ИЗПЪКНАЛИ МНОЖЕСТВА. ИЗПЪКНАЛИ ФУНКЦИИ

1. Основни понятия

Определение 1. Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество. Функцията $f : X \to \mathbb{R}$ се нарича *изпъкнала* в X, ако $f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \le \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2)$ за всяко $\lambda \in [0,1]$ и всеки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$. Ако горното неравенство е изпълнено строго за произволни $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ от X и $\lambda \in (0,1)$, функцията f се нарича *строго изпъкнала*.

Една функция f наричаме *вдлъбната* (*строго вдлъбната*), ако функцията $-f$ е изпъкнала (строго изпъкнала).

Твърдение 1 (Неравенство на Йенсен)**.** Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество. Функцията $f : X \to \mathbb{R}$ е изпъкнала в X тогава и само тогава, когато $f\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i\right) \le \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_k f(\mathbf{x}_i)$, където $\lambda_i \ge 0$, $i = 1, \dots, k$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ и $\mathbf{x}_i \in X$, $i = 1, \dots, k$.

Определение 2. Нека $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, а $\lambda_i \ge 0$, $i = 1, \dots, k$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Всяка точка от вида $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i$ се нарича *изпъкнала комбинация* на точките $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$. Съвкупността от всички изпъкнали комбинации на точките $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ се нарича *изпъкнала обвивка* на тези точки и се означава с $\mathrm{co}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$.

Твърдение 2. Изпъкналата обвивка $\mathrm{co}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ на произволни k точки $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ е изпъкнало и компактно множество.

Доказателство. Да фиксираме естествено число k и произволни k точки $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$. Да означим $P := \mathrm{co}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$.

Първо ще покажем изпъкналостта на P. Да вземем две произволни точки $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2 \in P$ и за $\lambda \in [0,1]$ да образуваме изпъкналата им комбинация $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}_1 + (1-\lambda)\mathbf{y}_2$.

Тъй като $\mathbf{y}_1 \in P$, то съществуват неотрицателни числа μ_i, такива че $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$, за които $\mathbf{y}_1 = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{x}_i$. Аналогично, тъй като $\mathbf{y}_2 \in P$, то съществуват неотрицателни числа ν_i, такива че $\sum_{i=1}^{k} \nu_i = 1$, за които $\mathbf{y}_2 = \sum_{i=1}^{k} \nu_i \mathbf{x}_i$. Заместваме представянията на $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ в $\mathbf{y}$ и получаваме

$$\mathbf{y} = \lambda \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{x}_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{k} \nu_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{k} [\lambda \mu_i + (1-\lambda)\nu_i] \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

където сме положили $\lambda_i := \lambda\mu_i + (1-\lambda)\nu_i$. Тъй като $\lambda \in [0,1]$ и всички μ_i, ν_i са неотрицателни, то $\lambda_i \geq 0$ за всяко $i = 1, \ldots, k$. Остава да забележим, че $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda\mu_i + (1-\lambda)\nu_i = \lambda \sum_{i=1}^{k} \mu_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{k} \nu_i = \lambda + (1-\lambda) = 1$, за да получим, че $y \in P$. Следователно P е изпъкнало.

За да покажем, че P е компактно, достатъчно е да покажем, че то е ограничено и затворено. Нека вземем произволно $\mathbf{y} \in P$. То се представя във вида

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \lambda_i \geq 0 \text{ за всяко } i = 1, \ldots, k, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

и от неравенството на триъгълника получаваме следната горна граница за $\|\mathbf{y}\|$

$$\|\mathbf{y}\| = \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \|\mathbf{x}_i\| \leq \max_{1 \leq i \leq k} \|\mathbf{x}_i\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \max_{1 \leq i \leq k} \|\mathbf{x}_i\|,$$

откъдето следва, че множеството P е ограничено.

За да покажем, че P е затворено, ще вземем произволна редица от точки $\{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^{\infty} \in P$, която е сходяща към точка $\mathbf{y}$, и ще покажем, че $\mathbf{y} \in P$, откъдето следва, че P е затворено. За всяко $j \in \mathbb{N}$ точките $\mathbf{y}_j$ са от вида

$$\mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ij} \mathbf{x}_i, \quad \lambda_{ij} \geq 0 \text{ за всяко } i = 1, \ldots, k, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ij} = 1. \tag{1}$$

Разглеждаме числовите редици $\{\lambda_{ij}\}_{j=1}^{\infty} \in [0,1]$ за $i = 1, \ldots, k$. Те са ограничени и следователно от тях последователно можем да изберем сходящи подредици, чиито граници означаваме с λ_i. Очевидно $\lambda_i \geq 0$. Понеже за всяко $j \in \mathbb{N}$ имаме $\sum_{i=1}^{k} \lambda_{ij} = 1$, то след граничния преход по j ще получим, че

