Упражнение 11–13

Класическа транспортна задача

Класическата транспортна задача (КТЗ) е специален случай на задачата на линейното оптимиране. Тя е една от първите ЗЛО. Формулирана е от американеца Хичкок през 1939 г. КТЗ представлява самостоятелен интерес поради специфичните свойства, които притежава. Решаването на КТЗ със симплекс метода е свързано с голяма изчислителна работа. Затова са разработени специални методи за нейното решаване.

1. Икономически и математически модел

1.1. Икономически модел

Даден вид продукт е произведен в пунктовете $A_1, \ldots, A_m$ (наричани *производители*, *доставчици*, *складове*) съответно в количества $a_1, \ldots, a_m$. Пунктовете $B_1, \ldots, B_n$ (наричани *потребители*, *магазини*) се нуждаят от този продукт в количества съответно $b_1, \ldots, b_n$, като

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1}$$

Транспортните разходи за превоз на единица продукт от пункта A_i до пункта B_j са съответно c_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Задачата е: да се направи план за снабдяването на пунктовете B_j, $j = 1, \ldots, n$, така че потребностите им да бъдат изцяло задоволени и общите транспортни разходи да бъдат минимални.

1.2. Математически модел

Да означим с x_{ij} количеството продукт, с което пунктът A_i, $i = 1, \ldots, m$, снабдява пункта B_j, $j = 1, \ldots, n$. При план на снабдяване $\mathbf{x} = (x_{11}, \ldots, x_{mn})^{\mathrm{T}}$ целевата функция е

$$z(x_{11}, \ldots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{2}$$

а условията (транспортните ограничения) са

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

1.3. Транспортни задачи от отворен тип

В практиката много по-често се срещат транспортни задачи, при които баланс между производство и потребление няма. Те се наричат *транспортни задачи от отворен тип*. За решаването им е необходимо изкуствено да бъде създаден баланс.

Случай I.

Производството е по-голямо от потреблението (има икономически смисъл):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

За да има баланс, се въвежда *фиктивен потребител* B_{n+1} с потребност

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

и транспортни разходи от всеки производител до него съответно $c_{i,n+1} = 0$, $i = 1, \ldots, m$. След получаването на оптималното решение количествата продукт, предназначени за фиктивния потребител, просто остават у съответните производители. Математическият модел на КТЗ се променя, като ограниченията (3) стават от вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Добавянето на допълнителни променливи в лявата страна на тези ограничения е еквивалентно на въвеждането на фиктивен потребител.

Случай II.

Потреблението е по-голямо от производството:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Постъпва се аналогично: въвежда се *фиктивен производител* A_{m+1} с производство

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

и транспортни разходи до всеки потребител съответно $c_{m+1,j} = 0$, $j = 1, \dots, n$. В този случай във формулировката на транспортната задача се премахва изискването потребностите на потребителите да бъдат изцяло задоволени, тъй като това би довело до несъвместими ограничения. Вместо него се иска цялата продукция да бъде превозена при минимални транспортни разходи. Математическият модел на КТЗ се променя, като ограниченията (4) стават от вида

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Добавянето на допълнителни променливи в лявата страна на тези ограничения е еквивалентно на въвеждането на фиктивен производител. След получаването на оптималното решение количествата продукт, които трябва да бъдат доставени от фиктивния производител на съответните потребители, просто остават у него и не се превозват.

2. Основни свойства на КТЗ

Без ограничение на общността предполагаме, че $a_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, $b_j > 0$, $j = 1, \dots, n$ (иначе намаляваме броя на производителите или потребителите, а съответните променливи на задачата са равни на нула).

КТЗ (2)–(5) очевидно е КЗЛО и може да се запише във вида $\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d}$, $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$, където $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{nm}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nm}$, $\mathbf{A}$ е матрица $(m+n)\times mn$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{m+n}$, $\mathbf{d} = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)^{\mathrm{T}}$. Един допустим вектор $\mathbf{x} = (x_{11}, \dots, x_{mn})^{\mathrm{T}}$ понякога се записва като матрица $\mathbf{X}$ с елементи x_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, която се нарича *матрица на превозите*. Аналогично се определя и *матрица на транспортните разходи* $\mathbf{C}$, чиито елементи са c_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Теорема 1. Задача (2)–(5) има оптимално решение тогава и само тогава, когато е налице *условието за баланс* (1).

Матрицата **A** се състои от нули и единици, като във всеки стълб има точно два ненулеви елемента, защото променливата x_{ij} участва с коефициент 1 само в две ограничения — i-тото и $m+j$-тото.

Теорема 2. Рангът на матрицата **A** е равен на $m+n-1$.

3. Транспортна таблица. Основни понятия

При различните методи за решаване на КТЗ се използват правоъгълни таблици и някои понятия, свързани с тях. Правоъгълната таблица има редове и стълбове, образуващи клетки. Всяка клетка се определя с наредена двойка индекси (i, j), където i е номерът на реда, а j — номерът на стълба, в който се намира клетката. Тогава има взаимноеднозначно съответствие между координатите на едно допустимо решение на КТЗ и клетките на тази таблица, като на координатата x_{ij} съответства клетката (i, j).

Всички данни за дадено бдр на КТЗ могат да бъдат подредени в правоъгълна таблица (наричана *транспортна таблица*), както е показано на табл. 1.

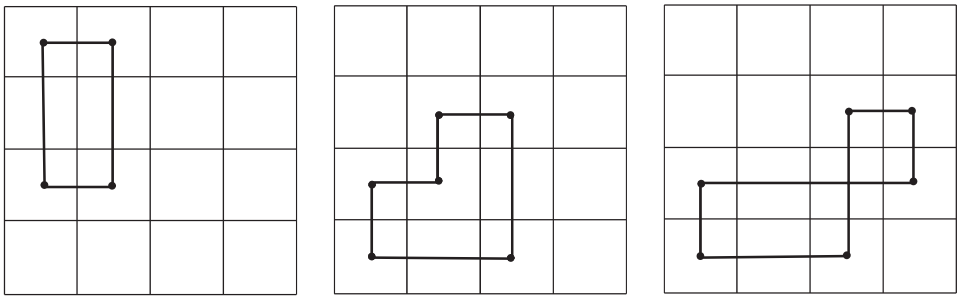
Таблица 1

x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	....	x_{1n} c_{1n}	a_1
x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	....	x_{2n} c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	....	$\vdots$	$\vdots$
x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	....	x_{mn} c_{mn}	a_m
b_1	b_2	....	b_n	a b

Ако за дадено бдр $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}_{m,n}$ координатата x_{ij} е базисна, клетката (i, j) също ще наричаме *базисна* (или *пълна*, тъй като там се записва съответната стойност на x_{ij}). Ако x_{ij} е небазисна, клетката (i, j) ще наричаме *небазисна* (или *празна*, защото там не се записва никаква стойност).

Определение 1. Съвкупност от клетки на транспортната таблица се нарича *цикъл*, ако начупената линия, образувана от отсечки с върхове в тези клетки, е затворена и от всеки две отсечки с общ връх едната лежи в ред, а другата — в стълб на транспортната таблица. Съвкупност от клетки в транспортната таблица, която съдържа цикъл, се нарича *циклична*. В противен случай се нарича *ациклична*.

От горното определение следва, че всеки цикъл се състои от четен брой клетки. Във всеки цикъл две последователни (съседни) клетки имат равни първи или втори индекси, т. е. съседните клетки лежат в един и същи ред или стълб на транспортната таблица. Примери на цикли са дадени на фиг. 1.



Фиг. 1. Цикли. Върховете (клетките) на цикъла са означени с черни точки

Теорема 3. Необходимо и достатъчно условие произволна съвкупност от вектор-стълбове на матрицата на транспортните ограничения да бъде линейно независима е съответните ѝ клетки в транспортната таблица да не съдържат цикъл.

