphi^2(\alpha) f'(\alpha)] + \dots + \frac{x^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} [\varphi^n(\alpha) f'(\alpha)] + \dots$$

Редът който получихме, се нарича ред на Лагранж (J. Lagrange).

4. Нека  $z$  е функция на  $x$  и  $y$ , която удовлетворява уравнението

$$x - az = \varphi(y - bz),$$

където  $a$  и  $b$  са константи, а  $\varphi$  е една диференцуема функция.

Докажете, че

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

5. Нека  $z$  е функция на  $x$  и  $y$ , която удовлетворява уравнението

$$z = x\varphi\left(\frac{z}{y}\right).$$

Докажете, че

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$





В бъдеще при много въпроси ще срещаме детерминанти от този вид. Детерминантата  $\Delta$  се нарича функционална Якобиева детерминанта на функциите  $F_1, F_2, \dots, F_n$  по отношение на променливите  $y_1, y_2, \dots, y_n$  и се означава съкратено с

$$\Delta = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}.$$

Ние показахме как могат да се пресметнат частните производни  $\frac{\partial y_1}{\partial x_k}$ ,  $\frac{\partial y_2}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial x_k}$ . Аналогично се пресмятат и производните от по-висок ред.

#### Задачи

*Забележка.* В задачите, които следват, се предполага, че са налице условията, при които могат да се извършат интересуващите ни пресмятания. Така например ще предполагаме, че функциите, които разглеждаме, са достатъчен брой пъти диференцуеми и пр.

1. Нека  $z$  и  $\alpha$  са две функции на  $x$  и  $y$ , които удовлетворяват системата

$$\begin{aligned} [z - \varphi(\alpha)]^2 &= x^2(y^2 - \alpha^2) \\ [z - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) &= \alpha x^2. \end{aligned}$$

Докажете, че

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

2. Нека  $z$  и  $\alpha$  са две функции на  $x$  и  $y$ , които удовлетворяват системата

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + yf(\alpha) + \varphi(\alpha), \\ 0 &= x + yf'(\alpha) + \varphi'(\alpha). \end{aligned}$$

Докажете, че

$$\left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3. Нека  $z$  и  $\alpha$  са две функции на  $x$  и  $y$ , които удовлетворяват системата

$$\begin{aligned} z\varphi'(\alpha) &= [y - \varphi(\alpha)]^2, \\ (x + \alpha)\varphi'(\alpha) &= y - \varphi(\alpha). \end{aligned}$$

Докажете, че

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

4. Нека  $u$  и  $v$  са две функции на  $x$  и  $y$ , които удовлетворяват системата

$$\begin{aligned} x &= f(u, v), \\ y &= g(u, v). \end{aligned}$$

Намерете  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

*Решение.* Като диференцираме двете дадени уравнения частно спрямо  $x$ , получаваме.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Отгук намираме

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}}.$$

5. Нека  $u$  и  $v$  са две функции на  $x$  и  $y$ , които удовлетворяват системата

$$x = f(u, v),$$

$$y = g(u, v).$$

Намерете  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

*Решение.* Като диференцираме системата частно спрямо  $x$ , получаваме

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Като диференцираме получаваме две уравнения още веднъж спрямо  $x$ , получаваме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned}$$

От така получените четири уравнения елиминираме  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  и  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  и получаваме уравнение, от което определяме  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

## § 5. Теорема за съществуване на неявни функции

Знаем, че не всяко уравнение  $F(x, y) = 0$  дефинира неявна функция. Така например няма функция  $y = \varphi(x)$ , която да удовлетворява уравнението  $e^{x+y} = 0$ , защото, както знаем, показателната функция не се анулира при никаква стойност на показателя. Сега ще си поставим за задача да дадем една система от достатъчни условия, при които може да се твърди, че съществува неявна функция, която се определя от дадено уравнение. Условията, които ще посочим, ще ни осигурят дори непрекъснатостта на тази функция.

Първоначално ще разгледаме уравнението

$$(1) \quad y = y_0 + f(x, y),$$

където функцията  $f(x, y)$  е дефинирана и непрекъсната поне в някоя околност  $R$  на точката  $(x_0, y_0)$ , анулира се в тази точка и при всеки избор на двете точки  $(x, \eta_1)$ ,  $(x, \eta_2)$ , които имат обща абсциса и лежат в  $R$ , удовлетворява неравенството\*

$$|f(x, \eta_1) - f(x, \eta_2)| \leq k|\eta_1 - \eta_2|,$$

където  $k$  е положителна константа, по-малка от единица (но не и равна).

При тези условия може да се твърди, че във всяка *достатъчно малка* околност на точката  $x_0$  има една и само една *непрекъсната* функция  $\varphi(x)$ , която удовлетворява уравнението

$$\varphi(x) = y_0 + f[x, \varphi(x)]$$

при всички стойности на  $x$  от тази околност и приема стойност  $y_0$  в точката  $x_0$ .

Ние ще извършим доказателството с помощта на така наречения метод на последователните приближения.

Без да ограничаваме общността, ние можем да считаме, че околността  $R$  е правоъгълник, страните на който са успоредни на съответните координатни оси. Една точка  $(x, y)$  лежи в  $R$  тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата

$$x_0 - a < x < x_0 + a,$$

$$y_0 - b < y < y_0 + b,$$

където  $2a$  и  $2b$  означават дължините на съответните страни на  $R$ .

Ще си образуваме една безкрайна редица от функции

$$(2) \quad y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots,$$

\* Ако при всеки избор на двете точки  $x_1$  и  $x_2$  от дефиниционната област на една функция  $\psi(x)$  е изпълнено неравенството

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|,$$

където  $k$  е една константа, която не зависи от  $x_1$  и  $x_2$ , казваме, че функцията  $\psi(x)$  удовлетворява условието на Липшиц (R. Lipschitz). Константата  $k$  се нарича константа на Липшиц. Така например, ако функцията  $\psi(x)$  е диференцируема в някой интервал и производната ѝ е ограничена, то тази функция удовлетворява уравнението на Липшиц, както това се вижда от теоремата за крайните нараствания:

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| = |(x_1 - x_2)\psi'(\xi)| \leq k|x_1 - x_2|,$$

където  $k$  е една горна граница на  $|\psi'(x)|$ .

Ползвайки се от тази терминология, можем да кажем, че функцията  $f(x, y)$ , която разглеждаме в текста, удовлетворява условието на Липшиц по отношение на  $y$ , като константата на Липшиц  $k$  не зависи от  $x$  и е по-малка от 1.

които ще наричаме последователни приближения на търсената функция  $\varphi(x)$ . За тази цел заместваме в дясната страна на равенството (1) променливата  $y$  с константата  $y_0$ . Така получената функция на  $x$  означаваме с  $y_1(x)$ , т. е.

$$y_1(x) = y_0 + f(x, y_0).$$

След като дефинирахме функцията  $y_1(x)$ , заместваме  $y$  в дясната страна на уравнението (1) с  $y_1(x)$  и означаваме така получената функция с  $y_2(x)$ , т. е.

$$y_2(x) = y_0 + f[x, y_1(x)]$$

Функцията  $y_2(x)$  поставяме в дясната страна на уравнението (1) вместо  $y$  и означаваме резултата с  $y_3(x)$ , така че

$$y_3(x) = y_0 + f[x, y_2(x)],$$

и т. н. Като продължаваме неограничено този процес, получаваме една безкрайна редица от функции, дефинирани по следния начин:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + f(x, y_0), \\ y_2(x) &= y_0 + f[x, y_1(x)], \\ &\dots\dots\dots \\ y_n(x) &= y_0 + f[x, y_{n-1}(x)], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Функцията  $y_1(x)$  е дефинирана в интервала  $(x_0 - a, x_0 + a)$ . Ние не можем обаче да твърдим същото за функцията  $y_2(x)$ , защото не е изключена възможността точката с координати  $[x, y_1(x)]$  да не принадлежи на  $R$  (има опасност стойностите на функцията  $y_1(x)$  да напускат интервала  $(y_0 - b, y_0 + b)$ , когато  $x$  се мени между  $x_0 - a$  и  $x_0 + a$ ). Същото се отнася и за следващите функции от редицата (2). За да отстраним тази пречка, ще оставим  $x$  да се мени в по-тесния интервал от  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ , където положителната константа  $\alpha$  избираме по такъв начин, че да бъде по-малка от  $a$  и при  $|x - x_0| < \alpha$  да е изпълнено неравенството

$$|f(x, y_0)| = |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < q,$$

където  $q$  означава една константа, произволно избрана в отворения\* интервал  $(0, (1 - k)b)$ . Това може да се направи (стига  $\alpha$  да изберем достатъчно

\*За да постигнем целта, която преследваме, ние бихме могли да вземем  $q = (1 - k)b$ . Ние избираме обаче  $q < (1 - k)b$  с оглед на по-далечни цели. Върху това ще се върнем на съответното място.

малко), защото функцията  $f(x, y)$  е непрекъсната в точката  $(x_0, y_0)$  и  $q > 0$ . Всички функции  $y_n(x)$  са добре дефинирани в интервала  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  и стойностите им не напускат отворения интервал

$$(y_0 - b, y_0 + b).$$

Доказателството извършваме индуктивно. Ако функцията  $y_{n-1}(x)$  е дефинирана в интервала  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  и удовлетворява неравенството

$$|y_{n-1}(x) - y_0| < b,$$

то същото се отнася и за функцията  $y_n(x)$ , защото\*

$$(3) \quad |y_n(x) - y_0| = |f[x, y_{n-1}(x)]| = |f[x, y_{n-1}(x)] - f(x, y_0) + f(x, y_0)| \\ \leq |f[x, y_{n-1}(x)] - f(x, y_0)| + |f(x, y_0)| < k|y_{n-1}(x) - y_0| + q < kb + q$$

и следователно

$$|y_n(x) - y_0| < kb + (1 - k)b = b.$$

От друга страна, функцията  $y_1(x)$  е дефинирана в интересувания ни интервал [тя е дефинирана дори в интервала  $(x_0 - a, x_0 + a)$ ] и удовлетворява неравенството

$$|y_1(x) - y_0| = |f(x, y_0)| < q < (1 - k)b < b.$$

С това ние осигурихме всички функции

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots$$

да са дефинирани в интервала  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ .

Тези функции са и непрекъснати. И наистина това е очевидно за функцията  $y_1(x)$ , защото функцията  $f(x, y)$  е непрекъсната. От непрекъснатостта на  $y_1(x)$  и от непрекъснатостта на  $f(x, y)$  заключаваме за непрекъснатостта на  $y_2(x)$  и т. н.

Ние ще докажем, че редицата

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots$$

е равномерно сходяща в интервала  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ . За тази цел разглеждаме реда

$$(4) \quad y_1(x) + [y_2(x) - y_1(x)] + [y_3(x) - y_2(x)] + \dots$$

\*Прилагаме неравенството на Липшиц.

Очевидно имаме

$$(5) \quad |y_{n+1}(x) - y_n(x)| = |f[x, y_n(x)] - f[x, y_{n-1}(x)]| \leq k|y_n(x) - y_{n-1}(x)|,$$

защото функцията  $f(x, y)$  удовлетворява условието на Липшиц. От неравенството (5) получаваме

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\leq k|y_n(x) - y_{n-1}(x)|, \\ |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &\leq k|y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)|, \\ &\dots\dots\dots \\ |y_3(x) - y_2(x)| &\leq k|y_2(x) - y_1(x)|, \\ |y_2(x) - y_1(x)| &\leq k|y_1(x) - y_0| < kb \end{aligned}$$

и следователно

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| < k^n b.$$

Това неравенство ни учи, че общият член на реда (4) не надминава по абсолютна стойност съответния член на сходящата геометрична прогресия  $\sum bk^n$  (тази прогресия е сходяща, защото  $0 < k < 1$ ). Като вземем пред вид, че членовете на прогресията не зависят от  $x$ , заключаваме, че редът е равномерно сходящ, а следователно равномерно сходяща е и редицата от частичните му суми

$$(6) \quad y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots$$

Да означим с  $\varphi(x)$  границата на тази редица. Функцията  $\varphi(x)$  е непрекъснатата в интервала  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ , защото редицата (6) е равномерно сходяща и членовете на тази редица са непрекъснати функции. Освен това графиката на функцията  $\varphi(x)$  лежи в дефиниционната област на  $f(x, y)$ . За да се убедим в това, е достатъчно да покажем, че\*

$$|\varphi(x) - y_0| < b.$$

Доказателството може да се извърши така. Ние видяхме по горе (виж неравенството (3)), че

$$|y_n(x) - y_0| < kb + q.$$

---

\*От неравенството  $|y_n(x) - y_0| < b$  се получава непосредствено  $|\varphi(x) - y_0| \leq b$ . Това обаче не е достатъчно за нас, защото ние искаме да осигурим, че точката  $[x, \varphi(x)]$  лежи в отворения правоъгълник  $R$ . Поради това ние искаме да сме сигурни, че при никоя стойност на  $x$  от разглеждания интервал нямаме  $|\varphi(x) - y_0| = b$ . Тъкмо с оглед на тази цел ние избираме  $q < (1 - k)b$ , а не  $q = (1 - k)b$ .