$\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. След граничен преход по j в (1) получаваме, че

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \lambda_i \geq 0 \text{ за всяко } i = 1, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$

т. е. получаваме, че $y \in P$, което трябваше да се докаже. □

Твърдение 3. Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество и $f : X \to \mathbb{R}$ е изпъкнала в X функция. Нека $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in X$ и нека $P = \mathrm{co}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$. Тогава за всяко $\mathbf{x} \in P$ е изпълнено

$$f(\mathbf{x}) \leq \max_{1 \leq i \leq k} f(\mathbf{x}_i).$$

В частност, f е ограничена отгоре върху всеки многостен P, съдържащ се в X.

Доказателство. Тъй като $\mathbf{x} \in P$, то съществуват неотрицателни числа λ_i, $i = 1, \dots, k$, чиято сума е 1, за които точката $\mathbf{x}$ се представя във вида $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i$. От неравенството на Йенсен за k точки следва, че

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\mathbf{x}_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \max_{1 \leq i \leq k} f(\mathbf{x}_i) = \max_{1 \leq i \leq k} f(\mathbf{x}_i) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \\ &= \max_{1 \leq i \leq k} f(\mathbf{x}_i), \end{aligned}$$

което трябваше да се покаже. □

2. Непрекъснатост на изпъкнали функции

За произволно множество $X \subset \mathbb{R}^n$ *вътрешността* на X се означава с $\mathrm{int}\, X$ и се състои от тези точки $\mathbf{x}_0$ на X, за които може да се намери отворено кълбо с център $\mathbf{x}_0$ и някакъв положителен радиус, такова че всички точки от кълбото да са в X. Възможно е $\mathrm{int}\, X = \emptyset$.

Твърдение 4. Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество и $f : X \to \mathbb{R}$ е изпъкнала в X функция. Нека $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{int}\, X$. Тогава в X се съдържа затворено кълбо $B[\mathbf{x}_0, \alpha]$, в което f е ограничена отгоре.

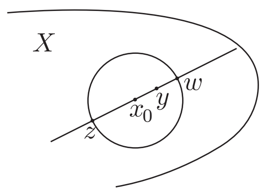
Доказателство. Тъй като $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{int}\, X$, то за някое $\varepsilon > 0$ отвореното кълбо $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \subset X$. В това кълбо може да се впише n-мерен куб P с център $\mathbf{x}_0$, който изцяло се съдържа в него (и следователно в X). Според твърдение 3 f е ограничена отгоре в куба P. Тъй като $\mathbf{x}_0$ е вътрешна точка за P, то съществува $\alpha > 0$, такова че $B[\mathbf{x}_0, \alpha] \subset P \subset X$ и в кълбото $B[\mathbf{x}_0, \alpha]$ функцията f е ограничена отгоре. □

Теорема 1. Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество и функцията $f : X \to \mathbb{R}$ е изпъкнала в X. Тогава f е непрекъсната във всяка точка $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int} X$.

Доказателство. Нека $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int} X$. От твърдение 4 знаем, че съществува $\alpha > 0$, такова че $f(\mathbf{x}) \leq K$ за всяко $\mathbf{x} \in B[\mathbf{x}_0, \alpha]$.

Да разгледаме произволно $\mathbf{y} \in B(x_0, \alpha)$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}_0$ и да прекараме правата през $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}_0$ до пресичането ѝ с границата на кълбото (вж. фиг. 1). Да означим тези точки на пресичане с

$$\mathbf{w} := \mathbf{x}_0 + \alpha \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|} \quad \text{и} \quad \mathbf{z} := \mathbf{x}_0 - \alpha \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|}.$$



Фиг. 1

За опростяване на означенията ще положим $d := \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|$. Следователно

$$\mathbf{w} := \mathbf{x}_0 + \frac{\alpha}{d}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \quad \text{и} \quad \mathbf{z} := \mathbf{x}_0 - \frac{\alpha}{d}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0).$$

Тъй като точката $\mathbf{x}_0$ лежи на отсечката с краища $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, тя може да се представи като тяхна изпъкнала комбинация за някое $\lambda \in (0, 1)$, т. е.

$$\mathbf{x}_0 = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\left[\mathbf{x}_0 - \frac{\alpha}{d}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)\right].$$

Умножаваме двете страни с $d \neq 0$ и получаваме

$$d\mathbf{x}_0 = \lambda d\mathbf{y} + (1 - \lambda)d\left[\mathbf{x}_0 - \frac{\alpha}{d}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)\right] = \lambda d\mathbf{y} + (1 - \lambda)d\mathbf{x}_0 - \alpha(1 - \lambda)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0),$$

