Упражнение 1

Математически модели на икономически задачи

1. Задача за максимална печалба при ограничени ресурси

1.1. Формулировка на задачата

Малка фабрика произвежда два вида бои — за външно и за вътрешно боядисване. За производството на боите се използват два вида суровини — C1 и C2. Основните данни на задачата са дадени в следната таблица:

	Разход на суровините за 1 t боя [t]		Максимален дневен запас [t]
	за външно боядисване	за вътрешно боядисване	
Суровина C1	1	2	6
Суровина C2	2	1	8
Доход (в хил. лв) от 1 t боя	3	2	

Отделът за маркетинг е поставил две допълнителни условия:

- Дневното производство на боя за вътрешно боядисване да не превишава дневното производство на боя за външно боядисване с повече от 1 t.
- Дневното производство на боя за вътрешно боядисване да бъде ограничено до 2 t.

Какво количество боя от всеки вид трябва да се произвежда, така че доходът от реализацията на продукцията да бъде максимален?

1.2. Математически модел

Всяка задача на математическото оптимиране включва три основни елемента.

1. **Променливи**, които следва да бъдат определени.

2. **Целева функция**, която трябва да бъде оптимизирана (минимизирана или максимизирана).

3. **Ограничения**, които променливите трябва да удовлетворяват.

Нека фабриката произвежда x_E t боя за външно боядисване и x_I t боя за вътрешно боядисване дневно. Тогава получаваме следната оптимизационна задача:

$$\max z = 3x_E + 2x_I$$

при ограничения

$$\begin{aligned} x_E + 2x_I &\le 6, \\ 2x_E + x_I &\le 8, \\ -x_E + x_I &\le 1, \\ x_I &\le 2, \\ x_E \ge 0,\ x_I &\ge 0. \end{aligned}$$

1.3. Терминология

Получената задача принадлежи на класа *линейни оптимизационни задачи* или, казано по друг начин, е *задача на линейното оптимиране*, тъй като променливите участват линейно (полиноми от първа степен) както в целевата функция, така и в ограниченията.

Всеки (двумерен) вектор, чиито координати удовлетворяват ограниченията на задачата, се нарича *допустима точка* (или *допустим вектор*, *допустимо решение*, *план*) на задачата. Пример за допустима точка е $(3, 1)$, т. е. $x_E = 3$ и $x_I = 1$. Тогава стойността на целевата функция е $z = 11$ хил. лв. Множеството от всички допустими точки се нарича *допустимо множество* (а също така *множество от условия*, *множество от ограничения*, *множество от планове*). Онзи елемент (онези елементи) на допустимото множество, за който (които) целевата функция достига оптималната си стойност, се нарича(т) *оптимално*(*и*) *решение*(*я*) на задачата.

Броят на променливите и броят на ограниченията се наричат *размери* на задачата. В случая имаме двумерна линейна оптимизационна задача с четири ограничения (обикновено ограниченията за неотрицателност на променливите не се броят, но задължително участват във формулировката на модела).

Нека векторите **c** и **x** са определени по следния начин: $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_E \\ x_I \end{bmatrix}$ (всички вектори считаме, че са вектор-стълбове), т. е. координатите на **c** са доходите от 1 t боя от съответния вид, а координатите на **x** са променливите на задачата. Тогава целевата функция е скаларното произведение на векторите **c** и **x**, което записваме в матричен вид по следния начин

$$z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = [3, 2]\begin{bmatrix} x_E \\ x_I \end{bmatrix} = 3x_E + 2x_I.$$

Ако с **A** означим матрицата $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, а $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ е векторът от десните страни на ограниченията, тогава ограниченията на задачата могат да бъдат записани като

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_E \\ x_I \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_E \\ x_I \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

($\mathbf{u} \gtreqqless \mathbf{v}$, където $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, означава $u_i \gtreqqless v_i$, $i = 1, \ldots, n$.)