Като извършим граничния преход  $n \rightarrow \infty$ , получаваме

$$|\varphi(x) - y_0| \leq kb + q,$$

откъдето

$$|\varphi(x) - y_0| < kb + (1 - k)b = b.$$

Сега ще установим, че функцията  $\varphi(x)$  удовлетворява уравнението (1). За тази цел извършваме граничния преход  $n \rightarrow \infty$  в равенството

$$y_n(x) = y_0 + f[x, y_{n-1}(x)],$$

като се възползуваме от непрекъснатостта на функцията  $f(x, y)$ . Това ни дава

$$\varphi(x) = y_0 + f[x, \varphi(x)],$$

което искаме да установим.

Най-сетне не е трудно да се види, че  $\varphi(x_0) = y_0$ . И наистина, като се възползуваме от условието  $f(x_0, y_0) = 0$ , получаваме последователно

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= y_0 + f(x_0, y_0) = y_0, \\ y_2(x_0) &= y_0 + f[x_0, y_1(x_0)] = y_0 + f(x_0, y_0) = y_0, \\ y_3(x_0) &= y_0 + f[x_0, y_2(x_0)] = y_0 + f(x_0, y_0) = y_0, \\ &\dots\dots\dots \\ y_n(x_0) &= y_0 + f[x_0, y_{n-1}(x_0)] = y_0 + f(x_0, y_0) = y_0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Оттук заключаваме, че  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x_0) = y_0$  или (което е същото)  $\varphi(x_0) = y_0$ .

Остава да покажем, че няма друга *непрекъсната* функция в интервала  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ , която при всички стойности на  $x$  в този интервал да удовлетворява уравнението (1) и при  $x = x_0$  да приема стойност  $y_0$ .

Доказателството ще извършим от противното. Да допуснем, че съществува функция  $\psi(x)$ , *непрекъсната* в интервала  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ , удовлетворяваща условията

$$\begin{aligned} \psi(x) &= y_0 + f[x, \psi(x)] \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \alpha, \\ \psi(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

и различна от  $\varphi(x)$ . Последното условие означава, че има поне една точка  $x_1$ , за която

$$\psi(x_1) \neq \varphi(x_1).$$

Ще разгледаме подробно случая, когато  $x_1 > x_0$ ; случаят  $x_1 < x_0$  се разглежда по същия начин (разбира се, не можем да имаме  $x_1 = x_0$ , защото  $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$ ).

Нека  $\xi$  е точната долна граница на точките  $x$  от интервала  $(x_0, x_0 + \alpha)$ , за които  $\psi(x) \neq \varphi(x)$ . Това значи, че при всеки избор на положителното число  $\delta$  има поне една точка  $x$  в интервала  $(\xi, \xi + \delta)$  и, разбира се, в интервала  $(x_0, x_0 + \alpha)$ , за която  $\psi(x) \neq \varphi(x)$ , обаче няма нито една точка  $x$ , за която са изпълнени едновременно неравенствата  $x_0 \leq x < \xi$  и  $\psi(x) \neq \varphi(x)$ . Очевидно  $\xi \geq x_0$ . Ще докажем, че

$$\psi(\xi) = \varphi(\xi).$$

И наистина, ако  $\xi = x_0$ , това е очевидно, защото  $\varphi(x_0) = y_0$  и  $\psi(x_0) = y_0$ . Ако пък  $\xi > x_0$ , то за всички стойности на  $x$ , за които  $x_0 \leq x < \xi$ , ще имаме  $\psi(x) = \varphi(x)$ . Като вземем пред вид, че функциите  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  са непрекъснати в точката  $\xi$ , получаваме

$$\psi(\xi) = \varphi(\xi).$$

Ние знаем, че точката  $[\xi, \varphi(\xi)]$ , а следователно и точката  $[\xi, \psi(\xi)]$  лежи във *вътрешността*<sup>\*</sup> на правоъгълника  $R$ . Като се възползуваме от това обстоятелство и от непрекъснатостта на функцията  $\psi(x)$ , заключаваме, че може да се намери точка  $\xi_1$  във вътрешността на интервала  $(\xi, x_0 + \alpha)$  по такъв начин, че графиката на  $\psi(x)$  да не напуска<sup>\*\*</sup>  $R$ , когато  $x$  се мени между  $\xi$  и  $\xi_1$ . В такъв случай имаме при  $\xi < x < \xi_1$

$$\varphi(x) = y_0 + f[x, \varphi(x)],$$

$$\psi(x) = y_0 + f[x, \psi(x)]$$

и следователно

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = |f[x, \varphi(x)] - f[x, \psi(x)]| \leq k|\varphi(x) - \psi(x)|.$$

Нека  $c$  е точка от интервала  $(\xi, \xi_1)$ , за която  $\varphi(c) \neq \psi(c)$  (такава, както знаем, има). В такъв случай имаме

$$|\varphi(c) - \psi(c)| \leq k|\varphi(c) - \psi(c)|,$$

откъдето, като съкратим на  $|\varphi(c) - \psi(c)|$ , получаваме

$$1 \leq k,$$

<sup>\*</sup>Тук съществено използваме обстоятелството, че правоъгълникът  $R$  е *отворен*.

<sup>\*\*</sup>Графиката на  $\varphi(x)$ , разбира се, не напуска дефиниционната област на  $f(x, y)$ , но може да напуска  $R$ .



което противоречи на неравенството  $k < 1$ . Противоречието, до което достигнахме, се дължи на предположението, че функциите  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  са различни. И така не може да има в интервала  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  повече от една непрекъсната функция, която удовлетворява уравнението (1) и при  $x = x_0$  приема стойност  $y_0$ . С това е решен въпросът за единственост.

Изследванията, които направихме, ни дават възможност да докажем следната теорема.

*Нека функцията  $F(x, y)$  е дефинирана и непрекъсната в някоя околност на точката  $(x_0, y_0)$  и притежава частна производна спрямо  $y$  в тази околност, която е непрекъсната в точката  $(x_0, y_0)$ ; нека освен това*

$$F(x_0, y_0) = 0$$

и

$$F'_y(x_0, y_0) \neq 0;$$

*при тези предположения във всяка достатъчно малка околност на точката  $x_0$  има една и само една непрекъсната функция  $y = \varphi(x)$ , която удовлетворява уравнението*

$$F[x, \varphi(x)] = 0$$

*и приема стойност  $y_0$  при  $x = x_0$ .*

Доказателството може да се извърши така. Разглеждаме помощната функция

$$f(x, y) = y - y_0 + \lambda F(x, y),$$

където избираме константата  $\lambda$  по такъв начин, че да имаме

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

или, което е същото,

$$1 + \lambda F'_y(x_0, y_0) = 0;$$

това е възможно да се направи, защото  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Означаваме с  $k$  една произволна положителна константа, по-малка от единица. Като вземем предвид, че  $f'_y(x, y)$  е непрекъсната функция на  $x$  и  $y$  и че  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ , заключаваме, че може да се намери достатъчно малка околност  $R$  на точката  $(x_0, y_0)$ , в която

$$|f'_y(x, y)| \leq k$$

и следователно при всеки избор на двете точки  $(x, \eta_1)$  и  $(x, \eta_2)$  от  $R$  е изпълнено неравенството на Липшиц

$$|f(x, \eta_1) - f(x, \eta_2)| = |(\eta_1 - \eta_2)f'_y(x, \eta)| \leq k|\eta_1 - \eta_2|$$

(тук  $\eta$  означава едно число, което е избрано по подходящ начин между  $\eta_1$  и  $\eta_2$ ). От друга страна, функцията  $f(x, y)$  е непрекъсната в околността  $R$  (защото функцията  $F(x, y)$  е непрекъсната) и приема стойност нула в точката  $(x_0, y_0)$  (защото  $F(x_0, y_0) = 0$ ). Това ни дава право, както знаем, да твърдим, че във всяка достатъчно малка околност на точката  $x_0$  има една и само една непрекъсната функция  $y = \varphi(x)$ , която приема стойност  $y_0$  в точката  $x_0$  и удовлетворява уравнението

$$y = y_0 + f(x, y)$$

или, което е същото,

$$y = y_0 + [y - y_0 + \lambda F(x, y)],$$

или още

$$F(x, y) = 0.$$

### § 6. Обобщение на теоремата за съществуване на неявни функции

Теоремата, която доказахме в началото на предния параграф, може да се обобщи по следния начин: нека функциите

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p), \\ &f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p), \\ &\dots\dots\dots \\ &f_p(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p) \end{aligned}$$

на променливите  $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p$  са дефинирани и непрекъснати в някоя околност  $R$  на точката  $(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p)$ ; нека

$$\begin{aligned} &f_1(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p) = 0, \\ &f_2(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p) = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ &f_p(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p) = 0 \end{aligned}$$

и най-сетне нека



Нека функциите

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p), \\ &F_2(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p), \\ &\dots\dots\dots \\ &F_p(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p), \end{aligned}$$

са дефинирани и непрекъснати в някоя околност на точката

$$(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p)$$

и допускат непрекъснати частни производни от първи ред спрямо  $y_1, y_2, \dots, y_p$  в тази околност; освен това

$$\begin{aligned} &F_1(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p) = 0, \\ &F_2(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p) = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ &F_p(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p) = 0, \end{aligned}$$

и

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_p} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_p} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_p}{\partial y_1} & \frac{\partial F_p}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{vmatrix} \neq 0$$

в точката  $(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p)$ . При тези предположения във всяка достатъчно малка околност на точката  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  съществува една и само една система от непрекъснати функции

$$\begin{aligned} &y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ &y_p = \varphi_p(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

която удовлетворява системата

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p) = 0, \\ &F_2(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p) = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ &F_p(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p) = 0 \end{aligned}$$

и за която

$$\begin{aligned}\varphi_1(a_1, a_2, \dots, a_n) &= b_1, \\ \varphi_2(a_1, a_2, \dots, a_n) &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_p(a_1, a_2, \dots, a_n) &= b_p.\end{aligned}$$

За да докажем това, разглеждаме помощните функции

$$f_\nu = y_\nu - b_\nu + \lambda_{\nu 1} F_1 + \lambda_{\nu 2} F_2 + \dots + \lambda_{\nu p} F_p, \quad \nu = 1, 2, \dots, p,$$

където избираме константите  $\lambda_{\nu 1}, \lambda_{\nu 2}, \dots, \lambda_{\nu p}$  по такъв начин, че да имаме

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial y_1} = \frac{\partial f_\nu}{\partial y_2} = \dots = \frac{\partial f_\nu}{\partial y_p} = 0$$