откъдето

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \lambda d\mathbf{y} - \lambda d\mathbf{x}_0 - \alpha(1 - \lambda)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) = \lambda d(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) - \alpha(1 - \lambda)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \\ &= [\lambda d - \alpha(1 - \lambda)](\mathbf{y} - \mathbf{x}_0).\end{aligned}$$

Тъй като $\mathbf{y} - \mathbf{x}_0$ е ненулев вектор, то горното равенство е възможно само когато
$$\lambda d = \alpha(1 - \lambda),$$
откъдето $\lambda = \dfrac{\alpha}{\alpha + d}$. Заместваме така полученото λ в представянето на $\mathbf{x}_0$
$$\mathbf{x}_0 = \frac{\alpha}{\alpha + d}\mathbf{y} + \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + d}\right)\mathbf{z} = \frac{\alpha}{\alpha + d}\mathbf{y} + \frac{d}{\alpha + d}\mathbf{z}.$$
От изпъкналостта на f следва, че
$$f(\mathbf{x}_0) \leq \frac{\alpha}{\alpha + d}f(\mathbf{y}) + \frac{d}{\alpha + d}f(\mathbf{z}).$$
Тъй като $\mathbf{z} \in B[\mathbf{x}_0, \alpha]$, то $f(\mathbf{z}) \leq K$ и можем да го оценим в горното неравенство
$$f(\mathbf{x}_0) \leq \frac{\alpha}{\alpha + d}f(\mathbf{y}) + \frac{d}{\alpha + d}K.$$
Умножаваме двете страни на неравенството със знаменателя $\alpha + d > 0$ и получаваме
$$\alpha f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0) \leq \alpha f(\mathbf{y}) + Kd,$$
което, разделено на $\alpha > 0$, дава
$$f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{y}) \leq \frac{K - f(\mathbf{x}_0)}{\alpha}d = \frac{K - f(\mathbf{x}_0)}{\alpha}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|. \tag{2}$$

Сега да вземем предвид, че точката $\mathbf{y}$ лежи на отсечката с краища $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{w}$. Следователно тя може да се представи като тяхна изпъкнала комбинация за някое $\mu \in (0, 1)$, т. е.
$$\mathbf{y} = \mu\mathbf{x}_0 + (1 - \mu)\mathbf{w} = \mu\mathbf{x}_0 + (1 - \mu)\left[\mathbf{x}_0 + \frac{\alpha}{d}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)\right].$$
Умножаваме двете страни с $d \neq 0$ и получаваме
$$\begin{aligned} d\mathbf{y} &= \mu d\mathbf{x}_0 + (1 - \mu)d\left[\mathbf{x}_0 + \frac{\alpha}{d}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)\right] \\ &= \mu d\mathbf{x}_0 + (1 - \mu)d\mathbf{x}_0 + \alpha(1 - \mu)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) = \alpha(1 - \mu)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) + d\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$
или
$$d(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) = \alpha(1 - \mu)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0).$$
Тъй като $\mathbf{y} - \mathbf{x}_0$ е ненулев вектор, то от горното равенство следва, че
$$d = \alpha(1 - \mu),$$

откъдето $\mu = \dfrac{\alpha - d}{\alpha}$. Заместваме така полученото μ в представянето на $\mathbf{y}$ и получаваме

$$\mathbf{y} = \frac{\alpha - d}{\alpha}\mathbf{x}_0 + \left(1 - \frac{\alpha - d}{\alpha}\right)\mathbf{w} = \frac{\alpha - d}{\alpha}\mathbf{x}_0 + \frac{d}{\alpha}\mathbf{w}.$$

От изпъкналостта на f следва, че

$$f(\mathbf{y}) \leq \frac{\alpha - d}{\alpha} f(\mathbf{x}_0) + \frac{d}{\alpha} f(\mathbf{w}).$$

Тъй като $\mathbf{w} \in B[\mathbf{x}_0, \alpha]$, то $f(\mathbf{w}) \leq K$ и можем да го оценим в горното неравенство

$$f(\mathbf{y}) \leq \frac{\alpha - d}{\alpha} f(\mathbf{x}_0) + \frac{d}{\alpha} K.$$

Умножаваме двете страни на неравенството с $\alpha > 0$ и получаваме

$$\alpha f(\mathbf{y}) \leq (\alpha - d) f(\mathbf{x}_0) + Kd,$$

което, разделено на $\alpha > 0$, дава

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0) \leq \frac{K - f(\mathbf{x}_0)}{\alpha} d = \frac{K - f(\mathbf{x}_0)}{\alpha} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|. \tag{3}$$

От (2) и (3) получаваме

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{K - f(\mathbf{x}_0)}{\alpha} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|. \tag{4}$$

Нека сега $\varepsilon > 0$ е произволно. Избираме $\delta > 0$, такова че $\delta = \dfrac{\alpha\varepsilon}{K - f(\mathbf{x}_0)}$. Тогава ако $\mathbf{y}$ е такъв, че $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, то

$$|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq \frac{K - f(\mathbf{x}_0)}{\alpha} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leq \frac{K - f(\mathbf{x}_0)}{\alpha} \delta < \varepsilon.$$

Следователно f е непрекъсната в $\mathbf{x}_0$, което трябваше да се покаже. □

Следствие 1. Всяка изпъкнала функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е непрекъсната.

