Г-функция

Венелин Черногоров

28 април 2010 г.

Абстракт

В тази презентация е дадено определение и са посочени някои свойства на Г-функцията. Накрая е дадена графиката ѝ за реални стойности на аргумента.

Съдържание

1. Определение

Г-функцията, ойлеров интеграл от втори ред, е една от най-важните трансцедентни функции в математическия анализ, разпространяваща понятието факториел $z! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot z$ в случай на комплексни стойности на z. Гама-функцията е въведена за първи път от Леонард Ойлер (1729). Тя се определя с формулата

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{z(z+1)\ldots(z+n)} n^z. \tag{1}$$

Ако реалната част на числото z е положителна, то вместо (1) може да се използва и формулата

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx. \tag{2}$$

Ако n е естествено число, то $\Gamma(n) = (n-1)!$.

2. Свойства на гама-функцията

Основните свойства на гама-функцията са:

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (функционално уравнение);
- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ (формула за допълнение), откъдето
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$$
- $\ln\Gamma(z) = z\ln z - z - \frac{1}{2}\ln z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \varepsilon(z)$, където $\varepsilon(z) \to 0$ при $z \to \infty$ (формула на Стирлинг).

3. Графика

Графика на функцията $y = \Gamma(x)$ за реални стойности на x