в точката  $(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_p)$  или, което е същото,

$$(1) \quad \begin{aligned}\lambda_{\nu 1} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \lambda_{\nu 2} \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \dots + \lambda_{\nu p} \frac{\partial F_p}{\partial y_1} &= 0, \\ \lambda_{\nu 1} \frac{\partial F_1}{\partial y_2} + \lambda_{\nu 2} \frac{\partial F_2}{\partial y_2} + \dots + \lambda_{\nu p} \frac{\partial F_p}{\partial y_2} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_{\nu 1} \frac{\partial F_1}{\partial y_\nu} + \lambda_{\nu 2} \frac{\partial F_2}{\partial y_\nu} + \dots + \lambda_{\nu p} \frac{\partial F_p}{\partial y_\nu} &= -1, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_{\nu 1} \frac{\partial F_1}{\partial y_p} + \lambda_{\nu 2} \frac{\partial F_2}{\partial y_p} + \dots + \lambda_{\nu p} \frac{\partial F_p}{\partial y_p} &= 0\end{aligned}$$

при

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n; y_1 = b_1, \dots, y_p = b_p.$$

Ние можем да направим това, защото в разглежданата точка

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_p}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_p}{\partial y_2} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_p} & \frac{\partial F_2}{\partial y_p} & \dots & \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{vmatrix} \neq 0.$$



за които са изпълнени условията

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi_1(a_1, a_2, \dots, a_n) &= b_1, \\ \varphi_2(a_1, a_2, \dots, a_n) &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_p(a_1, a_2, \dots, a_n) &= b_p \end{aligned}$$

и които удовлетворяват системата

$$(4) \quad \begin{aligned} y_1 &= b_1 + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p), \\ y_2 &= b_2 + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p), \\ &\dots\dots\dots \\ y_p &= b_p + f_p(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p), \end{aligned}$$

или, което е същото,

$$(5) \quad \begin{aligned} \lambda_{11}F_1 + \lambda_{12}F_2 + \dots + \lambda_{1p}F_p &= 0, \\ \lambda_{21}F_1 + \lambda_{22}F_2 + \dots + \lambda_{2p}F_p &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_{p1}F_1 + \lambda_{p2}F_2 + \dots + \lambda_{pp}F_p &= 0. \end{aligned}$$

Ще докажем, че детерминантата

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1p} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2p} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \dots & \lambda_{pp} \end{vmatrix}$$

е различна от нула. За тази цел умножаваме детерминантите  $\Delta$  и  $\Delta_1$  по редове и вземаме пред вид системата (1). Това ни дава

$$\Delta\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^p \neq 0,$$

т. е. наистина  $\Delta_1 \neq 0$ , и следователно хомогенната система (5) е удовлетворена само ако

$$(6) \quad F_1 = F_2 = \dots = F_p = 0.$$









когато  $h$  клони към нула, т. е. към число, различно от нула. Оттук заключаваме, че частното

$$\frac{k_q}{h} = \frac{\varphi_q(a_1, a_2, \dots, a_r + h, \dots, a_n) - \varphi_q(a_1, a_2, \dots, a_r, \dots, a_n)}{h}$$

също има граница, когато  $h$  клони към нула. С това е установено съществуването на производните

$$\frac{\partial}{\partial x_r} \varphi_q(a_1, a_2, \dots, a_r, \dots, a_n)$$

при

$$q = 1, 2, \dots, p, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

### § 8. Множители на Лагранж

Нека функциите

$$F(x, u, v), \quad G_1(x, u, v), \quad \text{и} \quad G_2(x, u, v)$$

са дефинирани и притежават непрекъснати частни производни от първи ред в някоя околност  $D$  на точката  $(x_0, u_0, v_0)$ , като при това

$$G_1(x_0, u_0, v_0) = 0, \quad G_2(x_0, u_0, v_0) = 0$$

и

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u} G_1(x_0, u_0, v_0) & \frac{\partial}{\partial v} G_1(x_0, u_0, v_0) \\ \frac{\partial}{\partial u} G_2(x_0, u_0, v_0) & \frac{\partial}{\partial v} G_2(x_0, u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0;$$

нека за всички точки  $(x, u, v)$  от  $D$ , за които

$$G_1(x, u, v) = 0,$$

$$G_2(x, u, v) = 0$$

да имаме

$$F(x, u, v) \leq F(x_0, u_0, v_0)$$

или за всички такива точки да имаме

$$F(x, u, v) \geq F(x_0, u_0, v_0).$$

Да образуваме функцията

$$\Phi = F - \lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2.$$

Ще покажем, че двете константи  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  могат да се определят по такъв начин, че да имаме\*

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x_0, u_0, v_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u} \Phi(x_0, u_0, v_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} \Phi(x_0, u_0, v_0) = 0.$$

**Доказателство.** Нека  $\Delta$  е толкова малка околност на точката  $x_0$ , че да съществуват в нея две диференцуеми функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , за които точката  $[x, \varphi(x), \psi(x)]$  да принадлежи на  $D$  и освен това да имаме

$$G_1(x, \varphi, \psi) = 0,$$

$$G_2(x, \varphi, \psi) = 0$$

и

$$\varphi(x_0) = u_0, \quad \psi(x_0) = v_0.$$

В такъв случай функцията

$$f(x) = F(x, \varphi, \psi)$$

има локален екстремум в точката  $x_0$  и следователно  $f'(x_0) = 0$ , т. е.

$$(1) \quad F'_x(x_0, u_0, v_0) + F'_u(x_0, u_0, v_0)\varphi'(x_0) + F'_v(x_0, u_0, v_0)\psi'(x_0) = 0.$$

Определяме  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  така, че да бъдат удовлетворени уравненията

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0.$$

За да се убедим, че това е възможно, написваме тези уравнения по-подробно така:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} - \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial u} - \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial v} - \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial v} &= 0. \end{aligned}$$

\*Тези константи се наричат множители на Лагранж и играят роля в някои въпроси на вариационното смятане, аналитичната механика и пр.

Получената система има решение, защото е линейна относно  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и детерминантата от коефициентите пред неизвестните е различна от нула. Ще докажем, че така намерените числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  удовлетворяват и уравнението

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0.$$

За тази цел диференцираме уравненията

$$\begin{aligned} G_1(x, \varphi, \psi) &= 0, \\ G_2(x, \varphi, \psi) &= 0, \end{aligned}$$

което ни дава

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial u} \varphi' + \frac{\partial G_1}{\partial v} \psi' &= 0, \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial u} \varphi' + \frac{\partial G_2}{\partial v} \psi' &= 0. \end{aligned}$$

Оттук и от (1) при  $x = x_0$  получаваме

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial u} - \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial u} - \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial u} \right) \varphi' \\ + \left( \frac{\partial F}{\partial v} - \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial v} - \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial v} \right) \psi' = 0. \end{aligned}$$

Като вземем пред вид начина, по който сме определили  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , намираме

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial x} = 0$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0,$$

с което доказателството е завършено

Не е трудно да се убедим, че полученият резултат може да се обобщи по следния начин. Нека функциите

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \dots, x_p; y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &G_1(x_1, x_2, \dots, x_p; y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &G_2(x_1, x_2, \dots, x_p; y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots \\ &G_n(x_1, x_2, \dots, x_p; y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$



**Глава III**  
**СМЯНА НА ПРОМЕНЛИВИТЕ\***

**§ 1. Смяна на независима променлива при функции  
на един аргумент**

Нека във функцията  $y = y(x)$  направим субституцията  $x = \varphi(t)$ . В такъв случай  $y$  се обръща във функция на  $t$ . Да означим тази функция с  $u(t)$ , така че

$$u(t) = y[\varphi(t)].$$

Ще покажем, че производните на  $y$  спрямо  $x$  (поне когато е възможно да се извършат пресмятанията, за които става дума) могат да се изразят чрез производните на  $u$  и  $x$  спрямо  $t$ . Смисълът на тези думи се нуждае от прецизиране, но ние няма да се спираме тук на този въпрос, защото това не е единственото място, което се нуждае от прецизиране.

Нека  $\psi(x)$  е обратна функция на функцията  $\varphi(t)$ . В такъв случай

$$u[\psi(x)] = y[\varphi(\psi(x))] = y(x),$$

защото  $\varphi(\psi(x)) = x$ . Това ни дава право да представим  $y(x)$  във вид на сложната функция  $u(t)$ , където  $t = \psi(x)$ . Да разгледаме равенствата

$$(1) \quad x = \varphi(t),$$

$$(2) \quad y = u(t),$$

където  $t = \psi(x)$ . Като диференцираме равенството (2) спрямо  $x$ , получаваме съгласно правилото за диференциране на функция от функция

$$y'_x = u'_t t'_x.$$

Диференцирайки равенството  $x = \varphi(t)$  спрямо  $x$ , получаваме

$$1 = x'_t t'_x,$$

откъдето

$$t'_x = \frac{1}{x'_t},$$

---

\*В първите четири параграфа на тази глава ще се ограничим само с техническата страна на въпроса, без да прецизираме условията, при които могат да се извършат интересувашите ни пресмятания. За извършване на такова прецизиране няма принципиални трудности в смисъл, че могат да се посочат достатъчни условия от локален характер, при които тези пресмятания са законни. Ще направим това в последния параграф на тази глава.

т. е.

$$(3) \quad y'_x = \frac{u'_t}{x'_t}.$$

По този начин успяхме да изразим  $y'_x$  чрез производните (на  $u$  и  $x$ ) спрямо  $t$ . За да изразим  $y''_x$  чрез производните спрямо  $t$ , диференцираме още веднъж равенството (3) спрямо  $x$ , като помним, че  $t$  е функция на  $x$ . Това ни дава

$$y''_x = \left( \frac{u'_t}{x'_t} \right)'_x = \left( \frac{u'_t}{x'_t} \right)'_t t'_x = \frac{u''_t x'_t - u'_t x''_t}{x'^2_t} t'_x = \frac{u''_t x'_t - u'_t x''_t}{x'^2_t} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{u''_t x'_t - u'_t x''_t}{x'^3_t}.$$

Аналогично намираме

$$\begin{aligned} y'''_x &= \frac{(u'''_t x'_t + u''_t x''_t - u'_t x'''_t - u'_t x''_t) x'^3_t - (u''_t x'_t - u'_t x''_t) 3x'^2_t x''_t}{x'^6_t} t'_x = \\ &= \frac{(u'''_t x'_t - u'_t x'''_t) x'_t - 3(u''_t x'_t - u'_t x''_t) x''_t}{x'^5_t} \end{aligned}$$

и пр.

Тук ще дадем два примера, за да илюстрираме техниката на тези пресмятания.

*Пример 1.* Да се намерят всичките функции  $y$  на независимата променлива  $x$  (ако има такива), които са два пъти диференцуеми в затворения интервал  $[-1, 1]$  и удовлетворяват уравнението

$$(4) \quad (1 - x^2)y'' - xy' + y = 0.$$

*Решение.* Да допуснем, че има два пъти диференцуема функция  $y$ , която удовлетворява уравнението (4) в разглеждания интервал  $[-1, 1]$  (допускане, за което не знаем дали е вярно или не). Ще направим субституцията  $x = \cos t$ , като оставим  $t$  да се мени в затворения интервал  $[0, \pi]$  и да положим  $u(t) = y(\cos t)$ . Тази субституция може да се направи, защото стойностите на функцията  $x = \cos t$  не напускат дефиниционната област на  $y(x)$ . Функцията  $x = \cos t$  е обратима в интервала  $[0, \pi]$ , защото производната ѝ не се анулира в никоя вътрешна точка на този интервал. Разглеждаме равенството

$$(5) \quad y(x) = u(t),$$

където  $t = \arccos x$  и  $x$  е независима променлива.

Независимата променлива  $x$  може да се мени произволно в интервала  $[-1, 1]$ , защото както функцията  $y(x)$ , така и функцията  $\arccos x$  е дефинирана в този интервал и стойностите на функцията  $\arccos x$  не напускат дефиниционната област на функцията  $u(t)$ .

Ние ще диференцираме равенството (5) спрямо  $x$ . Тук обаче се явява едно затруднение: функцията  $\arccos x$  не е диференцуема при  $x = \pm 1$ . Поради това ще разгледаме най-напред равенството (5) в отворения интервал  $(-1, 1)$ . Сега вече можем да диференцираме двете части на това равенство спрямо  $x$ , защото:



- 1) функцията  $y(x)$  е диференцуема (дори два пъти, и то в затворения интервал  $[-1, 1]$ , а следователно и сложната функция  $u(t) = y(\cos t)$  е диференцуема в интервала  $(0, \pi)$  и  
 2) функцията  $\arccos x$  е диференцуема в отворения интервал  $(-1, 1)$ .