1.4. Обща формулировка на задачата

Фирма произвежда n вида продукция с помощта на m вида суровини, всяка от които е в ограничено количество b_i ($i = 1, \ldots, m$). Известно е количеството a_{ij} от i-тия вид суровина ($i = 1, \ldots, m$), което се изразходва за производството на единица от j-тия вид продукция ($j = 1, \ldots, n$). Ако c_j е доходът от единица продукция от j-тия вид ($j = 1, \ldots, n$), да се определи такъв план на производство, че общият доход от произведената продукция да бъде максимален.

В този случай променливите на задачата са $x_1, \ldots, x_n$, целевата функция е

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

и ограниченията са

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Матричният запис на тази задача отново е $\max \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$, $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$, но $\mathbf{A}$ е матрица $m \times n$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

2. Задача за диета (дажба)

2.1. Формулировка на задачата

Дневната дажба за хранене на група животни може да се изготви от сено (не повече от 50 kg) и силаж (не повече от 85 kg). Дажбата трябва да съдържа:

а) не по-малко от 30 кръмни единици[1];

б) не по-малко от 1 kg белтъци;

в) не по-малко от 100 g калций;

г) не по-малко от 80 g фосфор.

Съдържанието на тези хранителни вещества (в g) в 1 kg сено или силаж и съответната цена (в лв) са дадени в таблица 1.

Таблица 1. Съдържание на хранителните вещества и цена

	Кр. ед.	Белтъчини	Калций	Фосфор	Цена
Сено	10	40	1,25	2	0,24
Силаж	8	10	2,50	1	0,16

Да се определи най-евтината дажба, осигуряваща пълноценно хранене на животните.

2.2. Математически модел

Да предположим, че дневната дажба се състои от x_1 kg сено и x_2 kg силаж. Тогава целевата функция е

$$\min z = 0{,}24x_1 + 0{,}16x_2.$$

[1]Термин от животновъдството.

Ограниченията на задачата са

$$
\begin{aligned}
10x_1 + 8x_2 &\geq 30,\\
40x_1 + 10x_2 &\geq 1000,\\
1{,}25x_1 + 2{,}50x_2 &\geq 100,\\
2x_1 + x_2 &\geq 80,\\
0 \leq x_1 \leq 50,\ 0 \leq x_2 &\leq 85.
\end{aligned}
$$

Изрично трябва да подчертаем, че левите страни на ограниченията се измерват в g и затова в дясната страна на второто ограничение стои числото 1000 (g = 1 kg).

3. Транспортна задача

3.1. Формулировка на задачата

Автомобилната компания *Ауто ООД* има три завода в ЛА, Детройт и Ню Орлийнз и два разпределителни центъра в Денвър и Маями. Количеството произведени автомобили през следващото тримесечие ще бъде съответно 1000, 1500 и 1200 автомобила. Заявката на разпределителните центрове е съответно 2300 и 1400 автомобила на тримесечие. Разстоянията (в мили) между заводите и разпределителните центрове са дадени в таблица 2.

Таблица 2. Разстояния (в мили)

	Денвър	Маями
ЛА	1000	2690
Детройт	1250	1350
Ню Орлийнз	1275	850

Транспортната компания *Возим товари всякакви ООД* оценява своите услуги на 8 цента за превоз на един автомобил на разстояние една миля. В резултат получаваме таблица 3 за цените на превозите (закръглени до долар) по всеки от маршрутите.

Да се намери такъв план на превозите, че заявките на разпределителните центрове да бъдат изцяло задоволени и общите транспортни разходи да бъдат минимални.

Таблица 3. Цени на превозите

	Денвър (1)	Маями (2)
ЛА (1)	80	215
Детройт (2)	100	108
Ню Орлийнз (3)	102	68

3.2. Математически модел

Нека x_{ij}, $i = 1,2,3$, $j = 1,2$, е количеството автомобили, които транспортната компания ще превози от завода i ($i = 1,2,3$) до разпределителния център j ($j = 1,2$). Целевата функция е

$$\min z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32},$$

а ограниченията са

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} = 1000,\\
&x_{21} + x_{22} = 1500,\\
&x_{31} + x_{32} = 1200,\\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2300,\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1400,\\
&x_{ij} \geq 0,\ i = 1,2,3,\ \ j = 1,2.
\end{aligned}$$

Използваме равенства, защото общото количество на произведените автомобили $1000 + 1500 + 1200 = 3700$ е равно на сумарното търсене на разпределителните центрове $2300 + 1400 = 3700$.