3. Екстремални свойства на изпъкналите функции

Определение 3. Точката $\mathbf{x}_0 \in X$ се нарича *точка на локален минимум за f в X*, ако съществува $\delta > 0$, такова че $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ за всяко $\mathbf{x} \in X \cap B[\mathbf{x}_0, \delta]$.

Точката $\mathbf{x}_0 \in X$ се нарича *точка на глобален минимум на f в X*, ако $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ за всяко $\mathbf{x} \in X$.

Ясно е, че всички глобални минимуми на f в X са и локални, докато обратното в общия случай не е вярно.

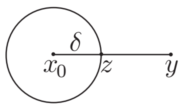
Теорема 2. Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество и $f : X \to \mathbb{R}$ е изпъкнала функция.

1. Тогава локалните минимуми на f в X са и глобални.
2. Множеството от точките на локален минимум е изпъкнало.
3. Ако функцията е строго изпъкнала и достига инфимума си в X, точката на минимум е единствена в X.

Доказателство. 1. Нека $\mathbf{x}_0$ е точка на локален минимум на f в X. Тогава съществува $\delta > 0$, такова че $f(\mathbf{x}_0) \le f(\mathbf{x})$ за всяко $\mathbf{x} \in X \cap B[\mathbf{x}_0, \delta]$.

Ще разгледаме точката $\mathbf{y} \in X$, за която $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \delta$, и ще покажем, че $f(\mathbf{y}) \ge f(\mathbf{x}_0)$.

Нека $\mathbf{z}$ е точката, получена от пресичането на отсечката с краища $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}_0$ и границата на кълбото $B[\mathbf{x}_0, \delta]$, т. е. $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| = \delta$ и $\mathbf{z}$ е по отсечката (вж. фиг. 2). Следователно съществува $\lambda \in (0, 1)$, за което $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x}_0 + (1 - \lambda)\mathbf{y}$.



Фиг. 2

Поради изпъкналостта на X точката $\mathbf{z} \in X$. Освен това $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\| = \delta$. Значи $f(\mathbf{z}) \ge f(\mathbf{x}_0)$. Тъй като f е изпъкнала в X функция

$$f(\mathbf{x}_0) \le f(\mathbf{z}) \le \lambda f(\mathbf{x}_0) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}),$$

т. е.

$$(1 - \lambda) f(\mathbf{x}_0) \le (1 - \lambda) f(\mathbf{y}).$$

Оттук следва $f(\mathbf{x}_0) \le f(\mathbf{y})$, което трябваше да се покаже.

2. Нека сега $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ са две точки на локален минимум и $\lambda \in [0, 1]$ е произволно. Значи $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)$. Тогава

$$f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \le \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_2) = \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_1).$$

Следователно и $\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2$ е точка на локален минимум. Значи множеството от точките на локален минимум е изпъкнало.

3. Нека f достига минимума си в $\mathbf{x}_0$. Според 1. $\mathbf{x}_0$ е точка на глобален минимум. Да допуснем, че съществува точка $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, за която $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$. От строгата изпъкналост следва, че

$$f\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{x}_0}{2}\right) < \frac{1}{2}f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0).$$

Тъй като X е изпъкнало множество, то $\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0) \in X$ и полученото неравенство е в противоречие с това, че $\mathbf{x}_0$ е глобален минимум. □

4. Диференцуеми изпъкнали функции

Теорема 3. Нека функцията f е изпъкнала в $\mathbb{R}^n$ и диференцуема в точката $\mathbf{x}^*$. Тогава следните условия са еквивалентни:

1) $f(\mathbf{x}^*) = \min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$;

2) $f'(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

С други думи, при допълнителното изискване за изпъкналост теоремата на Ферма дава вече не само необходимо, но и достатъчно условие за минимум.

Често се използват следните свойства, всяко от които е еквивалентно със свойството изпъкналост на f в $\mathbb{R}^n$ (при предположение, че всички срещащи се производни съществуват и са непрекъснати):

1°. $f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) \geq \langle f'(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\rangle$ за всеки $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$.