Като диференцираме равенството (5) спрямо  $x$ , намираме

$$(6) \quad y'_x = u'_t t'_x$$

или

$$y'_x = \frac{-u'_t}{\sin t},$$

понеже

$$t'_x = \frac{-1}{\sin t}.$$

Отгук намираме

$$(7) \quad y''_x = \frac{-u''_t \sin t + u'_t \cos t}{\sin^2 t} t'_x = \frac{u''_x \sin t - u'_t \cos t}{\sin^3 t}.$$

Като заместим в равенството (4), получаваме

$$(8) \quad u''_t + u = 0.$$

По този начин смяната на променливите, която извършихме, опрости нашето уравнение.

В така полученото уравнение  $u$  е една два пъти диференцуема функция на независимата променлива  $t$  в отворения интервал  $(0, \pi)$ . За нас ще бъде важно да знаем, че  $t$  може да приема *всички* стойности от този интервал. За да покажем това, достатъчно е да изберем  $t_0$  произволно в интервала  $(0, \pi)$ , да положим  $x_0 = \cos t_0$  и да се възползуваме от равенствата (4), (6) и (7) при  $x = x_0$ . Ние видяхме обаче по-рано (вж. зад. 42 от края на глава IV от част II), че само функциите

$$(9) \quad u(t) = A \cos t + B \sin t,$$

където  $A$  и  $B$  са константи, удовлетворяват уравнението (8). Тогава ние разгледахме функциите върху цялата ос  $x$ ; разсъжденията обаче запазват своята валидност, ако се ограничим с кой да е интервал; в дадения случай ние разглеждаме отворения интервал  $(0, \pi)$ .

Като вземем в предвид, че

$$y(x) = u(\arccos x),$$

получаваме от (9)

$$(10) \quad y(x) = A \cos(\arccos x) + B \sin(\arccos x) = Ax + B \sqrt{1 - x^2}.$$

Така полученото равенство е установено при всички стойности на  $x$  от интервала  $(-1, 1)$ . За да се убедим в това, избираме  $x_0$  произволно в интервала  $(-1, 1)$ , полагаме  $t_0 = \arccos x_0$  и използваме равенството (9) при  $t = t_0$ .

Равенството (10) е установено в отворения интервал  $(-1, 1)$ . Това обаче е вярно и за  $x = \pm 1$  поради непрекъснатостта на функциите, които стоят в двете части на това равенство.

И така решенията на задачата (ако въобще такива има) трябва да се търсят измежду функциите

$$(11) \quad y = Ax + B \sqrt{1 - x^2}.$$

В задачата се иска функцията  $y$  да бъде диференцуема (два пъти) в *затворения* интервал  $[-1, 1]$ . Обаче функцията, която стои в дясната страна на равенството (11), не е диференцуема

при  $x = \pm 1$ , ако  $B \neq 0$  (защо?). От това заключаваме, че  $B = 0$ . И така ние още повече стеснихме множеството на функциите, измежду които трябва да се търсят решенията на задачата (за които, както казахме, все още не знаем дали съществуват).

С директна проверка обаче се вижда, че функциите

$$y = Ax$$

удовлетворяват поставените условия при всеки избор на константа  $A$ .

С това интересуващата ни задача е решена докрай.

*Пример 2.* Да се намерят всички функции  $y$  на независимата променлива  $x$  (ако има такива), които са два пъти диференцируеми в безкрайния интервал  $x > 1$  и удовлетворяват уравнението

$$(12) \quad (1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$$

(по какво се отличава тази задача от предната?).

*Решение.* Да допуснем, че задачата има решение. Тук ние не можем да направим субституцията  $x = \cos t$ , която направихме в предната задача, защото стойностите на функцията  $\cos t$  не лежат в дефиниционната област на функцията  $y$ . Ние ще направим сега субституцията  $x = \operatorname{ch} t$ , като оставим  $t$  да се мени в безкрайния интервал  $t > 0$ . Функцията  $\operatorname{ch} t$  е обратима в този интервал, защото производната ѝ не се анулира при  $t > 0$ . Нека  $\psi(x)$  е обратната функция на  $\operatorname{ch} t$ . При  $t > 0$  функцията  $\psi(x)$  е диференцируема, защото, както това лесно може да се докаже, тя се изразява по следния начин чрез диференцируеми функции:

$$\psi(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Полагаме  $u(t) = y(\operatorname{ch} t)$  и разглеждаме равенството

$$(13) \quad y(x) = u(t),$$

където  $t = \psi(x)$ . В равенството (13) независимата променлива  $x$  може да се мени произволно в безкрайния интервал  $x > 1$ , защото в този интервал са дефинирани функциите  $y(x)$  и  $\psi(x)$ , като при това стойностите на  $\psi(x)$  не напускат дефиниционната област на  $u(t)$ . Диференцираме равенството (13) спрямо  $x$  по правилото за диференциране на сложни функции (ние можем да направим това поради диференцируемостта на функциите  $y(x)$ ,  $\psi(x)$  и  $u(t) = y(\operatorname{ch} t)$ ). Това ни дава

$$y'_x = u'_t t'_x.$$

Като диференцираме спрямо  $x$  още и равенството

$$x = \operatorname{ch} t,$$

където  $t = \psi(x)$ , получаваме

$$1 = (\operatorname{sh} t)t'_x$$

или

$$t'_x = \frac{1}{\operatorname{sh} t}.$$

Оттук намираме

$$y'_x = \frac{u'_t}{\operatorname{sh} t}.$$

Диференцирайки втори път спрямо  $x$ , получаваме

$$y''_x = \frac{u''_t \operatorname{sh} t - u'_t \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t} t'_x = \frac{u''_t \operatorname{sh} t - u'_t \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^3 t}.$$

Като заместим  $y'_x$  и  $y''_x$  с равните им в уравнението (12), намираме

$$(14) \quad u''_t - u = 0.$$

По този начин ние успяхме да опростим уравнението (12) благодарение на извършената смяна на независимата променлива. Така полученото уравнение е удовлетворено при всички положителни стойности на  $t$ . За да намерим всичките функции  $t$ , които са два пъти диференцируеми при  $t > 0$  и удовлетворяват уравнението (14), образуваме двете помощни функции

$$(15) \quad \begin{aligned} p(t) &= u \operatorname{ch} t - u' \operatorname{sh} t, \\ q(t) &= u \operatorname{sh} t - u' \operatorname{ch} t. \end{aligned}$$

Не е трудно да се види, че  $p'(t) = 0$  и  $q'(t) = 0$ , т. е. двете функции  $p(t)$  и  $q(t)$  са константи. Ако положим  $p(t) = A$  и  $-q(t) = B$ , получаваме от системата (15)

$$u = A \operatorname{ch} t + B \operatorname{sh} t.$$

Оттук, като използваме равенството

$$y(x) = u(\psi(x)),$$

намираме

$$(16) \quad y(x) = A \operatorname{ch} \psi(x) + B \operatorname{sh} \psi(x) = Ax + B \sqrt{x^2 - 1}.$$

Не е трудно да се види, че ние установихме по този начин валидността на равенството (16) при всички стойности на  $x$ , които са по-големи от единица. И така ние показахме, че сигурно няма други функции, които удовлетворяват условията на задачата, освен функциите (16). От друга страна, с директна проверка се вижда, че функциите (16) удовлетворяват *всички* условия на задачата при всеки избор на константите  $A$  и  $B$ . С това задачата е решена докрай.

## § 2. Обща задача за смяна на променливите при функции на един аргумент

По-горе ние разгледахме една задача, при която се извършваше смяна на променливите с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= u, \end{aligned}$$

където  $u$  е функция на  $t$ . Сега ще разгледаме по-общата задача, при която трансформачните формули имат вида

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= f(t, u), \\ y &= g(t, u). \end{aligned}$$

И така нека

$$(2) \quad y = F(x)$$

е функция на  $x$ . От уравнения (1) и (2) получаваме\*

$$g(t, u) = F[f(t, u)].$$

От това уравнение можем\*\* да определим или  $u$  като функция на  $t$ , или  $t$  като функция на  $u$ . Да определим например  $u$  като функция на  $t$  и да означим тази функция с  $u(t)$ . След тези предварителни бележки ще покажем, че производните\*\*\* на  $u$  спрямо  $x$  могат да се изразят чрез производните на  $u(t)$  спрямо  $t$  и чрез частните производни на  $f(t, u)$  и  $g(t, u)$ .

Смисълът на тези думи се нуждае от прецизиране, което няма да правим сега, защото това не е единственото място, което се нуждае от прецизиране.

Определяме\*\*\*\* от уравнението

$$x = f[t, u(t)]$$

$t$  като функция на  $x$ . Да означим тази функция с  $t(x)$ . Ние твърдим, че

$$g[t(x), u(t(x))] = F(x).$$

Това може да се види по следния начин: функцията  $u(t)$  е дефинирана с помощта на условието

$$g(t, u(t)) = F[f(t, u(t))]$$

и специално при  $t = t(x)$  имаме

$$g[t(x), u(t(x))] = F[f[t(x), u(t(x))]];$$

от друга страна, функцията  $t = t(x)$  удовлетворява уравнението

$$f[t, u(t)] = x$$

и следователно

$$F[f[t(x), u(t(x))]] = F(x),$$

откъдето

$$g[t(x), u(t(x))] = F(x).$$

\*Разбира се, за да можем да направим тази субституция, трябва да сме сигурни, че стойностите на функцията  $f(t, u)$  принадлежат на дефиниционната област на  $F(x)$ .

\*\*Разбира се, не винаги.

\*\*\*Тук ще предполагаме, че функциите  $F(x)$ ,  $f(t, u)$  и  $g(t, u)$  са диференцуеми достатъчен брой пъти. Това обаче не е достатъчно. Трябва да сме сигурни още и в съществуването на съответните производни на  $u(t)$  (нека припомним на това място, че в общия случай ние не сме сигурни дори в съществуването на функцията  $u(t)$ , та още по-малко можем да твърдим нещо за съществуването на нейните производни.)

\*\*\*\*Стига да можем.

И така ние представихме функцията  $y = F(x)$  във вид на съставната функция

$$y = g[t, u(t)],$$

където  $t = t(x)$  е функция на  $x$ , удовлетворяваща уравнението

$$x = f[t, u(t)].$$

Като диференцираме равенството\*

$$y = g[t, u(t)]$$

спрямо  $x$  и вземем пред вид, че  $t$  е функция на  $x$ , получаваме по правилото за диференциране на съставни функции

$$y'_x = (g[t, u(t)]'_x = (g[t, u(t)]'_t \cdot t'_x = \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u} u'_t \right) \cdot t'_x.$$

Като диференцираме спрямо  $x$  още и равенството

$$x = f[t, u(t)]$$

(като помним, че  $t$  е функция на  $x$ ), получаваме\*\*

$$1 = (f[t, u(t)]'_x = (f[t, u(t)]'_t t'_x = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t \right) t'_x,$$

откъдето

$$t'_x = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t}$$

и следователно

$$y'_x = \frac{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u} u'_t}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t}.$$

\*За да можем да извършим това обаче, не стига да знаем, че функциите  $y = F(x)$ ,  $g(t, u)$  и  $u(t)$  са диференцируеми. Трябва да сме сигурни още в диференцируемостта на функцията  $t(x)$  и в непрекъснатостта на частните производни на  $g$  и  $f$ .

\*\* След като веднъж сме стигнали по един или друг начин до това равенство, ние вече можем да извлечем от него и заключението, че

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t \neq 0.$$

Като диференцираме това равенство още веднъж спрямо  $x$ , ще получим  $y''_{xx}$  и пр.

Нека изрично отбележим на това място, че за да можем да решим задачата, която току-що разгледахме, не стига да бъдат дадени трансформачните формули. Трябва още да бъде казано коя от променливите се избира за функция и коя за аргумент. Така например, ако искаме да направим смяна на променливите с помощта на трансформачните формули (1), където  $t$  се разглежда като функция на  $u$ , имаме друга задача, различна от тази, която ние разгледахме в текста, макар че трансформачните формули са същите (тази друга задача, разбира се, се решава по същия начин).