Теорема 4. Необходимо и достатъчно условие допустимият вектор $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}_{m,n}$ да бъде бдр за КТЗ е клетките (i, j), за които $x_{ij} > 0$, да не съдържат цикъл.

Теорема 5. Нека $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}_{m,n}$ е бдр за КТЗ. За всяка празна клетка (i, j) съществува точно един цикъл, който я свързва с базисните (пълните) клетки на $\mathbf{x}$.

4. Намиране на начално бдр

Първа стъпка при решаване на КТЗ е построяването на начално бдр. За разлика от каноничната задача на линейното оптимиране при транспортната задача това се осъществява лесно. Има различни методи за построяване на начално бдр. Спираме се на два от тях — *метод на северозападния ъгъл* и *метод на минималния елемент*.

4.1. Метод на северозападния ъгъл

Определяме $\min\{a_1, b_1\}$.

- Ако $\min\{a_1, b_1\} = a_1$, полагаме $x_{11} = a_1$, $x_{1j} = 0$, $j = 2, \ldots, n$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на първия ред и коригиране на b_1: $b'_1 = b_1 - a_1$.

- Ако $\min\{a_1, b_1\} = b_1$, полагаме $x_{11} = b_1$, $x_{i1} = 0$, $i = 2, \ldots, m$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на първия стълб и коригиране на a_1: $a'_1 = a_1 - b_1$.

- Ако $a_1 = b_1$, отстраняваме или първия стълб, или първия ред, но само единия от тях и след направената корекция се получава или $b'_1 = 0$, или $a'_1 = 0$. Това нулево количество участва пълноправно по-нататък. В този случай винаги се получава изродено бдр.

С получената таблица, която има един размер по-малко от предишната, повтаряме описаните по-горе процедури. Така след точно $m + n - 1$ стъпки стигаме до таблица, състояща се от една клетка (или таблица с един ред и един стълб). В този случай двете количества a'_1 и b'_1 са равни и чак сега се елиминират и ред, и стълб. Пълните клетки в транспортната таблица са точно $m + n - 1$ и освен това образуват ациклична съвкупност, т. е. в тях се намират базисните координати на полученото бдр.

Наименованието на метода идва от това, че x_{11} е разположена в „северозападната“ клетка на таблицата.

4.2. Метод на минималния елемент

Намираме $c_{i_0 j_0} = \min\limits_{i,j} c_{ij}$. След това определяме $\min\{a_{i_0}, b_{j_0}\}$.

- Ако $\min\{a_{i_0}, b_{j_0}\} = a_{i_0}$, полагаме $x_{i_0 j_0} = a_{i_0}$, $x_{i_0 j} = 0$, $j \neq j_0$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на реда i_0 и коригиране на b_{j_0}: $b'_{j_0} = b_{j_0} - a_{i_0}$.

- Ако $\min\{a_{i_0}, b_{j_0}\} = b_{j_0}$, полагаме $x_{i_0 j_0} = b_{j_0}$, $x_{i j_0} = 0$, $i \neq i_0$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на стълба j_0 и коригиране на a_{i_0}: $a'_{i_0} = a_{i_0} - b_{j_0}$.

- Ако $a_{i_0} = b_{j_0}$, отстраняваме или j_0-я стълб, или i_0-я ред, но само единия от тях и след направената корекция се получава или $b'_{j_0} = 0$, или $a'_{i_0} = 0$. Това нулево количество участва пълноправно по-нататък. В този случай винаги се получава изродено бдр.

С получената таблица повтаряме описаните процедури, както в метода на северозападния ъгъл.

Пример 1. Да се приложат

а) методът на северозападния ъгъл

б) методът на минималния елемент

за намиране на бдр на транспортната задача, зададена с табл. 2.

Таблица 2

3	5	7	11	100
1	4	6	3	130
5	8	12	7	170
150	120	80	50	

Решение. Намирането на начално бдр по метода на северо-западния ъгъл е илюстрирано с табл. 3. Редът за отстраняване на редове (респ. стълбове) при получаване на редуцираните таблици е означен отляво (за редовете) и отгоре (за стълбовете) на таблицата с римски цифри. Транспортните разходи за намереното бдр са 2300.

Таблица 3

	II	IV	V	VI	
I	3 100	5	7	11	~~100~~
III	1 50	4 80	6	3	~~130~~ ~~80~~
VI	5	8 40	12 80	7 50	~~170~~ ~~130~~ ~~50~~
	~~150~~ ~~50~~	~~120~~ ~~40~~	~~80~~	~~50~~	

Намирането на бдр на същата задача по метода на минималния елемент е илюстрирано на табл. 4. Транспортните разходи за това бдр са 2220. По-късно ще видим, че за оптималното решение те са 2040.

Таблица 4

	II	V	VI	IV	
III	$\boxed{3}$ 20	$\boxed{5}$ 80	$\boxed{7}$	$\boxed{11}$	~~100~~ ~~80~~
I	$\boxed{1}$ 130	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$	~~130~~
VI	$\boxed{5}$	$\boxed{8}$ 40	$\boxed{12}$ 80	$\boxed{7}$ 50	~~170~~ ~~120~~ ~~80~~
	~~150~~ ~~20~~	~~120~~ ~~40~~	~~80~~	~~50~~	

5. Разпределителен метод за решаване на КТЗ

Според теорема 1 условието за баланс е необходимо и достатъчно, за да има КТЗ оптимално решение. Така от алгоритъма на симплекс метода отпада критерият за неограниченост на целевата функция и остават само два елемента — критерий за оптималност и правило за преминаване от едно бдр към съседно на него, при което стойността на целевата функция се подобрява.

5.1. Критерий за оптималност

Нека $\bar{\mathbf{x}}$ е бдр и (k, l) е празна клетка. Образуваме единствения цикъл γ_{kl}, който я свързва с клетките от базиса на $\bar{\mathbf{x}}$

$$\gamma_{kl} : (k, l)(k, j_1) \dots (i_s, j_s)(i_s, l).$$

Клетките от цикъла маркираме алтернативно със знаци $+$ и $-$, започвайки от клетката (k, l) със знак $+$. Тогава относителната оценка на променливата x_{kl} е

$$\overline{c}_{kl} = \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^+} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^-} c_{ij},$$

където $\gamma_{kl}^+ = \{(i, j) \in \gamma_{kl}, \text{ означени с } +\}$, $\gamma_{kl}^- = \{(i, j) \in \gamma_{kl}, \text{ означени с } -\}$.

Теорема 6. Бдр на задача (2)–(5) е оптимално тогава и само тогава, когато $\overline{c}_{kl} \geq 0$ за всички негови празни клетки (k, l).

Теорема 6 следва непосредствено от условията за оптималност на каноничната линейна задача.

5.2. Преминаване от едно бдр към съседно на него

Теорема 7. Нека $\overline{\mathbf{x}}$ е бдр на задача (2)–(5). Тогава векторът $\overline{\mathbf{x}}'$, получен от $\overline{\mathbf{x}}$ по формулите

$$\begin{aligned} &\overline{x}'_{ij} = \overline{x}_{ij} + \overline{x}_{i_p j_p}, && (i,j) \in \gamma^{+}_{kl}, \\ &\overline{x}'_{ij} = \overline{x}_{ij} - \overline{x}_{i_p j_p}, && (i,j) \in \gamma^{-}_{kl}, \\ &\overline{x}'_{ij} = \overline{x}_{ij}, && (i,j) \notin \gamma_{kl}, \quad \overline{x}_{i_p j_p} = \min_{(i,j)\in\gamma^{-}_{kl}} \overline{x}_{ij}, \end{aligned} \tag{6}$$

е бдр на задача (2)–(5), като $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{x}}'$ са съседни.

