Л. ЧАКАЛОВ

УВОД В ТЕОРИЯТА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ УРАВНЕНИЯ

Второ издание

ДЪРЖАВНО ИЗДАТЕЛСТВО „НАУКА И ИЗКУСТВО“
София — 1961

Тази книга представлява разработка на лекциите по теория на диференциалните уравнения, които авторът е преподавал в продължение на почти четири десетилетия на студентите по математика и физика в Софийския държавен университет. Нейното предназначение е да служи на студентите от нашите висши учебни заведения, в които се изучава теорията на диференциалните уравнения.

Увод

Много въпроси от анализа, геометрията, механиката, теоретичната физика и техническите науки се свеждат към *диференциални уравнения*. Така още основателите на диференциалното и интегралното смятане са разглеждали задачи, при които по дадено свойство на тангентата на една равнинна крива трябва да се намери и изучи самата крива. Ако $y = y(x)$ е уравнението на търсената крива в правоъгълни координати (x, y), всяка такава задача, облечена в аналитична форма, довежда до една зависимост между независимата променлива x, непознатата функция y и нейната първа производна y', т. е. до едно диференциално уравнение.

Да разгледаме например следната задача: да се намери равнинна крива $y = y(x)$, тангентата в произволна точка на която е перпендикулярна на правата, съединяваща тази точка с началото O. Условието на задачата се изразява чрез уравнението

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}, \tag{1}$$

тъй че всяка функция y на x, която обръща в тъждество диференциалното уравнение (1), ни определя аналитически едно решение на нашата задача.

Друг класически въпрос от механиката, който води също към диференциални уравнения, е следната задача: да се намерят законите за движението на една материална точка, привличана от един постоянен център по закона на Нютон. Да означим с x, y, z координатите на подвижната точка, отнесена към една неподвижна правоъгълна координатна система с начало в привлекателния център. Ние ще знаем законите за движението на тази точка, ако знаем какви функции на времето t са нейните координати. Чрез прилагане на основните принципи на механиката се получават следните три уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mu x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mu y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mu z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{2}$$

където μ е дадена константа. Задачата по-нататък се състои в решението или интегрирането на тази система от три диференциални уравнения, т. е. в определянето на x, y и z като функции на времето t така, че да обръщат в тъждество всяко едно от уравненията на системата (2). За да стане задачата напълно определена, тези функции трябва да удовлетворяват още и известни начални условия, които изразяват аналитически, че в началния момент t подвижната точка заема определено положение в пространството и че началната ѝ скорост е също дадена по големина и направление.

Едно уравнение ще наричаме диференциално, когато то съдържа една или няколко непознати функции на една или повече независими променливи и производни на непознатите функции.

На първо време ще се занимаем с такива диференциални уравнения, в които независимата променлива е една единствена. *Тях ще наричаме обикновени диференциални уравнения* за разлика от частните и тоталните диференциални уравнения, в които броят на независимите променливи е по-голям от единица. Така уравненията (1) и (2) са обикновени.

Най-прост е случаят, когато диференциалното уравнение съдържа само независимата променлива x, една непозната функция y и нейната първа производна y'; в такъв случай то има вида

$$F(x, y, y') = 0$$

и е от *първи ред*. По-общо, ако освен независимата променлива x и непознатата функция y уравнението съдържа и производните на последната до n-ти ред включително, ще казваме, че уравнението е от n-ти ред.

Част I

ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Глава I

ОБЩО ВЪРХУ ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ УРАВНЕНИЯ ОТ ПЪРВИ РЕД

§ 1. Геометрично тълкуване

Едно диференциално уравнение от първи ред, решено относно производната y', има вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1}$$

Всяка функция на x, която, заместена вместо y в уравнението (1), го обръща в тъждество, се нарича *решение* или *интеграл* на това уравнение. Така функцията

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

е интеграл на диференциалното уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

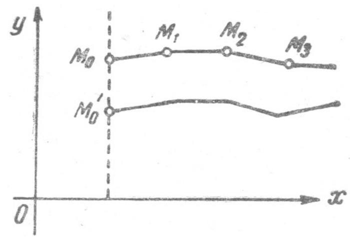
Но лесно се проверява, че същото уравнение притежава и други интеграли:

$$y = \sqrt{2 - x^2},\ y = \sqrt{3 - x^2}, \dots,\ \text{изобщо}\ y = \sqrt{C - x^2},$$

където C означава произволна положителна константа. От този пример се убеждаваме, че едно диференциално уравнение от вида (1) може да има безбройно много интеграли.

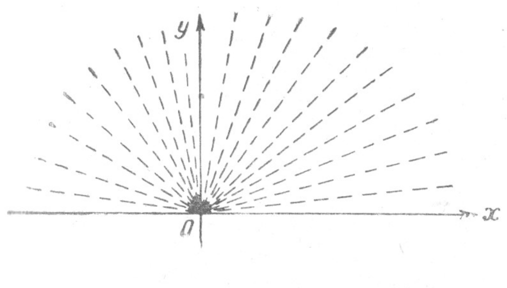
Да интегрираме едно диференциално уравнение значи да намерим всички негови интеграли. Макар и техният брой да е винаги безкрайно голям, в известни случаи ние сме в състояние да намерим една обща формула, от която да могат да се получат всички интеграли на уравнението. Че наистина уравнението (1) притежава безбройно много интеграли, в това можем да се убедим чрез следните геометрични разглеждания, които нямат характер на едно строго математическо доказателство, но водят чрез геометрична нагледност до заключения, които по-после ще докажем строго.

Всеки интеграл на диференциалното уравнение (1) се представя геометрически в правоъгълна координатна система (x, y) чрез една крива, която ще наричаме *интегрална крива*. Диференциалното уравнение изразява следното свойство на интегралната крива: ъгловият коефициент на тангентата в произволна точка на кривата е дадена функция на координатите x, y на тази точка. За да си съставим една приблизителна идея за хода на интегралните криви, да си вземем произволна точка $M_0(x_0, y_0)$ и да се опитаме да си построим приблизително интегралната крива на уравнението (1), която минава през тази точка. За тази цел прекарваме през M_0 (вж. черт. 1) една права с ъглов коефициент $f(x_0, y_0)$. Тази права е тангента в точката M_0 към търсената интегрална крива. Върху нея си избираме вдясно и много близко до M_0 точката M_1. Когато отсечката M_0M_1 е много малка, можем да приемем без голяма грешка, че отсечката M_0M_1 съвпада със съответния „елемент“ на кривата и че точката $M_1(x_1, y_1)$ лежи също върху интегралната крива. През M_1 прекарваме друга права с ъглов коефициент $f(x_1, y_1)$ и върху нея пак вдясно и много близко до M_1 си избираме точка $M_2(x_2, y_2)$. По същите съображения, както и по-горе можем да считаме, че M_2 лежи върху нашата интегрална крива, и да приложим за M_2 същите разсъждения, както за M_0 и M_1. Така получаваме една начупена линия $M_0M_1M_2\ldots$, която естествено е да очакваме ще представя с толкова по-голямо приближение търсената интегрална крива, колкото по-малки са отделните отсечки, от които тя е съставена. Така по геометричен път се убеждаваме, че през всяка точка M_0, лежаща в областта, в която $f(x, y)$ е дефинирана, минава една интегрална крива; с други думи съществува една функция $\varphi(x)$, която удовлетворява диференциалното уравнение (1) и освен това при $x = x_0$ приема „начална“ стойност y_0. Ако началната точка M_0 на интегралната крива заменим с друга точка M_0', която има същата абсциса x_0, явно е, че получената нова интегрална крива с начална точка M_0' ще бъде различна от първата. Следователно едно диференциално уравнение от първи ред има безбройно много интегрални криви, но всяка една от тях е напълно определена, щом е дадена нейната начална точка M_0.

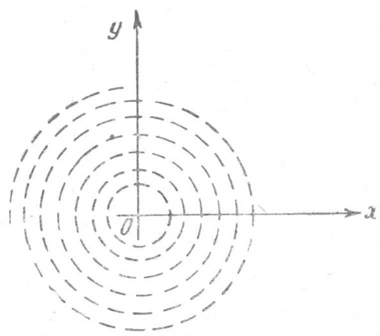


Черт. 1

При конструкцията на интегралните криви на уравнението (1) можем да постъпим още и така. На всяка точка (x, y) от равнината (или част от нея) правим да отговаря права D, която минава през тази точка и има ъглов коефициент, равен на $f(x, y)$. По този начин цялата равнина (или част от нея) бива покрита с едно *поле от посоки*, което се изобразява графичес-



Черт. 2



Черт. 3

ки по следния начин: през известен брой точки, разпределени достатъчно гъсто в равнината, прекарваме малки отсечки, така че на всяка точка (x, y) да отговаря една отсечка, която минава през избраната точка и има ъглов коефициент $f(x, y)$. На черт. 2 и 3 са изобразени по този начин полетата от посоки, отговарящи на диференциалните уравнения

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}.$$

Една интегрална крива на уравнението (1) представя очевидно такава крива в нашето поле, всеки елемент на която съвпада по посока с посоката на полето, отговаряща на този елемент. Следователно, ако е дадено графически полето от посоки, можем да си начертаем приблизително интегралната крива, която изхожда от дадена начална точка M_0; достатъчно е за тази цел да движим върха на молива тъй, че във всеки момент посоката на движението му да съвпада със съответната посока на полето.

§ 2. Образуване на диференциални уравнения от първи ред

Да разгледаме уравнението

$$F(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

между двете променливи x, y и константата C. Геометрически то представя една система или фамилия от равнинни криви, зависещи от променливия параметър C. За всяко числено значение на C това уравнение ни дефинира изобщо y като неявна функция на x. Като диференцираме относно x, получаваме

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0. \tag{3}$$

В общия случай уравнението (3) съдържа и константата C. Ако елиминираме тази константа от уравненията (2) и (3), ще получим една зависимост между x, y и y':

$$f(x, y, y') = 0. \tag{4}$$

От начина, по който изведохме диференциалното уравнение (4), се вижда, че всяка функция y на x, която може да се получи от уравнението (2) при някое числено значение на C, удовлетворява уравнение (4). По този начин уравнението (2) ни дава възможност да намерим безброй интеграли на диференциалното уравнение (4). Ето защо (2) се нарича *общ интеграл* на това диференциално уравнение.

Този резултат потвърждава още веднъж нашите общи заключения в § 1, според които едно обикновено диференциално уравнение от първи ред притежава безброй интегрални криви. В случая интегралните криви на уравнението (4) са представени чрез фамилията (2).

Забележка. Нищо не ни дава основание да заключим оттук, че уравнението (2) изчерпва всички възможни решения на диференциалното уравнение (4). И наистина ние ще видим по-нататък, че в известни, макар и редки случаи едно диференциално уравнение може да притежава и такива интеграли, които не могат да се получат от общия интеграл за специални значения на произволната константа C.

Пример 1. Уравнението $x^2 + y^2 - C = 0$ представя една фамилия концентрични окръжности с общ център в началото на координатната система. Чрез диференциране на това уравнение се елиминира и параметърът C, така че диференциалното уравнение на тази фамилия окръжности е

$$x + yy' = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}.$$

То изразява следното свойство на интегралните криви: нормалата в произволна точка на кривата минава през началото.

Пример 2. Уравнението $y^2 = Cx$ представя фамилия от параболи с обща ос Ox и общ връх (началото). Съответното диференциално уравнение се получава, като елиминираме C от уравненията

$$y^2 = Cx, \quad 2yy' = C;$$

така получаваме

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{2x}.$$

Това диференциално уравнение изразява следното свойство на тангентата на коя да е от разгледаните параболи: субтангентата, отговаряща на произволна точка на параболата $y^2 = Cx$, е равна на удвоената абсциса на тази точка.

Глава II

ТЕОРЕМИ ЗА СЪЩЕСТВУВАНЕ НА ИНТЕГРАЛИ

В теорията на диференциалните уравнения въпросът за съществуване на интеграли е бил поставен сравнително в по-ново време, когато са били подложени изобщо на критика основите на математическия анализ. По-рано редица теореми, които сега се доказват, са били смятани за очевидни истини. Така до началото на XIX в. никой не е чувствал нужда от доказване на „очевидната“ истина, че ако $f(x)$ е непрекъсната функция в интервала $a \leq x \leq b$ и $f(a)$ и $f(b)$ са с противни знаци, то $f(x)$ се анулира поне за едно значение на x между a и b. Сега, както знаем, това се доказва строго въз основа на дефиницията за непрекъснатост и на чисто аритметичната теория на реалните числа. Същото може да се каже и за теоремите за съществуване на интеграли на разните типове диференциални уравнения. Водени от геометрични съображения, които изложихме в § 1, математиците са считали за почти очевидно, че всяко диференциално уравнение от първи ред (независимо от това, дали знаем, или не знаем да го интегрираме) притежава дори безброй решения. В началото на миналия век обаче математиците са почувствали нужда да изградят на по-солидна почва основите на математическия анализ, като се освободят от геометрическите нагледи, които в много случаи са пригодни за откриване на математическите истини, но не и за тяхното строго доказване. Първите строги доказателства за съществуване на интеграли на едно диференциално уравнение от първи ред, както и на други по-общи категории от диференциални уравнения дължим на основателя на съвременния математически анализ — френския математик Огюстен Коши (Augustin Cauchy), живял в началото на миналия век (1789—1857).

Доказателствата на теоремите за съществуване на интеграли, изложени по-долу, се базират на редица теореми от диференциалното смятане, формулирани и доказани в приложението накрая (глава X). Препоръчваме на читателя да се запознае с тези теореми, преди да пристъпи към изучаването на доказателствата на теоремите за съществуване в настоящата глава.

§ 3. Първо доказателство на теоремата за съществуване на интеграли на уравнението $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$

Ще предположим, че функцията $f(x, y)$, която фигурира в дясната част на диференциалното уравнение

(1) $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y),$$

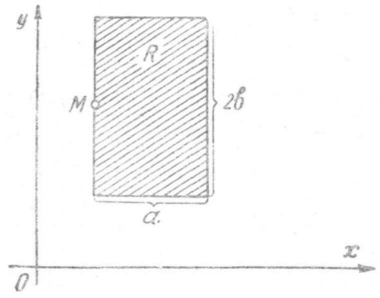
удовлетворява следните условия:

1. $f(x,y)$, разглеждана като функция на двете независими реални променливи x и y, е дефинирана и непрекъсната функция на тези променливи в областта

$$R : \begin{cases} x_0 \le x \le x_0 + a \\ y_0 - b \le y \le y_0 + b. \end{cases}$$

Тази област се състои от точките на един правоъгълник (черт. 4), страните на който са успоредни на координатните оси и имат уравнения

$$x = x_0, \qquad x = x_0 + a,$$
$$y = y_0 - b, \quad y = y_0 + b.$$



Черт. 4

2. Съществува една положителна константа A, тъй че, ако (x, y_1) и (x, y_2) са две произволни точки на областта R с равни абсциси и различни ординати, то отношението $\dfrac{f(x,y_1) - f(x,y_2)}{y_1 - y_2}$ не надминава по абсолютна стойност константата A, т. е. трябва да имаме винаги

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le A|y_1 - y_2|. \tag{2}$$

При тези предположения ще докажем, че съществува една функция $\varphi(x)$, дефинирана в един достатъчно малък интервал $x_0 \le x \le x_0 + h$, която удовлетворява диференциалното уравнение (1) *и освен това приема стойност y_0 за $x = x_0$, т. е. $\varphi(x_0) = y_0$. Не съществува друга функция $\varphi(x)$, която да притежава същите свойства.*

Преди да пристъпим към доказателството на тази теорема, да си изясним смисъла на условието 2, на което подчинихме функцията $f(x,y)$ и което се нарича условие на Липшиц (Lipschitz). За тази цел да си мислим повърхнината $z = f(x,y)$, която представя геометрически функция $f(x,y)$ в пространствена правоъгълна координатна система. Тогава $f(x,y_1)$ и $f(x,y_2)$ са апликати на онези точки от въпросната повърхнина, чиито ортогонални проекции върху равнината x, y са точките (x,y_1) и (x,y_2), а отношението $\dfrac{f(x,y_1) - f(x,y_2)}{y_1 - y_2}$ представя „наклона“ на съединителната права на тези точки спрямо равнината XY. Смисълът на неравенството (2) на Липшиц е, че по абсолютна стойност този наклон не бива да надмине известна положителна константа A, т. е. да не е много стръмен. (Обърнете внимание на това, че въпросната съединителна права е успоредна на равнината YZ.)

Условието на Липшиц е винаги изпълнено, ако функцията $f(x, y)$ притежава ограничена частна производна $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в областта R. За константата A можем да вземем в такъв случай една горна граница на $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|$ в R. И наистина според теоремата на крайните нараствания имаме

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = (y_1 - y_2) f_y(x, \eta),$$

където η е някое число между y_1 и y_2, а $f_y(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Следователно

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1 - y_2||f_y(x, \eta)| \leq A|y_1 - y_2|.$$

Ние ще изложим най-напред едно доказателство на формулираната погоре основна теорема, което почива върху геометричните разглеждания от § 1. То се основава върху следната помощна теорема от диференциалното смятане.

Помощна теорема. *Да означим с $u(x)$ една непрекъсната функция на x в интервала $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ със следните свойства:* 1) $u(x_0) = 0$*;* 2) $u(x)$ *притежава изобщо** *производна $u'(x)$ в интервала $[x_0, x_0 + h]$;* 3) *съществуват две константи $A > 0$ и $\varepsilon \geq 0$, тъй че*

$$\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right| \leq A|u| + \varepsilon. \tag{3}$$

При тези предположения функцията $u(x)$ удовлетворява в целия интервал $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ неравенството

$$|u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{A}\left(e^{A(x - x_0)} - 1\right). \tag{4}$$

Доказателство. а) Да разгледаме най-напред случая, когато $u(x)$ не се анулира вътре в интервала $[x_0, x_0 + h]$. Тогава $u(x)$ не мени знака си в този интервал. Да приемем например, че $u(x) > 0$ за $x_0 < x < x_0 + h$. От неравенството (3) следва в такъв случай

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \leq Au + \varepsilon.$$

*Под думите „функцията $u(x)$ притежава *изобщо* производна в интервала (a, b)“ разбираме, че производната $u'(x)$ съществува за всяко x от казания интервал с евентуално изключение на краен брой значения на x.

Понеже
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\left(u+\frac{\varepsilon}{A}\right)e^{-Ax}\right\}=\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-Au-\varepsilon\right)e^{-Ax}\leq 0$$
във всяка точка x, в която $u'(x)$ съществува, то непрекъснатата функция $\left(u+\frac{\varepsilon}{A}\right)e^{-Ax}$ е намаляваща и приема при $x=x_0$ максималната си стойност $\frac{\varepsilon}{A}e^{-Ax_0}$. Следователно
$$\left(u(x)+\frac{\varepsilon}{A}\right)e^{-Ax}\leq\frac{\varepsilon}{A}e^{-Ax_0},\quad\text{т. е.}\quad u(x)\leq\frac{\varepsilon}{A}\left(e^{A(x-x_0)}-1\right).$$
По същия начин се доказва неравенството (4) и в случая, когато $u(x)$ има постоянно отрицателен знак.

б) Ако $u(x)$ става нула вътре в интервала $[x_0, x_0+h]$, то неравенството (4) е очевидно удовлетворено за всяко x от този интервал, за което $u(x)=0$. Да си вземем едно число ξ от същия интервал, за което $u(\xi)\neq 0$, и да означим с x_1 най-близката точка отляво на ξ, която анулира $u(x)$. Понеже $u(x_1)=0$ и $u(x)$ не се анулира вътре в интервала (x_1,ξ), то според доказаното в точка а) ще имаме
$$|u(\xi)|\leq\frac{\varepsilon}{A}\left(e^{A(\xi-x_1)}-1\right),$$
откъдето следва (понеже $\xi-x_1\leq\xi-x_0$) неравенството
$$|u(\xi)|\leq\frac{\varepsilon}{A}\left(e^{A(\xi-x_0)}-1\right).$$
А това значи, че неравенството (4) е в сила и при $x=\xi$. С това помощната теорема е доказана напълно.

Следствие. *Ако за една непрекъсната функция* $u(x)$ *в интервала* $[x_0, x_0+h]$ *знаем:* 1) *че* $u(x_0)=0$*;* 2) *че* $u(x)$ *притежава изобщо производна в този интервал и* 3) *че* $\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|\leq A|u|$*, където* A *е някоя константа, то* $u(x)$ *е тъждествено нула.*

И наистина, ако приложим помощната теорема при $\varepsilon=0$, дясната част на неравенството (4) се анулира и в такъв случай е явно, че това неравенство не е възможно, ако $u(x)$ е различно от нула за някое x от интервала (x_0, x_0+h).

Ние ще се възползуваме от това следствие, за да докажем най-напред, че не могат да съществуват две различни функции на x, дефинирани в един достатъчно малък интервал (x_0, x_0+h), които да удовлетворяват диференциалното уравнение (1) и при $x=x_0$ да приемат една и съща стойност y_0. Ако $y(x)$ и $\eta(x)$ са две такива функции, то от уравненията
$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=f(x,y(x)),\quad\frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x}=f(x,\eta(x))$$

получаваме чрез почленно изваждане

$$\frac{\mathrm{d}(y(x)-\eta(x))}{\mathrm{d}x} = f(x, y(x)) - f(x, \eta(x)),$$

или като приложим неравенството на Липшиц и положим след това $y(x) - \eta(x) = u(x)$,

$$\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right| \leq A|u|.$$

За функцията $u(x)$ са изпълнени очевидно всички условия, при които е в сила горното следствие, поради което можем да твърдим, че $u(x) = y(x) - \eta(x)$ е тъждествено нула в целия интервал $[x_0, x_0 + h]$.

*

За една непрекъсната функция $\eta(x)$ в интервала $[x_0, x_0 + h]$ ще казваме, че удовлетворява диференциалното уравнение (1) с грешка, по-малка от λ, когато $\eta(x)$ притежава изобщо производна в този интервал и разликата $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} - f(x, \eta)$ е по абсолютна стойност по-малка от λ за всяко x от интервала $[x_0, x_0 + h]$, за което $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$ съществува. Както ще видим след малко, лесно може да се построи една функция на x, която да удовлетворява в един достатъчно малък интервал $[x_0, x_0 + h]$ уравнението (1) с произволно малка грешка и да приема при $x = x_0$ стойност y_0.