2°. Функцията $\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{t})$ е изпъкнала по $\lambda \in \mathbb{R}$ за произволни фиксирани $\mathbf{x}$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$.

3°. Функцията $\psi(\lambda) = \langle f'(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{t}), \mathbf{t}\rangle$ е ненамаляваща по $\lambda \in \mathbb{R}$ за произволни фиксирани $\mathbf{x}$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$.

4°. Матрицата $f''(\mathbf{x})$ е положително полудефинитна.

Ако $X \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество, $\dim X = n$ и $f(\mathbf{x})$ е непрекъсната в X и диференцуема в произволна вътрешна точка на X, в сила са аналогични еквивалентни свойства на $f(\mathbf{x})$ в X.

Задачи

1. Да се покаже, че кълбото B с център $\mathbf{x}_0$ и радиус r е изпъкнало множество.

Забележка. В ръководството използваме евклидовото разстояние между две точки $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^{\mathrm{T}}$ в $\mathbb{R}^n$: $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}$.

2. Нека $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Да се покаже, че множеството

$$G = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

е изпъкнало (G е правата, минаваща през $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$).

3. Нека за произволни точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ от множеството $X \subset \mathbb{R}^n$ точката $\mathbf{z} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ принадлежи на X.

3.1. Изпъкнало ли е множеството X?

3.2. Изпъкнало ли е множеството X при предположение, че е затворено?

4. Да се провери изпъкнало ли е множеството

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \dots, m\},$$

ако f_i, $i = 1, \dots, m$, са изпъкнали функции.

5. Нека $f : X \to \mathbb{R}$. Множеството $M(\alpha) = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$ се нарича *множество на Лебег* за функцията f.

5.1. Да се докаже, че ако f е изпъкнала функция, то $M(\alpha)$ са изпъкнали множества за всяко $\alpha \in \mathbb{R}$.

5.2. Да се посочи пример на неизпъкнала функция, за която съответните множества на Лебег са изпъкнали.

6. Нека са дадени множествата от индекси $I = \{1, \dots, m\}$, $I_1 \subset I$, $I_2 \subset I$, $I_1 \cup I_2 = I$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $J \subset \{1, \dots, n\}$, и фамилия реални функции $f_i(\mathbf{x})$, $i \in I$, дефинирани в $\mathbb{R}^n$, изпъкнали за $i \in I_1$ и афинни за $i \in I_2$.

6.1. Да се провери изпъкнало ли е множеството

$$X_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i \in I_1,\ f_i(\mathbf{x}) = 0,\ i \in I_2,\ x_j \geq 0,\ j \in J\}.$$

6.2. Да се провери изпъкнало ли е множеството $X_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = 0\} \cap X_1$, където f е строго изпъкнала функция в $\mathbb{R}^n$.

7. Нека множество X е зададено както в задача 6.1, $f(\mathbf{x})$ е вдлъбната функция в X и точката $\mathbf{x}^* \in X$ е такава, че за произволно $\mathbf{x} \in X$ е изпълнено $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})$.

Множествата $A \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$ и $B \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$ са дефинирани по следния начин: $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{m+n}) \in A$, ако съществува $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, такова че $a_0 \le f(\mathbf{x})$, $a_i \le -f_i(\mathbf{x})$ за $i \in I_1$, $a_i = -f(\mathbf{x})$ за $i \in I_2$, $a_{m+j} \le x_j$ за $j \in J$; $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{m+n}) \in B$, ако $b_0 > f(\mathbf{x})$, $b_i \ge 0$ за $i \in I_1$, $b_i = 0$ за $i \in I_2$, $b_{m+j} \le 0$ за $j \in J$. Да се докаже, че A и B са непразни непресичащи се изпъкнали множества.

8. Нека $f_i(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}_i, \mathbf{x} \rangle + d_i$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $i \in I = \{1, \dots, m\}$, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n$, $d_i \in \mathbb{R}$ и $\varphi(\mathbf{x}) = \sup\limits_{i \in I}\{f_i(\mathbf{x})\}$, $\psi(\mathbf{x}) = \inf\limits_{i \in I}\{f_i(\mathbf{x})\}$.

8.1. Да се покаже, че множествата $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\mathbf{x}) < \infty\}$ и $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \psi(\mathbf{x}) > -\infty\}$ са изпъкнали.

8.2. Да се покаже, че функцията φ е изпъкнала в A и функцията ψ е вдлъбната в B.

9. Да се покаже, че $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, е афинна функция тогава и само тогава, когато е едновременно изпъкнала и вдлъбната.

10. Нека $f_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, са изпъкнали функции, $\alpha_i \ge 0$, $i = 1, \dots, k$. Да се покаже, че функцията $f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(\mathbf{x})$ е изпъкнала.