Теорема 7 следва непосредствено от формулите за преминаване от едно бдр на каноничната задача на линейното оптимиране към съседно на него.

5.3. Алгоритъм на разпределителния метод

Този метод е вариант на симплекс метода за решаване на каноничната задача на линейното оптимиране и може да се опише с помощта на следния алгоритъм:

1. Построяваме начално бдр $\overline{\mathbf{x}}$ по някой от изложените методи. Преминаваме към т. 2.

2. За всяка празна клетка (i, j) на $\overline{\mathbf{x}}$ построяваме цикъла γ_{ij} и пресмятаме $\overline{c}_{ij}$. Проверяваме критерия за оптималност (теорема 6). Ако той е изпълнен, то бдр е оптимално и задачата е решена. *Край.*

   Ако критерият за оптималност не е изпълнен, преминаваме към т. 3.

3. Намираме $\overline{c}_{i_0 j_0} = \min\{\overline{c}_{ij} : \overline{c}_{ij} < 0\}$. Построяваме ново бдр $\overline{\mathbf{x}}'$ по формулите (6) с помощта на цикъла $\gamma_{i_0 j_0}$, свързващ клетката (i_0, j_0) с базисните клетки на $\overline{\mathbf{x}}$. Преминаваме към т. 2, като вместо $\overline{\mathbf{x}}$ вземаме $\overline{\mathbf{x}}'$.

Пример 2. Да се приложи разпределителният метод за решаване на задачата, дадена с табл. 2.

Решение.

Итерация 0:

1. За начално бдр $\mathbf{x}^{(0)}$ използуваме намереното в табл. 3.

2. Проверяваме условията за оптималност. За целта пресмятаме относителните оценки на небазисните променливи (празните клетки). Това

извършваме по редове отляво надясно. Първата празна клетка при тази наредба е $(1,2)$. Нейният цикъл

$$\gamma_{12} : \underset{+}{(1,2)}\underset{-}{(2,2)}\underset{+}{(2,1)}\underset{-}{(1,1)}$$

е показан с пунктир на табл. 5. Така $\bar{c}_{12} = (5+1)-(4+3) = 6-7 = -1 < 0$.

Таблица 5

3 100 −	5 +	7	11
1 50 +	4 80 −	6	3
5	8 40	12 80	7 50

Следователно $\mathbf{x}^{(0)}$ не е оптимално бдр.

3. Тъй като проверката на критерия за оптималност при разпределителния метод е свързана с намирането на цикъла на всяка празна клетка, намирането на всички относителни оценки е доста продължителен процес. Затова в този пример ще вкарваме в базиса първата празна клетка, която не удовлетворява критерия за оптималност. В случая това е клетката $(1,2)$. Минималното количество в клетките, отбелязани с $-$, е 80.

Итерация 1:

1. Определяме координатите на новото бдр $\mathbf{x}^{(1)}$ (вж. табл. 6) по формули (6).

Таблица 6

3 20	5 80 −	7 +	11
1 130	4	6	3
5	8 40 +	12 80 −	7 50

2. Първата празна клетка е $(1,3)$. Нейният цикъл

$$\gamma_{13} : \underset{+}{(1,3)}\underset{-}{(3,3)}\underset{+}{(3,2)}\underset{-}{(1,2)}$$

   е показан с пунктир на табл. 6. Така $\overline{c}_{13} = (7+8) - (12+5) = 15 - 17 = -2 < 0$. Следователно $\mathbf{x}^{(1)}$ не е оптимално бдр.

3. Минималното количество в отбелязаните с $-$ клетки е равно на 80. То се среща в две от тези клетки. Това означава, че следващото бдр ще бъде изродено.

Итерация 2:

1. Определяме координатите на новото бдр $\mathbf{x}^{(2)}$ (вж. табл. 7) по формули (6), като изваждаме от базиса клетката $(3,3)$. Тогава клетката $(1,2)$ става базисна нула (в тази клетка записваме числото 0 и не я оставяме празна).

Таблица 7

[3] 20 $-$	[5] 0 $+$	[7] 80	[11]
[1] 130	[4]	[6]	[3]
[5] $+$	[8] 120 $-$	[12]	[7] 50

2. Последователно намираме циклите и относителните оценки на празните клетки на това бдр:

$$\gamma_{14} : \underset{+}{(1,4)}\underset{-}{(3,4)}\underset{+}{(3,2)}\underset{-}{(1,2)},$$
$$\overline{c}_{14} = (11+8) - (7+5) = 19 - 12 = 7 > 0,$$
$$\gamma_{22} : \underset{+}{(2,2)}\underset{-}{(2,1)}\underset{+}{(1,1)}\underset{-}{(1,2)},$$
$$\overline{c}_{22} = (4+3) - (1+5) = 7 - 6 = 1 > 0,$$
$$\gamma_{23} : \underset{+}{(2,3)}\underset{-}{(2,1)}\underset{+}{(1,1)}\underset{-}{(1,3)},$$
$$\overline{c}_{23} = (6+3) - (1+7) = 9 - 8 = 1 > 0,$$
$$\gamma_{24} : \underset{+}{(2,4)}\underset{-}{(2,1)}\underset{+}{(1,1)}\underset{-}{(1,2)},\underset{+}{(3,2)}\underset{-}{(3,4)},$$

$$\bar{c}_{24} = (3+3+8) - (1+5+7) = 14 - 13 = 1 > 0,$$

$$\gamma_{31} : \underset{+}{(3,1)}\underset{-}{(3,2)}\underset{+}{(2,1)}\underset{-}{(1,1)},$$

$$\bar{c}_{31} = (5+5) - (8+3) = 10 - 11 = -1 < 0.$$

3. Минималното количество в отбелязаните с $-$ клетки е равно на 20.

Итерация 3:

1. Определяме координатите на новото бдр $\mathbf{x}^{(3)}$ (вж. табл. 8) по формули (6).

Таблица 8

3	5 20	7 80	11
1 130	4	6	3
5 20	8 100	12	7 50

2. Последователно намираме циклите и относителните оценки на празните клетки на това бдр: $\bar{c}_{11} = 1$, $\bar{c}_{14} = 7$, $\bar{c}_{22} = \bar{c}_{23} = \bar{c}_{24} = 0$, $\bar{c}_{34} = 2$. Следователно $\mathbf{x}^{(3)}$ е оптимално бдр. Оптималната стойност на целевата функция е 2040.

Остава само да отбележим, че относителните оценки на празните клетки във втория ред на таблицата са равни на нула. Това означава, че задачата има и други оптимални решения. Те се получават (още три на брой), като вкараме последователно в базиса тези три празни клетки. Така задачата притежава четири оптимални бдр. Да ги означим с $\mathbf{x}^{(3)}$, $\mathbf{x}^{(4)}$, $\mathbf{x}^{(5)}$ и $\mathbf{x}^{(6)}$. Общият вид на оптималните решения представлява изпъкналата обвивка на тези четири бдр

$$\mathbf{x}^{*} = \sum_{j=3}^{6} \lambda_j \mathbf{x}^{(j)}, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 3, \dots, 6, \quad \sum_{j=3}^{6} \lambda_j = 1.$$

6. Метод на потенциалите

Този метод е вариант на двойствения симплекс метод.

6.1. Критерий за оптималност

Двойнствената задача на задача (2)–(5) е

$$\max w = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$$

при ограничения

$$v_j - u_i \le c_{ij}, \ i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n.$$

Двойствените променливи, отговарящи на ограниченията (3), са означени с $-u_i$, $i = 1, \dots, m$, а тези, отговарящи на ограниченията (4) са означени с v_j, $j = 1, \dots, n$. Прието е те да се наричат *потенциали*.