Да допуснем, че членовете на безкрайната редица

$$\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x), \ldots \tag{5}$$

са непрекъснати функции на x в интервала $[x_0, x_0 + h]$, които притежават следните свойства: 1) $\eta_n(x_0) = y_0$ за $n = 1, 2, 3, \ldots$; 2) кривите $y = \eta_n(x)$ лежат всички в правоъгълната област R: $\begin{cases} x_0 \leq x \leq x_0 + a, \\ y_0 - b \leq y < y_0 + b \end{cases}$, в която функцията $f(x, y)$ удовлетворява неравенството (2) на Липшиц; 3) $\eta_n(x)$ удовлетворява диференциалното уравнение (1) с грешка, по-малка от λ_n, където λ_n клони към нула заедно с $\frac{1}{n}$. При тези предположения, както ще видим, редицата (5) клони равномерно към една гранична функция $y(x)$, която удовлетворява диференциалното уравнение. За да докажем това, да си вземем едно произволно $\varepsilon > 0$ и да си изберем индекса N, тъй че λ_n да е по-малко от $\frac{1}{2}\varepsilon$ за $n > N$. Когато индексите m и n са по-големи от N, може да пишем

$$\frac{\mathrm{d}\eta_n}{\mathrm{d}x} = f(x, \eta_n) + \omega_n(x), \qquad |\omega_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\frac{d\eta_m}{dx} = f(x, \eta_m) + \omega_m(x), \qquad |\omega_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откъдето чрез почленно изваждане и прилагане на неравенството на Липшиц получаваме неравенството

$$\left| \frac{d(\eta_n - \eta_m)}{dx} \right| \leq A|\eta_n - \eta_m| + \varepsilon.$$

Тук функцията $u(x) = \eta_n(x) - \eta_m(x)$ удовлетворява всички условия на помощната теорема, тъй че

$$|\eta_n(x) - \eta_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{A}\left(e^{A(x-x_0)} - 1\right) \leq \frac{\varepsilon}{A}\left(e^{Ah} - 1\right).$$

Понеже дясната част на последното неравенство не зависи от x и може да бъде направена произволно малка заедно с ε, оттук заключаваме (въз основа на втората дефиниция на равномерната сходимост (вж. глава X, стр. 205)), че редицата (5) клони равномерно към една гранична функция $y(x)$.

За да докажем, че тази гранична функция удовлетворява и уравнението (1), ще си послужим с втора помощна теорема, която гласи така:

Да означим с $u(x)$ *една непрекъсната функция в интервала* $[x_0, x_0 + h]$ *със следните свойства*: 1) $u(x_0) = 0$; 2) $u(x)$ *притежава изобщо производна* $u'(x)$ *в този интервал;* 3) $\left|\frac{du}{dx}\right| \leq \varepsilon$ *за всяко* x, *за което производната* $\frac{du}{dx}$ *съществува. При тези предположения* $|u(x)| \leq \varepsilon h$ *за всяко* x *от интервала* $[x_0, x_0 + h]$.

Доказателството се извършва лесно, като имаме предвид, че от двете функции $u(x) + \varepsilon(x - x_0)$, $u(x) - \varepsilon(x - x_0)$, първата е растяща, а втората — намаляваща в разглеждания интервал, откъдето заключаваме (понеже и двете се анулират при $x = x_0$), че

$$u(x) + \varepsilon(x - x_0) \geq 0, \quad u(x) - \varepsilon(x - x_0) \geq 0,$$

т. е.

$$-\varepsilon(x - x_0) \leq u(x) \leq \varepsilon(x - x_0), \quad |u(x)| \leq \varepsilon(x - x_0) \leq \varepsilon h.$$

Нека ε да е някое положително число и да изберем индекса N тъй голям, че $\left|\frac{d\eta_n}{dx} - f(x, \eta_n)\right|$ да е по-малко от ε при $n > N$ и за всяко x от интервала $[x_0, x_0 + h]$. Функцията,

$$u(x) = \eta_n(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, \eta_n(t))\, dt$$

удовлетворява условията 1), 2), 3) на последната помощна теорема, понеже $u(x_0) = 0$ и производната $u'(x) = \eta_n'(x) - f(x, \eta_n(x))$ съществува за всяко x, за което $\eta_n(x)$ съществува; освен това $|u'(x)| \leq \varepsilon$ по допускане. Следователно

$$\left|\eta_n(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, \eta_n(t))\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon h$$

за всяко $n > N$ и за това x от интервала $[x_0, x_0+h]$. Това означава, че $\eta_n(x)-y_0-\int_{x_0}^{x} f(t, \eta_n(t))\,\mathrm{d}t$ клони равномерно в този интервал към нула. Но $\lim \eta_n(x) = y(x)$, $\lim \int_{x_0}^{x} f(t, \eta_n(t))\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$, откъдето следва ,че

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t.$$

А последното равенство изразява, че $y(x)$ удовлетворява диференциалното уравнение (1) и че тази функция приема стойност y_0 за $x = x_0$.

Остава още да докажем, че съществува безкрайна функционна редица със свойствата на редицата (5). За тази цел е достатъчно да установим, че съществува непрекъсната функция $\eta(x)$, която удовлетворява диференциалното уравнение (1) с грешка, по малка от едно отнапред дадено положително λ, колкото малко и да е то.

Нека λ да е едно такова число. Понеже $f(x, y)$ е непрекъсната в областта R, тя е там и равномерно непрекъсната (тъй като областта R е затворена и ограничена); следователно на избраното λ отговаря едно достатъчно малко положително δ, тъй че $|f(x, y)-f(x', y')| < \lambda$, щом разстоянието между точките (x, y), (x', y') е по-малко от δ. По-нататък ще въведем следните означения: M е положителна константа, избрана тъй, че неравенството $|f(x, y)| \leq M$ да е в сила за всяка точка (x, y) от областта R. h означава по-малкото от положителните числа a и $\dfrac{b}{M}$ (или тяхната обща стойност, ако $a = \dfrac{b}{M}$); при това a, b и A имат същото значение, както в началото на този параграф. Да разделим след това интервала $[x_0, x_0 + h]$ на p подинтервала, всеки един от които да има дължина, по-малка от $\dfrac{\delta}{M+1}$, и през така получените точки на деление $x_0, x_1, \dots, x_p = x_0 + h$ да си прекараме прави, успоредни на оста OY. Да си вземем върху тези прави съответно точките $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $\dots$,$M_p(x_p, y_p)$, тъй че правата M_0M_1 да има ъглов коефициент $f(x_0, y_0)$, M_1M_2 да има ъглов коефициент $f(x_1, y_1)$, $\dots$, изобщо M_kM_{k+1} да има ъглов коефициент $f(x_k, y_k)$. Чрез тези условия положенията на точките $M_1, M_2, \dots, M_p$ са напълно определени и не е мъчно да се види, че всички те лежат на правоъгълната област R, т. е. че $|y_k - y_0| \leq b$ за $k = 1, 2, \ldots, p$. Тогава начупената линия $M_0 M_1 M_2 \ldots M_p$ представя графически една непрекъсната функция $\eta(x)$, която е линейна във всеки един от подинтервалите $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,..., $[x_{p-1}, x_p]$ и следователно притежава производна за всяко x от интервала $[x_0, x_0 + h]$ с евентуално изключение на точките $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$. При това очевидно $\eta(x_0) = y_0$. Така построена функция $\eta(x)$ удовлетворява нашето диференциално уравнение (1) с грешка, по-малка от λ. И наистина, когато x се мени в подинтервала $[x_k, x_{k+1}]$, имаме

$$\eta(x) = y_k + (x - x_k) f(x_k, y_k), \quad \eta'(x) = f(x_k, y_k),$$
$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} - f(x, \eta) = f(x_k, y_k) - f(x, \eta).$$

Но разстоянието между точките (x_k, y_k) и $(x, \eta(x))$ е по-малко от отсечката $M_k M_{k+1}$, която от своя страна е по-малка от

$$|x_{k+1} - x_k| + |y_{k+1} - y_k| = (x_{k+1} - x_k)(1 + |f(x_k, y_k)|) \leq (1 + M)(x_{k+1} - x_k) < \delta.$$

И така разстоянието между точките (x_k, y_k) и $(x, \eta(x))$, когато x се мени в интервала $[x_k, x_{k+1}]$, е по-малко от δ, тъй че $\left|\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} - f(x, \eta)\right| < \lambda$ във всеки от подинтервалите $[x_k, x_{k+1}]$, т. е. в целия интервал $[x_0, x_0 + h]$.

С това доказателството на теоремата е завършено.

§ 4. Второ доказателство на теорема за съществуване интеграли на уравнението $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$

Ние ще заменим преди всичко даденото диференциално уравнение със съответното му *интегрално уравнение*, което включва в себе си така нареченото начално условие $y(x_0) = y_0$. Да допуснем, че функцията $y(x)$, дефинирана в интервала $[x_0, x_0 + h]$, удовлетворява диференциалното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \tag{1}$$

и приема стойност y_0 за $x = x_0$. Като заместим в уравнението (1) y с $y(x)$ и интегрираме двете му части от x_0 до X, където X принадлежи на интервала $[x_0, x_0 + h]$, получаваме

$$y(X) - y(x_0) = \int_{x_0}^{X} f(x, y(x))\, \mathrm{d}x$$

или

$$y(X) = y_0 + \int_{x_0}^{X} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x.$$

Като заменим по-нататък интеграционната променлива x с t (с което интегралът отдясно не изменя стойността си) и след това пишем x вместо X, последното уравнение приема вида

$$(1') \qquad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t.$$

Така полученото уравнение се нарича интегрално, понеже функцията y влиза и под знака интеграл. Ние доказахме, че всяка функция $y(x)$, която удовлетворява диференциалното уравнение (1) и приема стойност y_0 за $x = x_0$, удовлетворява също и интегралното уравнение (1′). Сега ще докажем обратното. Да допуснем именно, че функцията $y(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $[x_0, x_0 + h]$ и удовлетворява интегралното уравнение (1′), когато x се мени в същия интервал. Очевидно е, че $y(x_0) = y_0$. В това се убеждаваме, като заместим в (1′) x с x_0. От диференциалното смятане знаем, че интегралът $\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$, разглеждан като функция на горната си граница, притежава производна, равна на $f(x, y(x))$. Понеже дясната страна на (1′) се различава от този интервал с константата y_0, то производната на тази дясна страна съществува и е равна на $f(x, y(x))$. Същото важи и за лявата страна, с което е доказано, че $\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f(x, y(x))$, т. е. че функцията $y(x)$ удовлетворява и даденото диференциално уравнение (1).

Въз основа на горното ние можем да твърдим, че задачата за намиране на един интеграл $y(x)$ на диференциалното уравнение (1), който да удовлетворява началното условие $y(x_0) = y_0$, се свежда към определянето на функцията $y(x)$, тъй че тя да удовлетворява интегралното уравнение (1′). Нашата задача по-нататък се свежда към това, да докажем, че това интегрално уравнение има решение.

За функцията $f(x, y)$, разглеждана като функция на двете независими променливи x, y, ще предполагаме, че удовлетворява условията 1 и 2 в началото на § 3. Освен това ще означаваме пак с M една положителна константа, избрана тъй, че неравенството $|f(x, y)| \leq M$ да е в сила за всяка точка (x, y) от правоъгълната област R. Независимата променлива x ще подчиним по-после на ограничението да се мени в интервала $[x_0, x_0 + h]$, където h означава по-малкото от числата a и $\dfrac{b}{M}$.

При доказателството на теоремата за съществуване решение на интегралното уравнение (1′) ще приложим метода на френския математик Ем. Пикар (Em. Picard), който се състои в следното.

Заместваме $y(t)$ под интегралния знак в дясната страна на (1′) с константата y_0. По този начин тази дясна страна се обръща в една напълно определена функция на x, която означаваме с $y_1(x)$:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,\mathrm{d}t.$$

След като си дефинирахме така функцията $y_1(x)$, заместваме под знака $\int$ на уравнението (1′) втория аргумент $y(t)$ с $y_1(t)$. Така получената функция от дясната страна на (1′) означаваме с $y_2(x)$, тъй че

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,\mathrm{d}t.$$

С функцията y_2 постъпваме, както преди малко с y_1, а именно заместваме $y(t)$ с $y_2(t)$ в дясната страна на (1′) и полагаме

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\,\mathrm{d}t.$$

Този процес можем да продължим неограничено. Така получаваме една безкрайна редица от функции на x, дефинирани чрез равенствата

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,\mathrm{d}t \\ y_2(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,\mathrm{d}t \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n+1}(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{2}$$

Първата от тези функции е дефинирана в целия интервал $[x_0, x_0 + a]$. Същото нещо обаче не можем да твърдим изобщо за функцията $y_2(x)$,защото, когато x варира в интервала $[x_0, x_0 + a]$, интеграционната променлива t в интеграла $\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,\mathrm{d}t$ варира в същия интервал, при което не е изключена възможността вторият аргумент $y_1(t)$ на подинтегралната функция да приема значения вън от интервала $[y_0 - b, y_0 + b]$, в който приехме първоначално, че варира y. Предвид на това, че $y_1(t)$ е близко до y_0, когато t е достатъчно близко до x_0, въпросната опасност е изключена, когато горната граница x на интеграла е близко до x_0. Това налага да стесним първоначалния интервал, в който приехме, че се изменя x. Ние ще докажем, че всички функции $y_2(x)$, $y_3(x)$ и т. н. са дефинирани в по-малкия интервал $[x_0, x_0 + h]$, ако неговата дължина h е равна на по-малкото от числата a и $\dfrac{b}{M}$.

И наистина, каквото и да е x от споменатия интервал,

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_{x_0}^{x} M\,\mathrm{d}t = (x - x_0)M \leq hM \leq b,$$

т. е. $y_1(x)$ остава в интервала $(y_0 - b, y_0 + b)$, когато x се изменя в интервала $[x_0, x_0 + h]$ Втората функция $y_2(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} (t, y_1(t))\,\mathrm{d}t$ е също дефинирана, когато x се изменя в $(x_0, x_0 + h)$, защото вторият аргумент на подинтегралната функция $f(t, y_1(t))$ не излиза вън от пределите на интервала, в който приехме, че се изменя вторият аргумент y на функцията $f(x, y)$; при това, както и по-горе,

$$|y_2(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_{x_0}^{x} M\,\mathrm{d}t \leq Mh \leq b.$$

Значи и $y_2(x)$ не излиза вън от $[y_0 - b, y_0 + b]$ и затова $f(t, y_2(t))$ е дефинирана (и очевидно непрекъсната) функция на t в интервала $[x_0, x_0 + h]$. Ето защо

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\,\mathrm{d}t$$

е също дефинирана и непрекъсната функция на x в $[x_0, x_0 + h]$. По този начин чрез математическа индукция се доказва, че изобщо

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t$$

е дефинирана и непрекъсната функция на x в $[x_0, x_0 + h]$ и стойностите, които приема тя в този интервал, се заключават между $y_0 - b$ и $y_0 + b$. Очевидно е при това, че $y_n(x_0) = y_0$ и че $y_n(x)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y_{n-1}(x)),$$

т. е.

$$\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = f(x, y_{n-1}(x)). \tag{3}$$

Ако докажем, че $y_n(x)$ клони към някоя граница $\varphi(x)$ и заменим в тъждеството (3) формално y_n и y_{n-1} с общата им граница $\varphi(x)$, ще получим

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} = f(x, \varphi(x));$$

а това последното тъждество показва, че функцията $\varphi(x)$ е интеграл на даденото диференциално уравнение.

При доказателството на сходимостта на функционната редица $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, ... ще използуваме условието на Липшиц. За тази цел ще разгледаме безкрайния ред:

(4) $$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \cdots ,$$

членовете на който са непрекъснати функции на x в интервала $|x_0, x_0 + h|$. От равенствата (2), чрез които дефинирахме функциите $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, ..., получаваме

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,\mathrm{d}t \right| \leq M(x - x_0),$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_{x_0}^{x} \left\{ f(t, y_1) - f(t, y_0) \right\} \mathrm{d}t \right| .$$

Но според условието на Липшиц

$$|f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)| \leq A|y_1(t) - y_0|;$$

следователно

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq \int_{x_0}^{x} A|y_1(t) - y_0|\,\mathrm{d}t \leq \int_{x_0}^{x} AM(t - x_0)\,\mathrm{d}t = \frac{AM}{2}(x - x_0)^2.$$

Също така намираме

$$\begin{aligned} |y_3(x) - y_2(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} \left\{ f(t, y_2) - f(t, y_1) \right\} \mathrm{d}t \right| \leq \int_{x_0}^{x} A|y_2(t) - y_1(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_{x_0}^{x} A\frac{AM}{2!}(t - x_0)^2\,\mathrm{d}t = \frac{A^2M}{3!}(x - x_0)^3. \end{aligned}$$

Изобщо, ако приемем, че сме доказали неравенството

(5) $$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{A^{n-1}M}{n!}(x - x_0)^n,$$

ще докажем верността на същото неравенство, когато заменим n с $n+1$. И наистина

$$
\begin{aligned}
|y_{n+1}(x)-y_n(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x}\left\{f(t,y_n)-f(t,y_{n-1})\right\}\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} A|y_n(t)-y_{n-1}(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{x_0}^{x} A\cdot\frac{A^{n-1}M}{n!}(t-x_0)^n\,\mathrm{d}t = \frac{A^nM}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Понеже $x-x_0\leq h$, то неравенството (5) ще се усили, ако заменим отдясно $x-x_0$ с h:

$$
|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leq\frac{A^{n-1}M}{n!}h^n. \tag{6}
$$

Следователно общият член на ред (4) не надминава по абсолютна стойност общия член на сходящия ред

$$
|y_0|+Mh+\frac{AMh^2}{2!}+\frac{A^2Mh^3}{3!}+\cdots+\frac{A^{n-1}Mh^n}{2!}+\cdots,
$$

когато x се изменя в интервала $|x_0,x_0+h|$. (Сходимостта на този ред се установява лесно, като приложим критерия на Даламбер, защото $\dfrac{u^{n+1}}{u^n}=\dfrac{Ah}{n+1}$ клони към 0 заедно с $\dfrac{1}{n}$.) Понеже членовете на последния ред не зависят от x, съгласно с критерия за нормална сходимост (вж. глава X, § 65) функционният ред (4) е равномерно сходящ и сумата му представя една непрекъсната функция $\varphi(x)$ в интервала (x_0,x_0+h):

$$
\varphi(x)=y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+\cdots+(y_n-y_{n-1})+\cdots \tag{7}
$$

Нека забележим тук, че $\varphi(x)$ е равна на $\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)$, защото частичната сума на първите $n+1$ члена на реда (7) е равна на $y_n(x)$, а границата на тази сума е тъкмо сумата на реда, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)=\varphi(x)$. От това следва, че разликата $\varphi(x)-y_n(x)$ представя остатъчния член на реда (7) и понеже редът е равномерно сходящ, тази разлика клони равномерно към нула в интервала $[x_0,x_0+h]$; с други думи, ако ε е произволно положително число, съществува съответен нему индекс $N=N(\varepsilon)$, тъй че

$$
|\varphi(x)-y_n(x)|<\varepsilon \text{ за } n>N.
$$

Когато n расте безгранично, лявата част от равенството

$$
y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t \tag{8}
$$

клони към $\varphi(x)$. Ще докажем, че дясната част, т. е. интегралът

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t \quad \text{клони към} \quad \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t.$$

Да означим с тази цел с ε едно произволно положително число. За достатъчно големи значения на n ($n > N$) имаме $|\varphi(t) - y_{n-1}(t)| < \dfrac{\varepsilon}{Ah}$, каквото и да е t от интервала $|x_0, x_0 + h|$. Тогава, като приложим неравенството на Липшиц, получаваме

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_{x_0}^{x} \big\{ f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t - f(t, y_{n-1}(t)) \big\}\,\mathrm{d}t \right|$$
$$\leq \int_{x_0}^{x} A\,|\varphi(t) - y_{n-1}(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{x_0}^{x} A \cdot \frac{\varepsilon}{Ah}\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{h}(x - x_0) \leq \varepsilon \text{ за } n > N.$$

Тези неравенства показват, че действително

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t.$$

По този начин получаваме чрез граничен преход от (8) равенството

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t. \tag{9}$$

Понеже $f(t, \varphi(t))$ е непрекъсната функция на t в интервала $(x_0, x_0 + h)$, производната на дясната част на (9) съществува и е равна на $f(x, \varphi(x))$, т. е.

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

И така функцията $\varphi(x) = \lim y_n(x)$ удовлетворява даденото диференциално уравнение в интервала $[x_0, x_0 + h]$ и, както се вижда непосредствено от (9), приема стойност y_0 за $x = x_0$.

Остава да докажем още, че $\varphi(x) = \lim y_n(x)$ *е единствената функция на* x*, която удовлетворява диференциалното уравнение* $y' = f(x, y)$ *и приема за* $x = x_0$ *стойност* y_0.

Нека $\psi(x)$ да е друга някоя функция на x, която удовлетворява даденото диференциално уравнение в интервала $[x_0, x_0 + h]$, и нека $\psi(x_0) = y_0$. Както ще видим, допускането, че $\varphi(x) - \psi(x)$ не е идентично нула в $[x_0, x_0 + h]$, ще ни доведе до противоречие.

Да разгледаме при това допускане съвкупността от всички значения на x от интервала $[x_0, x_0 + h]$, за които $|\varphi(x) - \psi(x)| > 0$, и да означим с ξ тяхната точна долна граница ($x_0 \leq \xi \leq x_0 + h$). Числото ξ е характеризирано чрез следните свойства:

1. $\varphi(x) - \psi(x) = 0$ за всяко x от интервала $[x_0, \xi]$.

2. Колкото малко и да е положителното число ε, съществуват значения на x от интервала $[\xi, \xi + \varepsilon]$, за които $|\varphi(x) - \psi(x)| > 0$. Ясно е освен това (поради непрекъснатостта на $|\varphi(x) - \psi(x)|$), че $\varphi(\xi) - \psi(\xi) = 0$.

Ние ще изберем сега $\varepsilon > 0$ тъй малко, че: 1) ε да бъде по-малко от $\frac{1}{A}$, където A означава положителната константа в неравенството на Липшиц, и 2) дъгата от кривата $y = \psi(x)$, която отговаря на значения на x от интервала $[\xi, \xi + \varepsilon]$, да не излиза вън от областта R. Това последно условие е изпълнимо, понеже дъгата $y = \varphi(x)$ лежи изцяло в R, когато x се изменя в интервала $[x_0, x_0 + h]$ и освен това $\psi(\xi) = \varphi(\xi)$. Да означим с μ максимума на непрекъснатата функция $|\varphi(x) - \psi(x)|$ в интервала $[\xi, \xi + \varepsilon]$. Очевидно $\mu > 0$. От тъждеството

$$\psi'(t) = f(t, \psi(t))$$

получаваме, като интегрираме между границите x_0 и x и вземем предвид, че $\psi(x_0) = y_0$,

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Чрез почленно изваждане на равенствата (9) и (10) получаваме по-нататък

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^{x} \left\{ f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)) \right\} \mathrm{d}t$$

или, като приложим за подинтегралната функция неравенството на Липшиц,

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le \int_{x_0}^{x} A|\varphi(t) - \psi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Понеже $\varphi(t) - \psi(t) = 0$ за $x_0 \le t \le \xi$, последното неравенство може да се напише още така:

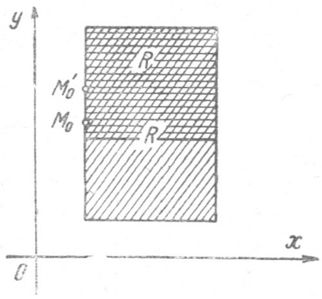
$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le \int_{\xi}^{x} A|\varphi(t) - \psi(t)|\,\mathrm{d}t,$$

откъдето следва, че $|\varphi(x) - \psi(x)| \le (x - \xi)A\mu \le \varepsilon A\mu$, каквото и да е x от интервала $[\xi, \xi + \varepsilon]$. Ако дадем на x специално онази стойност, за която $|\varphi(x) - \psi(x)| = \mu$, то ще имаме

$$\mu \le \varepsilon A\mu \quad \text{или} \quad \varepsilon \ge \frac{1}{A},$$

а това противоречи на неравенството $\varepsilon < \frac{1}{A}$, на което подчинихме положителното число ε. И така допускането, че $\varphi(x) - \psi(x)$ не е идентично нула в целия интервал $[x_0, x_0 + h]$, води към противоречие.