11. Да се докаже, че ако функциите $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, n$, са изпъкнали, то функцията $\varphi(\mathbf{x}) = \max\limits_{i}\{f_i(\mathbf{x})\}$ е изпъкнала.

12. Нека функцията $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, е изпъкнала по $\mathbf{x}$ за всяко фиксирано $\mathbf{y} \in Y \subset \mathbb{R}^m$. Да се докаже, че функцията $\varphi(\mathbf{x}) = \sup\limits_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ е изпъкнала.

13. Нека $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, е изпъкнала функция, а $\mathbf{A}$ е матрица с размери $m \times n$. Разглеждаме функцията $h(\mathbf{y}) = \inf\limits_{X}\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}\}$. Да се докаже, че $h(\mathbf{y})$ е изпъкнала.

14. Да се докаже, че ако $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, е изпъкнала непрекъснато диференцуема функция, то:

14.1. Ако $\langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{t} \rangle > 0$ ($\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$), то $f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{t}) > f(\mathbf{x})$ за всяко $\lambda > 0$.

14.2. Ако $\langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{t} \rangle < 0$, то съществува число λ_0, такова че $f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{t}) < f(\mathbf{x})$ за $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

15. Да се докаже, че ако $f(\mathbf{x})$ е непрекъсната в изпъкнало множество $X \subset \mathbb{R}^n$ и $f\left(\frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}\right) \le \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2))$ за всеки две точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$, то $f(\mathbf{x})$ е изпъкнала в X.

16. Нека $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, е изпъкнала функция и $X \ne \emptyset$ е изпъкнало множество в $\mathbb{R}^n$. Да се докаже, че $\mathbf{x}^*$ е точно тогава точка на минимум на $f(\mathbf{x})$ в X, когато $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \ge 0$ за всяко $\mathbf{x} \in X$.

17. Нека $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение на задачата за минимизация на изпъкнала непрекъснато диференцуема функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, в изпъкнало множество $X \subset \mathbb{R}^n$. Да се докаже, че множеството от всички решения се състои от тези точки $\mathbf{x} \in X$, за които $\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^*, f'(\mathbf{x}^*) \rangle = 0$, $f'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}^*)$.

Отговори и решения

1. Нека $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \in B$, $\mathbf{y} \in B$. Ще покажем, че за всяко $\lambda \in [0, 1]$ за точката $\mathbf{x}_\lambda = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$ е изпълнено $\mathbf{x}_\lambda \in B$. Имаме

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_\lambda - \mathbf{x}_0\| &= \|\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| = \|\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + (1 - \lambda)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)\| \\ &\leq \|\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| + \|(1 - \lambda)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)\| \\ &= \lambda\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + (1 - \lambda)\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r,\end{aligned}$$

т. е. $\mathbf{x}_\lambda \in B$. За първото неравенство е използвано неравенството на Коши — Буняковски, а за второто — $\mathbf{x} \in B$, $\mathbf{y} \in B$.

2. Изпъкналостта на G следва от равенството

$$\begin{aligned}&\mu[\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}] + (1 - \mu)[\beta\mathbf{x} + (1 - \beta)\mathbf{y}] \\ &\qquad = [(1 - \mu)\beta + \mu\alpha]\mathbf{x} + [1 - ((1 - \mu)\beta + \mu\alpha)]\mathbf{y},\end{aligned}$$

$\mu \in [0, 1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

3.1. В общия случай — не; например за множеството от рационалните точки върху реалната права условието е изпълнено, но това множество не е изпъкнало.

3.2. Да (докажете).

4. За произволни $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ от X и произволно $i \in \{1, \ldots, m\}$ от изпъкналостта на f_i следва $f_i(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f_i(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f_i(\mathbf{y}) \leq 0$, $\lambda \in [0, 1]$. Множеството X е изпъкнало като сечение на краен брой изпъкнали множества.

5.1. Множеството от точки $\mathbf{x}$, за които $f(\mathbf{x}) - \alpha \leq 0$, е изпъкнало за всяко α (вж. задача 4).

5.2. Например всяка квазиизпъкнала функция (докажете).

Забележка. Функцията f се нарича *квазиизпъкнала* в изпъкналото множество $X \subset \mathbb{R}^n$, ако за произволни $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in X$ и $\lambda \in (0, 1)$ е изпълнено $f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \leq \max\{f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)\}$.

6.1. Да.

6.2. В общия случай не, но когато X_2 е празно или се състои от една точка — да.