Лесно може да се провери, че ако $(-u_1, \dots, -u_m, v_1, \dots, v_n)^{\mathrm{T}}$ е допустим вектор за горната задача, то и векторът $(-u_1 - h, \dots, -u_m - h, v_1 + h, \dots, v_n + h)^{\mathrm{T}}$, където $h = \mathrm{const}$, също е допустим за нея. Това означава, че всеки допустим вектор за тази двойствена задача е определен с точност до адитивна константа.

Теорема 8. Необходимо и достатъчно условие бдр $\bar{\mathbf{x}}$ да бъде оптимално решение на задача (2)–(5) е да съществува вектор $(-u_1, \dots, -u_m, v_1, \dots, v_n)^{\mathrm{T}}$, такъв че

$$v_j - u_i \le c_{ij} \text{ за } i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n, \tag{7}$$

$$v_j - u_i = c_{ij} \text{ за } x_{ij} > 0. \tag{8}$$

Теорема 8 следва от теоремите за двойнственост на общата задача на линейното оптимиране.

6.2. Алгоритъм на метода на потенциалите

Методът на потенциалите може да се опише с помощта на следния алгоритъм:

1. Построяваме начално бдр $\bar{\mathbf{x}}$ по някой от изложените методи. Преминаваме към т. 2.

2. Решаваме системата $v_j - u_i = c_{ij}$ за пълните (базисните) клетки на $\bar{\mathbf{x}}$. Тъй като броят на уравненията е $m + n - 1$, а броят на неизвестните е $m + n$, решението на системата е определено с точност до константа.

3. Проверяваме условията за оптималност (теорема 8). Ако те са изпълнени, бдр е оптимално и задачата е решена. *Край.*

   Ако условията за оптималност не са изпълнени, преминаваме към т. 4.

4. Определяме празна клетка (i_0, j_0), за която не е изпълнен критерият за оптималност, със свойството $c_{i_0 j_0} - v_{j_0} + u_{i_0} = \min\{c_{ij} - v_j + u_i : x_{ij} = 0\}$. Свързваме клетката (i_0, j_0) с базисните клетки чрез единствения цикъл. Построяваме ново бдр по формулите (6) и преминаваме към т. 2.

Забележка. Изборът на клетката (i_0, j_0) по начина, изложен в т. 3 на разпределителния метод (респ. т. 4 от метода на потенциалите), не е съществен, но се прави, за да има еднозначност при описанието на алгоритъма. Клетката (i_0, j_0) може да бъде произволно избрана между клетките (i, j), за които $\overline{c}_{ij} < 0$ (респ. $c_{ij} - v_j + u_i < 0$).

Пример 3. Да се приложи методът на потенциалите за решаване на задачата, дадена с таблицата

Таблица 9

1	5	30
7	2	60
3	10	60
90	30	

Решение. Задачата е от отворен тип. Превръщаме я в КТЗ с добавянето на фиктивен стълб (табл. 10).

Таблица 10

1	5	0	30
7	2	0	60
3	10	0	60
90	30	30	

Итерация 0:

1. Намираме начално бдр $\mathbf{x}^{(0)}$ по метода на северозападния ъгъл. Информацията за него се намира в табл. 11. Вижда се, че това бдр е изродено. Базисната нула може да бъде поставена и в клетката $(3, 1)$ вместо в $(2, 2)$.

Таблица 11

$\boxed{1}$ 30	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	30
$\boxed{7}$ 60	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{0}$	60
$\boxed{3}$	$\boxed{10}$ 30	$\boxed{0}$ 30	60
90	30	30	

2. Решаваме системата

$$v_1 - u_1 = 1,\ v_1 - u_2 = 7,\ v_2 - u_2 = 2,\ v_2 - u_3 = 10,\ v_3 - u_3 = 0.$$

Полагайки $u_3 = 0$, намираме $v_3 = 0$, $v_2 = 10$, $u_2 = 8$, $v_1 = 15$, $u_1 = 14$. Нанасяме потенциалите, както е показано в табл. 12.

Таблица 12

u_i \ v_j	15	10	0
14	$\boxed{1}$ 30	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$
8	$\boxed{7}$ 60	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{0}$
0	$\boxed{3}$	$\boxed{10}$ 30	$\boxed{0}$ 30

3. Проверяваме условията за оптималност:

$$v_2 - u_1 = -4 < 5 = c_{12}, \quad v_3 - u_1 = -14 < 0 = c_{13},$$
$$v_3 - u_2 = -8 < 0 = c_{23}, \quad v_1 - u_3 = 15 > 1 = c_{31}.$$

Бдр не е оптимално.

4. Цикълът на клетката $(3,1)$ е

$$\gamma_{31} : \underset{+}{(3,1)}\underset{-}{(3,2)}\underset{+}{(2,2)}\underset{-}{(2,1)}.$$

Минималното количество в маркирана с $-$ клетка е 30.

Итерация 1:

1. Определяме координатите на новото бдр $\mathbf{x}^{(1)}$ (вж. табл. 13) по формули (6).

Таблица 13

$u_i \backslash v_j$	3	-2	0
2	30 $\boxed{1}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$
-4	30 $\boxed{7}$	30 $\boxed{2}$	$\boxed{0}$
0	30 $\boxed{3}$	$\boxed{10}$	30 $\boxed{0}$

2. Решаваме системата

$$v_1 - u_1 = 1,\ v_1 - u_2 = 7,\ v_1 - u_3 = 3,\ v_2 - u_2 = 2,\ v_3 - u_3 = 0.$$

Полагайки $u_3 = 0$, намираме $v_3 = 0$, $v_1 = 3$, $u_2 = -4$, $v_2 = -2$, $u_1 = 2$.

3. Проверяваме условията за оптималност:

$$\begin{aligned} v_2 - u_1 &= -4 < 5 = c_{12}, & v_3 - u_1 &= -2 < 0 = c_{13}, \\ v_3 - u_2 &= 4 > 0 = c_{23}, & v_2 - u_3 &= -2 < 10 = c_{31}. \end{aligned}$$

Бдр не е оптимално.

4. Цикълът на клетката $(2,3)$ е

$$\gamma_{23} : \underset{+}{(2,3)}\underset{-}{(3,3)}\underset{+}{(3,1)}\underset{-}{(2,1)}.$$

Минималното количество в маркирана с $-$ клетка е 30. То се среща два пъти, откъдето следва, че следващото бдр е изродено.

Таблица 14

$u_i \backslash v_j$	7	2	0
6	$\boxed{1}$ 30	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$
0	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{2}$ 30	$\boxed{0}$ 30
4	$\boxed{3}$ 60	$\boxed{10}$	$\boxed{0}$

Итерация 2:

1. Определяме координатите на новото бдр $\mathbf{x}^{(2)}$ (вж. табл. 14) по формули (6).

2. Решаваме системата

$$v_1 - u_1 = 1,\ v_2 - u_2 = 2,\ v_1 - u_2 = 7,\ v_3 - u_2 = 0,\ v_1 - u_3 = 3.$$

   Полагайки $u_2 = 0$, намираме $v_3 = 0$, $v_1 = 7$, $v_2 = 2$, $u_3 = 4$, $u_1 = 6$.

3. Проверяваме условията за оптималност:

$$\begin{aligned} v_2 - u_1 &= -4 < 5 = c_{12}, & v_3 - u_1 &= -6 < 0 = c_{13}, \\ v_2 - u_3 &= -2 < 10 = c_{32}, & v_3 - u_3 &= -4 < 0 = c_{33}. \end{aligned}$$

   Това бдр е оптимално. Стойността на целевата функция е 270.