Да означим с y_0' някое значение за y между $y_0 - b$ и $y_0 + b$ и да означим с b' числото $b - |y_0' - y_0|$. Тогава областта R: $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $y_0' - b' \leq y \leq y_0' + b'$ съставя част от областта R (черт. 5)и функцията $f(x, y)$ е непрекъсната и удовлетворява условието на Липшиц в R'. Следователно съществува една функция $\varphi_1(x)$, дефинирана в един достатъчно малък интервал $[x_0, x_0 + h]$, която удовлетворява диференциалното уравнение и приема за $x = x_0$ стойност y_0'. Очевидно тая функция е различна от $\varphi(x)$, щом $y_0' \neq y_0$. Понеже при това x_0 е дадено число, а y_0' е произволна константа, независеща от x, оттук следва, че *диференциалното уравнение* $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ *допуска в околността на* $x = x_0$ *безброй интеграли, които приемат за* $x = x_0$ *различни стойности.*

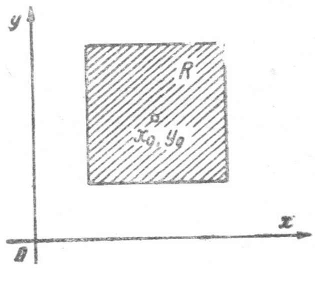


Черт. 5

Всеки един от тези интеграли е обаче напълно определен чрез началната си стойност, която той приема за $x = x_0$. Ако означим с $\varphi(x, y_0)$ интеграла, който приема за $x = x_0$ стойност y_0, този интеграл зависи освен от x още и от y_0. От казаното се вижда, че най-общото решение на даденото диференциално уравнение трябва да съдържа една произволна константа (независеща от x). В случая произволната константа е y_0.

§ 5. Различни бележки върху теоремата за съществуване на интеграли

1. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната и удовлетворява условието на Липшиц в областта $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$ (тази област се различава от областта R по това, че x_0 е в средата на интервала, в който се изменя x), по същия начин, както и по-горе, може да се докаже, че съществува една единствена функция $y = \varphi(x)$, дефинирана в един достатъчно малък интервал около $x = x_0$, която удовлетворява диференциалното уравнение и приема стойност y_0 за $x = x_0$. Ако означим с M максимума на $|f(x, y)|$ в разглежданата област и с h по-малкото от числата a и $\dfrac{b}{M}$, функцията $\varphi(x)$ е еднозначно дефинирана в интервала



Черт. 6

$[x_0 - h, x_0 + h]$. Доказателството на тъй разширената теорема се извършва по същия начин, както и по-горе. Установява се, че функциите $y_1, y_2, \dots,$ дефинирани чрез рекурентната зависимост

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t,$$

са непрекъснати в $[x_0-h, x_0+h]$ и клонят равномерно в този интервал към една гранична функция $\varphi(x)$, която удовлетворява диференциалното уравнение и началното условие $y_0 = \varphi(x_0)$.

2. Методът, който приложихме, за да докажем съществуването на интеграл, може да служи в известни случаи и като метод за приближено или точно интегриране. Да приложим този метод върху диференциалното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y.$$

Ще вземем $x = 0$, y_0 произволно. Функцията $f(x, y) = x + y$ е непрекъсната и удовлетворява неравенството на Липшиц $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq A|y_1 - y_2|$ в цялата равнина XY, щом A е по-голямо от 1. В този случай

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \int_0^x (t + y_0)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + (1 + x)y_0, \\ y_2 &= y_0 + \int_0^x (t + y_1(t))\,\mathrm{d}t = y_0 + \int_0^x \left[t + \frac{t^2}{2} + (1 + t)y_0\right] \mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) y_0. \end{aligned}$$

Също тъй

$$y_3 = y_0 + \int_0^x (t + y_2(t))\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) y_0,$$

....

изобщо

$$y_n = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) y_0.$$

Лесно е да се провери чрез пълна индукция, че законът за образуване на y_n, който се съдържа в последното равенство, е общ. Граничният преход $\lim y_n$ се извършва също лесно. Да означим с $S_n(x)$ сумата

$$S_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Тогава

$$y_n = S_{n+1}(x) - 1 - x + y_0 S_n(x)$$

и понеже $\lim S_n(x) = e^x$, то

$$\lim y_n = e^x - 1 - x + y_0 e^x = \varphi(x).$$

Полученият интеграл може да се представи още (като положим $C = y_0 + 1$) във вида

$$y = Ce^x - 1 - x.$$

3. При доказателството на теоремата в предния параграф ние ограничихме независимата променлива да се изменя в малкия интервал $[x_0, x_0 + h]$ (или в интервала $[x_0 - h, x_0 + h]$ при предположенията в точка 1 на този параграф). Това направихме, за да бъдем сигурни, че дъгите $y{=}y_1(x)$, $y{=}y_2(x)$ и пр. остават вътре в областта R, когато x варира между x_0 и $x_0 + h$ (респ. между $x_0 - h$ и $x_0 + h$). В много случаи обаче интегралът $\varphi(x)$ може да бъде продължен отвъд граничните точки на този интервал. Да предположим например, че $f(x, y)$ удовлетворява следните условия: 1) $f(x, y)$ е еднозначна и непрекъсната в безкрайната област на променливите x и y, която се състои от всички точки между правите $x = x_0$ и $x = x_0 + a$ и върху самите прави; 2) съществува една абсолютна константа A така, че неравенството на Липшиц $|f(x, y_1) - f(x, y_0)| \leq A|y_1 - y_2|$ е удовлетворено за всяка двойка точки (x, y_1), (x_1, y_2) с равни абсциси, принадлежащи на областта. При тези предположения функциите

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,\mathrm{d}t, \quad y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,\mathrm{d}t, \quad \dots$$

са всички еднозначно дефинирани и непрекъснати, когато x се изменя в интервала $[x_0, x_0 + a]$. Освен това, ако означим с M максимума на $|f(x, y_0)|$ за $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, лесно е да се види, че

$$|y_1 - y_0| \leq M(x - x_0),$$

$$|y_2 - y_1| = \left| \int_{x_0}^{x} \left\{ f(t, y_1(t)) - f(t, y_0) \right\} \mathrm{d}t \right| \leq \int_{x_0}^{x} A|y_1(t) - y_0|\,\mathrm{d}t \leq AM\frac{(x - x_0)^2}{2!},$$

изобщо

$$|y_n - y_{n-1}| \leq A^{n-1} M \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

за всяко x от интервала $(x_0, x_0 + a)$.

Оттук заключаваме по същия начин, както по-преди, че y_n клони равномерно в интервала $[x_0, x_0 + a]$ към една гранична функция $\varphi(x)$, която удовлетворява диференциалното уравнение.

Благодарение на специалните предположения, които направихме за функцията $f(x, y)$, ние успяхме да докажем, че интегралът $\varphi(x) = \lim y_n(x)$ е дефиниран в целия интервал $[x_0, x_0 + a]$, в който приехме първоначално, че се изменя променливата x.

Функцията $f(x, y) = X_1 y + X_2$, където X_1 и X_2 означават непрекъснати функции на x в интервала $[x_0, x_0 + a]$, удовлетворя условията 1) и 2). За A можем да вземем в този случай едно число, по-голямо от максимума на $|X_1|$. Следователно съществува един интеграл $y = \varphi(x)$ на диференциалното уравнение $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = X_1 y + X_2$, дефиниран в целия интервал $[x_0, x_0 + a]$, който при $x = x_0$ приема произволна, отнапред дадена стойност y_0. Също тъй функциите $f(x, y) = x + \sin y$, $f(x, y) = \sqrt{1 + y^2} + e^x$ удовлетворяват условията 1) и 2) при $A \geq 1$, понеже $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \leq 1$; при това интервалът $[x_0, x_0 + a]$ може да бъде избран съвсем произволно. И така, макар и да не знаем да интегрираме диференциалните уравнения $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + \sin y$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + y^2} + e^x$, ние знаем, че съществува за всяко едно от тях една напълно определена интегрална крива $y = \varphi(x)$, която минава през дадена точка (x_0, y_0); всяка такава крива може да бъде продължена неограничено и от двете страни, без да губи при това свойството си да бъде интегрална крива по цялото си продължение.

4. Тук ще приведем един пример, от който се вижда, че ако функцията $f(x, y)$ не удовлетворява условието на Липшиц в околността на точката (x_0, y_0), може да съществуват повече интегрални криви, минаващи през тази точка. Да разгледаме диференциалното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3y^{\frac{2}{3}}.$$

Лесно е да се провери, че то се удовлетворява, ако положим $y = (x - C)^3$, каквато и да е константата C. Измежду безбройното интегрални криви, представени чрез последното уравнение, съществува една (и само една), която минава през точката $(x_0, 0)$. Това е кривата $y = (x - x_0)^3$. Но също тъй и функцията $y = 0$ е интеграл на разглежданото уравнение, тъй че през точката $(x_0, 0)$ минават две различни интегрални криви: едната от тях е абсцисната ос, а другата е кубичната парабола $y = (x - x_0)^3$. Тук условието на Липшиц не е изпълнено в областта $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $-b \leq y \leq b$, колкото и малки да са

a и b, защото отношението

$$\frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2} = 3\frac{y_1^{\frac{2}{3}}-y_2^{\frac{2}{3}}}{y_1-y_2} = 3\frac{y_1^{\frac{1}{3}}+y_2^{\frac{1}{3}}}{y_1^{\frac{2}{3}}+y_1^{\frac{1}{3}}y_2^{\frac{1}{3}}+y_2^{\frac{2}{3}}}$$

може да бъде направено произволно голямо, стига да положим $y_1 = \alpha^3$, $y_2 = \alpha^6$ и да вземем α достатъчно малко.

§ 6. Трето доказателство на теоремата за съществуване на интеграли

Поради важността на теоремата за съществуване на интеграли на диференциалното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \tag{1}$$

ние ще дадем тук още едно доказателство, което дължим на Коши и което почива върху съвсем друг принцип. За функцията $f(x,y)$ ще предположим сега, че *е аналитична* в околността на точката (x_0,y_0), което значи, че тя може да бъде развита в безкраен степенен ред по целите положителни степени на $x-x_0$ и $y-y_0$, който е сходящ в известна околност на точката (x_0,y_0). Този ред има вида

$$\begin{aligned}(2)\quad f(x,y) &= a_{00}+a_{10}(x-x_0)+a_{01}(y-y_0)+a_{20}(x-x_0)^2\\ &+a_{11}(x-x_0)(y-y_0)+\alpha_{02}(y-y_0)^2+\cdots = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}(x-x_0)^m(y-y_0)^n.\end{aligned}$$

При това предположение ще докажем, че съществува една функция на x, дефинирана за достатъчно малки значения на $|x-x_0|$ чрез степенен ред от вида

$$\varphi(x) = y_0+\alpha_1(x-x_0)^2+\alpha_2(x-x_0)^2+\cdots, \tag{3}$$

която удовлетворява диференциалното уравнение (1) и приема при $x = x_0$ стойност y_0. Без съществено ограничение на общността можем да приемем, че $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$; и наистина в противен случай можем да въведем новите променливи $\xi = x-x_0$, $\eta = y-y_0$ и да положим $f(x_0+\xi, y_0+\eta) = f_1(\xi,\eta)$, при което даденото диференциално уравнение преминава в $\dfrac{d\eta}{d\xi} = f_1(\xi,\eta)$ и на интеграла $y = \varphi(x)$ отговаря $\eta = \varphi(x_0+\xi)-y_0$.

И така ние имаме да докажем, че ако функцията $f(x, y)$ е аналитична в околността на точката $x = 0$, $y = 0$, съществува степенен ред от вида

$$\varphi(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots, \tag{4}$$

който е сходящ за достатъчно малки значения на $|x|$ и удовлетворява диференциалното уравнение (1).

Преди Коши математиците са разсъждавали така. Функцията $\varphi(x)$ е напълно определена, ако знаем стойностите на нейните производни при $x = 0$, защото в такъв случай знаем коефициентите в Маклореновото ѝ развитие (4). От диференциалното уравнение (1), като заместим в него y с $\varphi(x)$ и след това x с нула (и следователно $\varphi(0)$ с нула), ще имаме последователно

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi), \quad \varphi'(0) = f(0, 0).$$

По-нататък, след като сме заместили в диференциалното уравнение y с $\varphi(x)$ и диференцираме двете му части, ще имаме

$$\varphi''(0) = f_x(x, \varphi) + f_y(x, \varphi) \,.\, \varphi',$$

откъдето при $x = 0$ получаваме

$$\varphi''(0) = f_x(0, 0) + f_y(0, 0) \,.\, f(0, 0).$$

Като продължаваме по същия начин, убеждаваме се лесно, че редицата числа: $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, $\varphi'''(0)$, $\ldots$, които, умножени съответно с $\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \ldots$, представляват коефициентите на реда (4), се изразяват по прост начин чрез стойностите на функцията $f(x, y)$ и на нейните частни производни за точката $(0, 0)$. Понеже функцията $f(x, y)$ е дадена, то чрез нея са определени напълно стойностите $f(0, 0)$, $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$, $\ldots$, а заедно с това и коефициентите на реда (4). Математиците преди Коши са се ограничавали само с тези формални разглеждания, без да си задават въпроса, дали така полученият ред (4) е сходящ. Доказателството може да се попълни в този съществен пункт (както показа Коши) чрез следните разсъждения. По предположение $f(x, y)$ се развива в безкрайния ред

$$f(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n, \tag{5}$$

който е сходящ за достатъчно малки значения на $|x|$ и $|y|$. Да приемем например, че редът е сходящ при $x = r$, $y = \rho$, където r и ρ са положителни числа. Лесно е да се види, че той е абсолютно сходящ и за всички значения на x и y, които удовлетворяват неравенствата $|x| < r$ и $|y| < \rho$. Понеже редът е сходящ за $x = r$ и $y = \rho$, съществува една положителна константа M, така че

$$|a_{mn} r^m \rho^n| < M$$

за всички системи значения $m, n = 0, 1, 2, \dots$ От последното неравенство, написано във вида

$$|a_{mn}| < \frac{M}{r^m \rho^n},$$

се вижда, че коефициентите a_{mn} на безкрайния ред (5) са по абсолютна стойност по-малки от съответните коефициенти на реда

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{M}{r^m \rho^n} X^m Y^n, \tag{6}$$

който е очевидно сходящ за $|X| < r$ и $|Y| < \rho$, защото представлява произведението на двете безкрайни намаляващи геометрични прогресии:

$$M\left(1 + \frac{X}{r} + \frac{X^2}{r^2} + \cdots\right) \quad \text{и} \quad 1 + \frac{Y}{\rho} + \frac{Y^2}{\rho^2} + \cdots$$

От тях първата е равна на $\dfrac{M}{1 - \dfrac{X}{r}}$, а втората — на $\dfrac{1}{1 - \dfrac{Y}{\rho}}$, така че

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{M}{r^m \rho^n} X^m Y^n = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{X}{r}\right)\left(1 - \dfrac{Y}{\rho}\right)}.$$

На стр. 30 видяхме, че $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, $\dots$ се получава от стойностите на функцията $f(x, y)$ и на нейните производни при $x = 0$, $y = 0$ чрез действията събиране и умножение. От друга страна, от реда (5) следва, че

$$f(0,0) = a_{00}, \quad f_x(0,0) = a_{10}, \quad f_y(0,0) = a_{01}, \quad \dots,$$

изобщо

$$\left(\frac{\partial^{m+n} f(x,y)}{\partial x^m \partial y^n}\right)_{0,0} = m!n!a_{mn}.$$

Така че имаме: $\varphi'(0) = a_{00}$, $\varphi''(0) = a_{10} + a_{01}a_{00}$,

$$\varphi'''(0) = 2a_{20} + 2a_{11}a_{00} + 2a_{02}a_{00}^2 + a_{01}(a_{01} + a_{01}a_{00}) \text{ и пр.}$$

Изобщо за нашите разсъждения е съществено, че $\varphi^{(n)}(0)$ *може да се получи от коефициентите* a_{00}, a_{01}, a_{10}, $\ldots$, $a_{0,n-1}$, $\ldots$, $a_{n-1,0}$ *на реда* (5) *само чрез действията събиране и умножение, приложени краен брой пъти*:

$$\varphi^{(n)}(0) = P_n(a_{00}, a_{10}, a_{01}, \ldots, a_{0,n-1}, \ldots, a_{n-1,0}).$$

Тук P_n означава един израз, който се получава от коефициентите a_{00}, a_{10}, $a_{01}, \ldots, a_{0,n-1}, \ldots, a_{n-1,0}$ само чрез действията събиране и умножение.

Да разгледаме наред с даденото диференциално уравнение и уравнението

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = F(x, Y), \tag{7}$$

където функцията $F(x, Y)$ има това свойство, че може да се развие в ред по степените на x и Y, сходящ за $|x| < r$ и $|Y| < \rho$:

$$F(x, Y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} x^m Y^n, \tag{8}$$

и че коефициентите на този ред (8) са положителни числа, които са по-големи или най-малко равни на абсолютните стойности на съответните коефициенти на реда (5), т. е. $A_{mn} \geq |a_{mn}|$. При тези условия редът (8) се нарича *мажорантен* на реда (5). Ако можем да установим по пряк начин, че уравнението (7) допуска един интеграл, *който при* $x = x_0$ *приема стойност нула и може да се развие в сходящ ред в околността на точката* $x = 0$*, то оттук можем със сигурност да заключим, че редът* (4) *на* 30 *стр. е сходящ поне за същите стойности на* x.

И наистина, ако означим с $\Phi(x) = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots$ въпросния интеграл на уравнението (7), както видяхме за $\varphi^{(n)}(0)$ по-горе, и тук ще имаме $\Phi^{(n)}(0) = P_n(A_{00}, A_{10}, \ldots)$. Понеже P_n е полином на $A_{00}, A_{01}, A_{10}, \ldots$ с цели положителни коефициенти, то

$$\begin{aligned}\Phi^{(n)}(0) = P_n(A_{00}, A_{01}, \ldots, A_{n-1,0}) &\geq P_n(|a_{00}|, |a_{01}|, \ldots, |a_{n-1,0}|) \\ &\geq |P_n(a_{00}, a_{01}, \ldots)| = |\varphi^{(n)}(0)|.\end{aligned}$$

Така полученото неравенство

$$\Phi^{(n)}(0) \geq \left|\varphi^{(n)}(0)\right|$$

показва, че Маклореновото развитие на $\varphi(x)$ е сигурно сходящо за същите значения на x, за които е сходящ и редът за $\Phi(x)$. В случая за $F(x, Y)$ можем да изберем

$$F(x, Y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{Y}{\rho}\right)};$$

тогава уравнението (7) приема вида

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)}$$

или

$$\left(1-\frac{Y}{\rho}\right)\mathrm{d}Y = \frac{M\,\mathrm{d}x}{1-\frac{x}{r}}.$$

Чрез интегриране получаваме от последното уравнение

$$Y-\frac{Y^2}{2\rho} = -Mr\ln\left(1-\frac{x}{r}\right)+C. \tag{9}$$

Тук константата C трябва да бъде равна на нула, защото при $x = 0$ и Y приема стойност нула, така че

$$Y-\frac{Y^2}{2\rho} = -Mr\ln\left(1-\frac{x}{r}\right).$$

Като решим това квадратно уравнение относно Y и вземем само оня корен, който се анулира при $x = 0$, ще имаме последователно

$$Y^2-2\rho Y = 2Mr\rho\ln\left(1-\frac{x}{r}\right);$$

$$Y = \rho-\sqrt{\rho^2+2Mr\rho\ln\left(1-\frac{x}{r}\right)} = \rho\left\{1-\sqrt{1+\frac{2Mr}{\rho}\ln\left(1-\frac{x}{r}\right)}\right\}.$$

Това е търсеният интеграл $\Phi(x)$ на диференциалното уравнение (7). Остава да докажем още, че така получената функция $\Phi(x)$ може да се развие в безкраен ред по степените на x. За тази цел да означим с u безкрайния ред

$$-\frac{2Mr}{\rho}\ln\left(1-\frac{x}{r}\right) = \frac{2Mr}{\rho}\left(\frac{x}{r}+\frac{x^2}{2r^2}+\frac{x^3}{3r^3}+\cdots\right). \tag{10}$$

Тогава ще имаме

$$Y = \rho\left(1-\sqrt{1-u}\right) = \rho\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2\,.\,4}u^2+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}u^3+\cdots\right), \tag{11}$$

където безкрайният ред в скобите е сходящ, както е известно, за $|u| < 1$; за достатъчно малки значения на $|x|$ очевидно условието $|u| < 1$ е изпълнено, понеже u е представен чрез един безкраен ред по степените на x (ред 10) без свободен член.

Да видим за какви значения на x функцията u приема стойности между -1 и $+1$. Очевидно трябва да имаме:

$$\begin{gathered}
-1 < -\frac{2Mr}{\rho}\ln\left(1-\frac{x}{r}\right) < +1,\\
-\frac{\rho}{2Mr} < \ln\left(1-\frac{x}{r}\right) < \frac{\rho}{2Mr},\\
\exp\frac{-\rho}{2Mr} < 1-\frac{x}{r} < \exp\frac{\rho}{2Mr},^{*}\\
1-\exp\frac{\rho}{2Mr} < \frac{x}{r} < 1-\exp\left(-\frac{\rho}{2Mr}\right).
\end{gathered}$$

Последните неравенства са удовлетворени, ако $\dfrac{|x|}{r} < 1 - e^{-\frac{\rho}{2Mr}}$, защото $1 - e^{\frac{\rho}{2Mr}} < -1 + e^{-\frac{\rho}{2Mr}}$. $\Big\{$Каквото и да е реалното число $a \neq 0$, неравенството $1 - e^{a} < -1 + e^{-a}$ е вярно, защото то е еквивалентно с очевидното неравенство $\left(e^{\frac{a}{2}} - e^{-\frac{a}{2}}\right)^2 > 0.\Big\}$ *И така за значения на x, които удовлетворяват неравенството $|x| < r\left[1-\exp\left(-\dfrac{\rho}{2Mr}\right)\right]$, сигурно $|u| < 1$.*

Понеже при това коефициентите на безкрайните редове (10) и (11) са положителни, ние можем да заместим навсякъде формално в реда (11) u с равния нему безкраен ред (10) и да наредим след това по степените на x. Така полученият ред е сходящ за $|x| < r\left[1-\exp\left(-\dfrac{\rho}{2Mr}\right)\right]$ и представя функцията $\Phi(x)$. За същите значения на x следователно ще бъде сигурно сходящ и Маклореновият ред за $\varphi(x)$, което трябваше да докажем.