*Пример.* В израза

$$(3) \quad R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

където  $y = f(x)$  е функция на  $x$ , да се направи смяна на променливите с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \end{aligned}$$

където  $r$  разглеждаме като функция на  $\theta$ .

*Решение.* Нека  $r(\theta)$  е функция, която удовлетворява уравнението

$$r \sin \theta = f(r \cos \theta),$$

и нека  $\theta = \theta(x)$  е функция на  $x$ , която удовлетворява уравнението

$$x = r(\theta) \cos \theta.$$

В такъв случай ние добиваме възможност да представим функцията  $y = f(x)$  още по следния начин:

$$(4) \quad y = r(\theta) \sin \theta,$$

където  $\theta = \theta(x)$ . Диференцираме равенството (4) спрямо  $x$ , като помним, че  $\theta$  е функция на  $x$ . Това ни дава

$$y'_x = (r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta) \theta'_x.$$

Като диференцираме още и равенството

$$x = r(\theta) \cos \theta$$

спрямо  $x$ , получаваме

$$1 = (r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta) \theta'_x,$$

откъдето

$$\theta'_x = \frac{1}{r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta}.$$

Това ни дава

$$y'_x = \frac{r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta}{r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta}.$$

Като диференцираме още веднъж спрямо  $x$ , получаваме

$$y''_x = \frac{(r''_\theta \sin \theta + 2r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)(r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)}{(r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)^2} \theta'_x - \frac{(r''_\theta \cos \theta - 2r'_\theta \sin \theta - r \cos \theta)(r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta)}{(r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)^2} \theta'_x = \frac{-r''r + 2r'^2 + r^2}{(r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta)^3}.$$

Сега остава да заместим  $y'_x$  и  $y''_x$  в (3). Това ще ни даде

$$R = \pm \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

Това решение не може да се разглежда като завършено, защото то оставя открит въпроса за границите на неговата валидност. На читателя е ясно, че горните пресмятания не винаги могат да се извършат. Така например ние си послужихме с помощни функции, за които тихомълком предполагахме дори, че имат производни, докато самото им съществуване не беше осигурено, и пр. Засега няма да анализираме повече този пример. Нека той служи само като илюстрация на техническата страна на тези пресмятания. Читателят, който вижда нуждата от едно прецизиране на въпроса, ще намери интересувания го отговор в § 5.

### § 3. Смяна на независимите променливи при функции на няколко аргумента

Да направим във функцията  $z = z(x, y)$  субституцията\*

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v). \end{aligned}$$

В такъв случай  $z$  се обръща във функция на  $u$  и  $v$ . Да означим с  $w(u, v)$  тази функция, така че

$$w(u, v) = z[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

Ще покажем, че производните\*\* на  $z$  спрямо  $x$  и  $y$  могат да се изразят\*\*\* чрез производните на  $w$ ,  $\varphi$  и  $\psi$  спрямо  $u$  и  $v$ . За тази цел означаваме с  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  две функции\*\*\*\* на  $x$  и  $y$ , които удовлетворяват системата

$$\varphi[u(x, y), v(x, y)] = x,$$

\*Разбира се, за да можем да извършим това, трябва да сме сигурни, че точката с координати  $[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$  принадлежи на дефиниционната област на  $z(x, y)$ .

\*\*Тук трябва да сме сигурни в диференцируемостта не само на функциите  $z(x, y)$ ,  $\varphi(u, v)$  и  $\psi(u, v)$ , но и на  $w(u, v)$ . Достатъчни условия за диференцируемост на  $w(u, v)$  ни дава теоремата за диференциране на съставни функции.

\*\*\*Смисълът на тези думи се нуждае, разбира се, от прецизиране, което сега няма да правим, защото това не е единственото място, което се нуждае от прецизиране.

\*\*\*\*Разбира се, такива две функции не винаги съществуват. Теоремата за съществуване на неявни функции ни дава все пак едно достатъчно условие за съществуване на такива функции.

$$\psi[u(x, y), v(x, y)] = y.$$

Ние твърдим, че

$$z(x, y) = w[u(x, y), v(x, y)].$$

Това се вижда от следната верига равенства:

$$w[u(x, y), v(x, y)] = z[\varphi[u(x, y), v(x, y)], \psi[u(x, y), v(x, y)]] = z(x, y).$$

И така ние представихме функцията  $z(x, y)$  по следния начин:

$$(1) \quad z = w(u, v),$$

където  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$ . Диференцираме\* равенството (1) частно спрямо  $x$  и  $y$  по правилото за диференциране на съставни функции. Това ни дава

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

За да намерим производните  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ , диференцираме съответно спрямо  $x$  и  $y$  равенствата\*\*

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v), \end{aligned}$$

където  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$ . Това ни дава

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

и

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y},$$

\*За да можем да извършим това, достатъчно е да сме сигурни, че функциите  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  са диференцируеми, а производните на  $w(u, v)$  спрямо  $u$  и  $v$  са непрекъснати.

\*\*Разбира се, и тук трябва да сме сигурни, че са налице условията, при които изведохме правилото за диференциране на съставни функции.



$$1 = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

От така получените уравнения\* определяме  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ . Като диференцираме още веднъж равенствата (2), получаваме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ и пр.}$$

*Пример.* Дадено е уравнението

$$(3) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad a \neq 0,$$

където  $z = z(x, y)$  е функция на  $x$  и  $y$ , която допуска непрекъснати частни производни до втори ред включително в някоя околност на точката  $(x_0, y_0)$ . Да се сменят независимите променливи на  $x$  и  $y$ , като се въведат нови независими променливи  $u$  и  $v$ , свързани с  $x$  и  $y$  посредством трансформационните формули

$$\begin{aligned} x &= \frac{u-v}{2a}, \\ y &= \frac{u+v}{2}. \end{aligned}$$

*Решение.* Да положим

$$w(u, v) = z\left(\frac{u-v}{2a}, \frac{u+v}{2}\right).$$

В такъв случай имаме

$$z(x, y) = w(u, v)$$

при

$$\begin{aligned} u &= y + ax, \\ v &= y - ax. \end{aligned}$$

Правилото за диференциране на съставни функции ни дава

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Като вземем предвид, че

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -a,$$

\*Тези системи имат една и съща детерминанта. След като пресмятанятия по един или друг начин са доведени дотук, ние можем да твърдим, че тази детерминанта е различна от нула, защото

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

намираме

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial w}{\partial u} - a \frac{\partial w}{\partial v}.$$

Аналогично намираме

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

и следователно

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}.$$

Като диференцираме още веднъж, получаваме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} - a \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Заместваем  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  в уравнението (3) с равните им и получаваме

$$-4a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0,$$

тъй като  $a \neq 0$ .

#### § 4. Обща задача за смяна на променливите при функции на няколко аргумента

Нека  $z = F(x, y)$  е една функция на  $x$  и  $y$  и нека

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= f(u, v, w), \\ y &= g(u, v, w), \\ z &= h(u, v, w), \end{aligned}$$

са три функции на  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Като заместим\*  $x$ ,  $y$  и  $z$  с равните им в уравнението  $z = F(x, y)$ , получаваме

$$(2) \quad h(u, v, w) = F[f(u, v, w), g(u, v, w)].$$

Нека  $w = w(u, v)$  е една функция на  $u$  и  $v$ , която удовлетворява\* уравнението (2). Това значи, че

$$(2a) \quad h(u, v, w(u, v)) = F[f(u, v, w(u, v)), g(u, v, w(u, v))].$$

\*Ние вече имахме случай да обърнем внимание на трудностите, с които са свързани тези разсъждения.

Нека  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  са две функции на  $x$  и  $y$ , които удовлетворяват\* системата

$$(3) \quad \begin{aligned} f[u, v, w(u, v)] &= x, \\ g[u, v, w(u, v)] &= y. \end{aligned}$$

В такъв случай не е трудно да се докаже, че

$$h[u(x, y), v(x, y), w(u(x, y), v(x, y))] = F(x, y).$$

(Нека читателят сам докаже това, като използва равенствата (2а) и (3)). Нашата задача е да покажем как производните на  $F(x, y)$  спрямо  $x$  и  $y$  могат да се изразят\*\* чрез производните\* на  $w$  спрямо  $u$  и  $v$  и чрез производните на  $f, g$  и  $h$ . За тази цел използваме представянето на функцията  $z = F(x, y)$ , за което говорихме по-горе:

$$(4) \quad z = h[u, v, w(u, v)],$$

където  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ . Като диференцираме\* равенството (4) частно по  $x$  и помним, че  $w$  е функция на  $u$  и  $v$ , а  $u$  и  $v$  са функции на  $x$  и  $y$ , получаваме

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial w} \left[ \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right].$$

За да намерим производните  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial v}{\partial x}$ , диференцираме\* спрямо  $x$  равенствата

$$\begin{aligned} x &= f[u, v, w(u, v)], \\ y &= g[u, v, w(u, v)], \end{aligned}$$

като помним, че  $w$  е функция на  $u$  и  $v$ , а  $u$  и  $v$  са функции на  $x$  и  $y$  (при това диференциране, което се извършва частно спрямо  $x$ , независимата променлива  $y$  е фиксирана). Това ни дава

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \left[ \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right], \\ 0 &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w} \left[ \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right]. \end{aligned}$$

От тази система определяме  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial v}{\partial x}$ . Аналогично намираме  $\frac{\partial z}{\partial y}$  и пр.

\*Ние вече имахме случай да обърнем внимание на трудностите, с които са свързани тези разсъждения.

\*\*Смисълът на тези думи се нуждае от прецизиране. Ние обаче на това няма да се спирате, защото тази празнота не е единствената.

### § 5. Достатъчни условия, при които може да се извърши смяна на променливите

В този параграф ще дадем една система от достатъчни условия, при които може да се извърши смяна на променливите по метода, техническата страна на който изложихме в предните четири параграфа. Ще се ограничим при това само със случая, при който имаме функция на две независими променливи и се прави смяна само на първите частни производни. Това ограничение, разбира се, не е съществено и всичко изложено в този параграф може без труд да се обобщи.

Нека функциите

$$\begin{aligned}x &= f(u, v, w), \\y &= g(u, v, w), \\z &= h(u, v, w)\end{aligned}$$

са дефинирани и притежават непрекъснати първи частни производни в някоя околност на точката  $(u_0, v_0, w_0)$ . Полагаме

$$\begin{aligned}f(u_0, v_0, w_0) &= x_0, \\g(u_0, v_0, w_0) &= y_0, \\h(u_0, v_0, w_0) &= z_0.\end{aligned}$$

Нека функцията

$$z = F(x, y)$$

е дефинирана, непрекъсната, притежава непрекъснати първи частни производни в някоя околност на точката  $(x_0, y_0)$  и приема стойност  $z_0$  при  $x = x_0$  и  $y = y_0$ . Нека освен това

$$(1) \quad \delta = h'_w(u_0, v_0, w_0) - F'_x(x_0, y_0)f'_w(u_0, v_0, w_0) - F'_y(x_0, y_0)g'_w(u_0, v_0, w_0) \neq 0$$

и нека най-сетне в точката  $(u_0, v_0, w_0)$  имаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \end{vmatrix} \neq 0.$$

При тези предположения ще покажем, че:

1) в достатъчно малка околност на точката  $(u_0, v_0)$  има една (и само една) непрекъсната функция  $w = w(u, v)$ , която удовлетворява уравнението

$$h(u, v, w) = F[f(u, v, w)g(u, v, w)]$$

и приема стойност  $w_0$  в точката  $(u_0, v_0)$ ;

2) в достатъчно малка околност на точката  $(x_0, y_0)$  има една (и само една) двойка непрекъснати функции  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ , които удовлетворяват условията

$$\begin{aligned} x &= f[u, v, w(u, v)], \\ y &= g[u, v, w(u, v)], \\ u(x_0, y_0) &= u_0, \quad v(x_0, y_0) = v_0; \end{aligned}$$