Задачи

1. Да се докаже, че задача (2)–(5) е изродена тогава и само тогава, когато съществуват индекси $i_1, \dots, i_p$, $p < m$, $j_1, \dots, j_q$, $q < n$, такива че $a_{i_1} + \cdots + a_{i_p} = b_{j_1} + \cdots + b_{j_q}$.

2. Да се докаже, че ако КТЗ е изродена, то съществува $\mu > 0$, такова че за всяко $\varepsilon \le \mu$ задачата $T(\varepsilon)$, за която $\mathbf{a}(\varepsilon) = (a_1 + \varepsilon, \dots, a_m + \varepsilon)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b}(\varepsilon) = (b_1, \dots, b_{n-1}, b_n + m\varepsilon)^{\mathrm{T}}$, е неизродена.

3. Да се докаже, че ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са целочислени в (2)–(5), то задачата, за която $\mathbf{a}' = (a_1, \dots, a_{m-1}, a_m + 1)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b}' = \left(b_1 + \frac{1}{n}, \dots, b_n + \frac{1}{n}\right)^{\mathrm{T}}$, не може да бъде изродена.

4. Да се докаже, че ако КТЗ има само едно изродено бдр, то съществува само една двойка индекси (s,t), такива че $a_s + b_t = a_1 + \cdots + a_m$.

5. Нека

$$M(a,b,D) = \left\{ x = \{x_{ij}\} : \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ 0 \le x_{ij} \le d_{ij} \right\}.$$

Да се докаже, че необходимото и достатъчно условие $M(a,b,D) \neq \emptyset$ е

$$\sum_{i=1}^{m} \min\left(a_i, \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \right) \ge \sum_{j \in J} b_j, \quad J \subset \{1,\dots,n\}.$$

6. Да се докаже, че ако съществува двойка индекси (l,t), такива че $c_{it} - c_{lt} > \max_{j \neq t}(c_{ij} - c_{lj})$, $i = 1,\dots,l-1,l+1,\dots,m$, то за всяко оптимално решение $\mathbf{x} = (x_{ij})$ на КТЗ имаме $x_{lt} = \min(a_l, b_t)$.

7. Дадена е задачата

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ x_{ij} \ge 0,\ \begin{array}{l} i = 1,\dots,m, \\ j = 1,\dots,n \end{array} \right\}.$$

Нека $\mathbf{x}^G$ е бдр, получено по метода на максималния елемент (аналогичен на метода на минималния елемент), а $\mathbf{x}^*$ е оптимално бдр. Да се докаже, че

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^G \ge \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^*.$$

8. Да се докаже, че ако в задача (2)–(5) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са целочислени вектори, то всяко бдр е с целочислени координати.

9. Да се докаже Теорема 1.

10. Да се докаже Теорема 2.

11. Да се докаже Теорема 3.

12. Да се докаже Теорема 4.

13. Да се докаже Теорема 5.

14. Да се докаже Теорема 6.

15. Да се докаже Теорема 7.

16. Да се докаже Теорема 8.

17. Да се докаже, че двойнствената задача на задача (2)–(5) има безбройно много допустими решения, различаващи се с адитивна константа.

18. Нека в задачата на ЛО $\max z = \mathbf{cx}$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ има ранг $m - 1$ (m е броят на редовете на $\mathbf{A}$) и всяко едно от ограниченията в системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ е линейна комбинация на останалите ограничения. Да се докаже, че двойнствената на тази задача има безройно много допустими решения, различаващи се с адитивна константа (обобщение на твърдението в зад. 17).

19. Да се докаже, че всяко оптимално решение на КТЗ (2)–(5) е оптимално и за задачата, в която към всички коефициенти c_{ij}, разположени в един и същ ред (или един и същ стълб), е прибавена или извадена една и съща произволна константа.

20. Дадена е КТЗ с m производители и n потребители и транспортни разходи $c_{ij} = j + (i - 1)n$. Да се докаже, че за произволни наличности a_i и потребности b_j, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, за които $a_1 + \cdots + a_m = b_1 + \cdots + b_n$, всяко допустимо решение е оптимално.

21. За всяка от следните ТЗ да се намери оптимално решение и ако оптималното решение не е единствено, да се посочи още едно.

Забележка. В задачите, за които не е изпълнено условието за баланс, да се въведе по подходящ начин още един ред или стълб. Това се отнася и за следващите (22–25) задачи.

21.1. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (25, 20, 30)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (20, 40)^{\mathrm{T}}$;

21.2. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (180, 90)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (60, 75, 120, 45)^{\mathrm{T}}$;

21.3. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (30, 40, 10)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (20, 50)^{\mathrm{T}}$;

21.4. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (25, 20, 15, 40)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (60, 30)^{\mathrm{T}}$;

21.5. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (35, 55)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (30, 25, 55)^{\mathrm{T}}$;

21.6. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (110, 70)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (110, 60, 50)^{\mathrm{T}}$;

21.7. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 14 & 10 & 12 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (30, 45)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (25, 45, 25)^{\mathrm{T}}$;

21.8. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (100, 90, 150)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (80, 110, 120)^{\mathrm{T}}$;

21.9. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (50, 50, 15)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (30, 20, 40, 25)^{\mathrm{T}}$;

21.10. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (135, 90)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (75, 60, 135)^{\mathrm{T}}$.

22. Дадени са ТЗ (вж. забележката към зад. 21):

22.1. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (90, 60)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (50, 40, 90)^{\mathrm{T}}$;

а) да се намери произволно оптимално решение;

б) да се намери такова оптимално решение, за което $x_{13} = 60$.

22.2. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (80, 20, 60)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (40, 100)^{\mathrm{T}}$;

а) да се намери произволно оптимално решение;

б) да се намери такова оптимално решение, за което $x_{12} = 50$.

23. За кои стойности на параметрите α и β бдр

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 40 & 30 & 0 \end{pmatrix}$$

на транспортната задача

$\alpha+\beta$	2	α	1	50
4	$\alpha-\beta$	2	-1	20
10	4	$\alpha+\beta$	10	70
30	40	60	10	

а) е оптимално решение;

б) е единствено оптимално решение;

в) не е единствено оптимално решение (намерете всички оптимални бдр, съседни на $\mathbf{x}^*$).

24. За кои стойности на параметъра a съответното бдр $\mathbf{x}^*$ за транспортните задачи, дадени с таблиците:

24.1.

1	3	a	90
4	2	1	50
30	60	70	

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 20 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix},$$

24.2.

a	7	30
4	6	25
7	6	20
45	15	

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 25 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix},$$

а) е оптимално;

б) не е оптимално, но задачата има оптимално бдр, съседно на $\mathbf{x}^*$.

Забележка. В зад. 24 и 25 бдр се отнасят за задачите, получени от изходните след подходящо въвеждане на ред или стълб с цел удовлетворяване на условието за баланс.

25. За кои стойности на параметрите α и β бдр

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 30 & 50 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} 20 & 50 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

на ТЗ, дадена с таблицата

$\alpha+\beta$	0	2	β	100
-7	3	α	-2	50
0	α	-3	$\alpha+\beta$	70
20	60	80	60	

а) са оптимални решения на задачата;

б) са съседни бдр, без да са оптимални решения;

в) за стойностите на α и β, за които $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ са оптимални решения, да се намери оптимално решение $\mathbf{z}^*$, за което $z^*_{12} = 25$.

