Двойствен симплекс метод

1. Теория

Двойственият симплекс метод е разработен от Лемке през 1954 г. за решаване на линейни задачи, при които се налага добавяне на нови ограничения, след като преди това е било намерено оптимално решение. Симплекс алгоритъмът (който отсега нататък ще наричаме *прав симплекс алгоритъм*) на всяка итерация поддържа допустимостта в правата (каноничната) задача и се стреми към допустимост на двойствената ѝ задача (еквивалентна на критерия за оптималност). *Двойственият симплекс алгоритъм* на всяка стъпка поддържа допустимостта на двойствената задача и се стреми към допустимост на правата задача.

Разглеждаме каноничната задача на линейното оптимиране

$$\text{(К)} \qquad \min z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

и нейната двойствена

$$\text{(ДК)} \qquad \max v(\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}, \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{c},$$

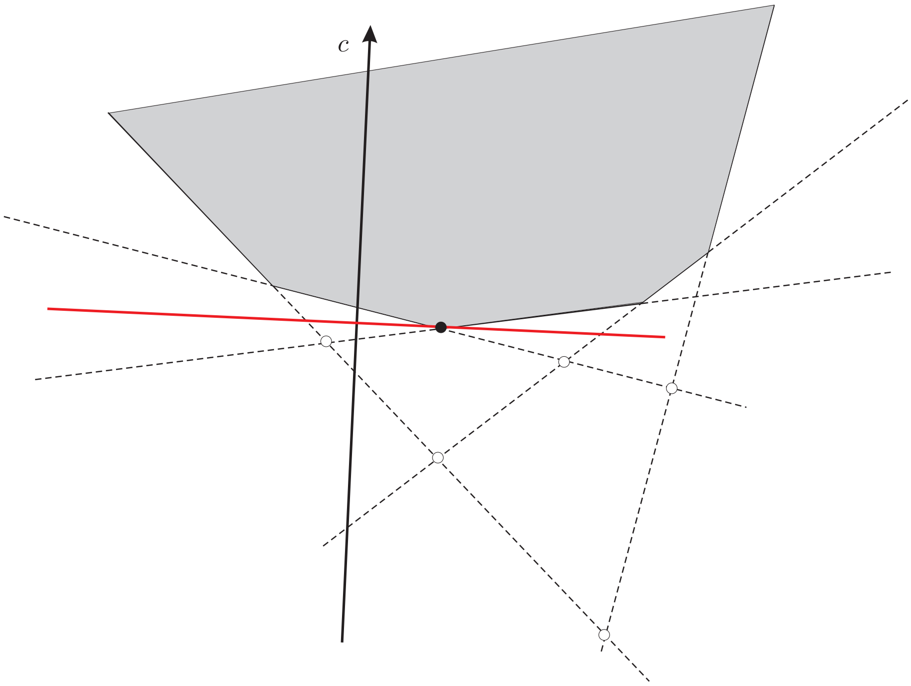
където $\mathbf{A}$ е матрица $m \times n$ с $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Определение 1. Нека $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} \\ \overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ е базисно решение за задачата (К). Казваме, че $\overline{\mathbf{x}}$ е *псевдооптимално*, ако относителните оценки на небазисните му променливи са неотрицателни

$$(1) \qquad \overline{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}} = \mathbf{c}_{\mathbf{N}} - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \geq \mathbf{0},$$

т. е. чиито вектор от симплексни множители $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}$ е допустим за задачата (ДК).

На фиг. 1 са показани псевдооптимални базисни решения в двумерния случай за задача на линейното оптимиране, която не е канонична.



Фиг. 1. Псевдооптимални базисни решения (означени с бели кръгчета) и оптималното решение (черното кръгче) на двумерна линейна оптимизационна задача

Да отбележим, че

- едно псевдооптимално базисно решение $\bar{\mathbf{x}}$ може да не бъде оптимално решение на (К), защото може да не бъде допустимо (може да не удовлетворява условието $\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$);

- ако псевдооптимално решение $\bar{\mathbf{x}}$ е допустимо, то е оптимално решение на (К) (в този случай (1) не е нищо друго освен критерият за оптималност).