7. За произволно $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ векторът $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{m+n})$, където $a_0 = f(\mathbf{x})$, $a_i = -f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, m$, $a_{m+j} = x_j$, $j = 1, \ldots, n$, принадлежи на A, а векторът $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{m+n})$, където $b_0 = f(x^*) + 1$, $b_i = 1$, $i \in I_1$, $b_i = 0$, $i \in I_2$, $b_{m+j} = 0$, $j = 1, \ldots, n$, принадлежи на B. Непосредствено се проверява, че никой елемент на A не принадлежи на B (разгледайте случая, когато векторът

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, определящ принадлежността на $\mathbf{a}$ към A, принадлежи на X, и случая, когато $\mathbf{x}$ не принадлежи на X). Множеството B е изпъкнало като сечение на изпъкнали множества. Ако $\mathbf{a}' = (a'_0, \dots, a'_{m+n})$ и $\mathbf{a}'' = (a''_0, \dots, a''_{m+n})$ принадлежат на A, $a'_0 \le f(\mathbf{x})$, $a''_0 \le f(\mathbf{y})$, $a'_i \le f_i(\mathbf{x})$, $a''_i \le f_i(\mathbf{y})$ за $i \in I_1$, $a'_i = -f_i(\mathbf{x})$, $a''_i = -f_i(\mathbf{y})$ за $i \in I_2$, $a'_{m+j} \le x_j$, $a''_{m+j} \le y_j$ за $j \in J$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, то за $\lambda \in (0,1)$ имаме $\lambda a'_0 + (1-\lambda)a''_0 \le f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})$, $\lambda a'_i + (1-\lambda)a''_i \le -f_i(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})$, $i \in I_1$, $\lambda a'_i + (1-\lambda)a''_i = -f_i(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})$, $i \in I_2$, $\lambda a'_{m+j} + (1-\lambda)a''_{m+j} \le \lambda x_j + (1-\lambda)y_j$, $j \in J$.

8. Изпъкналостта на A (съответно B) и изпъкналостта на функцията φ в A (вдлъбнатостта на ψ в B) следват съответно от неравенствата ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0,1)$):

$$\sup_{i\in I}\{f_i(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})\} \le \lambda \sup_{i\in I}\{f_i(\mathbf{x})\} + (1-\lambda)\sup_{i\in I}\{f_i(\mathbf{y})\},$$
$$\inf_{i\in I}\{f_i(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})\} \ge \lambda \inf_{i\in I}\{f_i(\mathbf{x})\} + (1-\lambda)\inf_{i\in I}\{f_i(\mathbf{y})\}.$$

10. Тъй като $\alpha_j \ge 0$ и f_j, $j = 1, \dots, n$, са изпъкнали, изпълнено е

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j f_j(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \le \sum_{j=1}^{k} \alpha_j[\lambda f_j(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)f_j(\mathbf{x}_2)] \text{ при } \lambda \in (0,1).$$

11. Следва от свойството на функцията максимум

$$\max_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] \le \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \max_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x})$$

и дефиницията на изпъкнала функция.

13. Нека $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}' + \beta\mathbf{x}''$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in \mathbb{R}^m$. Тогава

$$\begin{aligned}
h(\alpha\mathbf{y}' + \beta\mathbf{y}'') &= \inf_{\mathbf{x}}\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{A}\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}' + \beta\mathbf{y}''\} \\
&= \inf_{X',X''}\{f(\alpha\mathbf{x}' + \beta\mathbf{x}'') : \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}' + \beta\mathbf{x}'') = \alpha\mathbf{y}' + \beta\mathbf{y}''\} \\
&\le \inf_{X',X''}\{f(\alpha\mathbf{x}' + \beta\mathbf{x}'') : \mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{y}',\ \mathbf{A}\mathbf{x}'' = \mathbf{y}''\} \\
&\le \inf_{X',X''}\{\alpha f(\mathbf{x}') + \beta f(\mathbf{x}'') : \mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{y}',\ \mathbf{A}\mathbf{x}'' = \mathbf{y}''\} \\
&= \inf_{X'}\{\alpha f(\mathbf{x}') : \mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{y}'\} + \inf_{X''}\{\beta f(\mathbf{x}'') : \mathbf{A}\mathbf{x}'' = \mathbf{y}''\} \\
&= \alpha h(\mathbf{x}') + \beta h(\mathbf{x}'').
\end{aligned}$$

За първото неравенство е използвано, че

$$\{\mathbf{x}', \mathbf{x}'' : \mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{y}',\ \mathbf{A}\mathbf{x}'' = \mathbf{y}''\} \subset \{\mathbf{x}', \mathbf{x}'' : \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}' + \beta\mathbf{A}\mathbf{x}' = \alpha\mathbf{y}' + \beta\mathbf{y}''\},$$

за второто — изпъкналостта на f.

14.1. От изпъкналостта на $f(\mathbf{x})$ (свойство 1°) имаме $f(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{t}) \geq f(\mathbf{x}) + \lambda\langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{t}\rangle > f(\mathbf{x})$ за $\lambda > 0$.