Ако сравним първите две доказателства (§ 3 и 4) на теоремата за съществуване на интеграли с току-що изложеното, забелязваме преди всичко една съществена разлика в предположенията, които направихме за функцията $f(x,y)$. Докато тук предполагаме, че $f(x,y)$ е аналитична в околността на точката (x_0,y_0), по-рано беше достатъчно да предположим само, че $f(x,y)$ е непрекъсната в областта R и че удовлетворява в тази област условието на Липшиц относно втория си аргумент. Но ако $f(x,y)$ е аналитична в околността на (x_0,y_0), тя сигурно удовлетворява в тази околност и последното условие, понеже тогава частната производна $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}$ съществува и е ограничена в една достатъчно малка околност на (x_0,y_0). Обратното обаче не е винаги вярно, тъй че предположението за аналитичност на функцията $f(x,y)$ е много по-ограничително, отколкото направените по-рано предположения в началото на § 3. Независимо от това двете доказателства, които изложихме

*За удобство при набора пишем $\exp a$ вместо e^a.

в § 3 и 4, водят до по-ценни изводи. И наистина, ако $f(x, y)$ е аналитична в околността на (x_0, y_0), според изложеното доказателство в този параграф съществува една единствена *аналитична* функция, която удовлетворява диференциалното уравнение и началното условие $\varphi(x_0) = y_0$. Остава открит обаче въпросът, дали не съществува и друга *неаналитична* функция (т. е. такава, която да не може да се развие в ред по положителните степени на $x - x_0$), удовлетворяваща същите условия.

Първите две доказателства дават ясен отговор и на този въпрос: ако $\psi(x)$ е някоя функция на x, която удовлетворява диференциалното уравнение (безразлично дали тя е аналитична, или не) и ако $\psi(x_0) = y_0$, то $\psi(x)$ съвпада с функцията $\varphi(x)$, чието съществуване установихме чрез граничен преход в § 3 и 4.

§ 7. Теорема на Пеано

В § 3 и 4 доказахме теоремата за съществуване на интеграли на диференциалното уравнение (1) при предположения, че функцията $f(x, y)$ на независимите променливи x, y е непрекъсната в известна околност на точката (x_0, y_0) и че в същата околност тя удовлетворява условието на Липшиц относно втория си аргумент. Естествено е да се запитаме доколко последното условие е необходимо за доказателството на теоремата. Този въпрос оставаше открит до края на миналия век, когато в 1890 г. италианският математик Пеано (G. Peano) успя да докаже съществуването на интеграл при единственото предположение, че функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в известна околност на точката (x_0, y_0). При това единствено условие обаче се доказва съществуването *поне на един* интеграл $y = y(x)$, който при $x = x_0$ приема стойност y_0, тъй че при предположението на теоремата на Пеано не се доказва и не може да се докаже, че $y = y(x)$ е *единствената* функция, която удовлетворява диференциалното уравнение (1) и началното условие $y(x_0) = y_0$. Тук ще изложим едно доказателство на теоремата на Пеано, което се базира съществено върху теоремата на Асколи за безкрайните функционни редици с равностепенно непрекъснати членове (вж. гл. X, § 66).

Теорема на Пеано. *Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в областта*

$$(B) \qquad x_0 \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b,$$

като означим с M максимума на $|f(x, y)|$ в (B) и с h по-малкото от положителните числа a и $\frac{b}{M}$, съществува поне една функция $y(x)$, дефинирана в *интервала* $x_0 \le x \le x_0+h$, *която удовлетворява диференциалното уравнение*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \tag{1}$$

и началното условие $y(x_0) = y_0$.

Доказателство. Да разделим интервала $(x_0, x_0 + h)$ на n равни подинтервала чрез точките

$$x_k = x_0 + \frac{k}{n}h, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

и да дефинираме след това непрекъснатата функция $y_n(x)$ по следния начин:

$$y_n(x) = \begin{cases} y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\,\mathrm{d}t & \text{за } x_0 \le x \le x_1; \\ y_{n1} + \displaystyle\int_{x_1}^{x} f(t,y_{n1})\,\mathrm{d}t & \text{за } x_1 \le x \le x_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ y_{nk} + \displaystyle\int_{x_k}^{x} f(t,y_{nk})\,\mathrm{d}t & \text{за } x_k \le x \le x_{k+1}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{cases} \tag{2}$$

при това с $y_{n1}, y_{n2}, y_{n3}, \dots, y_{nn}$ означаваме n константи, от които първите $n-1$ са подбрани тъй, че функцията $y_n(x)$ да бъде непрекъсната и в точките $x = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Тези n константи се определят постепенно чрез равенствата

$$\begin{cases} y_{n1} = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f(t,y_0)\,\mathrm{d}t, \\ y_{n2} = y_{n1} + \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(t,y_{n1})\,\mathrm{d}t, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n,k+1} = y_{nk} + \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t,y_{nk})\,\mathrm{d}t, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{3}$$

Преди всичко лесно е да се види, че всички y_{nk} принадлежат на затворения интервал $[y_0 - b, y_0 + b]$. И наистина от равенствата (3) намираме едно след друго

$$|y_{n1} - y_0| \le \frac{h}{n}M, \quad |y_{n2} - y_{n1}| \le \frac{h}{n}M, \ \dots \quad \text{изобщо} \quad |y_{n,k+1} - y_{nk}| \le \frac{h}{n}M,$$

откъдето следва, че

$$|y_{nk} - y_0| \leq \frac{kh}{n} M \leq \frac{kb}{n} \leq b, \text{ т.е. } |y_{nk} - y_0| \leq b \text{ при } k = 1, 2, \ldots, n.$$

За значения на x от интервала $[x_k, x_{k+1}]$ получаваме по-нататък от

$$y_n(x) = y_{nk} + \int_{x_k}^{x} f(t, y_{nk})\,\mathrm{d}t, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad y_{n0} = y_0,$$

неравенствата

$$|y_n(x) - y_{nk}| \leq \frac{hM}{n} \leq \frac{b}{n}$$

и

$$|y_n(x) - y_0| \leq |y_n(x) - y_{nk}| + |y_{nk} - y_0| \leq \frac{b}{n} + \frac{kb}{n} \leq b,$$

тъй че $|y_n(x) - y_0| \leq b$ за всяко x от затворения интервал $[x_0, x_0 + h]$.

Функцията

$$\eta_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t$$

е също дефинирана в интервала $[x_0, x_0+h]$. Ще докажем, че разликата $\eta_n(x) - y_n(x)$ клони равномерно към нула в същия интервал при безграничното растене на n. Да означим с ε произволно положително число. Според теоремата за равномерната непрекъснатост съществува едно $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, тъй че за две произволни точки (x, y'), (x, y'') от областта (B) да имаме

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon, \text{ щом } |y' - y''| < \delta.$$

Нека $n > \frac{b}{\delta}$. Съответните функции $y_n(x)$, $\eta_n(x)$ и тяхната разлика могат да се представят за значения на x от интервала $[x_k, x_{k+1}]$ във вида

$$y_n(x) = y_0 + \sum_{r=0}^{k-1} \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(t, y_{nr})\,\mathrm{d}t + \int_{x_k}^{x} f(t, y_{nk})\,\mathrm{d}t,$$

$$\eta_n(x) = y_0 + \sum_{r=0}^{k-1} \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t + \int_{x_k}^{x} f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t,$$

$$y_n(x) - \eta_n(x) = \sum_{r=0}^{k-1} \int_{x_r}^{x_{r+1}} \Big\{ f(t, y_{nr}) - f(t, y_n(t)) \Big\}\mathrm{d}t + \int_{x_k}^{x} \Big\{ f(t, y_{nk}) - f(t, y_n(t)) \Big\}\mathrm{d}t.$$

Но в интервала $x_r \le t \le x_{r+1}$ $(r = 0, 1, 2, \dots, k-1)$ имаме $|y_n(t) - y_{nr}| \le \dfrac{b}{n} < \delta$ и следователно $|f(t, y_n(t)) - f(t, y_{nr})| < \varepsilon$. И така

$$|y_n(x) - \eta_n(x)| \le \sum_{r=0}^{k-1} \varepsilon(x_{r+1} - x_r) + \varepsilon(x - x_k) = \varepsilon(x - x_0) \le \varepsilon h,$$

тъй че за всяко x от интервала $[x_0, x_0 + h]$ и за всички достатъчно големи n

$$|y_n(x) - \eta_n(x)| \le \varepsilon h, \text{ к. т. д. д.}$$

За функциите $\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x), \dots$ е приложима теоремата на Асколи, защото те са равномерно ограничени в интервала $[x_0, x_0 + h]$ и при това неравенството $|\eta_n(x') - \eta_n(x'') \le M|x' - x''|$ показва, че във всеки подинтервал с дължина $< \dfrac{\varepsilon}{M}$ осцилацията на $\eta_n(x)$ е по-малка от ε, какъвто и да е индексът n. Съществува следователно една подредица $\eta_{n_1}, \eta_{n_2}, \eta_{n_3}, \dots$, която клони равномерно в $[x_0, x_0 + h]$ към една гранична функция $y(x)$. Към същата граница трябва да клони равномерно и $y_{n_k}(x)$. Тогава от

$$\eta_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t,$$

следва чрез граничен преход

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t,$$

което показва, че функцията $y(x)$ удовлетворява даденото диференциално уравнение и началното условие $y(x_0) = y_0$.

Глава III

МЕТОДИ ЗА ИНТЕГРИРАНЕ НА НЯКОИ СПЕЦИАЛНИ ТИПОВЕ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ПЪРВИ РЕД

Към края на § 4 (стр. 25) ние доказахме, че при известни предположения за функцията $f(x, y)$ диференциалното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$$

има безброй интеграли. Разбира се, че с това далеч още не е разрешен въпросът, дали кой да е негов интеграл би могъл да се изрази чрез познатите ни досега алгебрични и трансцендентни функции. Както е известно, това изобщо не е възможно дори и в най-простия случай, когато уравнението има вида $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$, защото неопределеният интеграл $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ не винаги може да се изрази с познатите ни досега алгебрични и трансцендентни функции. Ето защо трябва да да считаме за твърде редки случаите, когато е възможно представянето на един интеграл на диференциалното уравнение в затворена форма. Но тъкмо споменатите изключителни случаи са важни от гледището на приложенията и затова ние ще се спрем в тази глава на някои изкуствени способи, които позволяват в известни случаи да се интегрира напълно диференциалното уравнение. При това няма да обръщаме внимание на трудностите от второстепенен характер, като пресмятане на определени интеграли и решаване на едно или система от няколко крайни уравнения. С други думи ще считаме, че сме извършили интегрирането на едно диференциално уравнение, ако успеем да го сведем към няколко (краен брой) неопределени интегрирания (квадратури) и към решаване на едно или няколко крайни уравнения, т. е. такива уравнения, които съдържат независимата променлива и непознатата функция, но не и нейните производни.

§ 8. Отделяне на променливите

Една от основните задачи на интегралното смятане се състои в това, да се намери такава функция $y(x)$, чиято производна е равна на дадена функция $f(x)$, т. е. да се интегрира най-простото диференциално уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1}$$

Ако $f(x)$ е непрекъсната в даден интервал, съществуват, както е известно, безброй функции на x, които удовлетворяват диференциалното уравнение.

Коя да е от тях се нарича *неопределен интеграл на* $f(x)$ и се бележи с $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Всяка друга функция, която удовлетворява диференциалното уравнение, се получава от $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ чрез прибавяне на една константа C, която може да бъде съвсем произволна. И така най-общото решение на задачата е дадено чрез формулата

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

Интегрирането на диференциалното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y), \tag{2}$$

дясната част на което зависи само от y, се свежда към по-първия случай, като разменим ролите на x и y. Ако разглеждаме y като независима променлива, а x като непозната функция на y, можем да представим уравнението (2) във вида

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f(y)}, \text{ откъдето } x = \int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} + C.$$

Диференциалните уравнения (1) и (2) са частни случаи на по-общото уравнение от вида

$$X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y = 0, \tag{3}$$

където X зависи само от x и Y зависи само от y. Да означим с $F(x)$ една функция на x, производната на която е равна на X, и с $\Phi(y)$ друга функция на y, чиято производна е равна на Y. Тогава общият интеграл на (3) е:

$$F(x) + \Phi(y) = C \qquad (C = \text{произволна константа}). \tag{4}$$

И наистина всяка функция y на x, която може да се получи от (4) за някоя специална стойност на C, удовлетворява и уравнението $F'(x)\,\mathrm{d}x + \Phi'(y)\,\mathrm{d}y = 0$, т. е. даденото диференциално уравнение (3).

Обратно, ако $y = \varphi(x)$ означава някоя функция на x, която удовлетворява диференциалното уравнение (3), производната на функцията $F(x) + \Phi(\varphi(x))$ е тъждествено равна на нула, откъдето следва,че $F(x) + \Phi(\varphi(x))$ е равно на някоя константа. С други думи функцията $y = \varphi(x)$ удовлетворява уравнението (4) за някоя стойност на произволната константа C.

Нека забележим тук, че диференциалното уравнение $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ може да се представи във вида (3), ако $f(x, y)$ може да се разложи в произведение от два множителя, от които единият зависи само от x, а другият само от y. В такъв случай казваме, че уравнението може да се интегрира чрез отделяне на променливите.

Пример 1. Да се намери уравнението на равнинна крива, субтангентата S_t в произволна точка на която е равна на удвоената абсциса на тази точка.

Решение. Понеже $S_t = \dfrac{y}{y'}$, задачата се свежда към решение на диференциалното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{2x} \quad \text{или} \quad \frac{2\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Променливите са отделени, така че общият интеграл е $2\ln y - \ln x = C$ или $y^2 = e^C \,.\, x$ или още, като положим $e^C = C'$, $y^2 = C'x$. В случая общият интеграл представлява една фамилия параболи с обща ос OX и обща върхова тангента OY. Лесно е да се провери, че всяка интегрална крива удовлетворява условието на задачата.

Пример 2. Да се намери уравнението на равнинна крива, тангентата в произволна точка M на която: а) минава през една постоянна точка (началото); б) е перпендикулярна към проводника OM.

Отговор. а) $y = Cx$; б) $x^2 + y^2 = C$.

Пример 3. Да се интегрира диференциалното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отговор. Общият интеграл е $\arcsin x + \arcsin y = C$ или $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C'$ или $\sqrt{1-x^2}\,.\,\sqrt{1-y^2} - xy = C''$ или най-после

$$(x^2 - y^2)^2 - 2C'^2(x^2 + y^2 - 2x^2y^2) + C'^4 = 0.$$

Между константите C, C' и C'' съществуват зависимостите

$$C' = \sin C, \quad C'' = \cos C, \quad C'^2 + C''^2 = 1.$$

§ 9. Хомогенни диференциални уравнения

Едно диференциално уравнение от първи ред се нарича хомогенно, когато, след като го решим относно $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, дясната му част е хомогенна функция на x и y *от нулева степен*. От свойствата на хомогенните функции е известно, че в такъв случай уравнението има вида

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1}$$

при което дясната част зависи само от отношението $\frac{y}{x}$. Ако положим $y = zx$, където z означава нова непозната функция на x, то диференциалното уравнение (1) преминава в

$$z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f(z) \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{f(z) - z}{x}.$$

Очевидно в последното уравнение променливите може да се отделят. Така получаваме

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z}, \quad \ln x = \int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} + C.$$

Общият интеграл на уравнението (1) се получава, като заместим в последното уравнение z с $\frac{y}{x}$.

Диференциалното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right), \tag{2}$$

където a, b, c, a_1, b_1, c_1 са дадени константи, се свежда към хомогенно, ако $ab_1 - a_1b \neq 0$. Да положим $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$, където ξ и η са нови променливи, а α и β означават неопределени константи. За да бъде трансформираното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}\right) \tag{3}$$

хомогенно, достатъчно е да изберем α и β така, че да удовлетворяват линейните уравнения

$$a\alpha + b\beta + c = 0, \quad a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0.$$

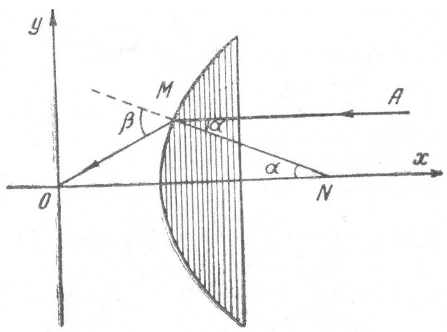
Ако $ab_1 - a_1b = 0$, това определяне на α и β от последните уравнения не е възможно. Но в този случай линейните функции $ax + by$ и $a_1x + b_1y$, където предполагаме, че поне едно от числата b и b_1, например b, е различно от нула, се получават една от друга чрез умножение с една константа, например $a_1x + b_1y = \lambda(ax + by)$. Следователно, като положим в уравнението (2) $z = ax + by$, то се преобразува в уравнението

$$\frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{a}{b} + f\left(\frac{z + c}{\lambda z + c_1}\right),$$

което се интегрира направо чрез отделяне на променливите.

Пример 1. От едно прозрачно вещество (стъкло), което пречупва просто светлинните лъчи и има индекс на пречупването $n > 1$, трябва да се отшлифова една равнинно-изпъкнала леща във вид на ротационно тяло. Каква форма трябва да има меридианът на изпъкналата повърхнина на лещата, тъй че лъчите, които падат перпендикулярно върху нейната равнинна повърхнина, след пречупването си да се събират всички в една точка.

Решение. Поради симетрията точката, в която се събират пречупените лъчи, трябва да лежи върху ротационната ос на лещата. Прекарваме през тази ос равнина, която пресича изпъкналата повърхнина на лещата в един меридиан. За начало на една правоъгълна координатна система в равнината на меридиана си избираме точката O, в която се събират пречупените лъчи, а за ос x — ротационната ос, насочена по посока, обратна на падащите лъчи



Черт. 7

(вж. черт. 7). Нека $y = f(x)$ да е уравнението на меридиана и $M(x, y)$ да означава произволна негова точка. Понеже падащият лъч AM е перпендикулярен към равнинната повърхнина на лещата, той не изменя посоката си, когато прониква в нея; напротив, той трябва да претърпи пречупване на излизане от лещата и при това тъй, че пречупеният лъч да мине през точката O. Ако означим с α и β острите ъгли, които образуват падащият и пречупеният лъч с нормалата в M, съгласно с един от законите на оптиката $\sin\beta : \sin\alpha = n$. Ъглите α и β могат да се изразят чрез координатите на M и чрез ъгловия коефициент $-\frac{1}{y'}$ на нормалата, откъдето заключаваме, че задачата води към едно диференциално уравнение от първи ред. Най-лесно се извежда това уравнение, като приложим синусовото правило за триъгълника OMN, в който ъглите при M и N са съответно равни на $\pi - \beta$ и α:

$$\frac{ON}{OM} = \frac{\sin(\pi - \beta)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n,$$

но $ON = x+yy'$, $OM = \sqrt{x^2+y^2}$. Следователно диференциалното уравнение е

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = n \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{n\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}.$$

Полученото уравнение е очевидно хомогенно. Като положим $y = zx$, то се преобразува в

$$z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{n\sqrt{1+z^2}-1}{z}$$

или

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{z\,\mathrm{d}z}{n\sqrt{1+z^2}-1-z^2},$$

откъдето

$$x\left(-\sqrt{1+z^2}+n\right) = \mathrm{const.}$$

А общият интеграл на самото диференциално уравнение за y е

$$\sqrt{x^2+y^2} = nx - C.$$

Последното уравнение представлява (понеже $n > 1$) една фамилия хиперболи с обща реална ос, общ фокус в началото и общ числен ексцентрицитет, равен на индекса на пречупването n. Нека забележим най-сетне, че диференциалното уравнение $\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} - n = 0$ може да се интегрира и направо, като вземем предвид, че лявата му част е производната на функцията $\sqrt{x^2+y^2} - nx$. От $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x^2+y^2}-nx\right) = 0$ следва, че $\sqrt{x^2+y^2} - nx = \mathrm{const}$ и пр. И така изпъкналата повърхнина на лещата трябва да представя част от едната мантия на един хиперболоид с две мантии, който се получава, като завъртим една хипербола с числен ексцентрицитет n около нейната реална ос.

Пример 2. Какъв вид трябва да има меридианът на една огледална ротационна повърхнина, тъй че лъчите, падащи успоредно на нейната ос, след отражението си да минават през една и съща точка.

Отговор. Повърхнината трябва да бъде ротационен параболоид. Отразените лъчи се събират в неговия фокус.

Пример 3. Да се интегрира диференциалното уравнение

$$(x+my)\,\mathrm{d}x + (y-mx)\,dy = 0.$$

§ 10. Линейни диференциални уравнения от първи ред

Едно диференциално уравнение от първи ред се нарича линейно, когато то е линейно относно непознатата функция и нейната производна. Решено относно последната, то има вида

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = X_1 y + X_2, \tag{1}$$

където X_1 и X_2 означават дадени функции само на независимата променлива x. Ако уравнението не съдържа втория член X_2 отдясно, то може да се интегрира чрез отделяне на променливите. И наистина в такъв случай, като умножим двете му части с $\frac{\mathrm{d}x}{y}$ и интегрираме, ще получим общия интеграл

$$\ln y = \int X_1 \,\mathrm{d}x + \ln C \quad \text{или} \quad y = C \exp \int X_1 \,\mathrm{d}x^{*}.$$

За да интегрираме даденото диференциално уравнение (1), ние ще приложим метода на вариране на произволната константа, който за нашия случаи се състои в следното: заместваме в общия интеграл на опростеното уравнение $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = X_1 y$ произволната константа C с една непозната функция u на x и си поставяме за задача да определим тази функция тъй, че изразът $y = u \exp \int X_1 \,\mathrm{d}x$, заместен вместо y в диференциалното уравнение (1), да го удовлетвори. След това заместване уравнението (1) се обръща в

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \exp \int X_1 \,\mathrm{d}x = X_2,$$

откъдето u се определя чрез една квадратура:

$$u = \int X_2 \exp\left(- \int X_1 \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}x + C.$$

И така общият интеграл на линейното диференциално уравнение (1) е

$$y = \exp \int X_1 \,\mathrm{d}x \left\{C + \int X_2 \exp\left(- \int X_1 \,\mathrm{d}x\right)\right\}. \tag{2}$$

От получения резултат се вижда, че общият интеграл на едно линейно диференциално уравнение от първи ред е линейна функция на произволната константа. Обратно, ако общият интеграл на едно диференциално уравнение има вида $y = C\varphi(x) + \psi(x)$, където C означава произволна константа, чрез диференциране и елиминиране на C се убеждаваме лесно, че съответното диференциално уравнение от първи ред е линейно.