Отговори и решения

1. *Достатъчност.* Нека съществуват (I_1, J_1) такива, че $\sum\limits_{i\in I_1} a_i = \sum\limits_{j\in J_1} b_j$. Тъй като $\sum\limits_{i\in I} a_i = \sum\limits_{j\in J} b_j$, $I = \{1,\dots,n\}$, $J = \{1,\dots,m\}$, то $\sum\limits_{i\in I\setminus I_1} a_i = \sum\limits_{j\in J\setminus J_1} b_i$. Разглеждаме следните транспортни ограничения T_1 и T_2:

$$T_1 = \left\{(x_{ij})_{j\in J_1}^{i\in I_1} : \sum_{i\in I_1} x_{ij} = b_j,\ j\in J_1, \sum_{j\in J_1} x_{ij} = a_i,\ i\in I_1,\ x_{ij} > 0\right\},$$

$$T_2 = \left\{(x_{ij})_{j\in J\setminus J_1}^{i\in I\setminus I_1} : \begin{matrix}\sum\limits_{i\in I\setminus I_1} x_{ij} = b_j,\ j\in J\setminus J_1, \\ \sum\limits_{j\in J\setminus J_1} x_{ij} = a_i,\ i\in I\setminus I_1,\end{matrix} x_{ij} > 0\right\}.$$

Ако $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ са върхове на T_1 и T_2, то по очевиден начин се конструира допустим вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяващ ограниченията $\sum\limits_{j\in J} x_{ij} = a_i$, $\sum\limits_{i\in I} x_{ij} = b_j$, който е връх и има най-много $m + n - 2$ ненулеви променливи.

Необходимост. Нека $\mathbf{x}$ е връх, който е изроден, т. е. съществува базисна променлива, която е равна на нула. Всеки връх чрез подходяща пермутация на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ може да се построи по метода на северозападния ъгъл. Тъй като на определена стъпка (когато определяме нулевата базисна променлива) коригираните a_i и b_j са равни на нула, от това непосредствено следва, че съществуват множества от индекси S и T, за които $\sum\limits_{i\in T} a_i = \sum\limits_{j\in S} b_j$.

2. Тъй като задачата е изродена, то съществуват двойки множества от индекси (I_i, J_i), $i = 1,\dots,s$, такива, че $\sum\limits_{j\in I_i} a_j = \sum\limits_{j\in J_i} b_j$, $i = 1,\dots,s$. Ще покажем, че съществува ε_0 такова, че за всяко $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и за всяка двойка множества (I, J)

$$\sum_{j\in I} a_j(\varepsilon) \neq \sum_{j\in J} b_j(\varepsilon). \tag{9}$$

За всяка двойка (I_i, J_i) очевидно

$$\sum_{j\in I_i} a_j(\varepsilon) = \sum_{j\in I_i} a_j + |I_i|\varepsilon \neq \sum_{j\in J_i} b_j(\varepsilon) = \begin{cases} \sum\limits_{j\in J_i} b_j, & m \notin J_i, \\ \sum\limits_{j\in J_i} b_j + m\varepsilon, & m \in J_i, \end{cases}$$

тъй като $|I_i| < m$ за всяко $\varepsilon > 0$. Нека (I, J) е произволна двойка, различна от (I_i, J_i), $i = 1,\dots,s$. Възможни са два случая: $m \in J$ и $m \notin J$. Ако $m \notin J$, то тъй като $\sum\limits_{j\in I} a_j \neq \sum\limits_{j\in J} b_j$, ако $\sum\limits_{j\in I} a_j \geq \sum\limits_{j\in J} b_j$, то достатъчно е $\varepsilon > 0$, за да бъде изпълнено (9). Ако $m \in J$, тъй като $\sum\limits_{j\in I} a_j \neq \sum\limits_{j\in J} b_j$, са възможни два случая: а) $\sum\limits_{j\in I} a_j < \sum\limits_{j\in J} b_j$. За да бъде изпълнено (9), е достатъчно $\varepsilon \geq 0$; б) $\sum\limits_{j\in I} a_j > \sum\limits_{j\in J} b_j$. За да бъде изпълнено (9), достатъчно е $\varepsilon < \frac{1}{m-|I|}\left(\sum\limits_{j\in I} a_j - \sum\limits_{j\in J} b_j\right)$ за тези I, за които $|I| < m$. Нека $\delta_1 = \min \frac{1}{|I|}\left(\sum\limits_{j\in I} a_j - \sum\limits_{j\in J} b_j\right)$ по тези двойки (I, J), за които $\sum\limits_{j\in J} b_j - \sum\limits_{j\in I} a_j > 0$ и $m \notin J$. Нека $\delta_2 = \min \frac{1}{m-|I|}\left(\sum\limits_{j\in I} a_j - \sum\limits_{j\in J} b_j\right)$ по тези двойки (I, J), за които $m \in J$, $|I| < m$ и $\sum\limits_{j\in I} a_j - \sum\limits_{j\in J} b_j > 0$. Тогава за всяко $\varepsilon < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ е изпълнено (9).

3. Решението следва непосредствено от решението на задача 2 и условието за целочисленост (от него следва, че ако $\sum\limits_{j\in J} b_j - \sum\limits_{j\in I} a_j > 0$, то $\sum\limits_{j\in J} b_j - \sum\limits_{j\in I} a_j \geq 1$).

4. Тъй като задачата е изродена, то съществува двойка множества от индекси (I, J) такава, че $\sum\limits_{j\in J} b_j = \sum\limits_{j\in I} a_j$. Ако $|I| \geq 2$ и $|J| \geq 2$, очевидно задачата има повече от един изроден връх. Следователно поне за едно от множествата I или J имаме $|I| = 1$ или $|J| = 1$. Без да нарушаваме общността, можем да предположим, че $|J| = 1$. Следователно съществува индекс t_1: $b_{t_1} = \sum\limits_{j\in I} a_j$. Ако допуснем, че $|I| < m - 1$, стигаме до противоречие с единствеността на изродения връх. Следователно съществува индекс s_1 такъв, че $a_{s_1} + b_{t_1} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j$. Ако допуснем, че съществува друга двойка индекси (s_2, t_2), за които $a_{s_2} + b_{t_2} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j$, то стигаме до противоречие с единствеността.

5. *Необходимост*. Проверява се непосредствено.

Достатъчност. Ще докажем твърдението по индукция спрямо m и n. За това е достатъчно да разгледаме двойките (m, n), $m \leq n$, от цели положителни числа, наредени линейно с помощта на наредбата $\prec$, която се дефинира по следния начин: $(m_1, n_1) \prec (m_2, n_2)$, ако $n_1 < n_2$ или ако $n_1 = n_2$ и $m_1 \leq m_2$. За $(1, 1)$ твърдението е вярно. Да допуснем, че твърдението е вярно за всички двойки $(m, n) \prec (m_0, n_0)$. Ще покажем, че то е вярно и за двойката (m_0, n_0).