Също както правия симплекс метод двойственият решава задачата (К), като се движи от базисно решение към съседно на него базисно решение, но вместо да поддържа на всяка итерация допустимостта на текущото решение, той поддържа неговата псевдооптималност и спира при намиране на допустимо решение.

2. Алгоритъм на двойствения симплекс метод

Стъпка 0. Нека $\overline{\mathbf{x}}$ е псевдооптимално базисно решение на каноничната задача (К) с базисна матрица $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_{j_1}, \dots, \mathbf{A}_{j_m}]$ и индексно множество от базисни променливи $\mathcal{B} = \{j_1, \dots, j_m\}$.

Стъпка 1. ***Проверка за допустимост.*** Ако $\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} \geq \mathbf{0}$, КРАЙ. Текущото решение $\overline{\mathbf{x}}$ е допустимо и следователно оптимално. В противен случай отиваме на Стъпка 2.

Стъпка 2. ***Проверка за празно допустимо множество.*** Ако съществува $\overline{x}_{j_i} < 0$, за което всички $w_{ij} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j)_i \geq 0$, $j \notin \mathcal{B}$, задачата няма допустимо решение, КРАЙ. В противен случай отиваме на Стъпка 3.

Стъпка 3. ***Определяне на базисна променлива x_{j_p}, която да напусне базиса.*** Избор на

$$j_p \in \{j_i : j_i \in \mathcal{B},\ \overline{x}_{j_i} < 0\}.$$

Ако има няколко индекса с това свойство, или се избира това, за което $\overline{x}_{j_i}$ е най-голяма по абсолютна стойност, или се прилага правилото на Бленд. Към Стъпка 4.

Стъпка 4. ***Определяне на небазисна променлива x_q за влизане в базиса.*** Намиране на $q \notin \mathcal{B}$, за което

$$0 \leq \frac{-\overline{c}_q}{w_{pq}} = \min\left\{\frac{-\overline{c}_j}{w_{pj}} : w_{pj} < 0,\ j \notin \mathcal{B}\right\}.$$

Извършване на елементарно преобразование на симплексната таблица с ключово число (водещ елемент) $w_{pq} < 0$, при което и следващото базисно решение е псевдооптимално. Преминаване към стъпка 1 с новия базис.

На всяка итерация двойственият симплекс метод изисква абсолютно същото количество работа, както подобно реализирана версия на правия симплекс метод.

Ако задачата (К) е неизродена, се движим от недопустимо псевдооптимално базисно решение към съседно на него псевдооптимално базисно решение. Ако последното е допустимо, то е и оптимално. Ако не е допустимо, повтаряме двойствения симплекс метод, като за краен брой итерации (базисните решения са краен брой и изменението на стойността на целевата функция е монотонно, но противоположно на критерия, т. е. при задача за минимум имаме нарастване на целевата функция) или ще получим оптимално решение на (К), или ще покажем, че допустимото ѝ множество е празно. В случай на изроденост на (К) можем да прибегнем до алгоритъма на Бленд, избягващ зациклянето.

Решаването на правата задача (К) с двойствения симплекс метод математически е еквивалентно на решаването на двойствената ѝ задача (ДК) с правия симплекс метод.

3. Сравняване на алгоритмите на правия и двойствения симплекс метод

1. **ПСМ:** Първо се избира променливата, която *влиза* в базиса, а след това тази, която *напуска* базиса.

   ДСМ: Първо се избира променливата, която *напуска* базиса, а след това тази, която *влиза* в базиса.

2. **ПСМ:** Ключовото число (водещият елемент) винаги е *положително*.

   ДСМ: Ключовото число (водещият елемент) винаги е *отрицателно*.

4. Използване на двойствения симплекс метод

Да разгледаме следната задача на линейното оптимиране

$$\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0},$$

където $\mathbf{c} \ge \mathbf{0}$. Като я сведем до канонична задача, получаваме

$$\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}_s = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{x}_s \ge \mathbf{0}.$$

Очевидно допълнителните променливи $\mathbf{x}_s$ образуват базис и относителните оценки на базисното решение $\begin{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_s = \mathbf{b} \end{bmatrix}$ са $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c} - \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{c} \ge \mathbf{0}$, т. е. това е псевдооптимално базисно решение.