---

*За удобство при набора пишем $\exp\alpha$ вместо e^{α}.

Нека забележим още, че ако знаем един частен интеграл y_1 на уравнението (1), неговият общ интеграл се получава чрез една квадратура. И наистина, ако положим $y = y_1 + z$ и вземем предвид, че $\dfrac{dy_1}{dx} = X_1 y_1 + X_2$, ще получим за новата непозната функция z простото диференциално уравнение $\dfrac{dz}{dx} = X_1 z$, откъдето

$$z = C \exp \int X_1 \, dx, \quad y = y_1 + C \exp \int X_1 \, dx.$$

Пример. Да се намери уравнението на една равнинна крива тъй, че субтангентата за произволна точка да се отнася към ординатата, както една постоянна отсечка се отнася към разликата между абсцисата и ординатата.

Решение. По условие имаме $S_t : y = a : (x - y)$ или като заместим S_t с равното му $\dfrac{y}{y'}$ и решим относно y',

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{a} = -\frac{1}{a} y + \frac{x}{a}.$$

Това уравнение е очевидно линейно и общият му интеграл е

$$y = \exp\left(-\int \frac{dx}{a}\right) \left\{C + \frac{1}{a} \int x \exp \int \frac{dx}{a}\right\} = x - a + C \exp\left(-\frac{x}{a}\right).$$

Следователно $y = x - a + Ce^{-\frac{x}{a}}$ е най-общото уравнение на всички равнинни криви, които притежават въпросното геометрично свойство. Тази задача представя един от най-старите примери за тъй наречените обратни задачи за тангентите, с каквито са се занимавали твърде много математиците от XVII в. веднага след откриването на новите методи на инфинитезималното смятане. Тя е била зададена (в малко по-друга форма) от Флоримон де Бон (Florimond de Baune) на Декарт (Descartes) към средата на XVII в., 30 години преди откриването на диференциалното смятане. Със същата задача са се занимавали освен Декарт и Лайбниц още и Лопитал (L'Hospital) и Й. Бернули (J. Bernoulli) в 1692 г.

§ 11. Бернулиеви диференциални уравнения

Да разгледаме диференциалното уравнение

$$\psi'(y) \frac{dy}{dx} = X_1 \psi(y) + X_2, \tag{1}$$

в което X_1 и X_2 имат същото значение, както в предишния параграф, а $\psi'(y)$ е производната на дадена функция $\psi(y)$, която зависи само от y. Чрез субституцията $u = \psi(y)$ то се преобразува в линейното уравнение $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = X_1 u + X_2$, което знаем да интегрираме. Към този тип принадлежи Бернулиевото диференциално уравнение

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = X_1 y + X_2 y^m.$$

То може да се представи още във вида $y^{-m}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = X_1 y^{1-m} + X_2$, или като положим $y^{1-m} = u$ и вземем предвид, че

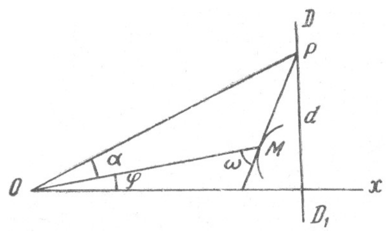
$$(1-m)y^{-m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \qquad \frac{1}{1-m}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = X_1 u + X_2.$$

Последното уравнение е линейно и, както видяхме, може да се интегрира чрез две квадратури. Като заместим в общия му интеграл u с y^{1-m}, получаваме общия интеграл на самото Бернулиево уравнение. Изложеният метод не е приложим за $m = 1$. Но в такъв случай уравнението (2) има вида $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (X_1 + X_2)y$ и следователно се интегрира чрез отделяне на променливите.

Пример. В една равнина са дадени точка O и права d. Да се намери уравнението на равнинна крива, тъй че частта на тангентата, заключена между допирната точка M и точката P, в която тангентата пресича правата d, да се вижда от точката O под даден ъгъл $MOP = \alpha$.

Решение. Да изберем дадената точка O за полюс и перпендикуляра, спуснат от O към d — за полярна ос на една равнинна полярна координатна система. Тогава, ако означим с a разстоянието от O до d, и с ω ъгъла, който сключва тангентата в M с правата OM, то от черт. 8 е ясно, че в триъгълника OMP

$$\sphericalangle OMP = \pi - \omega, \quad \sphericalangle OPM = \omega - \alpha, \quad OP = \frac{d}{\cos(\alpha + \varphi)}, \quad OM = \rho.$$



Черт. 8

Следователно, като приложим за същия триъгълник синусовото правило, ще имаме:

$$\frac{d}{\cos(\alpha+\varphi)} : \sin\omega = \rho : \sin(\omega-\alpha); \quad \rho\sin\omega = \frac{d\sin(\omega-\alpha)}{\cos(\alpha-\varphi)};$$
$$\rho\cos(\alpha+\varphi) = d\cos\alpha - d\sin\alpha\operatorname{cotg}\omega$$

и като заместим $\operatorname{cotg}\omega$ с $\dfrac{\rho'}{\rho}$,

$$\rho\cos(\alpha+\varphi) = d\cos\alpha - d\frac{\rho'}{\rho}\sin\alpha,$$

откъдето

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = k\rho - \frac{\rho^2}{d}(k\cos\varphi - \sin\varphi) \quad (k = \operatorname{cotg}\alpha).$$

Това уравнение е очевидно Бернулиево. Чрез субституцията $\rho = \dfrac{1}{u}$ то се преобразува в

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = -ku + \frac{1}{d}(k\cos\varphi - \sin\varphi),$$

общият интеграл на което е $u = Ce^{-k\varphi} + \dfrac{\cos\varphi}{d}$. Следователно общият интеграл на самото Бернулиево уравнение е

$$\rho = \frac{1}{C\exp(-k\varphi) + \dfrac{\cos\varphi}{d}}.$$

Ако $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, т. е. ако $k = 0$, последното уравнение приема вида $\rho = \dfrac{d}{aC + \cos\varphi}$ и представя конусно сечение, на което точката O е един от фокусите, а правата d е съответната му директриса. И наистина лесно е да се провери, че частта от тангентата в коя и да е точка на едно конусно сечение, заключена между допирната точка и една от директрисите, се вижда от съответния фокус под прав ъгъл.

§ 12. Диференциално уравнение на Рикати (Riccati)

Ако в диференциалното уравнение $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ дясната част представя един квадратен тричлен на y, коефициентите на който са дадени функции на

x, то се нарича Рикатиево диференциално уравнение. То има следователно вида

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = X_0 + X_1 y + X_2 y^2. \tag{1}$$

Изобщо това уравнение не може да се интегрира чрез квадратури, но ние ще докажем, че ако знаем само един частен интеграл y_1 на уравнението (1), то неговият общ интеграл може да се получи чрез две квадратури. И наистина, като положим $y = y_1 + z$ и вземем предвид, че $\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = X_0 + X_1 y_1 + X_2 y_1^2$, уравнението (1) се преобразува в

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (X_1 + 2X_2 y_1)\, z + X_2 z^2,$$

което като Бернулиево се интегрира лесно чрез субституцията $z = \dfrac{1}{u}$. Понеже диференциалното уравнение относно u е линейно, общият му интеграл има вида $u = C\varphi(x) + \psi(x)$, където C е произволна константа. Следователно общият интеграл на уравнението (1) има вида

$$y = y_1 + z = y_1 + \frac{1}{C\varphi(x) + \psi(x)} = \frac{Cy_1\varphi(x) + y_1\psi(x) + 1}{C\varphi(x) + \psi(x)}.$$

Този резултат показва, че общият интеграл на Рикатиевото диференциално уравнение е хомографична (т. е. дробна линейна) функция на произволната константа. Това свойство на общия интеграл е характерно за Рикатиевите диференциални уравнения. Както ще видим по-нататък, съществува тясна зависимост между тях и между линейните диференциални уравнения от втори ред.

Пример. Да се интегрира диференциалното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2,$$

като се знае, то има частен интеграл от вида $y_1 = ax^n$.

Решение. Трябва да докажем, че съществуват две константи a и n, тъй че като положим в даденото уравнение $y = ax^n$ и следователно $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = anx^{n-1}$, то да се обърне в тъждество. Трябва да имаме значи $anx^{n-1} = x^{-2} - ax^{n-1} - a^2x^{2n}$. За да бъде последното равенство тъждество относно x, трябва преди всичко показателите на x във всички членове да са равни, което е възможно само при $n = -1$. По нататък трябва да бъдат равни коефициентите на x^{-2} от двете страни на равенството, след като направим приведение: $-a = 1 - a - a^2$, т. е. $a^2 = 1$, $a = \pm 1$. И така даденото уравнение има два частни интеграла от търсения вид: $y_1 = x^{-1}$, $y_2 = -x^{-1}$. Субституцията $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{u}$ води направо към линейното уравнение $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{x}u + 1$, общият интеграл на което е $u = Cx^3 - \frac{1}{2}x$. Следователно общият интеграл на даденото уравнение е

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{Cx^3 - \frac{1}{2}x} = \frac{Cx^2 + \frac{1}{2}}{Cx^3 - \frac{1}{2}x}.$$

§ 13. Траектории

Да разгледаме една фамилия от равнинни криви, представени чрез уравнението

$$F(x, y, C) = 0, \tag{1}$$

където x и y означават правоъгълни координати и C е произволен параметър. Под *изогонална траектория* на тази фамилия разбираме такава крива, която пресича кривите от дадената фамилия под един и същ ъгъл α. Ако $\alpha = \frac{\pi}{2}$, траекторията се нарича *ортогонална*. Задачата за намиране траекториите на една фамилия равнинни криви се свежда, както ще видим, към интегрирането на едно обикновено диференциално уравнение от първи ред.

Да си образуваме диференциалното уравнение от фамилията (1), което представяме във вида

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y). \tag{2}$$

Тангентата към интегралната крива, която минава през точката (x, y), има ъглов коефициент $m = f(x, y)$. Да означим с m' ъгловия коефициент на тангентата към траекторията в същата точка; понеже тези две тангенти сключват по условие ъгъл α, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m' - m}{1 + mm'} = \frac{m' - f(x, y)}{1 + m' f(x, y)},$$

откъдето

$$m' = \frac{f(x, y)\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - f(x, y)\sin\alpha}.$$

Последното равенство изразява ъгловия коефициент на тангентата към траекторията във функция от координатите на допирната точка. Следователно търсената траектория трябва да бъде интегрална крива на диференциално уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x,y)\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - f(x,y)\sin\alpha}. \tag{3}$$

Обратно, всяка интегрална крива на диференциалното уравнение (3) е изогонална траектория на интегралните криви на уравнението (2). Според това една фамилия криви (зависеща от един произволен параметър) има безброй изогонални траектории, които пресичат всяка крива от фамилията под даден ъгъл α. Геометрически това е почти очевидно.

Ако $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, диференциалното уравнение на траекториите се обръща в $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{f(x,y)}$. Оттук извеждаме следното просто правило за образуване на диференциалното уравнение на ортогоналните траектории на една фамилия криви.

Съставяме си най-напред диференциалното уравнение на дадената фамилия и след това заместваме в него y' с $-\dfrac{1}{y'}$.

Пример 1. Да се намерят изогоналните траектории на снопа прави в една равнина, които минават през една точка (началото).

Решение. В случая уравнението на дадената фамилия прави е $y = Cx$. Чрез диференциране и елиминиране на C получаваме диференциалното уравнение $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x}$. Следователно диференциалното уравнение на изогоналните траектории е

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y\cos\alpha + x\sin\alpha}{x\cos\alpha - y\cos\alpha} = \frac{ky + x}{kx - y} \qquad (k = \operatorname{cotg}\alpha).$$

Полученото уравнение е очевидно хомогенно. Общият му интеграл е

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$$

или като преминем към полярни координати, $\rho = Ce^{k\varphi}$. И така логаритмичната спирала $\rho = Ce^{k\varphi}$ пресича под един и същ ъгъл $\alpha = \operatorname{arccotg} k$ проводника на коя да е нейна точка. Това свойство се проверява и непосредствено, като вземем предвид, че за тази крива $\rho' : \rho = k$.

Пример 2. Да се намерят ортогоналните траектории на фамилията равнораменни хиперболи $y^2 - x^2 = C$.

Отговор. Ортогоналните траектории са също равнораменни хиперболи с общо уравнение $xy = C'$.

Пример 3. Да се докаже, че ортогоналните траектории на лемнискатите $(x^2 + y^2)^2 = a^2 xy$ са също лемнискати, дадени с уравнението $(x^2 + y^2)^2 = C(x^2 - y^2)$.

Пример 4. Да се намерят ортогоналните траектории на фамилията хомофокални конусни сечения $\dfrac{x^2}{\lambda + c^2} + \dfrac{y^2}{\lambda} = 1$, където константата c е дадена, а λ означава произволен параметър.

Решение. Диференциалното уравнение на дадената фамилия конусни сечения е $(x + yy')\left(x - \dfrac{y}{y'}\right) = c^2$. Понеже то не се изменя, когато заместим в него y' с $-\dfrac{1}{y'}$, то диференциалното уравнение на ортогоналните траектории е същото, както и това на дадената фамилия. Оттук заключаваме, че две хомофокални конусни сечения се пресичат под прав ъгъл (ако изобщо се пресичат в реални точки). Лесно е да се види, че две такива конусни сечения се пресичат в реални точки само когато едното е елипса, а другото — хипербола.

Пример 5. Да се докаже, че фамилията параболи с общ фокус (в началото) и обща ос (оста OY) е ортогонална също сама на себе си.

Забележка. Две такива параболи се пресичат в реални точки, когато върховете им лежат от двете страни на началото.

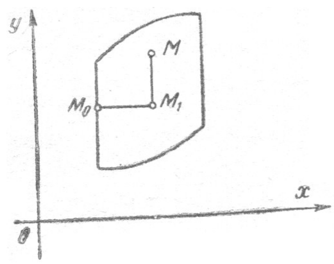
§ 14. Интегриране на пълен диференциал

Един диференциален израз от вида $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, където P и Q означават функции на двете независими променливи x и y, представя пълен диференциал на една функция $F(x, y)$ на тези променливи, когато $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$. Ние ще се занимаем с въпроса: как може да се узнае дали съществува функция със споменатото свойство и ако съществува такова, как може тя да се определи. При това ще предполагаме, че $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са еднозначно дефинирани и притежават непрекъснати първи частни производни в една свързана област R, заградена от един прост затворен контур.

Да допуснем най-напред, че съществува функция $F(x, y)$, за която $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$. Като диференцираме първото от тия равенства относно y, а второто относно x и вземем след това предвид, че левите им части са равни $\left(\text{защото } \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\right)$, получаваме следната зависимост между частните производни на P и Q:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1}$$

И така необходимо условие, за да представя изразът $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ пълен диференциал, е между частните производни на $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ да съществува съотношението (1). Това условие, както ще видим, е и достатъчно при направените предположения за областта (R). За да докажем това, ние ще направим още едно (несъществено) предположение за тази област, а именно, че съществува една точка $M_0(x_0, y_0)$ от областта (или върху нейния контур) тъй че, ако $M(x, y)$ означава произволна точка от същата област, отсечката, която съединява точките $M_0(x_0, y_0)$ с $M_1(x, y_0)$, както и тази, която съединява $M_1(x, y_0)$ с $M(x, y)$, да лежат изцяло в областта. Да разглеждаме линейния интеграл на диференциала $P(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi + Q(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\eta$, взет по начупената линия $M_0 M_1 M$. Очевидно той е равен на сумата $\displaystyle\int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)\,\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta)\,\mathrm{d}\eta$ и представя една функция на x и y в областта R, която ще означим с $F(x, y)$:



Черт. 9

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)\,\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta)\,\mathrm{d}\eta. \tag{2}$$

За тъй дефинираната функция, ще докажем, че $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$. Последното от тези равенства е очевидно, тъй като $\displaystyle\int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)\,\mathrm{d}\xi$ не зависи от y, а частната производна на интеграла $\displaystyle\int_{y_0}^{y} Q(x, \eta)\,\mathrm{d}\eta$ относно y е точно равна на $Q(x, y)$. За $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ получаваме

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x, \eta)}{\partial x}\,\mathrm{d}\eta;$$

но съгласно (1)

$$\frac{\partial Q(x, \eta)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, \eta)}{\partial \eta},$$

тъй че
$$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x,\eta)}{\partial x}\,\mathrm{d}\eta = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P(x,\eta)}{\partial \eta}\,\mathrm{d}\eta = P(x,y) - P(x,y_0),$$
откъдето
$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y_0) + P(x,y) - P(x,y_0) = P(x,y).$$
И така, ако условието (1) е изпълнено, съществува функция на x и y, частните производни на която са съответно равни на $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Формулата (2) освен това показва, че тази функция се получава чрез две квадратури. С това е доказано, че при нашите предположения *условието* (1) *е необходимо и достатъчно, за да представя изразът* $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ *пълен диференциал на една функция* $F(x,y)$ *на* x *и* y.

Ако функцията $\Phi(x,y)$ е друга някоя функция на x и y, пълният диференциал на която е равен на $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$, лесно може да се види, че тя се различава от $F(x,y)$ с една константа (която може да бъде съвсем произволна). И наистина в такъв случай разликата $\Phi(x,y) - F(x,y)$ представя една функция на x и y, първите частни производни на която относно x и y са равни на нула в (R), откъдето следва, че тя се редуцира на една константа.

Пример 1. Ако P зависи само от x, а Q — само от y, условието $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ е очевидно изпълнено. И наистина, ако означим с $f(x)$ и $\varphi(y)$ две такива функции, производните на които са съответно равни на P и Q, пълният диференциал на $F(x,y) = f(x) + \varphi(y)$ е равен на $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$.

Пример 2. Да разгледаме диференциалния израз
$$\left(y + \frac{x\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x + \left(x + \frac{y\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+y^2}}\right)\mathrm{d}y.$$
И в този случай условието (1) е изпълнено, понеже
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2}} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$
За да намерим функцията $F(x,y)$, можем да постъпим така. Чрез интегриране частно относно x на уравнението
$$\frac{\partial F}{\partial y} = y + \frac{x\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$
(при което на y гледаме като на параметър) получаваме
$$F = xy + \sqrt{1+y^2}\,\sqrt{1+x^2} + \varphi(y).$$

Прибавената функция $\varphi(y)$ играе ролята на интегрална константа, която зависи изобщо от параметъра y. Така полученият израз $F(x,y)$ заместваме във второто условно равенство

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + \frac{y\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+y^2}},$$

което приема вида

$$x + \frac{y\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+y^2}} + \varphi'(y) = x + \frac{y\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+y^2}} \quad \text{или} \quad \varphi'(y) = 0.$$

Оттук заключаваме, че $\varphi(y)$ е независеща от y константа, за която можем да приемем, че е равна на нула. И така даденият диференциален израз представя пълен диференциал на функцията

$$F(x,y) = xy + \sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2}.$$

§ 15. Интегриращ множител

Едно диференциално уравнение от първи ред, решено относно $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, може да се представи винаги във вида

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0. \tag{1}$$

Ако при това лявата му част е пълен диференциал на една функция $F(x,y)$, общият му интеграл се получава, като приравним тази функция с една произволна константа. И наистина всяка функция y на x, която удовлетворява уравнението $F(x,y) = C$ за някоя постоянна стойност на C, удовлетворява и съотношението $\dfrac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0$, т. е. уравнението (1). Обратно, ако y е някоя функция на x, която удовлетворява уравнението (1), то $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y) = 0$, откъдето следва, че $F(x,y) = \mathrm{const}$. Разбира се, твърде редки са случаите, когато лявата част на едно уравнение, представено във вида (1), е пълен диференциал.

Ние ще предположим сега, че условието $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ не е изпълнено и ще разгледаме въпроса, дали съществува някоя функция $\mu(x,y)$ на променливите x и y, с която, като умножим двете части на уравнението (1), лявата му част да представя пълен диференциал. Всяка функция $\mu(x,y)$, която притежава казаното свойство и не е тъждествено равна на нула, се нарича интегриращ множител на диференциалното уравнение. Както видяхме в предния параграф, условието да представя $\mu(x, y)$ един интегриращ множител, се изразява чрез уравнението

$$(2) \qquad \frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x} \text{ или } P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Всяка функция $\mu(x, y)$, която удовлетворява частното диференциално уравнение (2) и не е тъждествено равна на нула, представя един интегриращ множител на уравнението (1), с помощта на който това уравнение може да се интегрира чрез две квадратури. Но задачата за интегриране на частното диференциално уравнение (2) или за намиране на един само негов частен интеграл, който да не е тъждествено равен на нула, е изобщо по-сложна от задачата за интегриране на даденото обикновено диференциално уравнение (1). Ето защо и методът за интегриране на едно диференциално уравнение чрез интегриращ множител не води изобщо към сигурен резултат. Но в някои специални случаи може да се определи един интегриращ множител по изкуствен начин, като опитваме например дали диференциалното уравнение (2) може да се удовлетвори за някоя функция μ, която зависи само от променливата x или само от y, или само от $x^2 + y^2$ и пр.

За да узнаем например дали съществува интегриращ множител μ, който да зависи само от x, трябва да приложим уравнението (2) $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ и $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}$. Тогава след някои прости преобразувания получаваме

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}.$$

Понеже лявата част на последното равенство не зависи от y, нашето предположение, че съществува интегриращ множител, зависещ само от x, може да бъде вярно само ако $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$ не зависи от y. В такъв случай μ може да се определи чрез една квадратура. Така за линейното уравнение $(X_1 y + X_2)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$ имаме $P = X_1 y + X_2$, $Q = -1$ и изразът $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = -X_1$ очевидно не зависи от y. Следователно то допуска интегриращ множител, който зависи само от x. В случая μ е интеграл на уравнението

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = -X_1, \text{откъдето } \mu = \exp\left(-\int X_1\,\mathrm{d}x\right).$$

Също тъй се доказва, че необходимо и достатъчно условие, за да допуска диференциалното уравнение (1) един интегриращ множител, който да зависи само от y, е изразът $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$ да бъде функция само на y.