14.2. От същото свойство

$$f(\mathbf{x}) = f((\mathbf{x}+\lambda\mathbf{t}) + (-\lambda\mathbf{t})) \geq f(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{t}) - \lambda\langle f'(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{t}), \mathbf{t}\rangle > f(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{t})$$

за достатъчно малки λ. Наистина, $\langle f'(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{t}), \mathbf{t}\rangle < 0$ за достатъчно малки λ, тъй като $\langle f'(\mathbf{x}), \mathbf{t}\rangle < 0$ и f' е непрекъсната.

16. *Необходимост.* Нека $\mathbf{x}^*$ е точка на минимум на f в X. Да допуснем, че $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}-\mathbf{x}^*\rangle < 0$ за някаква точка $\mathbf{x} \in X$. Тогава (вж. задача 14.2) съществува λ', такова че $f(\mathbf{x}^* + \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)) < f(\mathbf{x}^*)$ за всяко $\lambda \in (0, \lambda')$. Но за $\lambda \in (0, 1)$ имаме $\mathbf{x}^* + \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) \in X$ и следователно за $\lambda > 0$, $\lambda \leq \min(1, \lambda')$, горното неравенство противоречи на оптималността на $\mathbf{x}^*$. Следователно $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}-\mathbf{x}^*\rangle \geq 0$.

Достатъчност. Нека сега $\langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}-\mathbf{x}^*\rangle \geq 0$ за всяко $\mathbf{x} \in X$. От изпъкналостта на $f(\mathbf{x})$ имаме $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geq \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}-\mathbf{x}^*\rangle \geq 0$ за всяко $\mathbf{x} \in X$, т. е. $\mathbf{x}^*$ е точка на минимум на f.

17. Да означим с Q множеството

$$Q = \{\mathbf{x} \in X : \langle \mathbf{x}-\mathbf{x}^*, f'(\mathbf{x}^*)\rangle = 0,\ f'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}^*)\}.$$

Необходимост. Нека $\mathbf{x}$ е допустима точка и $\mathbf{x} \in Q$. От изпъкналостта на $f(\mathbf{x})$ (свойство 1°) имаме

$$f(\mathbf{x}^*) - f(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{x}^*-\mathbf{x}, f'(\mathbf{x})\rangle = \langle \mathbf{x}^*-\mathbf{x}, f'(\mathbf{x}^*)\rangle = 0.$$

И тъй като $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$, следва $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*)$.

Достатъчност. Нека сега $\mathbf{x}'$ е оптимално решение на задачата, т. е. $\mathbf{x}'$ е допустима и $f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}^*)$. Ще покажем, че $\mathbf{x}' \in Q$. От изпъкналостта на $f(\mathbf{x})$ следва $f(\mathbf{x}^* + \lambda(\mathbf{x}'-\mathbf{x}^*)) = f(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}')$ за $\lambda \in (0, 1)$. Тъй като за вектора $\mathbf{t} = \mathbf{x}'-\mathbf{x}^*$ имаме $f(\mathbf{x}^*+\lambda\mathbf{t}) = f(\mathbf{x}^*)$, то (вж. задача 14) $\langle f'(\mathbf{x}^*), t\rangle = 0$, т. е. $\langle \mathbf{x}'-\mathbf{x}^*, f'(\mathbf{x}^*)\rangle = 0$. Остава да покажем, че $f'(\mathbf{x}') = f'(\mathbf{x}^*)$. Разглеждаме функцията $\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{x}-\mathbf{x}^*, f'(\mathbf{x}^*)\rangle$. Тя е изпъкнала. При това $\varphi(\mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x}^*)$; $\varphi'(\mathbf{x}^*) = 0$; $\varphi'(\mathbf{x}') = f'(\mathbf{x}') - f'(\mathbf{x}^*)$. Ако допуснем, че $f'(\mathbf{x}') \neq f'(\mathbf{x}^*)$, то $\varphi(\mathbf{x}') \neq 0$, т. е. съществува вектор $\mathbf{t}$, такъв че $\langle \mathbf{t}, \varphi'(\mathbf{x}')\rangle < 0$ и за достатъчно малки $\lambda > 0$ имаме $\varphi(\mathbf{x}'+\lambda\mathbf{t}) < \varphi(\mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x}^*)$. Но $\varphi(\mathbf{x}'+\lambda\mathbf{t}) \geq \varphi(\mathbf{x}^*)$, тъй като $\varphi(\mathbf{x})$ е изпъкнала и има минимум в $\mathbf{x}^*$ поради $\varphi'(\mathbf{x}^*) = 0$. Следователно $f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}^*)$, т. е. $\mathbf{x}' \in Q$.