Пример 1. Да се приложи алгоритъмът на двойствения симплекс метод за решаване на задачата

$$\begin{aligned} &\min z = x_1 + 2x_2 \\ &x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 4, \\ &2x_1 + x_2 - x_3 \ge 6, \\ &x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Решение. Да сведем задачата до канонична, като същевременно умножим и двете ограничения с -1

$$\min z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \phantom{{}+x_5} &= -4, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} + x_5 &= -6, \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \ldots, 5.$$

Тази задача има очевиден начален базис $\mathcal{B} = [x_4, x_5]$ и съответното псевдооптимално базисно решение е $\mathbf{x}_k^{(0)} = (0, 0, 0, -4, -6)^{\mathrm{T}}$. Началната симплексна таблица е показана в табл. 1.

Таблица 1

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		1	2	0	0	0	0
x_4	0	-1	2	-1	1	0	-4
x_5	0	$\boxed{-2}$	-1	1	0	1	-6
$\bar{\mathbf{c}}$		1	2	0	0	0	0

Десните страни и на двете ограничения са отрицателни. Следователно това псевдооптимално базисно решение не е допустимо. Виждаме, че и в двата реда има отрицателни коефициенти. Значи няма индикация, че допустимото множество е празно. Да изберем x_5 в качеството на променлива, напускаща базиса, защото $|-6| > |-4|$. Образуваме отношенията $\frac{-1}{-2}$ и $\frac{-2}{-1}$. Първото е най-малко и затова x_1 влиза в базиса. Симплексната таблица, отговаряща на новия базис, е показана в табл. 2. Новото псевдооптимално базисно решение е $\mathbf{x}_k^{(1)} = (3, 0, 0, -1, 0)^{\mathrm{T}}$.

Таблица 2

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		1	2	0	0	0	0
x_4	0	0	$5/2$	$\boxed{-3/2}$	1	$-1/2$	-1
x_1	1	1	$1/2$	$-1/2$	0	$-1/2$	3
$\bar{\mathbf{c}}$		0	$3/2$	$1/2$	0	$1/2$	-3

В табл. 2 само редът на x_4 е с отрицателна дясна страна. Следователно x_4 е променливата, която напуска базиса (в реда ѝ има отрицателни коефициенти). Образуваме отношенията $\frac{-1/2}{-3/2} = \frac{1}{3}$ и $\frac{-1/2}{-1/2} = 1$. Първото е най-малко и затова x_3 влиза в базиса. Симплексната таблица, отговаряща на новия базис, е показана в табл. 3.

Таблица 3

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		1	2	0	0	0	0
x_3	0	0	$-5/3$	1	$-2/3$	$1/3$	$2/3$
x_1	1	1	$-1/3$	0	$-1/3$	$-1/3$	$10/3$
$\bar{\mathbf{c}}$		0	$7/3$	0	$1/3$	$1/3$	$-10/3$

Получихме допустимо псевдооптимално решение, което е и оптимално решение на каноничната задача $\mathbf{x}^*_к = \left(\frac{10}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0, 0\right)^\mathrm{T}$. Оптималното решение на изходната задача е $\mathbf{x}^*_и = \left(\frac{10}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)^\mathrm{T}$ и оптималната стойност на целевата функция е $z^* = \frac{10}{3}$.

Задачи

1. Да се реши задачата от пример 1, като на първата итерация x_4 напусне базиса.

2. Да се приложи алгоритъмът на двойствения симплекс метод за решаване на задачата

$$
\begin{aligned}
\max z = -5x_1 - 35x_2 - 20x_3& \\
-x_1 + x_2 + x_3 &\geq 2, \\
x_1 + 3x_2 &\geq 3, \\
x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3.&
\end{aligned}
$$

Отг. $\mathbf{x}^* = (0, 1, 1)^\mathrm{T}$, $z^* = -55$.