Ако искаме да узнаем кога уравнението (1) има интегриращ множител от вида $\mu = \varphi(x^2 + y^2)$, постъпваме тъй. Означаваме за краткост $x^2 + y^2$ с u и заместваме в (2) $\dfrac{\partial \mu}{\partial x}$ с $2x\varphi'(u)$ и $\dfrac{\partial \mu}{\partial y}$ с $2y\varphi'(u)$. Тогава уравнението (1) се обръща в

$$2\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{yP - xQ}.$$

Понеже лявата част на това уравнение зависи само от $u = x^2 + y^2$, същото трябва да важи и за дясната. И така, за да има уравнението (1) интегриращ множител от вида $\mu(x, y) = \varphi(u)$, необходимо условие е изразът

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{yP - xQ}$$

да зависи само от $x^2 + y^2 = u$. Същото условие е и достатъчно; ако то е изпълнено, функцията $\mu(x, y) = \varphi(u)$ се получава чрез една квадратура. Така например уравнението $(x + ky)\,\mathrm{d}x + (y - kx)\,\mathrm{d}y = 0$ допуска интегриращ множител от вида $\mu = \varphi(x^2 + y^2)$, защото

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{yP - xQ} = \frac{-2k}{k(x^2 + y^2)} = \frac{-2}{x^2 + y^2} = -\frac{2}{u}$$

зависи само от $u = x^2 + y^2$. Тук диференциалното уравнение за

$$\mu(x, y) = \varphi(u) \text{ е } 2\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{-2}{u} \text{ или } \frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi} = -\frac{1}{u},$$

откъдето $\varphi(u) = \dfrac{C}{u}$. И така в разглеждания случай уравнението притежава интегриращ множител $\mu(x, y) = \dfrac{C}{x^2 + y^2}$. На константата C можем да дадем например стойността 1. Общият интеграл на даденото диференциално уравнение е

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - k \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \text{const}.$$

По подобен начин се намират и условията, при които едно диференциално уравнение допуска интегриращ множител, който да зависи само от $\frac{y}{x}$ или от xy, или пък да бъде хомогенна функция на x и y от някоя степен и пр.

Задачи

1. Да се интегрира диференциалното уравнение $y^2\,dx + (xy - 1)\,dy = 0$, като се знае, че то допуска интегриращ множител от вида $\mu = \varphi(x\,.\,y)$. Също тъй да се намери и друг интегриращ множител, който да зависи само от y.

2. Диференциалното уравнение $y(x^2 + y^2)\,dx + x(x\,dy - y\,dx) = 0$ допуска един интегриращ множител, който е хомогенна функция на x и y от -3-та степен. Да се намери този множител и след това да се интегрира диференциалното уравнение. Да се докаже, че същото диференциално уравнение притежава и друг интегриращ множител от вида

$$\mu = e^x\varphi(x^2 + y^2).$$

3. Ако P и Q означават хомогенни функции на x и y от m-та степен, да се докаже, че уравнението $P\,dx + Q\,dy = 0$ допуска интегрирация множител

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xP + yQ}.$$

Упътване. При доказателството се използва Ойлеровото свойство на хомогенните функции P и Q, според което

$$x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} = mP, \quad x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = mQ.$$

4. Бернулиевото диференциално уравнение $(X_1 y + X_2 y^m)\,dx - dy = 0$ допуска интегриращ множител от вида $\mu(x, y) = y^{-m}\varphi(x)$. Да се намери този множител.

§ 16. Общ вид на интегриращите множители

В предния параграф видяхме как можем в известни случаи да намерим един интегриращ множител на диференциалното уравнение

$$P\,dx + Q\,dy = 0. \tag{1}$$

Тук ще покажем, че това уравнение притежава безбройно много интегриращи множители, щом като функцията $-\frac{P}{Q}$ (или $-\frac{Q}{P}$) удовлетворява условията, при които доказахме теоремата за съществуване на интеграли. В такъв случай уравнението (1) притежава, както знаем, един общ интеграл, зависещ от една произволна константа. Решен относно произволната константа, той има вида $F(x, y) = C$. Всяка функция y на x, която удовлетворява диференциалното уравнение (1), може да се получи от последното уравнение за някоя специална стойност на константата C. Ако следователно $y = y(x)$ е някоя функция на x, която удовлетворява даденото диференциално уравнение тя удовлетворява също и диференциалното уравнение $\dfrac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0$, получено чрез диференциране на общия интеграл. От тези две уравнения намираме

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{P}{Q} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{P}{Q} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

Верността на последното равенство, двете части на което са функции на x и y, е установена при предположение, че в него променливата y е заместена с една функция на x, която удовлетворява диференциалното уравнение (1). *Нашата цел е да докажем, че същото равенство е тъждество и относно двете независими променливи x и y.*

Достатъчно е за тази цел да докажем, че ако (x_0, y_0) означава една произволна система значения за x и y от областта, в която функцията $-\dfrac{P}{Q}$ е непрекъсната и удовлетворява условието на Липшиц, то въпросното равенство е удовлетворено за $x = x_0$ и $y = y_0$. Да означим с $\eta(x)$ оня интеграл на диференциалното уравнение (1), който приема стойност y_0 за $x = x_0$. Като положим $y = \eta(x)$ в двете части на равенството $P : Q = \dfrac{\partial F}{\partial x} : \dfrac{\partial F}{\partial y}$, то се обръща, както видяхме, в тъждество относно x. Специално при $x = x_0$ $\eta(x_0)$ е равно на y_0 и следователно

$$\frac{P(x_0, y_0)}{Q(x_0, y_0)} = \left(\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

И така за всяка система значения на x и y имаме $P : Q = \dfrac{\partial F}{\partial x} : \dfrac{\partial F}{\partial y}$, откъдето следва, че двете съотношения $\dfrac{\partial F}{\partial x} : P$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y} : Q$ са равни на една и съща функция $\mu(x, y)$. Лесно е да се провери, че $\mu(x, y)$ е интегриращ множител на уравнението (1), защото $\mu P = \dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\mu Q = \dfrac{\partial F}{\partial y}$, тъй че изразът $\mu P\,\mathrm{d}x + \mu Q\,\mathrm{d}y$ е пълен диференциал на функцията $F(x, y)$.

Нека забележим, че изложеното доказателство за съществуване на един интегриращ множител се основава на теоремата за съществуване на интеграли и следователно има само теоретично значение.

От интегриращия множител $\mu(x, y)$ можем да намерим безбройно много други по следния начин. Означаваме с $\Phi(u)$ една произволна функция на u, която притежава непрекъсната първа производна и не е константа. Тогава всяка функция $\lambda(x, y)$ от вида $\lambda(x, y) = \Phi'(F) \,.\, \mu(x, y)$ е също интегриращ множител на уравнението (1), защото, след като умножим двете части на това уравнение с $\lambda(x, y)$, лявата му част се обръща в пълен диференциал на $\Phi(F(x, y))$. На общия интеграл на уравнението (1) може да се даде още видът $\Phi(F) = \text{const}$, където Φ означава една произволна функция на F. В случая съществуването на безброй интегриращи множители се явява като следствие от факта, че общият интеграл на уравнението (1) може да се представи по безброй начини във вида $F(x, y) = \text{const}$. Така например уравненията $F = \text{const}$, $F^2 = \text{const}$, $e^F = \text{const}$ и пр. са еквивалентни.

Обратно, ако $\lambda(x, y)$ е някой интегриращ множител на уравнението (1), той може да се получи от формулата $\Phi'(F) \,.\, \mu(x, y)$ при подходящ избор на функцията Φ. С други думи от формулата $\lambda(x, y) = \Phi'(F) \,.\, \mu(x, y)$ могат да се получат *всички* интегриращи множители, като избираме по всички възможни начини произволната функция Φ. Това е пряко следствие от една важна теорема на диференциалното смятане, доказателството на която ще изложим в следния параграф.

§ 17. Помощна теорема от диференциалното смятане

Казваме, че между две функции $u = g(x, y)$ и $v = h(x, y)$ на двете независими променливи x и y съществува функционална зависимост, когато съществува едно уравнение между u и v, $\Phi(u, v) = 0$, което не е тъждество по отношение на u и v, но се обръща в тъждество относно x и y, щом заместим в него u с $g(x, y)$ и v с $h(x, y)$. Така например между функциите $u = x + y$, $v = (x + y)^2$ съществува функционалната зависимост $u^2 - v = 0$; също тъй между

$$u = x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2} \text{ и } v = \sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2} + xy$$

съществува зависимостта $v^2 - u^2 = 1$. При предположение, че функциите $g(x, y)$ и $h(x, y)$ притежават непрекъснати частни производни от първи ред, ние ще докажем следната теорема:

За да съществува функционална зависимост между функциите $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$, необходимо и достатъчно е тяхната функционална де-

терминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix}$$

да е тъждествено равна на нула.

Доказателство.

1. Ако между функциите $u = g(x, y)$ и $v = h(x, y)$ съществува функционална зависимост $\Phi(u, v) = 0$, то, като заместим u и v с $g(x, y)$ и $h(x, y)$ и след това диференцираме частно относно x и y, получаваме

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial y} = 0.$$

Понеже $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial \Phi}{\partial v}$ не са тъждествено равни на нула (защото в противен случай функцията Φ би се редуцирала на една независеща от u и v константа), то от последните равенства следва, че непременно функционалната детерминанта $\Delta = \dfrac{\partial g}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial h}{\partial y} - \dfrac{\partial g}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial h}{\partial x}$ е тъждествено равна на нула.

2. Да допуснем сега обратно, че детерминантата Δ е тъждествено равна на нула в известна област. Ние ще приема освен това, че всички четири производни $\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial h}{\partial x}, \dfrac{\partial h}{\partial y}$ не са тъждествено нули в областта, защото в противен случай функциите g и h не биха зависели нито от x, нито от y. Ако например $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ е различна от нула, съществува (съгласно с теоремата за неявните функции) една функции $\psi(x, u)$, която, заместена вместо y в уравнението $u = g(x, y)$, го обръща в тъждество. Да заместим в $v = h(x, y)$ y с $\psi(x, u)$; получаваме уравнението $v = h(x, \psi)$, което изразява v чрез u и x. То представя очевидно резултата от елиминирането на y от двете уравнения $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$. Ние ще докажем, че функцията $h(x, \psi)$ зависи само от u (посредством ψ), но не и от x. Да диференцираме за тази цел функцията $v = h(x, \psi)$ частно относно x. Понеже $h(x, \psi)$ зависи от x направо и посредством ψ, то

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Но частната производна $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ се определя от уравнението $u = g(x, \psi)$, което дефинира ψ като функция на x и u. Чрез диференциране на това уравнение спрямо x намираме

$$0 = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \text{откъдето} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial x} : \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Като заместим тази стойност на $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ в израза за $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, получаваме

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial h}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{\partial h}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} = \frac{-\Delta}{\dfrac{\partial g}{\partial y}},$$

където навсякъде y трябва да заместим с $\psi(x, v)$. Понеже по предположение $\Delta = 0$, то $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, което показва, че функцията $v = h(x, \psi)$ действително не зависи от x. И така, ако елиминираме y от двете уравненията $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$, същевременно се елиминира и променливата x, тъй че елиминационният резултат може да се представи във вида $v = \varphi(u)$. А това уравнение представлява една функционална зависимост между $u = g(x, y)$ и $v = h(x, y)$.

Да приложим доказаната теорема за решението на въпроса, който си поставихме към края на миналия параграф. Нека $\mu(x, y)$ и $\lambda(x, y)$ са два интегриращи множителя на уравнението $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$. Тогава съществуват две функции $F(x, y)$ и $F_1(x, y)$, тъй че

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu P; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu Q; \quad \frac{\partial F_1}{\partial x} = \lambda P; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \lambda Q.$$

От тези четири релации заключаваме (като елиминираме λ, μ, P, Q), че

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Съгласно с доказаната по-горе теорема между функциите $F_1(x, y)$ и $F(x, y)$ трябва да съществува функционална зависимост: $F_1 = \Phi(F)$. Следователно

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \Phi'(F) \frac{\partial F}{\partial x}$$

или като заместим $\dfrac{\partial F_1}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ с равните им λP и μP и съкратим на P,

$$\lambda = \Phi'(F) \,.\, \mu.$$

И така интегриращият множител $\lambda(x, y)$ може да се получи от формулата $\Phi'(F) \,.\, \mu(x, y)$ при подходящ избор на функцията Φ, което искахме да докажем.

От този резултат следва между другото, че ако μ и λ са два интегриращи множителя, отношението на които не е равно на някоя константа, общият интеграл на уравнението е $\dfrac{\lambda}{\mu} = \text{const}$.

Последното уравнение може да се представи именно така:

$$\Phi'(F) = \text{const},$$

или като решим относно F, $F = \text{const}$, което представя наистина общия интеграл. Така например уравнението

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - y^2}} = 0$$

притежава двата интегриращи множителя $\mu = 1$ и $\lambda = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}$; общият му интеграл е следователно

$$\frac{\lambda}{\mu} = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = \text{const}.$$

В известни случаи доказаните свойства на интегриращите множители могат да послужат за намиране на такъв множител на едно диференциално уравнение. Да разгледаме например уравнението

$$(ay\,\mathrm{d}x + bx\,\mathrm{d}y) + x^m y^n (cy\,\mathrm{d}x + kx\,\mathrm{d}y) = 0,$$

в което a, b, c, k, m, n означават дадени константи. Всеки интегриращ множител на $ay\,\mathrm{d}x + bx\,\mathrm{d}y$ има вида

$$\frac{1}{xy}\varphi(x^a y^b)$$

и също всеки итегриращ множител на $x^m y^n (cy\,\mathrm{d}x + kx\,\mathrm{d}y)$ има вида

$$x^{-m-1} y^{-n-1} \psi(x^c y^k).$$

Тези два интегриращи множителя ще бъдат равни, ако $\psi(x^c y^k) = x^m y^n \varphi(x^a y^b)$. Ние ще се опитаме да удовлетворим това равенство при предположение, че функциите $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ имат вида $\varphi(u) = u^\alpha$, $\psi(u) = u^\beta$, където показателите α

и β са неопределени константи. За да бъде равенството $(x^c y^k)^\beta = x^m y^n (x^a x^b)^\alpha$ тъждество, трябва α и β да удовлетворяват двете линейни уравнения:

$$a\alpha + m = c\beta, \quad b\alpha + n = k\beta.$$

Ако $\left|\begin{smallmatrix} a & c \\ b & k \end{smallmatrix}\right| \neq 0$, тези уравнения имат напълно определено решение. В такъв случай даденото диференциално уравнение притежава един интегриращ множител от вида $\mu(x, y) = x^A y^B$.

Ако ли $\left|\begin{smallmatrix} a & c \\ b & k \end{smallmatrix}\right| = 0$, то съществува една константа λ, тъй че $c = \lambda a$, $k = \lambda b$ (предполагаме, че едно от числата a и b е различно от нула); следователно уравнението може да се представи така:

$$(\lambda x^m y^n + 1)(ay\,\mathrm{d}x + bx\,\mathrm{d}y) = 0,$$

и да се интегрира чрез отделяне на променливите.

§ 18. Събирателни теореми на някои трансцендентни функции

Като второ приложение на доказаната в миналия параграф теорема тук ще покажем как могат да се изведат с помощта на нея тъй наречените събирателни теореми на функциите e^x и $\sin x$, изхождайки от дефиницията на техните обратни функции $\ln x$ и $\arcsin x$ чрез определени интеграли.

Макар и така получените резултати да не са нови, самият метод е оригинален и извънредно плодовит и, както ще видим, се прилага успешно и при извеждането на събирателните формули на елиптичните функции, които са били въведени в анализа от Абел и Якоби именно като обратни функции на някои определени интеграли.

Да прием, че функцията $\ln x$ (натурален логаритъм на x) ни е съвсем непозната*.

Ние можем да я дефинираме за положителни значения на x чрез определения интеграл $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}x}{x}$, разглеждан като функция на горната си граница. От тази дефиниция следва направо, че $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ и че $f(1) = 0$. За да изведем въз основа на тази дефиниция познатото функционално уравнение $f(x, y) = f(x) + f(y)$, можем да постъпим така. Лесно е да се провери,

*Подобно допускане не се нуждае от оправдание. Но нека забележим тук, че то е съобразно и с историческия развой на математическата наука, защото на основателите на интегралното смятане логаритмичната функция е била неизвестна. И ако Непер и неговите съвременници не бяха изпреварили да я дефинират (както днес е общоприето) като обратна функция на показателната, тя сигурно щеше да бъде открита с помощта на интегралното смятане по изложения тук или подобен начин.

че между функциите $u = x \,.\, y$ и $v = f(x) + f(y)$ съществува функционална зависимост, защото

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{y} \end{vmatrix} = 0.$$

Според това трябва $f(x)+f(y)$ да бъде някоя функция на xy: $f(x)+f(y) = \varphi(x \,.\, y)$. Формата на функцията φ може лесно да се определи, като положим в последното равенство $y = 1$. Получаваме $f(x) = \varphi(x)$, т. е. функцията $\varphi(x)$ трябва да е идентична с $f(x)$. И така $f(x)$ удовлетворява функционалното уравнение $f(x) + f(y) = f(x \,.\, y)$. Да означим с $E(\xi)$ обратната функция на $f(x)$, дефинирана чрез уравнението $f(x) = \xi$. Понеже $f(x)$ расте от $-\infty$ до $+\infty$, когато x расте от 0 до ∞, на всяка реална стойност на ξ чрез това уравнение отговаря една напълно определена положителна стойност на x, която (като функция на ξ) бележим с $x = E(\xi)$.

Ясно е, че уравненията $\xi = f(x)$ и $x = E(\xi)$ са равносилни. Да означим по-нататък с ξ и η две произволни реални числа и да положим

$$x = E(\xi), \quad y = E(\eta).$$

Ако заместим x с $E(\xi)$ и y с $E(\eta)$ във функционалното уравнение на функцията $f(x)$ и вземем предвид, че $f(E(\xi)) = \xi$, $f(E(\eta)) = \eta$, ще получим $\xi + \eta = f(xy)$, откъдето $xy = E(\xi + \eta)$ или $E(\xi + \eta) = E(\xi) \,.\, E(\eta)$.

Така от функционалното уравнение на логаритмичната функция $f(x)$ изведохме функционалното уравнение на обратната ѝ функция $E(\xi)$, което изразява тъй наречената събирателна теорема на показателната функция. От самата дефиниция на $E(\xi)$ следва, че:

1) тя е дефинирана за всяко реално значение на ξ и приема само положителни стойности;

2) $E(\xi)$ е непрекъсната като обратна функция на непрекъснатата растяща функция $f(x)$;

3) $E(0) = 1$, понеже $f(1) = 0$.

Ако означим освен това константата $E(1)$ с e, лесно е да се докаже с помощта на функционалното уравнение, че $E(m) = e^m$ за *цели* (положителни или отрицателни) значение на m. По-общо, ако $r = \dfrac{p}{q}$ е една рационална дроб, то

$$\left\{ E\left(\frac{p}{q}\right) \right\}^q = E\left(\frac{p}{q} \cdot q\right) = E(p) = e^p,$$

откъдето

$$E\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{e^p} = e^{\frac{p}{q}}, \quad \text{т.е.} \quad E(r) = e^r,$$

каквото и да е рационалното число r. За да установим идентичността на нашата функция $E(\xi)$ с познатата ни от анализа показателна функция e^ξ, остава още да докажем, че константата

$$E(1) = e \quad \text{е равна на} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Да означим за тази цел с a_n положителното число

$$a_n = f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

където n означава някое цяло положително число. Понеже минималната и максималната стойност на подинтегралната функция $\frac{1}{x}$ са респективно равни на $\frac{n}{n+1}$ и 1, то

$$\frac{1}{n+1} < a_n < \frac{1}{n} \quad \text{или} \quad \frac{n}{n+1} < na_n < 1$$

и следователно $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$.

Но съгласно с дефиницията на a_n имаме $E(a_n) = 1 + \frac{1}{n}$ или като повдигнем на n-та степен $E(na_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, откъдето (поради непрекъснатостта на $E(\xi)$ при $\xi = 1$)

$$\lim_{n\to\infty} E(na_n) = E(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

По подобен начин могат да се изведат всички свойства на $\sin\xi$ от тези на обратната ѝ функция $\arcsin x$, дефинирана чрез определения интеграл $f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Разбира се, ако искаме да се ограничим само в областта на реалните числа, трябва да подчиним x на условието да не излиза вън от интервала $(-1, +1)$. Ако x и y означават две независими променливи, лесно може да се провери, че между функциите

$$u = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}, \quad v = f(x) + f(y)$$

съществува функционална зависимост:

$$f(x) + f(y) = \varphi\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Функцията $\varphi(u)$ се определя, като положим в последното равенство $y = 0$. То се обръща в $f(x) = \varphi(x)$, тъй че функцията

$$f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

удовлетворява функционалното уравнение

$$f(x) + f(y) = f\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Обратната функция $S(\xi)$ на $f(x) = \xi$ е дефинирана еднозначно в интервала $-\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}$ чрез уравнението

$$\xi = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ако положим, както по-горе при логаритмичната функция $x = S(\xi)$, $y = S(\eta)$, където ξ и η са две произволни числа от интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, сумата на които се съдържа пак в същия интервал, горното функционално уравнение може да се напише още така:

$$\xi + \eta = f\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \quad \text{или} \quad S(\xi+\eta) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

или още

$$S(\xi+\eta) = S(\xi)\sqrt{1-S^2(\eta)} + S(\eta)\sqrt{1-S^2(\xi)}.$$

Последното функционално уравнение изразява събирателната теорема за функцията $\sin\xi$. Но аналитичният характер на тази функция и редица важни нейни свойства, като периодичност и пр., могат да бъдат установени по горния аналитичен път само като преминем в комплексна област. *Нашата цел тук беше само да илюстрираме с два прости примера един чисто аналитичен метод за дефиниране и изучаване свойствата на класическите трансцендентни функции, изхождайки от дефиницията на техните обратни функции чрез определени интеграли*, и да подготвим по този начин четеца за прилагането на този метод и в теорията на елиптичните функции, именно при извеждането на така наречените събирателни теореми.

Задача. Ако означим с $f(x)$ определения интеграл

$$f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}},$$

разглеждан като функция на горната си граница, то да се докаже, че:

1) $f(x)$ е еднозначно дефинирана и непрекъсната за всяко реално x и расте монотонно от $-\infty$ до $+\infty$, когато x расте от $-\infty$ до $+\infty$;

2) тя удовлетворява функционалното уравнение

$$f(x) + f(y) = f\left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\right).$$

Ако означим с $h(\xi)$ обратната функция, дефинирана чрез $\xi = f(x)$, тя притежава следните свойства:

1) $h(\xi)$ е еднозначно дефинирана и непрекъсната за всяко реално ξ и расте монотонно от $-\infty$ до $+\infty$, когато ξ расте от $-\infty$ до $+\infty$;

2) тя удовлетворява функционалното уравнение

$$h(\xi+\eta) = h(\xi)\,.\,\sqrt{1+h^2(\eta)} + h(\eta)\,.\,\sqrt{1+h^2(\xi)}.$$

Забележка. $h(\xi)$ е хиперболичният синус на ξ:

$$h(\xi) = \frac{1}{2}\left(e^{\xi} - e^{-\xi}\right).$$

§ 19. Ойлерово диференциално уравнение

Да разгледаме диференциалното уравнение на Ойлер (Euler):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{Y}} = 0, \tag{1}$$

където X и Y означават следните два полинома на x и y от четвърта степен с еднакви коефициенти:

$$X = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4, \quad Y = a_0y^4 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4.$$

Понеже променливите са отделени, общият интеграл на това уравнение може да се представи във вида

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{Y}} = \text{const.}$$

Само че тук означените интегрирания не могат да се извършват в краен вид освен ако X притежава един многократен корен или пък се редуцира на полином от втора степен. В този последен случай, ако например $X =$

$x^2 + px + q$, $Y = y^2 + py + q$, получаваме общия интеграл на уравнението във вида

$$\ln\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{X}\right) + \ln\left(y + \frac{p}{2} + \sqrt{Y}\right) = \text{const}$$

или

$$\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{X}\right)\left(y + \frac{p}{2} + \sqrt{Y}\right) = \text{const}.$$

Този пример показва същевременно, че ако X и Y са полиноми от втора степен (с еднакви коефициенти), можем да представим общия интеграл на диференциалното уравнение в алгебричен вид.