От условието

$$\sum_{i=1}^{m_0} \min\left(a_i, \sum_{j\in J} d_{ij}\right) \geq \sum_{j\in J} b_j, \qquad J \subset \{1,\dots,n_0\},$$

при $J = \{1\}$ следва, че $\sum\limits_{i=1}^{m_0} \min(a_i, d_{i1}) \geq b_1$. Нека i_0 е индексът, за който $\sum\limits_{i=1}^{i_0-1} c_i < b_1$ и $\sum\limits_{i=1}^{i_0} c_i \geq b_1$. Очевидно $i_0 \leq m_0$. Да разгледаме множеството $M(\overline{a}, \overline{b}, \overline{D})$ с размерност $m_0 \times n_0 - 1$, параметрите на което са: $\overline{a}_i = a_i - c_i$, $i = 1,\dots,i_0-1$, $a_{i_0} = a_{i_0} - \left(b_1 - \sum\limits_{i=1}^{i_0-1} c_i\right)$, $\overline{a}_i = a_i$, $i = i_0+1,\dots,m_0$, $\overline{b}_i = b_{i+1}$, $i = 1,\dots,n_0-1$, $\overline{D} = \{\overline{d}_{ij}\}$, $\overline{d}_{ij} = d_{ij+1}$, $i = 1,\dots,m_0$, $j = 1,\dots,n_0-1$. Лесно се проверява, че $\sum\limits_{i=1}^{m_0} \min\left(\overline{a}_i, \sum\limits_{j\in J} \overline{d}_{ij}\right) \geq \sum\limits_{j\in J} \overline{b}_j$ за всяко $J \subset \{1,\dots,n_0-1\}$. От това по индуктивното предположение следва, че $M(\overline{a}, \overline{b}, \overline{D}) \neq \emptyset$, т. е. съществува допустим вектор $\overline{\mathbf{x}}$, удовлетворяващ ограниченията, които задават множеството $M(\overline{a}, \overline{b}, \overline{D}) \neq \emptyset$. Непосредствено се вижда, че

$$\mathbf{x} = \left(\begin{array}{c|c} c_1 & \\ c_{i_0-1} & \\ b_1 - \sum\limits_{i=1}^{i_0-1} c_i & \overline{\mathbf{x}} \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{array}\right)$$

удовлетворяват ограниченията, задаващи множеството $M(a, b, D)$.

6. Допускаме, че съществува връх $\mathbf{x}$, за който $x_{lt} < \min\{a_l, b_t\}$. От условията $c_{it} - c_{lt} > \max\limits_{j\neq t}(c_{ij} - c_{lj})$ непосредствено следва, че съществува небазисна променлива $x_{i_0 j_0} = 0$, за която $\overline{c}_{i_0 j_0} < 0$. Противоречие.

7. *Упътване*. Нека $\mathbf{x}^G$ и $\mathbf{x}^*$ са съответно бдр, намерено по метода на максималния елемент, и оптимално бдр на задачата. Нека $c_1 \geq \cdots \geq c_{nm} \geq 0$. С помощта на тъждеството $\sum\limits_{i=1}^{nm} c_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{nm} (c_i - c_{i+1}) \left(\sum\limits_{j=1}^{i} x_j\right)$, $c_{nm+1} = 0$, покажете, че

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{mn} c_i x_i^G}{\sum\limits_{i=1}^{mn} c_i x_i^*} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{nm} (c_i - c_{i+1}) \left(\sum\limits_{j=1}^{i} x_j^G \right)}{\sum\limits_{i=1}^{nm} (c_i - c_{i+1}) \left(\sum\limits_{j=1}^{i} x_j^* \right)} \geq \min \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} x_j^G}{\sum\limits_{j=1}^{i} x_j^*} \geq \frac{1}{2}.$$

8. Тъй като векторите **a** и **b** са целочислени, то началното бдр, построено по един от методите, изложени в §4, е целочислено. От теорема 7 следва, че преминаването от целочислено бдр към следващо води отново до целочислено бдр. Тъй като това е вярно за всяка линейна целева функция, то всички бдр са целочислени.

9. *Необходимост.* Очевидна. *Достатъчност.* Нека $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{s}$, където $s = a_1 + \dots + a_m = b_1 + \dots + b_n$. Непосредствено се проверява, че $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $i = 1, \dots, m$, и $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j = 1, \dots, n$. Следва, че КТЗ има оптимално решение (вземаме под внимание още, че транспортният многостен е ограничен).

10. Това, че рангът на **A** не е по-голям от $m + n - 1$, следва от теорема 1. Тогава условието за баланс (1) води до факта, че сумата на ограниченията (3) е равна на сумата на ограничения (4), т. е. между ограниченията (3)–(4) има линейна зависимост. Тогава да махнем последното ограничение от (4). Вземаме стълбовете $\mathbf{A}_{1n}$, $\mathbf{A}_{2n}$, ..., $\mathbf{A}_{mn}$, $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, ..., $\mathbf{A}_{1n-1}$ на матрицата **A** без последната им координата. Получената детерминанта

$$\det \| \underbrace{\mathbf{A}_{1n} \mathbf{A}_{2n} \dots \mathbf{A}_{mn} \mathbf{A}_{11} \mathbf{A}_{12} \dots \mathbf{A}_{1n-1}}_{\text{без последната координата}} \| = 1.$$

Следователно в модифицираната матрица **A** има $m+n-1$ линейно независими стълба, откъдето следва, че $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m + n - 1$.

11. На клетките от цикъла алтернативно присвояваме $+$ и $-$. От определението на цикъл и това, че всеки стълб съдържа точно два ненулеви елемента, които са единици, следва, че сумата на векторите, умножени съответно с $+1$ и -1, е равна на нула.

12. Вж. зад. 10.

13. Да допуснем, че за някоя празна клетка съществуват поне два цикъла. От тях може да се построи цикъл, съдържащ само базисни клетки, което противоречи на това, че **x** е бдр.

14. *Необходимост.* Нека $\mathbf{x}' = (x'_{ij})$ е оптимално. Да допуснем, че съществува празна клетка (k, l), за която $\overline{c}_{kl} < 0$. Използвайки процедурата, описана в теорема 7, намираме ново бдр $\mathbf{x}''$. Да пресметнем стойността на целевата функция в $\mathbf{x}''$. Най-напред да означим

$$S = \sum_{(i,j)\notin\gamma_{kl}} c_{ij}x'_{ij}, \qquad S^{\pm} = \sum_{(i,j)\in\gamma^{\pm}_{kl}} c_{ij}x'_{ij}.$$

Тогава $z(\mathbf{x}') = S + S^{+} + S^{-}$ и

$$\begin{aligned} z(\mathbf{x}'') &= \sum_{(i,j)\notin\gamma_{kl}} c_{ij}x''_{ij} + \sum_{(i,j)\in\gamma^{+}_{kl}} c_{ij}x''_{ij} + \sum_{(i,j)\in\gamma^{-}_{kl}} c_{ij}x''_{ij} \\ &= \sum_{(i,j)\notin\gamma_{kl}} c_{ij}x'_{ij} + \sum_{(i,j)\in\gamma^{+}_{kl}} c_{ij}(x'_{ij} + x_{i_p j_p}) + \sum_{(i,j)\in\gamma^{-}_{kl}} c_{ij}(x'_{ij} - x_{i_p j_p}) \\ &= S + S^{+} + S^{-} + x_{i_p j_p}\left(\sum_{(i,j)\in\gamma^{+}_{kl}} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in\gamma^{-}_{kl}} c_{ij}\right) \\ &\le z(\mathbf{x}'). \end{aligned}$$

Ако $\mathbf{x}'$ е неизродено, то със сигурност $x_{i_p j_p} > 0$ и противоречието е очевидно. Ако $x_{i_p j_p}$ е базисна нула, то $\mathbf{x}'' \equiv \mathbf{x}'$ и става само смяна на базиса на изродено бдр.

Достатъчност. Щом $z(\mathbf{x}'') = z(\mathbf{x}') + x_{i_p j_p}\overline{c}_{kl}$ и $\overline{c}_{kl} \ge 0$ за всяка небазисна клетка на $\mathbf{x}'$, то за всяко съседно на $\mathbf{x}'$ бдр $\mathbf{x}''$ е изпълнено $z(\mathbf{x}'') \ge z(\mathbf{x}')$, т. е. $\mathbf{x}'$ е оптимално.