3) функциите  $w(u, v)$ ,  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  притежават непрекъснати частни производни от първи ред и тези производни удовлетворяват уравненията

$$\begin{aligned} F'_x(x_0, y_0) &= h'_u(u_0, v_0, w_0)u'_x(x_0, y_0) + h'_v(u_0, v_0, w_0)v'_x(x_0, y_0) \\ &\quad + h'_w(u_0, v_0, w_0)[w'_u(u_0, v_0)u'_x(x_0, y_0) + w'_v(u_0, v_0)v'_x(x_0, y_0)], \\ 1 &= f'_u(u_0, v_0, w_0)u'_x(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0, w_0)v'_x(x_0, y_0) \\ &\quad + f'_w(u_0, v_0, w_0)[w'_u(u_0, v_0)u'_x(x_0, y_0) + w'_v(u_0, v_0)v'_x(x_0, y_0)], \\ 0 &= g'_u(u_0, v_0, w_0)u'_x(x_0, y_0) + g'_v(u_0, v_0, w_0)v'_x(x_0, y_0) \\ &\quad + g'_w(u_0, v_0, w_0)[w'_u(u_0, v_0)u'_x(x_0, y_0) + w'_v(u_0, v_0)v'_x(x_0, y_0)] \text{ и пр.} \end{aligned}$$

И наистина да разгледаме уравнението

$$h(u, v, w) - F[f(u, v, w), g(u, v, w)] = 0.$$

Точката с координати  $(u_0, v_0, w_0)$  удовлетворява това уравнение, защото

$$z_0 - F(x_0, y_0) = 0.$$

Като вземем пред вид, от друга страна, че функцията  $F(x, y)$  е дефинирана в някоя околност на точката  $(x_0, y_0)$ , че функциите  $f(u, v, w)$  и  $g(u, v, w)$  са дефинирани и непрекъснати в някоя околност на точката  $(u_0, v_0, w_0)$  и приемат съответно стойности  $x_0$  и  $y_0$  в тази точка заключаваме, че точката с координати

$$[f(u, v, w), g(u, v, w)]$$

няма да напуска дефиниционната област на  $F(x, y)$ , когато  $(u, v, w)$  се изменят в някоя достатъчно малка околност на точката  $(u_0, v_0, w_0)$ .

И така функцията

$$G(u, v, w) = h(u, v, w) - F[f(u, v, w), g(u, v, w)]$$

е дефинирана в някоя достатъчно малка околност на точката  $(u_0, v_0, w_0)$ . Като вземем пред вид, че функциите  $f(u, v, w)$ ,  $g(u, v, w)$ ,  $h(u, v, w)$  и  $F(x, y)$  притежават непрекъснати частни производни, заключаваме с помощта на теоремата за диференциране на съставни функции, че функцията  $G(u, v, w)$  също притежава частни производни спрямо трите си аргумента. Специално

$$\frac{\partial G(u_0, v_0, w_0)}{\partial w} = h'_w(u_0, v_0, w_0) - F'_x(x_0, y_0)f'_w(u_0, v_0, w_0) - F'_y(x_0, y_0)g'_w(u_0, v_0, w_0)$$

и следователно

$$(2) \quad \frac{\partial G(u_0, v_0, w_0)}{\partial w} \neq 0,$$

както ни учи неравенството (1).

От друга страна, функцията  $G(u, v, w)$  и нейната частна производна  $\frac{\partial G(u, v, w)}{\partial w}$  са непрекъснати. Това ни дава право да приложим теоремата за съществуване на неявни функции, според която във всяка достатъчно малка околност на точката  $(u_0, v_0)$  има една и само една непрекъсната функция  $w = w(u, v)$ , която удовлетворява уравнението

$$h(u, v, w) - F[f(u, v, w), g(u, v, w)] = 0$$

и приема стойност  $w_0$  при  $u = u_0$ ,  $v = v_0$ .

От непрекъснатостта на тази функция, от непрекъснатостта на частните производни на функцията  $G(u, v, w)$  и от условието (2) следва, както знаем, съществуването на частните производни на  $w(u, v)$  спрямо  $u$  и  $v$ . От изразите, които получаваме за тези частни производни, се вижда, че те са непрекъснати.

Сега ще разгледаме въпроса за съществуването на функциите  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , които удовлетворяват системата

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= f[u, v, w(u, v)], \\ y &= g[u, v, w(u, v)]. \end{aligned}$$

Ние ще покажем, че функционалната детерминанта

$$D = \begin{vmatrix} f'_u + f'_w w'_u & f'_v + f'_w w'_v \\ g'_u + g'_w w'_u & g'_v + g'_w w'_v \end{vmatrix}$$

е различна от нула в точката  $(u_0, v_0)$ . И наистина, като диференцираме равенството

$$h[u, v, w] - F[f(u, v, w), g(u, v, w)] = 0$$

(където  $w = w(u, v)$ ) спрямо  $u$  и  $v$  получаваме

$$\begin{aligned} h'_u + h'_w w'_u - F'_x \cdot [f'_u + f'_w w'_u] - F'_y \cdot [g'_u + g'_w w'_u] &= 0, \\ h'_v + h'_w w'_v - F'_x \cdot [f'_v + f'_w w'_v] - F'_y \cdot [g'_v + g'_w w'_v] &= 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$(4) \quad \begin{aligned} w'_u &= -\frac{h'_u - F'_x f'_u - F'_y g'_u}{h'_w - F'_x f'_w - F'_y g'_w}, \\ w'_v &= -\frac{h'_v - F'_x f'_v - F'_y g'_v}{h'_w - F'_x f'_w - F'_y g'_w}. \end{aligned}$$

От друга страна, детерминантата  $D$  може да се представи още във вида

$$D = \begin{vmatrix} f'_u + f'_w w'_u & f'_v + f'_w w'_v & 0 \\ g'_u + g'_w w'_u & g'_v + g'_w w'_v & 0 \\ -w'_u & -w'_v & 1 \end{vmatrix}$$

или още

$$D = \begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ -w'_u & -w'_v & 1 \end{vmatrix}.$$

Като вземем пред вид равенствата (4), получаваме при  $u = u_0, v = v_0, w = w_0$

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u - F'_x f'_u - F'_y g'_u & h'_v - F'_x f'_v - F'_y g'_v & h'_w - F'_x f'_w - F'_y g'_w \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Като вземем пред вид още, че функциите  $f(u, v, w)$ ,  $g(u, v, w)$  и  $w(u, v)$  са непрекъснати и притежават непрекъснати частни производни, заключаваме, че са налице условията, при които доказахме теоремата за съществуване на неявни функции. И така във всяка достатъчно малка околност на точката  $(x_0, y_0)$  имаме една двойка непрекъснати функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , които удовлетворяват системата (3) и приемат съответно стойности  $u_0$  и  $v_0$  в точката  $(x_0, y_0)$ . Тези функции са диференцуеми частно спрямо  $x$  и  $y$ , защото функциите  $f[u, v, w(u, v)]$  и  $g[u, v, w(u, v)]$  са диференцуеми частно спрямо  $u$  и  $v$ ,

частните им производни са непрекъснати и функционалната детерминанта  $D$  е различна от нула в достатъчно малка околност на точката  $(u_0, v_0)$ .

Да разгледаме функцията

$$h[u(x, y), v(x, y), w[u(x, y), v(x, y)]],$$

която е дефинирана в достатъчно малка околност на точката  $(x_0, y_0)$ . Очевидно имаме

$$\begin{aligned} h[u, v, w(u, v)] &= F[f(u, v, w(u, v)), g(u, v, w(u, v))], \\ f[u(x, y), v(x, y), w(u(x, y), v(x, y))] &= x, \\ g[u(x, y), v(x, y), w(u(x, y), v(x, y))] &= y \end{aligned}$$

и следователно

$$h[u(x, y), v(x, y), w(u(x, y), v(x, y))] = F(x, y).$$

Ще положим  $p(x, y) = w[u(x, y), v(x, y)]$  и по такъв начин ще напишем накратко

$$F(x, y) = h(u, v, w),$$

където

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y), \\ w &= p(x, y). \end{aligned}$$

Като се възползваме от правилото за диференциране на съставни функции<sup>\*</sup>, получаваме

$$\begin{aligned} F'_x(x_0, y_0) &= h'_u(u_0, v_0, w_0)u'_x(x_0, y_0) + h'_v(u_0, v_0, w_0)v'_x(x_0, y_0) \\ &\quad + h'_w(u_0, v_0, w_0)p'_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Като вземем предвид, че

$$p'_x(x_0, y_0) = w'_u(u_0, v_0)u'_x(x_0, y_0) + w'_v(u_0, v_0)v'_x(x_0, y_0),$$

намираме

---

<sup>\*</sup> Не е трудно да се провери, че тук са налице всичките условия, при които изведохме това правило.



$$F'_x(x_0, y_0) = h'_u(u_0, v_0, w_0)u'_x(x_0, y_0) + h'_v(u_0, v_0, w_0)v'_x(x_0, y_0) + h'_w(u_0, v_0, w_0)[w'_u(u_0, v_0)u'_x(x_0, y_0) + w'_v(u_0, v_0)v'_x(x_0, y_0)].$$

Аналогично, като диференцираме спрямо  $x$  равенствата

$$\begin{aligned}x &= f(u, v, w), \\y &= g(u, v, w)\end{aligned}$$

при  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ ,  $w = p(x, y)$  по правилото за диференциране на съставни функции, намираме

$$\begin{aligned}1 &= f'_u(u_0, v_0, w_0)u'_x(x_0, y_0) + f'_v(u_0, v_0, w_0)v'_x(x_0, y_0) \\&\quad + f'_w(u_0, v_0, w_0)[w'_u(u_0, v_0)u'_x(x_0, y_0) + w'_v(u_0, v_0)v'_x(x_0, y_0)], \\0 &= g'_u(u_0, v_0, w_0)u'_x(x_0, y_0) + g'_v(u_0, v_0, w_0)v'_x(x_0, y_0) \\&\quad + g'_w(u_0, v_0, w_0)[w'_u(u_0, v_0)u'_x(x_0, y_0) + w'_v(u_0, v_0)v'_x(x_0, y_0)]\end{aligned}$$

и пр.

#### Общи задачи

1. Да се извърши субституцията  $x = \operatorname{tg} t$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ , в уравнението

$$(1) \quad (1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0.$$

*Решение.* Нека  $y = f(x)$  е една функция, която удовлетворява даденото уравнение. Разглеждаме функцията

$$u = u(t) = f(\operatorname{tg} t).$$

В такъв случай имаме очевидно

$$u(\operatorname{arctg} x) = f[\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)] = f(x)$$

или

$$f(x) = u(t),$$

където

$$t = \operatorname{arctg} x.$$

Правилото за диференциране на функция от функция ни дава

$$y'_x = u'_t t'_x,$$

където

$$t'_x = \frac{1}{1 + x^2}$$

и следователно

$$y'_x = \frac{u'_t}{1 + x^2}.$$

Като диференцираме още веднъж, получаваме

$$y_x'' = \frac{u_t'' t_x' \cdot (1 + x^2) - u_t' \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{u_t'' - 2xu_t'}{(1 + x^2)^2}.$$

Заместваме  $x$ ,  $y_x'$  и  $y_x''$  с равните им в уравнението (1). Това ни дава

$$u_t'' + u = 0.$$

В бъдеще, за да не въвеждаме много нови букви, ние често ще означаваме функцията  $u(t)$  с  $y$ , т.е. със същата буква, с която е означена и функцията  $f(x)$ . При този начин на означаване резултатът ще има следният вид:

$$y_t'' + y = 0.$$

2. Да се извърши субституцията  $x = e^t$  в уравнението

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0$$

при  $x > 0$ .

*Отговор.*

$$y_t'' + 2y_t' + y = 0.$$

3. Да се извърши субституцията  $t = \frac{x^2}{4}$ ,  $x > 0$ , в уравнението

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

*Отговор.*

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

4. Да се извърши субституцията  $t = \ln x$  в уравнението

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0$$

при  $x > 0$ .