По пътя на една смела индукция Ойлер успял да представи и общия интеграл на уравнението (1) в алгебричен вид при предположение, че X и Y представят полиноми на x, респ. y, от трета или четвърта степен. Значението на това негово откритие за теорията на елиптичните функции е било правилно оценено едва в началото на миналия век, когато Абел (Abel) и Якоби (Jacobi) положиха основите на тази теория.

Съществуват различни изкуствени способи за интегрирането на уравнението (1). Изложения по-долу способ се състои в заместване на диференциалното уравнение (1) с еквивалентната му система

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{X}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{Y}, \tag{2}$$

от която то се получава чрез елиминиране на $\mathrm{d}t$. Ние ще предположим при това, че полиномите X и Y имат вида

$$X = x^4 + ax^2 + b, \quad Y = y^4 + ay^2 + b,$$

т. е. че те не съдържат нечетните степени на променливата. Както се доказва в теорията на елиптичните интеграли, най-общият случай може да се сведе винаги чрез прости линейни преобразувания към този специален. Като означим с x', x'', y', y'' производните на x и y относно t, можем да напишем системата (2) така:

$$x'^2 = x^4 + ax^2 + b, \quad y'^2 = y^4 + ay^2 + b, \tag{2$'$}$$

откъдето чрез диференциране и съкращаване по на $2x'$ и $2y'$ получаваме

$$x'' = 2x^3 + ax, \quad y'' = 2y^3 + ay. \tag{3}$$

Комбинираме след това поотделно уравненията (2′) и (3), тъй че да се елиминира от тях коефициентът a:

$$x'^2y^2 - y'^2x^2 = (x^2 - y^2)(x^2y^2 - b), \quad x''y - xy'' = 2xy(x^2 - y^2).$$

Чрез почленно деление на последните уравнения получаваме по-нататък

$$\frac{x''y - xy''}{(x'y - xy')(x'y + xy')} = \frac{2xy}{x^2y^2 - b}$$

или като вземем предвид, че

$$x''y - xy'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x'y - xy'), \quad x'y + xy' = \frac{\mathrm{d}(xy)}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}(x'y - xy')}{x'y - xy'} = \frac{2xy\mathrm{d}(xy)}{x^2y^2 - b}.$$

По този начин дохождаме до едно диференциално уравнение между променливите $x'y - xy'$ и xy, в което променливите са отделени. Общият му интеграл е

$$x'y - xy' = C(x^2y^2 - b)$$

или като заместим x' и y' с равните им $\sqrt{X}$ и $-\sqrt{Y}$,

$$x\sqrt{Y} + y\sqrt{X} = C(x^2y^2 - b)$$

или още

$$\frac{x\sqrt{Y} + y\sqrt{X}}{b - x^2y^2} = \text{const.} \tag{4}$$

Лесно е да се провери, че уравнението (4), което не съдържа явно t, представя общия интеграл на Ойлеровото диференциално уравнение (1). И наистина, ако означим за краткост с $F(x, y)$ лявата част на уравнението (4), намираме чрез диференциране

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{X}} \cdot \frac{(x^2y^2 + b)\sqrt{XY} + xy[ax^2y^2 + 2b(x^2 + y^2) + ab]}{(b - x^2y^2)^2},$$

откъдето следва направо (поради симетрията на $F(x, y)$ относно x и y)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{Y}} \cdot \frac{(x^2y^2 + b)\sqrt{XY} + xy[ax^2y^2 + 2b(x^2 + y^2) + ab]}{(b - x^2y^2)^2}.$$

Очевидно общият множител на $\frac{1}{\sqrt{X}}$ и $\frac{1}{\sqrt{Y}}$ в последните равенства представя един интегриращ множител на уравнението (1), с който, като умножим лявата част на това уравнение, тя се обръща в пълен диференциал на функцията $F(x, y) = \frac{x\sqrt{Y} + y\sqrt{X}}{b - x^2y^2}$. Следователно общият интеграл на Ойлеровото диференциално уравнение е даден чрез уравнението (4).

И така на общия интеграл на уравнението (1) може да се даде освен трансцендентния вид

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} + \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{Y}} = \mathrm{const}$$

още и алгебричният вид (4). Тази забележка ни дава възможност да установим някои важни свойства на трансцендентната функция $f(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}$ или по-право на обратната ѝ функция $g(\xi)$, дефинирана чрез уравнението $\xi = f(x)$. Понеже за нас тук са важни не толкова резултатите, колкото същността на метода, ще разгледаме само случая, когато $a = 0$, $b = 1$ и следователно

$$X = x^4 + 1, \quad Y = y^4 + 1, \quad f(x) = \int_{0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

Между функциите $F(x, y) = \dfrac{x\sqrt{Y} + y\sqrt{X}}{1 - x^2y^2}$ и $\Phi(x, y) = f(x) + f(y)$ (където x и y са независими променливи) съществува функционална зависимост, тъй като

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{(x^2y^2 + 1)\sqrt{XY} + 2xy(x^2 + y^2)}{(1 - x^2y^2)^2}.$$

Трябва да съществува значи равенство от вида

$$f(x) + f(y) = \varphi\left(\frac{x\sqrt{Y} + y\sqrt{X}}{1 - x^2y^2}\right).$$

За да определим вида на функцията φ, полагаме в последното равенство $y = 0$; то преминава очевидно в $f(x) = \varphi(x)$, откъдето следва, че функцията $\varphi(x)$ е идентична с функцията $f(x)$, тъй че

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x\sqrt{Y} + y\sqrt{X}}{1 - x^2y^2}\right). \tag{5}$$

Да означим сега с $x = g(\xi)$ обратната функция на $f(x)$, дефинирана еднозначно за значения на ξ от интервала $[-c, +c]$ чрез уравнението $\xi = \int_{0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x}}$, където c означава стойността на интеграла $c = \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^4}}$. Ако ξ и η са две реални числа между $-c$ и $+c$ и определим x и y тъй, че $f(x) = \xi$, $f(y) = \eta$, то при тези значения на x и y функционалното уравнение (5) се обръща в

$$\xi + \eta = f\left(\frac{g(\xi)\sqrt{1 + g^4(\eta)} + g(\eta)\sqrt{1 + g^4(\xi)}}{1 - g^2(\xi)g^2(\eta)}\right)$$

или

$$g(\xi+\eta) = \frac{g(\xi)\sqrt{1+g^4(\eta)} + g(\eta)\sqrt{1+g^4(\xi)}}{1 - g^2(\xi)g^2(\eta)}. \tag{6}$$

Последното уравнение изразява събирателната теорема на елиптичната функция $g(\xi)$, получена чрез „обръщане" на елиптичния интеграл

$$\xi = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}.$$

То ни дава възможност да пресметнем $g(\xi+\eta)$, когато знаем отделно $g(\xi)$ и $g(\eta)$. Но истинският аналитичен характер на функцията, нейната двупериодичност и пр. се разкриват само като преминем в комплексна област.

§ 20. Интегриране чрез предварително диференциране

Често пъти едно диференциално уравнение от първи ред не може да се реши относно y' или пък решението му води към много сложни изрази. В такива случаи прибягваме към други методи на интегриране, от които найчесто приложим е тъй нареченият метод на предварително диференциране. Да разгледаме например диференциалното уравнение

$$f(y, y') = 0,$$

което не съдържа явно независимата променлива, и да допуснем, че то може да се реши относно y. Уравнението, представено във вида

$$y = \varphi(y'),$$

може да се интегрира така: означаваме (за краткост) y' с p и диференцираме двете му части относно x. Така получаваме

$$p = \varphi'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad \text{или} \quad \mathrm{d}x = \frac{\varphi'(p)}{p}\,\mathrm{d}p, \quad x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,\mathrm{d}p + C.$$

Като прибавим към последното уравнение даденото $y = \varphi(p)$ и елиминираме след това от двете параметъра p, получаваме една зависимост между x, y и произволната константа C, която зависимост представя общия интеграл на даденото диференциално уравнение. А двете уравнения, съвместно разглеждани, представят общия интеграл в параметричен вид. Те изразяват координатите x и y на произволна точка на една интегрална крива във функция от ъгловия коефициент на тангентата в същата точка.

Също тъй чрез предварително диференциране може да се интегрира и уравнението

$$x = \varphi(y').$$

Само че в този случай, след като диференцираме относно x, трябва да заместим отдясно $\dfrac{dp}{dx}$, където $p = y'$ с $\dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot p$. Така дохождаме до следното диференциално уравнение между p и y:

$$dy = \varphi'(p) \,.\, p\, dp, \quad \text{откъдето} \quad y = \int \varphi'(p) \,.\, p\, dp + C$$

или

$$y = p\varphi(p) - \int \varphi(p)\, dp + C.$$

Това уравнение, комбинирано с даденото, представя общия интеграл в параметричен вид.

§ 21. Лагранжови диференциални уравнения

Да разгледаме уравнението $y = x\varphi(y') + f(y')$ на Лагранж, което е линейно относно x и y. Като заместим пак y' с p и диференцираме, получаваме уравнението

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx},$$

което съдържа само променливите x и p. Ако разглеждаме p като независима променлива, а x като непозната функция, последното уравнение, написано във вида

$$(p - \varphi(p))\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + f'(p),$$

е линейно и следователно може да се интегрира чрез две квадратури. Общият му интеграл изразява x като функция на параметъра p и на една произволна константа. Като заместим тази стойност на x в уравнението $y = x\varphi(p)+f(p)$, получаваме и y като функция на параметъра p и на произволната константа. И така общият интеграл на даденото уравнение се представя в параметричен вид по следния начин:

$$x = C\varphi_1(p) + f_1(p), \quad y = C\varphi_2(p) + f_2(p).$$

Забележка. Ако Лагранжовото уравнение е представено във вида

$$x = yg(y') + h(y'),$$

не е необходимо предварително да го решаваме относно y. Чрез диференциране дохождаме и в този случай до уравнението

$$1 = pg(p) + [yg'(p) + h'(p)]\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

или като заместим $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ с $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ и решим относно $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}$,

$$(1 - pg(p))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p} = p[yg'(p) + h'(p)],$$

което е също линейно и се интегрира чрез две квадратури.

Приложение. Аналитичното решение на много геометрични въпроси води към Лагранжови диференциални уравнения. Такава е например следната задача: да се намерят ортогоналните траектории на една равнинна фамилия от прави, зависещи от един произволен параметър. На дадената фамилия прави може винаги да се даде нормалният вид

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = f(\alpha), \tag{1}$$

където α означава ъгъла, който сключва перпендикулярът, спуснат от началото на правоъгълната координатна система XY към произволна права от фамилията. Диференциалното уравнение на търсените траектории се получава, като елиминираме α от двете уравнения

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - f(\alpha) = 0, \quad \cos\alpha + y'\sin\alpha = 0 \tag{2}$$

и след това заместим y' с $-\frac{1}{y'}$. Същият резултат може да се получи и като заместим по-напред във второто от уравненията (2) y' с $-\frac{1}{y'}$ и след това извършим елиминацията на α. Диференциалното уравнение на ортогоналните траектории е прочее

$$x + yy' = \sqrt{1 + y'^2}\,f(\operatorname{arctg} y'), \tag{3}$$

което е очевидно Лагранжово и се интегрира по изложения по-горе начин.

В случая линейното диференциално уравнение между y и p е

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p} = \frac{p}{1+p^2}\left\{-y + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}f(\operatorname{arctg} p) + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}f'(\operatorname{arctg} p)\right\};$$

то се опростява значително, ако въведем новата независима променлива α чрез субституцията $\operatorname{arctg} p = \alpha$, $p = \operatorname{tg}\alpha$, след което то преминава в

$$\frac{\mathrm{d}y}{d\alpha} = -y\operatorname{tg}\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} f(\alpha) + \sin\alpha f'(\alpha).$$

Общият интеграл на последното уравнение е

$$\begin{aligned} y &= \cos\alpha \left\{ C + \int [\operatorname{tg}^2\alpha f(\alpha) + f'(\alpha)\operatorname{tg}\alpha]\,\mathrm{d}\alpha \right\} \\ &= C\cos\alpha + f(\alpha)\sin\alpha - \cos\alpha \int f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha. \end{aligned}$$

Освен това от диференциалното уравнение (3) имаме

$$x = -y\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\cos\alpha} f(\alpha) = -C\sin\alpha + f(\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha \int f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

Следователно търсените траектории са представени параметрично чрез двете уравнения

$$\begin{cases} x = -C\sin\alpha + f(\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha \int f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\ y = C\cos\alpha + f(\alpha)\sin\alpha - \cos\alpha \int f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \end{cases} \tag{4}$$

при което константата C е произволна, а α означава (понеже $p = y' = \operatorname{tg}\alpha$) ъгъла, който затваря тангентата в точка (x, y) на траекторията с оста OX. Разбира се, видът на траекториите зависи съществено от естеството на фамилията (1), т. е. от вида на функцията $f(\alpha)$.

Задачата за намиране на *еволвентите* или отвивките (*dèveloppantes*) на дадена равнинна крива се свежда към предишната. И наистина всяка еволвента на една крива може да се разглежда като ортогонална траектория на тангентите на тази крива, които представляват една фамилия прави, зависеща от един произволен параметър. Така например тангентите на окръжността $x^2 + y^2 = a^2$ са дадени чрез уравнението $x\cos\alpha + y\sin\alpha = a$, където α е променливият параметър. Параметричните уравнения на коя да е еволвента на тази окръжност се получават от уравнението (4), като положим в тях $f(\alpha) = a$.

Задача 1. Да се състави и интегрира диференциалното уравнение на еволвентите на параболата $x^2 = 2py$.

Упътване. Уравнението на тангентите на параболата е

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = -\frac{p}{2}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}.$$

Задача 2. Също за еволвентите на астроидата $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, като се използва познатото свойство на тангентите ѝ. (Частта от тангентата, заключена между координатните оси, има постоянна дължина, равна на a.)

§ 22. Диференциални уравнения на Клеро

Изложеният в предния параграф метод на интегриране на Лагранжовото диференциално уравнение $y = x\varphi(y') + f(y')$ не е приложим, ако $\varphi(y') = y'$. В такъв случай то има вида

$$y = xy' + f(y') \tag{1}$$

и се нарича уравнение на Клеро (Clairaut). Чрез предварително диференциране се добива по общия метод уравнението

$$0 = (x + f'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

което може да се удовлетвори по два начина:

1. Като положим $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$, откъдето $p = C$. Тази стойност за $p = y'$, заместена в даденото диференциално уравнение, го обръща в

$$y = Cx + f(C), \tag{2}$$

което представя (*както и непосредствено може да се провери*) *общия интеграл на Клеротовото диференциално уравнение.*

2. Като положим $x + f'(p) = 0$, получаваме една релация между x и p, която заедно с уравнението $y = xp + f(p)$ дефинира изобщо y като функция на x. Параметрично тази функция е дефинирана чрез двете уравнения

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = xp + f(p) \end{cases} \quad \text{или все едно с} \quad \begin{cases} x = -f'(p) \\ y = f(p) - pf'(p). \end{cases} \tag{3}$$

Проверката, че последните две уравнения представят действително една интегрална крива, се извършва лесно, като вземем предвид, че

$$\mathrm{d}x = -f''(p)\mathrm{d}p, \quad \mathrm{d}y = -pf''(p)\mathrm{d}p, \quad \text{откъдето} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p.$$

И наистина, като заместим в уравнението (1) x и y с изразите им чрез p от уравненията (3) и $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ с p, това уравнение се обръща в тъждество. Интегралът, представен параметрично чрез уравненията (3), *не съдържа произволна* *константа, нито пък може да се получи от общия интеграл* (2) *за някоя специална стойност на произволната константа*. Поради това той носи названието *особен интеграл*. Неговото геометрично значение е следното:

Той представя геометрически обвивката на фамилията прави, дадени чрез общия интеграл (2). От диференциалната геометрия именно е известно, че обвивката на фамилията прави (2) се получава, като елиминираме от двете уравнения $y = Cx + f(C)$, $x + f'(C) = 0$ или все едно от уравненията $x = -f'(C)$, $y = -Cf'(C) + f(C)$ — параметъра C. Същия резултат добиваме и като елиминираме p от уравненията (3).

Геометрически е почти очевидно, че ако фамилията криви (или прави), представени чрез общия интеграл на едно диференциално уравнение от първи ред, притежава една обвивка, последната е също една интегрална крива на уравнението, защото всяка точка M на обвивката принадлежи и на една интегрална крива от дадената фамилия и при това и двете криви имат обща тангента в M.

Към Клеротовите диференциални уравнения водят геометрически задачи от следния тип:

Да се намери уравнението на равнинна крива, тангентата на която да притежава известно свойство; при това условието на задачата трябва да бъде независимо от координатите на допирната точка. Ако $y = f(x)$ е уравнението на търсената крива, уравнението на тангентата в точка (x, y) е

$$\eta = \xi y' + (y - xy'),$$

тъй че условието на една задача от споменатия тип ще се изрази аналитически чрез едно уравнение между коефициентите в уравнението на тангентата, т. е. между величините y' и $y - xy'$; а на такова уравнение винаги може да се даде видът $y - xy' = f(y')$. В подобни геометрически въпроси истинското решение на задачата е дадено чрез особения интеграл.

Нека забележим, че *особеният интеграл не съществува, ако $f(y')$ е линейна функция на y'*.

Пример. Да се намери уравнението на една равнинна крива, за която частта на тангентата, заключена между координатните оси, да има постоянна дължина a.

Решение. Диференциалното уравнение на задачата е

$$y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Особеният интеграл се получава, като елиминираме p от уравненията

$$y = px + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad 0 = x + \frac{a}{(1 + p^2)^{3/2}},$$

откъдето получаваме

$$x = -\frac{a}{(1+p^2)^{3/2}}, \quad y = \frac{ap^3}{(1+p^2)^{3/2}}; \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

И така търсената крива е астроидата $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Тук общият интеграл $y = Cx + \dfrac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$ не представя геометрически интерес, макар и, строго взето, всяка права, представена чрез него, да удовлетворява условието на задачата.

Задача 1. Да се намери равнинна крива, тангентата в произволна точка на която загражда с координатите оси триъгълник с постоянно лице.

Задача 2. Да се намери такава равнинна крива, за която произведението от разстоянията на две постоянни точки до тангентата в произволна точка на кривата да е величина постоянна.

§ 23. Особени интеграли

Както видяхме в миналия параграф, възможно е едно диференциално уравнение да притежава един интеграл, който да не може да се получи от общия интеграл за специална стойност на произволната константа. За разлика от *частен интеграл* такъв интеграл ще наричаме *особен*.

Не всяко диференциално уравнение притежава особен интеграл.

Така например, ако $f(x, y)$ е еднозначна непрекъсната функция и има непрекъсната частна производна относно y в дадена област R, съгласно с теоремата за съществуване на интеграли на диференциалното уравнение $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ през всяка точка (x_0, y_0) на областта минава само една интегрална крива. Ако означим с $y = \varphi(x, C)$ онзи интеграл на диференциалното уравнение, който приема стойност C при $x = x_0$, ясно е, че интегралът, който при $x = x_0$ приема стойност y_0, се получава от него при $C = y_0$. Тука $y = \varphi(x, C)$ представя общия интеграл в околността на точката (x_0, y_0), а интегралът, който се обръща в y_0 при $x = x_0$, е частен (а не особен), понеже се получава от общия при $C = y_0$. И така при изброените по-горе условия всяка интегрална крива в областта R трябва да се разглежда като представяща един частен интеграл на диференциалното уравнение. За особен интеграл в този случай не може да става дума.

Да разгледаме по-общо едно диференциално уравнение от вида

$$f(x, y, y') = 0,$$

нерешено относно y'. Ние ще предположим при това, че $f(x, y, y')$ е цяла рационална (и неразложима) функция на x, y и y' от m-та степен относно y'.

Да означим с (x_0, y_0) една произволна точка и да допуснем, че всички корени на уравнението $f(x_0, y_0, p) = 0$ са крайни и еднократни. Ако $p_1, p_2, \ldots, p_m$ са m-те корена на това уравнение, според теоремата за неявните функции уравнението $f(x, y, u) = 0$ има по отношение на u m различни решения в околността на точката (x_0, y_0). По-точно, ако $u(x, y)$ е някоя непрекъсната функция на x и y, която удовлетворява уравнението $f(x, y, u) = 0$ в известна околност на точката (x_0, y_0), то $u(x_0, y_0)$ е непременно равно на някой от корените p_k, например $u(x_0, y_0) = p_1$; чрез това последно „начално“ условие $u(x, y)$ е напълно определена.

Да означим с $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, …, $u_m(x, y)$ решенията на уравнението $f(x, y, u) = 0$, които отговарят поред на корените $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Тогава уравнението $f(x, y, y') = 0$ се разпада на m отделни уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u_1(x, y),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u_2(x, y),\ \ldots,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u_m(x, y),$$

десните части на които притежават непрекъснати частни производни относно x и y в известна околност на (x_0, y_0). Следователно съществуват m различни функции на x:

$$y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x),\ \ldots,\ y = \varphi_m(x), \tag{1}$$

които удовлетворяват даденото диференциално уравнение $f(x, y, y') = 0$ и приемат стойност y_0 за $x = x_0$. Всяка от тези m функции трябва да се разглежда като частен, а не като особен интеграл на уравнението, защото например интегралът $y = \varphi_1(x)$, както видяхме по-горе, може да се получи от общия интеграл на уравнението $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u_1(x, y)$ за специална стойност на произволната константа и следователно е частен интеграл и на самото дадено уравнение.

Освен функциите (1) не съществува друга функция на x, която да удовлетворява в околността на x_0 диференциалното уравнение $f(x, y, y') = 0$ и да приема за $x = x_0$ стойност y_0. За да докажем това, нека допуснем, че $\varphi(x)$ е една такава функция на x. Ако в тъждеството $f(x, \varphi, \varphi') = 0$ положим $x = x_0$, ще имаме $f(x_0, y_0, \varphi'(x_0)) = 0$, което показва, че $\varphi'(x_0)$ е равно на един от корените $p_1, p_2, \ldots, p_m$, например $\varphi'(x_0) = p_1$. Да заместим след това в тъждеството $f(x, y, u_1(x, y)) = 0$ y с $\varphi(x)$. Така получаваме двете тъждества

$$f(x, \varphi, \varphi') = 0, \quad f(x, \varphi, u_1(x, \varphi)) = 0,$$

от които следва чрез почленно изваждане

$$(u_1(x, \varphi) - \varphi') f_p(x, \varphi, p_0) = 0. \tag{2}$$

Тук p_0 означава някое средно число между $u_1(x, \varphi)$ и $\varphi'(x)$. Но когато x е близко до x_0, $\varphi(x)$ е близко до y_0, а $u_1(x, \varphi)$, $\varphi_1(x)$, p_0 приемат стойности, близки до p_1. Понеже при това $f_p(x_0, y_0, p_1) \neq 0$, за достатъчно близки значения на x до x_0 трябва също и $f_p(x, \varphi, p_0)$ да е различно от нула. За такива значения на x равенството (2) е възможно само ако $\varphi' = u_1(x, \varphi)$, което показва, че $\varphi(x)$ е интеграл на диференциалното уравнение $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u_1(x, y)$, който при $x = x_0$ приема стойност y_0. Но по-горе означихме с $\varphi_1(x)$ един интеграл на това уравнение, който удовлетворява същото начално условие. Съгласно с теоремата за съществуване на интеграли $\varphi(x) \equiv \varphi_1(x)$, което искахме и да докажем.