Този пример е частен случай на така наречената *класическа транспортна задача* (известна още като *задача на Хичкок*), при която има *баланс* между производство и потребление. Веднага се вижда, че тя е *канонична задача* на линейното оптимиране, защото всички ограничения са равенства и всички променливи са неотрицателни.

4. Задача за назначения

4.1. Формулировка на задачата

Трите деца Джон, Карън и Тери на мистър Смит искат да изкарат малко пари за екскурзия. Мистър Смит е избрал три вида работи, които децата могат да изпълнят срещу определено заплащане: косене на ливадата, чистене на гаража и измиване на колата. За да избегне ненужни спорове между децата, той попитал тайно всяко дете колко иска за всеки вид работа. Резултатите от допитването (в долари) са представени в таблицата:

	Косене на ливадата (1)	Чистене на гаража (2)	Миене на колата (3)
Джон (1)	15	10	9
Карън (2)	9	15	10
Тери (3)	10	12	8

Като се основава на тази информация, как мистър Смит да разпредели работата между децата, така че разходите му да бъдат минимални?

4.2. Математически модел

Нека променливите на задачата са x_{ij}, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3$, като $x_{ij} = 1$, ако i-тото дете получава j-тата работата, и $x_{ij} = 0$ в противен случай. Ясно е, че всяко дете може да извърши само една работа и всяка работа може да бъде извършена само от едно дете. Тогава математическият модел е следният

$$\min z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}, \text{ където } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 9 \\ 9 & 15 & 10 \\ 10 & 12 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,3,$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,3,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } i\text{-тото дете получава } j\text{-тата работа,} \\ 0, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Задачи

1. В завод за производство на чипове четирима техници (A, B, C и D) изработват три вида изделия (изделия 1, 2 и 3). Заводът може да продаде за един месец най-много 80 единици от изделие 1, 50 единици от изделие 2 и 50 единици от изделие 3. Техник A може да изработва само изделия 1 и 3, техник B — само изделия 1 и 2, техник C — само изделие 3, а техник D —

само изделие 2. Времето (в часове), необходимо на всеки техник за производството на единица от съответното изделие, както и печалбата от единица изделие са дадени в таблица 4.

Таблица 4. Време за изработване на изделията и печалба от едно изделие

Изделие	Техник A	Техник B	Техник C	Техник D	Печалба (лв)
1	2	2,5	—	—	6
2	—	3	—	3,5	7
3	3	—	4	—	10

Всеки техник може да работи не повече от 120 ча̀са на месец. При какъв план на производство заводът ще получи максимална печалба? Променливите на задачата не се предполага да бъдат целочислени.

2. Завод за производство на компютърна периферия изработва мишки, клавиатури и джойстици. В таблица 5 са показани доходът, разходите на труд и машинното време, необходими за изработването на едно изделие, както и месечното търсене на изделията.

Таблица 5. Доход, разходи на труд и машинно време и месечно търсене на изделията

	Мишки	Клавиатури	Джойстици
Доход от едно изделие (лв)	8	11	9
Разход на труд за изделие (ч)	0,2	0,3	0,24
Машинно време за изделие (ч)	0,04	0,055	0,04
Месечно търсене	15 000	25 000	11 000

Всеки месец заводът разполага със 13 000 ча̀са труд и 3000 ча̀са машинно време. Как заводът може да получи максимална печалба? Променливите на задачата не се предполага да бъдат целочислени.

3. Бижутерът Пешо изработва диамантени гривни, огърлици и обеци. Пешо може да работи най-много 160 ча̀са за месец. Той разполага с 800 унции брилянти. Доходът, времето за изработка и количеството унции диаманти, необходими за изработването на едно бижу, са дадени в таблица 6.