*Отговор.*

$$y_t''' - y_t'' - y_t' + y = 0.$$

5. Да се извърши субституцията  $x = a \sin t$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ , в уравнението

$$(a^2 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0$$

при  $-a < x < a$ ,  $a > 0$ .

*Отговор.*

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

6. Да се извърши субституцията  $e^2 x = \operatorname{tg} t$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ , в уравнението

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} \frac{dy}{dx} + \frac{4n^2 y}{(e^{2x} + e^{-2x})^2} = 0.$$

*Отговор.*

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0.$$

7. Нека функцията  $y = F(x)$  е дефинирана и диференцируема достатъчен брой пъти в някоя околност на точката  $x_0$ , нека

$$F(x_0) - x_0 F'(x_0) \neq 0$$

(геометрически това означава, че допирателната към кривата  $y = F(x)$  в точката  $[x_0, F(x_0)]$  не минава през началото) и нека

$$x_0 = \rho_0 \cos \theta_0,$$

$$F(x_0) = \rho_0 \sin \theta_0.$$

Покажете, че може да се направи смяна на променливите с помощта на трансформационните формули

$$x = \rho \cos \theta,$$

$$y = \rho \sin \theta,$$

където  $\rho$  се разглежда като непрекъсната функция на  $\theta$ , която е дефинирана в достатъчно малка околност на точката  $\theta_0$  и приема стойност  $\rho_0$  при  $\theta = \theta_0$ .

*Упътване.* Използвайте изследванията от § 5 на тази глава.

8. Нека  $y = y(x)$  е два пъти диференцируема функция на  $x$  в някоя околност на точката  $x_0$ , удовлетворяваща условието

$$y(x_0) - x_0 y'(x_0) \neq 0,$$

и нека

$$x_0 = \rho_0 \cos \theta_0,$$

$$y(x_0) = \rho_0 \sin \theta_0.$$

Да се извърши смяна на променливите в израза

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

с помощта на трансформационните формули

$$x = \rho \cos \theta,$$

$$y = \rho \sin \theta,$$

където  $\rho = \rho(\theta)$  е непрекъсната функция на  $\theta$ , която е дефинирана в достатъчно малка околност на  $\theta_0$  и удовлетворява условието  $\rho(\theta_0) = \rho_0$ .

*Отговор.*

$$\pm \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

9. Нека  $y = y(x)$  е диференцируема функция на  $x$  с непрекъсната производна в някоя околност на точката  $x_0$ , удовлетворяваща условието

$$y(x_0) - x_0 y'(x_0) \neq 0,$$

и нека

$$x_0 = \rho_0 \cos \theta_0,$$

$$y(x_0) = \rho_0 \sin \theta_0.$$

Да се направи смяна на променливите в израза

$$\frac{xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta, \\y &= \rho \sin \theta,\end{aligned}$$

където  $\rho = \rho(\theta)$  е непрекъснатата функция на  $\theta$ , подчинена на условието  $\rho(\theta_0) = \rho_0$ .

*Отговор.*

$$\pm \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 \theta}}.$$

10. Нека  $y = y(x)$  е три пъти диференцуема функция на  $x$  в някоя околност на точката  $x_0$  и нека  $y'(x_0) \neq 0$ . Да се направи смяна на променливите в израза

$$\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left( \frac{y''}{y'} \right)^2$$

с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned}x &= u, \\y &= t,\end{aligned}$$

където  $u$  е непрекъснатата функция на  $t$ , дефинирана в достатъчно малка околност на точката  $t_0$  и подчинена на условието  $u(t_0) = x_0$  (инвариантен израз на Шварц — Н. А. Schwarz).

*Отговор.*

$$-\frac{1}{u_t'^2} \left[ \frac{u_t'''}{u_t'} - \frac{3}{2} \left( \frac{u_t''}{u_t'} \right)^2 \right].$$

11. Нека  $y(x)$  е два пъти диференцуема функция на  $x$  в някоя околност на точката  $x_0$ , нека

$$\begin{aligned}x_0 &= t_0 e^{u_0}, \\y(x_0) &= t_0\end{aligned}$$

и нека

$$y(x_0) \neq 0, \quad y'(x_0) \neq 0.$$

Да се направи смяна на променливите в израза

$$xy'' - \frac{x}{y} y'^2 + y'$$

с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned}x &= te^u, \\y &= t,\end{aligned}$$

където  $u = u(t)$  е непрекъснатата функция на  $t$ , дефинирана в достатъчно малка околност на точката  $t_0$  и подчинена на условието  $u(t_0) = u_0$ .

*Отговор.*

$$\frac{-te^{-u}}{(1 + tu)^3} (t\ddot{u} + \dot{u}).$$

12. Нека  $y$  е една три пъти диференцуема функция на  $x$  в някой интервал  $\Delta$ . Нека  $u$  е функция на  $x$ , дефинирана в  $\Delta$  и свързана с  $y$  посредством равенството

$$yu = 1.$$

Да се докаже, че

$$\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left( \frac{y''}{y'} \right)^2 = \frac{u'''}{u'} - \frac{3}{2} \left( \frac{u''}{u'} \right)^2$$

(Шварц).

13. Нека  $y = y(x)$  е една три пъти диференцуема функция на  $x$  в някой интервал  $\Delta$ . Нека  $u$  е функция на  $x$ , дефинирана в  $\Delta$  и свързана с  $y$  посредством равенството

$$u = \frac{ay + b}{cy + d},$$

където  $a, b, c, d$  са константи и

$$ad - bc \neq 0.$$

Да се докаже, че

$$\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left( \frac{y''}{y'} \right)^2 = \frac{u'''}{u'} - \frac{3}{2} \left( \frac{u''}{u'} \right)^2$$

(Шварц).

*Упътване.* Редуцирайте общия случай към случаите

$$c = 0, \quad d = 1$$

и

$$a = 0, \quad d = 0, \quad b = 1, \quad c = 1$$

и използвайте предната задача.

14. Нека  $z = f(x, y)$  е функция на  $x$  и  $y$ , която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някое отворено точково множество. Да се извърши смяна на независимите променливи в уравнението

$$(2) \quad 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

посредством трансформачните формули

$$x + 2y = u,$$

$$x + y = v.$$

*Решение.* Полагаме

$$\varphi(u, v) = f[2v - u, u - v]$$

и представяме функцията  $f(x, y)$  във вида

$$f(x, y) = \varphi[x + 2y, x + y]$$

или по-кратко

$$(3) \quad f(x, y) = \varphi(u, v),$$

където

$$u = x + 2y,$$

$$v = x + y.$$

Като диференцираме равенството (3) спрямо  $x$  и  $y$ , получаваме

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Производните  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  намираме, като диференцираме равенствата

$$\begin{aligned} u &= x + 2y, \\ v &= x + y \end{aligned}$$

спрямо  $x$  и  $y$ . Това ни дава

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial u}{\partial y} &= 2, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 1. \end{aligned}$$

Като диференцираме още веднъж равенствата (4), намираме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

По такъв начин уравнението (2) приема вида

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

15. Нека  $z$  е една функция на  $x$  и  $y$ , която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някое отворено точково множество. Да се направи смяна на независимите променливи в уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned} x &= u, \\ x + y &= v. \end{aligned}$$

16. Нека  $z$  е една функция на  $x$  и  $y$ , която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някое отворено точково множество  $G$ , което не съдържа точки от оста  $y$ . Да се направи смяна на независимите променливи в уравнението

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = n^2 z$$

с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned} x &= u, \\ \frac{y}{x} &= v. \end{aligned}$$

17. Нека  $z$  е една функция на  $x$  и  $y$ , която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някое отворено точково множество  $G$ , което не съдържа точки от оста  $y$ . Да се направи смяна на независимите променливи в уравнението

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= uv. \end{aligned}$$

18. Нека  $z$  е една функция на  $x$  и  $y$ , която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някое отворено точково множество  $G$ , което не съдържа точки от оста  $x$ . Да се направи смяна на независимите променливи в уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3) \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 y^2 z = 0$$

с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned} x &= uv, \\ y &= \frac{1}{v}. \end{aligned}$$

*Отговор.*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2uv^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2(v - v^3) \frac{\partial z}{\partial v} + u^2 v^2 z = 0.$$

19. Нека

$$\begin{aligned} x_0 &= \rho_0 \cos \theta_0, \\ y_0 &= \rho_0 \sin \theta_0, \\ x_0^2 + y_0^2 &\neq 0 \end{aligned}$$

и нека  $z$  е функция на  $x$  и  $y$ , която притежава непрекъснати първи частни производни в някаква околност на точката  $(x_0, y_0)$ . Да се направи смяна на независимите променливи в израза

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \theta, \end{aligned}$$

като се преобразува  $z$  във функция на  $\rho$  и  $\theta$ , дефинирана в достатъчно малка околност на точката  $(\theta_0, \rho_0)$ .

*Отговор.*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

20. Нека

$$\begin{aligned}x_0 &= \rho_0 \cos \theta_0, \\y_0 &= \rho_0 \sin \theta_0, \\x_0^2 + y_0^2 &\neq 0\end{aligned}$$

и нека  $z$  е една функция на  $x$  и  $y$ , която притежава непрекъснати частни производни от първи ред в някоя околност на точката  $(x_0, y_0)$ . Да се направи смяна на независимите променливи в израза

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta, \\y &= \rho \sin \theta,\end{aligned}$$

като се преобразува  $z$  във функция на  $\rho$  и  $\theta$ , дефинирана в достатъчно малка околност на точката  $(\theta_0, \rho_0)$ .

*Отговор.*

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0.$$

21. Нека

$$\begin{aligned}x_0 &= \rho_0 \cos \theta_0, \\y_0 &= \rho_0 \sin \theta_0, \\x_0^2 + y_0^2 &\neq 0\end{aligned}$$

и нека  $z$  е една функция на  $x$  и  $y$ , която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някоя околност на точката  $(x_0, y_0)$ . Да се направи смяна на независимите променливи в уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta, \\y &= \rho \sin \theta,\end{aligned}$$

като се преобразува  $z$  във функция на  $\rho$  и  $\theta$ , дефинирана в достатъчно малка околност на точката  $(\theta_0, \rho_0)$ .

*Отговор.*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0.$$

22. Нека

$$\begin{aligned}u_0 &= x_0^2 + y_0^2, \\v_0 &= x_0^2 - y_0^2, \\w_0 &= 2e^{z_0}, \\x_0 &\neq 0, y_0 &\neq 0\end{aligned}$$



и нека функцията  $z = z(x, y)$  притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в някоя околност на точката  $(x_0, y_0)$  и да приема стойност  $z_0$  при  $x = x_0$  и  $y = y_0$ . При тези условия направете смяна на променливите в уравнението

$$y^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + x^2 \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - x^2 y^2 e^z = 0$$

с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned} u &= x^2 + y^2, \\ v &= x^2 - y^2, \\ w &= 2e^z, \end{aligned}$$

където  $w = w(u, v)$  се определя в достатъчно малка околност на точката  $(u_0, v_0)$  като непрекъсната функция на  $u, v$ , подчинена на условието  $w(u_0, v_0) = w_0$ .

*Упътване.* Покажете, че

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{w} \left( \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{w} \left( \frac{\partial w}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot 2x \right), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{w} \left( \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{w} \left( \frac{\partial w}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot (-2y) \right). \end{aligned}$$

23. Нека функцията  $z = z(x, y)$  притежава непрекъснати частни производни до втори ред в някое отворено точково множество. Направете смяна на променливите в уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned} u &= x + y, \\ v &= x - y, \\ w &= xy - z, \end{aligned}$$

където  $w$  се разглежда като функция на  $u$  и  $v$ .

*Упътване.* Покажете, че

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y - \left[ \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right] = y - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x - \left[ \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right] = x - \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 1 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

*Отговор.*

$$1 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0.$$

24. Нека  $z$  е функция на  $x$  и  $y$ , която притежава непрекъснати частни производни до втори ред включително в едно отворено точково множество  $G$ , което няма общи точки с координатните оси. Да се направи смяна на променливите в уравнението

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{y}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}$$

с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{y}, \\ v &= x, \\ w &= xz - y, \end{aligned}$$

където  $w$  се разглежда като функция на  $u$  и  $v$ .