Горните разсъждения ни довеждат до следното заключение: ако лявата част на диференциалното уравнение $f(x, y, y') = 0$ е цяла рационална (и неразложима) функция на променливите x, y, y' и ако при това алгебричното уравнение $f(x_0, y_0, y') = 0$ относно y' има *m различни* (крайни) корена $p_1, p_2, \ldots, p_m$, съществуват m напълно определени интегрални криви $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $\ldots$, $y = \varphi_m(x)$, които минават през точката (x_0, y_0) и тангентите към които имат в тая точка съответно ъглови коефициенти $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Вън от тях не съществува друга интегрална крива, която да минава през същата точка. Всеки един от интегралите $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $\ldots$, $y = \varphi_m(x)$ трябва да се разглежда като частен интеграл на диференциалното уравнение, т. е. като такъв, който може да се получи от общия интеграл на някое от еквивалентните диференциални уравнения

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u_k(x, y), \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

за специална стойност на произволната константа. Накратко казано, при споменатите условия всеки интеграл на диференциалното уравнение $f(x, y, y') = 0$, който приема стойност y_0 при *$x = x_0$ е частен интеграл*, а не особен. *Същественото предположение, което направихме, при това е, че уравнението $f(x_0, y_0, y') = 0$ няма многократни корени за y'.*

И така, ако една интегрална крива на диференциалното уравнение $f(x, y, y') = 0$ представя особен интеграл на това уравнение, трябва за всяка точка (x, y) на тази крива алгебричното уравнение $f(x, y, y') = 0$ да има поне един многократен корен за y': С други думи тази интегрална крива трябва да бъде геометрично място на такива точки, за които уравнението $f(x, y, y') = 0$ има многократни корени за y'. Съвкупността на тези точки ще получим, като приравним към нула дискриминантата на даденото уравнение, разглеждано като алгебрично уравнение относно y'. Разбира се, нищо не ни дава право да твърдим обратното, че уравнението между x и y, което се получава, като се приравни към нула дискриминантата на $f(x, y, y') = 0$, представя особен интеграл на това диференциално уравнение. Както ще видим, в повечето случаи то не представя интегрална крива.

Казаното дотук за особените интеграли ще илюстрираме с няколко примера.

Пример 1. Да разгледаме диференциалното уравнение

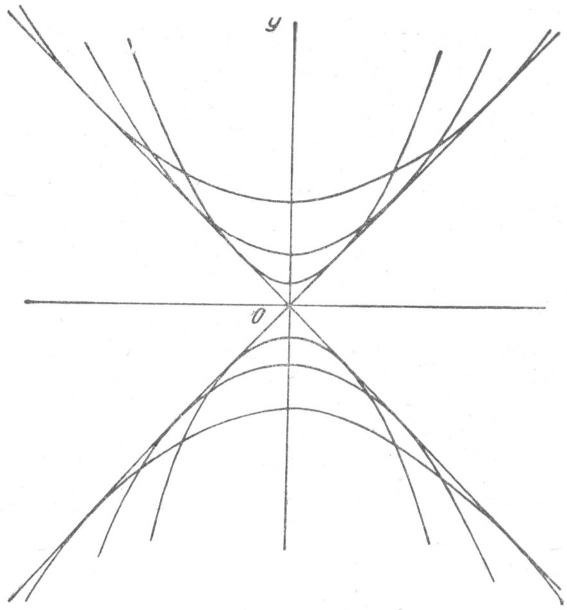
$$xy'^2 - 2yy' + x = 0.$$

То може да се интегрира като хомогенно или пък като Лагранжово. По единия и по другия начин се получава общият интеграл във вида $x^2 = C(2y - C)$. Той представя очевидно една фамилия от параболи с обща ос (оста OY) и обща директриса (оста OX). Понеже даденото уравнение е от втора степен относно y', през всяка точка (x, y) на равнината минават изобщо две интегрални криви. И двете са реални и различни при $y^2 > x^2 > 0$ и имагинерни и различни, ако $y^2 - x^2 < 0$. Уравнението има два равни корена за y', когато $y^2 - x^2 = 0$; следователно особени интеграли могат да бъдат само правите $y = x$ и $y = -x$. Непосредствено се проверява, че действително всяка от тях е интеграл на даденото диференциално уравнение. До същите особени интеграли дохождаме и като търсим обвивката на параболите, представени чрез общия интеграл (вж. черт. 10).

Пример 2. На второ място да разгледаме уравнението $y'^2 - 2Py' + y - Q = 0$, където P и Q означават функции само на x, които притежават непрекъснати първи производни за всяко x. Макар и да не можем изобщо да интегрираме това уравнение, ние знаем, че ако то има особен интеграл, той е даден чрез уравнението $P^2 - (y - Q) = 0$ или $y = P^2 + Q$. За да проверим дали наистина функцията $P^2 + Q$ е интеграл на даденото уравнение, заместваме я вместо y и след някои опростявания намираме, че трябва да бъде удовлетворено тъждествено уравнението $2PP' + Q' - P = 0$. Понеже P и Q могат да бъдат избрани произволно, последното уравнение не винаги е удовлетворено тъждествено, което показва, че не винаги едно уравнение от горния вид притежава особен интеграл.

От този пример можем да заключим, че само в доста редки (*изключителни*) *случаи едно диференциално уравнение от първи ред може да има особен интеграл.* Ако условието $2PP' + Q' - P = 0$ е изпълнено, диференциалното уравнение допуска особения интеграл

$$y = P^2 + Q.$$



Черт. 10

Може да се докаже (пък и непосредствено се проверява), че в този случай общият интеграл е

$$y = P^2 + Q - \left(\frac{x}{2} + C\right)^2.$$

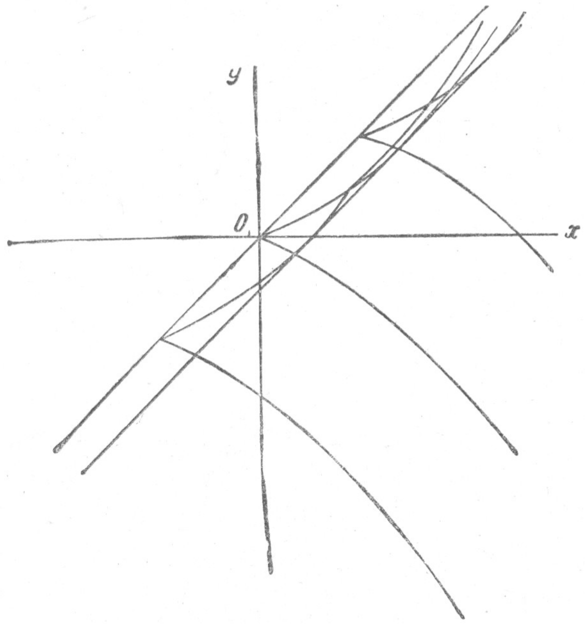
Пример 3. За да намерим особения интеграл на уравнението $y = x - 3y'^2 + 2y'^3$, представяме го във вида

$$\left(y' - \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{4}\left(y' - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}(1 - 2x + 2y) = 0$$

и след това приравняваме към нула дискриминантата му:

$$\Delta = \frac{27}{16} - \frac{27}{16}(1 - 2x + 2y)^2 = -\frac{27}{4}(y - x)(y - x + 1).$$

Особени интеграли могат да бъдат очевидно само линейните функции $y = x$ и $y = x - 1$. Лесно е да се провери, че само втората от тях удовлетворява диференциалното уравнение. Успоредните прави $y = x$ и $y = x - 1$ разделят равнината на три различни области (вж. черт. 11). Дискриминантата Δ е положителна само в областта, заключена между тези две прави. През всяка



Черт. 11

точка на тази област минават следователно три реални интегрални криви. Напротив, ако една точка $M(x, y)$ не лежи между тези прави, нито пък върху някоя от тях, то Δ е отрицателна и следователно през M минават само една реална и две имагинерни интегрални криви. Всичко това може да се провери и на чертежа, като вземем предвид, че общият интеграл е

$$(y - C)^2 = \frac{4}{27}(x - C)^3$$

и представя геометрически една фамилия семикубични параболи, които се получават от една от тях (например от тази, която отговаря на $C = 0$) чрез успоредно пренасяне по посоката $y = x$. Правата $y = x$ е геометрично място на роговете на интегралните криви; през всяка нейна точка минават освен двата клона на съответната семикубична парабола още и един клон на друга интегрална крива. Най-сетне горният клон на всяка интегрална крива се допира до правата $y = x - 1$, която като обвивка на интегрални криви представя особен интеграл на диференциалното уравнение.

Глава IV

ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ПО-ВИСОК РЕД

§ 24. Образуване на диференциални уравнения чрез диференциране и елиминация на произволни константи

Ако е дадено едно уравнение между x, y и n произволни константи $C_1, C_2, \ldots, C_n$,

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{1}$$

то за всяка система числени значения на константите $C_1, C_2, \ldots, C_n$ това уравнение дефинира изобщо y като функция на x. На безброй системи значения на произволните константи отговарят по този начин безброй функции y на x, дефинирани чрез уравнението (1). Всяка една от тях удовлетворява едно обикновено диференциално уравнение от n-ти ред, което се получава по следния начин: диференцираме n пъти поред уравнението (1) (в което разглеждаме y като неявна функция на x) и елиминираме от така получените n уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} y'' = 0, \ldots$$

и от уравнението (1) произволните константи $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Елиминационният резултат ще представя очевидно едно уравнение между x, y и производните на y до n-ти ред включително:

$$f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{2}$$

От самия начин, по който изведохме това уравнение, е ясно, че то се удовлетворява за всяка функция y на x, която може да се получи от уравнението (1) за някоя система числени значения на произволните константи. Ето защо уравнението (1) се нарича *общ интеграл* на съответното му диференциално уравнение (2). Оттук още не следва, че, обратно, всяко обикновено диференциално уравнение от n-ти ред притежава общ интеграл, от който то може да се получи чрез диференциране и елиминиране на произволните константи. Както ще видим по-нататък (вж. теоремата за съществуване на интеграли на една система диференциални уравнения), при известни предположения от доста общ характер всяко диференциално уравнение от вида (2) притежава един общ интеграл, съдържащ n произволни константи.

Засега обаче ще се задоволим само с тези бележки относно характера на най-общото решение на едно обикновено диференциално уравнение от n-ти ред.

Пример 1. Общото уравнение на всички прави в една равнина има вида $y = C_1 x + C_2$ и съдържа две произволни константи.

Чрез двукратно диференциране се елиминират същевременно и произволните константи, тъй че съответното диференциално уравнение от втори ред е

$$y'' = 0.$$

Неговото геометрично значение е следното: то изразява, че кривината в произволна точка на една интегрална крива е равна на нула — свойство, което характеризира напълно правата линия.

Пример 2. Диференциалното уравнение на окръжностите $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 - r^2 = 0$ с даден радиус r и произволен център се получава, като елиминираме C_1 и C_2 от уравненията $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2-r^2 = 0$, $x-C_1+(y-C_2)y' = 0$, $1 + y'^2 + (y - C_2)y'' = 0$. От последните две имаме

$$y - C_2 = -\frac{1 + y'^2}{y''}, \quad x - C_1 = \frac{y'(1 + y'^2)}{y''};$$

намерените стойности за $y - C_2$ и $x - C_1$, заместени в първото уравнение, водят към елиминационния резултат

$$\frac{\left(1 + y'^2\right)^3}{y''^2} = r^2.$$

Това диференциално уравнение изразява също едно просто геометрично свойство на коя да е интегрална крива, а именно: радиусът на кривината в произволна точка на кривата има постоянна дължина, равна на r.

Пример 3. Общото уравнение на конусните сечения в една равнина зависи, както е известно, от пет произволни параметъра. Съответното му диференциално уравнение от пети ред може да се получи по следния кратък начин. Ако конусното сечение няма асимптотично направление, успоредно на оста OY, уравнението му може да се представи във вида

$$y = ax + b + \sqrt{lx^2 + 2mx + n};$$

като диференцираме двукратно, намираме

$$y'' = \frac{ln - m^2}{(lx^2 + 2mx + n)^{3/2}}$$

или

$$(y'')^{-\frac{2}{3}} = (ln - m^2)^{-\frac{2}{3}}(lx^2 + 2mx + n),$$

тъй че $(y'')^{-\frac{2}{3}}$ е квадратен тричлен на x. За да се елиминират коефициентите l, m, n, достатъчно е да диференцираме три пъти поред. И така търсеното диференциално уравнение е

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left\{(y'')^{-\frac{2}{3}}\right\} = 0$$

или като извършим означените диференцирания,

$$40y'''^3 - 45y''y'''y^{IV} + 9y''^2y^V = 0.$$

По същия начин се извежда и диференциалното уравнение на всички параболи в една равнина, което трябва да бъде, разбира се, от четвърти ред. При параболите имаме $l = 0$, тъй че $(y'')^{-\frac{2}{3}}$ е линейна функция на x. Търсеното диференциално уравнение е прочее

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left\{(y'')^{-\frac{2}{3}}\right\} = 0$$

или в развит вид

$$5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0.$$

Задачи

1. Намерете диференциалното уравнение на всички конусни сечения с общ фокус в началото.
2. Също за конусните сечения с обща ос (оста OX).

§ 25. Интегриране на уравнението $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^2} = f(x)$

Както за обикновените диференциални уравнения от първи ред, тъй и за такива от по-висок ред не съществуват общи методи за интегриране, т. е. такива, които да позволяват да се изрази общият интеграл чрез класическите алгебрични и трансцендентни функции. Ето защо ние тук ще разгледаме само такива типове диференциални уравнения, при които това интегриране е възможно и които същевременно имат значение от гледището на приложенията. В случай, че не е възможно пълното интегриране на едно диференциално уравнение, ние ще се стремим да понижим реда му, т. е. да го сведем към интегриране на друго диференциално уравнение от по-нисък ред.

Най-простото диференциално уравнение от n-ти ред е уравнението

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f(x),$$

което има тази особеност, че не съдържа непозната функция и нейните производни до $(n-1)$-ви ред включително. То може да се интегрира чрез n последователни квадратури. И наистина, ако означим с $f_1(x)$ една примитивна функция на $f(x)$, т. е. такава функция, чиято производна е равна на $f(x)$, то чрез една квадратура намираме

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} = f_1(x) + C_1,$$

където C_1 означава произволна константа. Да означим след това с $f_2(x)$ една примитивна функция на $f_1(x)$ и да интегрираме още веднъж; така получаваме

$$\frac{\mathrm{d}^{n-2} y}{\mathrm{d}x^{n-2}} = f_2(x) + C_1 x + C_2.$$

Продължавайки по този начин, ние ще дойдем след n квадратури до общия интеграл

$$y = f_n(x) + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + C_{n-1} x + C_n.$$

Тук $f(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$ означават функции на x, всяка една от които се получава от предишната чрез едно неопределено интегриране (квадратура); $C_1, C_2, \ldots, C_n$ са произволни константи, независещи една от друга. Оттук следва, че ако прибавим към един интеграл на уравнението $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f(x)$ един произволен полином на x от $(n-1)$-ва или по-ниска степен, то така получената функция е пак интеграл на уравнението; това се проверява и непосредствено, като вземем предвид, че n-тата производна на един такъв полином е тъждествено равна на нула. Тази забележка показва, че общият интеграл на разглежданото диференциално уравнение може да се получи, като прибавим към един негов частен интеграл един произволен полином от $(n-1)$-ва степен на x. Коефициентите на този полином (на брой n) играят роля на произволни константи.

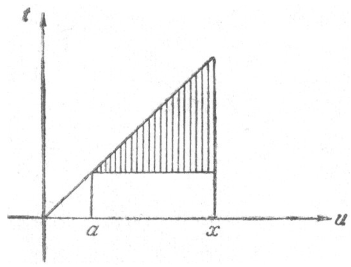
Функциите $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ не са напълно определени, но те стават такива, ако ги подчиним например на условието всички те да се анулират за $x = a$. В такъв случай, както ще видим, $f_n(x)$ може да се получи само чрез една квадратура.

Като означаваме интеграционните променливи с букви, различни от тези, с които бележим горните граници на интегралите, ние можем да напишем

$$f_2(x) = \int_a^x f_1(u)\,\mathrm{d}u, \quad f_1(u) = \int_a^u f(t)\,\mathrm{d}t,$$

откъдето

$$f_2(x) = \int_a^x \mathrm{d}u \int_a^u f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Черт. 12

Но последният интеграл е очевидно равен на двойния интеграл $\iint_{(R)} f(t)\,\mathrm{d}u\,dt$, където интеграционната област R представя един триъгълник в равнината (u, t), заграден от правите $u = x$, $t = a$, $u = t$. Стойността на същия интеграл, ако извършим интегрирането по-напред относно u, а след това относно t, е равна на

$$\int_a^x \mathrm{d}t \int_t^x f(t)\,\mathrm{d}u = \int_a^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

И така

$$f_2(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

По същия начин имаме

$$f_3(x) = \int_a^x f_2(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^x \mathrm{d}u \int_a^u (u-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \iint_{(R)} (u-t)f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

или като интегрираме по-напред относно u и след това относно t,

$$f_3(x) = \int_a^x \mathrm{d}t \int_t^x (u-t)f(t)\,\mathrm{d}u = \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

След $n-1$ подобни преобразувания добиваме за $f_n(x)$, както лесно може да се провери чрез метода на пълната индукция, интегралния израз

$$f_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Че последният интеграл наистина дефинира една функция на x, чиято n-та производна е равна на $f(x)$, можем да се убедим и направо, като го диференцираме последователно n пъти по правилото за диференциране на един определен интеграл относно параметъра x, от който зависи както горната граница, тъй и подинтегралната функция. Следователно общият интеграл на даденото диференциално уравнение е

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt + P_{n-1}(x),$$

където $P_{n-1}(x)$ означава един произволен полином на x от $(n-1)$-ва степен.

Пример. Да разгледаме диференциалното уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \ln x.$$

Интегралът на това уравнение, който се анулира при $x = 1$ заедно с производните си до $(n-1)$-ви ред включително, е

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_1^x (x-t)^{n-1} \ln t\,dt$$

или като интегрираме по части,

$$f_n(x) = -\frac{(x-t)^n}{n!}\ln t\Big|_{t=1}^{x} + \frac{1}{n!}\int_1^x \frac{(x-t)^n}{t}\,dt = \frac{1}{n!}\int_1^x \frac{(x-t)^n}{t}\,dt.$$

Последният интеграл може да се представи така:

$$\int_1^x \frac{(x-t)^n}{t}\,dt = \int_1^x \frac{(x-t)^n - x^n}{t}\,dt + \int_1^x \frac{x^n}{t}\,dt = \int_1^x \frac{(x-t)^n - x^n}{t}\,dt + x^n \ln x,$$

тъй че

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\ln x + \frac{1}{n!}\int_1^x \frac{(x-t)^n - x^n}{t}\,dt.$$

Ако прибавим към дясната част на последното равенство интеграла

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{(x-t)^n - x^n}{t}\,dt,$$

който (лесно е да се види) представя полином на x от $(n-1)$-ва степен, ще получим очевидно друг интеграл на диференциалното уравнение, който ще означим с y_n:

$$y_n = \frac{x^n}{n!}\ln x + \frac{1}{n!}\int_0^x \frac{(x-t)^n - x^n}{t}\,dt.$$

Стойността на определения интеграл отдясно се намира, като положим $t = x - ux$, където u е нова интеграционна променлива; получаваме

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^n - x^n}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{u^n x^n - x^n}{x - ux}\cdot x\,\mathrm{d}u\\ &= -x^n \int_0^1 (1 + u + \cdots + u^{n-1})\,\mathrm{d}u = -x^n\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right);\end{aligned}$$

следователно

$$y_n = \frac{x^n}{n!}\left(\ln x - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right).$$

А общият интеграл на даденото уравнение е

$$y = \frac{x^n}{n!}\left(\ln x - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right) + P_{n-1}(x),$$

където $P_{n-1}(x)$ означава произволен полином на x от $(n-1)$-ва степен.

§ 26. Понижение на реда на едно диференциално уравнение

В много случай, макар и да не знаем да интегрираме напълно едно диференциално уравнение от по-висок ред, ние можем да използуваме някои негови особености, за да понижим реда му, т. е. да сведем

Съдържание

Част I
ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Глава I. Общо върху диференциалните уравнения от първи ред 5

§ 1. Геометрично тълкуване 5
§ 2. Образуване на диференциални уравнения от първи ред 7

Глава II. Теореми за съществуване на интеграли 10

§ 3. Първо доказателство на теоремата за съществуване на интеграли на уравнението $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ 10
§ 4. Второ доказателство на теорема за съществуване интеграли на уравнението $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ 17
§ 5. Различни бележки върху теоремата за съществуване на интеграли 25
§ 6. Трето доказателство на теоремата за съществуване на интеграли. 29
§ 7. Теорема на Пеано 35

Глава III. Методи за интегриране на някои специални типове диференциални уравнения от първи ред 39

§ 8. Отделяне на променливите 39
§ 9. Хомогенни диференциални уравнения 41
§ 10. Линейни диференциални уравнения от първи ред. 45
§ 11. Бернулиеви диференциални уравнения 46
§ 12. Диференциално уравнение на Рикати (Riccati) 48

§ 13. Траектории 50
§ 14. Интегриране на пълен диференциал 52
§ 15. Интегриращ множител 55
§ 16. Общ вид на интегриращите множители 58
§ 17. Помощна теорема от диференциалното смятане 60
§ 18. Събирателни теореми на някои трансцендентни функции . . . 64
§ 19. Ойлерово диференциално уравнение. 68
§ 20. Интегриране чрез предварително диференциране 72
§ 21. Лагранжови диференциални уравнения. 73
§ 22. Диференциални уравнения на Клеро. 76
§ 23. Особени интеграли 78

Глава IV. Обикновени диференциални уравнения от по-висок ред 84

§ 24. Образуване на диференциални уравнения чрез диференциране и елиминация на произволни константи 84
§ 25. Интегриране на уравнението $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^2} = f(x)$ 86
§ 26. Понижение на реда на едно диференциално уравнение 90