15. Координатите на $\mathbf{x}''$ удовлетворяват ограниченията на КТЗ, защото количеството $x_{i_p j_p}$ се премества в рамките на един ред и един стълб, като се прибавя към една клетка от този ред (стълб) и се изважда от друга клетка на същия ред (стълб). Съвкупността от пълните клетки H'' на допустимия вектор $\mathbf{x}''$ се различава от съвкупността на пълните клетки H' на $\mathbf{x}'$ по това, че съдържа клетката (k, l) вместо една клетка от γ^{-}_{kl}. Следователно в H'' с изключение на (k, l) всички останали клетки са от една ациклична съвкупност. Тогава, ако допуснем, че в H'' има цикъл, то той непременно съдържа (k, l). Допускането, че H'' съдържа цикъл води до факта, че този цикъл трябва да съдържа (k, l), а не съдържа (i_p, j_{p-1}) за някое p. Следователно съществуват поне два цикъла (единият с (i_p, j_{p-1}), а другият без нея), които свързват (k, l) с ациклична съвкупност от клетки, което е невъзможно според теорема 5. Така H'' е ациклична съвкупност от клетки за допустимия вектор $\mathbf{x}''$, т. е. $\mathbf{x}''$ е бдр.

16. *Необходимост.* Нека $\mathbf{x}^* = (x^*_{ij})$ е оптимално. Тогава и двойствената на КТЗ има оптимално решение, а (7) не са нищо друго освен ограниченията на двойствената на КТЗ. Като вземем предвид, че $v_j - u_i \leq c_{ij}$ и $v_{ij} \geq 0$ образуват двойка спрегнати условия за $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, то (8) не е нищо друго освен факта, че от двойка спрегнати условия едното е свободно, а другото — закрепено.

Достатъчност. Нека координатите на $(-u_1, \dots, v_n)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяват (7) и (8). За произволен допустим вектор на КТЗ $\mathbf{x}' = (x'_{ij})$ имаме

$$\begin{aligned} z(\mathbf{x}') &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_{ij} \overset{(7)}{\geq} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(v_j - u_i)x'_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_j x'_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i x'_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x'_{ij} - \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i x_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(v_j - u_i)x_{ij} \overset{(8)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = z(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Следователно $\mathbf{x}$ е оптимално.

17. Ако $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]^{\mathrm{T}} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)^{\mathrm{T}}$ е решение на системата $v_j - u_i \leq c_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, очевидно и $[\mathbf{u}+h, \mathbf{v}+h]^{\mathrm{T}} = (u_1 + h, \dots, u_m + h, v_1 + h, \dots, v_n + h)^{\mathrm{T}}$, $h = \mathrm{const}$, също е нейно решение.

18. Да означим i-тия ред на $\mathbf{A}$ с $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, m$. От условията на задачата следва, че съществуват числа λ_i, $i = 1, \dots, m$ (поне едно различно от нула) такива, че $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i b_i = 0$. Ще покажем, че $\lambda_i \neq 0$ за всяко $i = 1, \dots, m$. Да допуснем например, че $\lambda_1 = 0$. Тогава (от $\sum\limits_{i=2}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$, $\sum\limits_{i=2}^{m} \lambda_i b_i = 0$, $\sum\limits_{i=2}^{m} |\lambda_i| \neq 0$) следва, че съществува линейна зависимост между ограниченията с номера от 2 до m и следователно рангът на редуцираната система (без първото ограничение) е $\leq m - 2$. Но първото ограничение (по условие) е линейна комбинация на останалите и следователно след прибавянето му към тях рангът на новата система (това отново е изходната) ще остане същият, което противоречи на това, че той е равен на $m - 1$. Следователно $\lambda_1 \neq 0$. Да означим с $\overline{\mathbf{A}}$ матрицата с редове $\overline{\mathbf{a}}_i = \lambda_i \mathbf{a}_i$ и с $\overline{\mathbf{b}}$ вектора с координати $\lambda_i b_i$, $i = 1, \dots, m$. Системата $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{b}}$ е еквивалентна на изходната (получена е от нея чрез умножаване на редовете ѝ с числа, различни от нула). Изходната задача записваме в еквивалентната ѝ форма $\max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{b}}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. В тази задача сумата от елементите на всеки стълб на $\overline{\mathbf{A}}$ е равна на нула. Нейната двойствена задача е $\min\{\overline{\mathbf{x}}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{y} : \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}\}$. Ако $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на тази задача, векторът $\mathbf{y}(a) = (y_1^* + a, \dots, y_m^* + a)^{\mathrm{T}}$ удовлетворява системата $\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ (коефициентът в кое да е от ограниченията пред a е равен на нула), $\overline{\mathbf{x}}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{y}(a) = \overline{\mathbf{x}}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{y}^*$ (по същата причина) и следователно също е оптимално решение.

19. Нека от дадената задача е получена нова чрез прибавяне на константа k към s-тия ред (съответно r-тия стълб) на матрицата $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m\times n}$. Разликата между транспортните разходи за даден допустим вектор $\mathbf{x} = (x_{ij})$ на изходната и получената задача не зависи от вектора $\mathbf{x}$ — тя е равна на ka_s (съответно kb_r).

20. Нека $\mathbf{x} = (x_{ij})$ е допустим вектор на задачата. Имаме

$$\begin{aligned}\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} &= \sum_i \sum_j (j + (i-1)n)x_{ij} = \sum_j j \sum_i x_{ij} + \sum_i (i-1)n \sum_j x_{ij} \\ &= \sum_j jb_j + n \sum_i (i-1)a_i,\end{aligned}$$

т. е. транспортните разходи не зависят от вектора $\mathbf{x} = (x_{ij})$.

21.1. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 5 \\ 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ (единствен), $z^* = 300$.

21.2. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 15 & 75 & 90 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $z^* = 615$.

21.3. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 0 & 40 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $z^* = 180$.

21.4. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 30 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ (единствен), $z^* = 190$.

21.5. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 10 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $z^* = 300$.

21.6. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 50 \\ 70 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $z^* = 500$.

21.7. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 5 & 25 & 0 \\ 0 & 20 & 25 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $z^* = 520$.

21.8. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 0 \\ 0 & 110 & 10 & 30 \end{pmatrix}$ (единствен), $z^* = 980$.

21.9. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 40 & 10 \\ 15 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (единствен), $z^* = 255$.

21.10. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 75 & 15 & 45 \\ 0 & 0 & 90 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $z^* = 780$.

22.1. а) $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 40 \\ 0 & 10 & 50 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\mathbf{x}^{**} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 20 & 10 & 30 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}$, $z^* = 520$.

22.2. а) $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 40 & 40 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 40 & 20 \end{pmatrix}$; б) $\mathbf{x}^{**} = \begin{pmatrix} 30 & 50 & 0 \\ 5 & 15 & 0 \\ 5 & 35 & 20 \end{pmatrix}$, $z^* = 360$.

23. а) $4 \leq \alpha \leq 6$, $\beta = 5$. б) За никои стойности на α и β оптималното решение не е единствено; в) При $\beta = 2$, $\alpha = 4$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 30 & 40 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 30 & 10 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 30 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 40 & 30 & 0 \end{pmatrix};$$

при $\beta = 2$, $\alpha = 6$ оптимални бдр, съседни на $\mathbf{x}^*$, са $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ и $\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 30 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; при $\beta = 2$, $4 < \alpha < 6$ — само $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$.

24.1. а) $2 \leq a \leq 3$. б) $0 \leq a \leq 2$ или $a > 3$.

24.2. а) $4 \leq a \leq 7$. б) $a < 4$ или $7 < a \leq 8$.

25. а) $\alpha \leq -5$, $\beta \leq -\alpha$, $\alpha(\mathbf{x}^*) = \alpha(\mathbf{y}^*) = 80(\alpha + \beta) + 60(\alpha + 1)$; б) $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ са съседни независимо от стойностите на α и β. Не са оптимални решения при $\alpha > -5$ или $\alpha < -\beta$. в) $\mathbf{z}^* = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 30 & 25 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 35 & 0 & 35 \end{pmatrix}$.