*Отговор.*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0.$$

25. Нека  $z$  е една функция на  $x$  и  $y$ , която притежава непрекъснати частни производни до втори ред в някое отворено точково множество  $G$ , което няма общи точки с правите  $x = 0$ ,  $x + y = 0$ . Да се направи смяна на променливите в уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

с помощта на трансформачните формули

$$\begin{aligned} u &= x + y, \\ v &= \frac{y}{x}, \\ w &= \frac{z}{x}, \end{aligned}$$

където  $w$  се разглежда като функция на  $u$  и  $v$ .

*Отговор.*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

# Съдържание

Из предговора към първото издание . . . . .	3
Из предговора към второто издание . . . . .	4
Из предговора към третото издание . . . . .	5
Предговор към четвъртото издание . . . . .	6

## Част I

### РЕАЛНИ ЧИСЛА, РЕДИЦИ ОТ РЕАЛНИ ЧИСЛА, РЕДОВЕ ОТ РЕАЛНИ ЧИСЛА

<b>Глава I. Реални числа . . . . .</b>	<b>7</b>
§ 1. Равенство между реални числа . . . . .	7
§ 2. Аритметични действия . . . . .	7
§ 3. Сравняване на реалните числа . . . . .	10
§ 4. Абсолютна стойност . . . . .	12
§ 5. Понятието цяло число и едно негово обобщение . . . . .	15
§ 6. Принцип за непрекъснатост на множеството на реалните числа .	18
§ 7. Съществуване на непрекъснати наредени тела като следствие от съществуването на тялото на рационалните числа (метода на Г. Кантор) . . . . .	22
§ 8. Съществуване на непрекъснати наредени тела като следствие от съществуването на тялото на рационалните числа (метода на Р. Дедекинд) . . . . .	33
§ 9. Геометрична терминология . . . . .	39
§ 10. Съществуване на най-малък член във всяко ограничено отдолу множество от цели числа . . . . .	40
§ 11. Принцип на Архимед . . . . .	40
§ 12. Теорема на Кантор. . . . .	41
§ 13. Разпределение на рационалните и ирационалните числа . . . . .	42
Общи задачи . . . . .	44

<b>Глава II. Безкрайни редици</b>	47
§ 1. Редици	47
§ 2. Околност	47
§ 3. Точка на сгъстяване. Теорема на Болцано—Вайерщрас	48
§ 4. Сходящи редици	50
§ 5. Действия със сходящите редици	55
Задачи	59
§ 6. Някои свойства на сходящите редици	60
Задачи	66
§ 7. Монотонни редици	67
§ 8. Неперово число	69
§ 9. Ограничени редици	71
§ 10. Общо условие за сходимост на редиците (теорема на Коши)	72
§ 11. Несобствени точки	75
§ 12. Най-дясна и най-лява точка на сгъстяване.	75
Общи задачи	77
<b>Глава III. Безкрайни редове</b>	91
§ 1. Сходимост на редовете	91
§ 2. Геометрична прогресия	93
§ 3. Общо условия на Коши за сходимост на редовете	94
§ 4. Елементарни свойства на редовете	95
§ 5. Редове с неотрицателни членове	97
§ 6. Признаци (критерии) за сходимост на редове с положителни членове	99
§ 7. Представяне на константата $e$ във вид на безкраен ред	105
§ 8. Теорема на Коши за редове с неотрицателни монотонно намаляващи членове	106
§ 9. Критерий за сходимост на Лайбниц (Leibniz)	107
§ 10. Абсолютно сходящи редове	108
§ 11. Комутативен закон при абсолютно сходящите редове	112
§ 12. Умножаване на безкрайни редове. Теорема на Мертенс. Теорема на Коши.	115
Общи задачи	118

**Част II**  
**ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ**  
**НА ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА**

<b>Глава I. Функции на една реална променлива . . . . .</b>	<b>127</b>
§ 1. Функционална зависимост . . . . .	127
§ 2. Графика на една функция . . . . .	129
§ 3. Ограничени функции. . . . .	130
§ 4. Граници на функции . . . . .	131
§ 5. Граница на функции, когато аргументът клони към $+\infty$ или $-\infty$ .	135
§ 6. Границата на $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$ . . . . .	136
Задачи . . . . .	137
§ 7. Непрекъснати функции . . . . .	139
§ 8. Свойства на непрекъснатите функции . . . . .	145
§ 9. Равномерна непрекъснатост . . . . .	153
§ 10. Осцилация на една функция . . . . .	156
§ 11. Още една форма на дефиницията на понятието непрекъснатост .	157
Задачи . . . . .	159
§ 12. Производна на функция. . . . .	160
§ 13. Механичното значение на производната . . . . .	167
§ 14. Елементарни свойства на производните . . . . .	168
§ 15. Производни на елементарни функции . . . . .	173
§ 16. Диференциал . . . . .	177
§ 17. Последователни производни . . . . .	179
§ 18. Формула на Лайбниц (Leibniz) . . . . .	181
§ 19. Теорема на Рол (Rolle) . . . . .	183
§ 20. Теорема за крайните нараствания . . . . .	185
§ 21. Обобщение на теоремата за крайните нараствания (Теорема на Коши) . . . . .	187
§ 22. Основна теорема на интегралното смятане . . . . .	190
§ 23. Полиноми . . . . .	190
§ 24. Интерполация . . . . .	192
Задачи . . . . .	195
§ 25. Монотонни функции . . . . .	198
<b>Глава II. Развиване на функциите в редове . . . . .</b>	<b>200</b>
§ 1. Степенни редове . . . . .	200

§ 2.	Диференциране на степенни редове . . . . .	203
§ 3.	Редици от функции . . . . .	207
§ 4.	Редове, членовете на които са функции. . . . .	209
§ 5.	Редици от непрекъснати функции . . . . .	211
§ 6.	Диференциране на безкрайни редици от функции . . . . .	212
§ 7.	Формула на Тейлор (Taylor) за полиноми . . . . .	215
§ 8.	Обща формула на Тейлор . . . . .	216
§ 9.	Отношение на два остатъчни члена . . . . .	219
§ 10.	Тейлоров ред . . . . .	220
§ 11.	Развиване на тригонометрични функции в степенни редове. . . . .	222
<b>Глава III. Елементарни трансцендентни функции . . . . .</b>		<b>224</b>
§ 1.	Дефиниция на показателна функция . . . . .	224
§ 2.	Ирационалност на числото $e$ . . . . .	230
	Задачи . . . . .	232
§ 3.	Аналитична дефиниция на тригонометричните функции . . . . .	232
§ 4.	Дефиниция на числото $\pi$ и периодичност на тригонометричните функции. . . . .	237
	Задачи . . . . .	239
§ 5.	Хиперболични функции. . . . .	239
	Задачи . . . . .	242
§ 6.	Логаритмична функция . . . . .	243
	Задачи . . . . .	247
§ 7.	Развиване на логаритмичната функция в степенен ред . . . . .	249
§ 8.	Дефиниция на степен, показателят на която не е цяло число . . . . .	251
	Задачи . . . . .	253
§ 9.	Десетични логаритми и тяхната връзка с неперовите логаритми . . . . .	254
§ 10.	Функцията $x^n$ , когато показателят $n$ не е цяло число. . . . .	255
§ 11.	Нютонов бином . . . . .	256
§ 12.	Сравняване растежа на функциите $a^x$ , $x^n$ и $\ln x$ . . . . .	260
§ 13.	Обратни функции . . . . .	261
	Задачи . . . . .	265
§ 14.	Обратни функции на непрекъснати функции. . . . .	265
§ 15.	Диференциране на обратните функции . . . . .	266
§ 16.	Обратни кръгови функции. . . . .	268
§ 17.	Пресмятане на числото $\pi$ . . . . .	273
	Задачи . . . . .	276
§ 18.	Таблица на формулите, върху които се основава техниката на диференцирането . . . . .	281

Задачи . . . . .	283
<b>Глава IV. Най-прости приложения на диференциалното смятане . . . . .</b>	<b>285</b>
§ 1. Максимум и минимум . . . . .	285
§ 2. Необходимо условие за съществуване на локален екстремум при диференцируеми функции. . . . .	286
§ 3. Достатъчни условия за съществуване на локален екстремум . . . . .	288
Задачи . . . . .	291
§ 4. Изпъкнали функции . . . . .	292
Задачи . . . . .	294
§ 5. Изследване на квадратичната форма $ax^2 + 2bxy + cy^2$ . . . . .	295
Задачи . . . . .	298
§ 6. Теорема на Лопитал (L'Hôpital) . . . . .	301
Задачи . . . . .	305
§ 7. Безкрайно малко . . . . .	306
Общи задачи . . . . .	307

### Част III

## ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ НА ФУНКЦИИ НА НЯКОЛКО НЕЗАВИСИМИ ПРОМЕНЛИВИ

<b>Глава I. Функции на няколко независими променливи . . . . .</b>	<b>328</b>
§ 1. Основни понятия . . . . .	328
§ 2. Теорема на Болцано—Вайерщрас (Bolzano—Weierstrass) . . . . .	332
§ 3. Функции на няколко независими променливи . . . . .	335
§ 4. Непрекъснатост . . . . .	335
§ 5. Свойства на непрекъснатите функции . . . . .	337
§ 6. Равномерна непрекъснатост . . . . .	338
§ 7. Частни производни на функции, зависещи от няколко независими променливи . . . . .	339
§ 8. Диференциране на съставни функции . . . . .	342
Задачи . . . . .	345
§ 9. Хомогенни функции . . . . .	347
Задачи . . . . .	349
§ 10. Тотален диференциал . . . . .	349
Задачи . . . . .	352
§ 11. Частни производни от по висок ред . . . . .	353

Задачи . . . . .	359
§ 12. Производни от по-висок ред на съставни функции . . . . .	359
Задачи . . . . .	361
§ 13. Тотални диференциали от по-висок ред . . . . .	362
Задачи . . . . .	364
§ 14. Тейлоров ред при функции на няколко независими променливи .	364
§ 15. Максимум и минимум при функции на две независими променливи . . . . .	366
Задачи . . . . .	374
<b>Глава II. Неявни функции . . . . .</b>	<b>377</b>
§ 1. Основни понятия . . . . .	377
§ 2. Диференциране на неявни функции, които зависят от един аргумент . . . . .	379
Задачи . . . . .	383
§ 3. Диференциране на неявни функции, които зависят от няколко аргумента . . . . .	388
Задачи . . . . .	389
§ 4. Диференциране на неявни функции, определени чрез системи. .	392
Задачи . . . . .	393
§ 5. Теорема за съществуване на неявни функции . . . . .	394
§ 6. Обобщение на теоремата за съществуване на неявни функции. .	402
§ 7. Достатъчни условия за съществуване на производни на неявни функции. . . . .	408
§ 8. Множители на Лагранж. . . . .	411
<b>Глава III. Смяна на променливите . . . . .</b>	<b>415</b>
§ 1. Смяна на независима променлива при функции на един аргумент	415
§ 2. Обща задача за смяна на променливите при функции на един аргумент . . . . .	419
§ 3. Смяна на независимите променливи при функции на няколко аргумента . . . . .	423
§ 4. Обща задача за смяна на променливите при функции на няколко аргумента . . . . .	426
§ 5. Достатъчни условия, при които може да се извърши смяна на променливите . . . . .	428
Общи задачи . . . . .	433



ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ V ИЗД.

**Ярослав Александров Тагамлицки**

Художник *Ив. Марков*

Художествен редактор *Б. Мавродинов*

Техн. редактор *Н. Минчева*

Коректор *М. Въртова*

---

Дадена за набор на 19.IX.1970 г.

Подписана за печат на 25.XII.1971 г.

Издателски коли 27

Печатни коли 27

Издателски № 19047 Лит. група I-4

Тираж 6066

Тем. № 503

Формат 65 × 92/16

Цена 1,61 лв.

Излязло от печат на 30.XII.1971 г.

---

Държавна печатница „Александър Пъшев“ — Плевен