Как Пешо да получи максимален доход, ако търсенето на бижутата е неограничено? Променливите на задачата не се предполага да бъдат целочислени.

Таблица 6. Доход, време за изработка и унции диаманти за изработването на едно бижу

	Гривна	Огърлица	Обеци
Доход от едно бижу (лв)	300	200	100
Разход на труд за бижу (ч)	0,35	0,15	0,05
Разход на диаманти за бижу (oz)	1,2	0,75	0,5

4. Пивоварна произвежда светло пиво и бира, като за производството използва зърно, хмел и малц. Налични са 40 lb зърно, 30 lb хмел и 40 lb малц. Един барел светло пиво се продава за $40 и за производството му са необходими 1 lb зърно, 1 lb хмел и 2 lb малц. Един барел бира се продава за $50 и за производството му са необходими 2 lb зърно, 1 lb хмел и 1 lb малц. Пивоварната може да продаде цялото произведено количество светло пиво и бира. Да се формулира линейна оптимизационна задача, с чиято помощ пивоварната да максимизира печалбата си.

5. Ферма за отглеждане на крави може да закупи три вида сурова храна от търговец на едро. Диетологът на фермата има изисквания за съдържанието на мазнини, белтъци, калций и желязо в дневната дажба. Всяка крава се нуждае от поне 10 единици (ед.) калций, не повече от 7,5 ед. мазнини, поне 12 ед. желязо и поне 15 ед. белтъци дневно. В таблица 7 е показано количеството на мазнини, белтъци, калций и желязо в килограм сурова храна, както и цената му в зависимост от качеството. Дневната дажба за хранене на кравите се получава чрез смесване на трите типа сурова храна. Фермата иска да храни кравите в съответствие с препоръките на диетолога, като харчи за това възможно най-малко средства.

Таблица 7. Съставки на дажбата (единици за килограм)

	Първо качество	Второ качество	Трето качество
Калций	0,7	0,8	0,0
Желязо	0,9	0,8	0,8
Белтъци	0,8	1,5	0,9
Мазнини	0,5	0,6	0,4
Цена (лв)	0,25	0,10	0,08

6. Фред ръководи семейна животновъдна ферма. Като добавка към произвежданите храни Фред гледа и прасета за продан. Сега той иска да определи количествата на наличните храни (царевица, костно брашно и люцерна), които трябва да бъдат давани на всяко прасе. Тъй като прасетата могат да ядат произволна смес от тези храни, целта е да се състави дажба, която да удовлетворява определени хранителни норми и да струва най-евтино. Броят на единиците от всяка храна, които се съдържат в един килограм от нея, дневните хранителни норми и цените са дадени в таблица 8.

Таблица 8. Данни за задачата

Хранителни съставки	Царевица	Костно брашно	Люцерна	Минимални дневни норми
Въглехидрати	90	20	40	200
Белтъчини	30	80	60	180
Витамини	10	20	60	150
Цена (¢)	84	72	60	

Да се формулира и реши линейна оптимизационна задача, с чиято помощ Фред да определи най-евтината дажба на прасетата.

7. Да се направи математически модел на задачата от § 3, ако:

а) производството на завода в Детройт е 1300 автомобила;

б) заявката на разпределителния център в Денвър е 2000 автомобила.

8. Фармацевтична компания произвежда даден препарат в три завода, разположени в ЛА (1), Атланта (2) и Ню Йорк (3), чиито месечен производствен капацитет не надхвърля съответно 10 000, 12 000 и 14 000 kg. Всеки месец компанията трябва да изпраща продукцията си в четири района на САЩ — Източен (1), Среден запад (2), Южен (3) и Западен (4) в количества съответно 9000, 6000, 6000 и 13 000 kg. Разходите за производство и транспорт на 1 kg препарат (в долари) от заводите до районите са дадени в таблица 9.

Таблица 9. Разходи за производство и транспорт на 1 kg препарат (в долари)

	Източен	Среден Запад	Южен	Западен
ЛА	5,00	3,50	4,20	2,20
Атланта	3,20	2,60	1,80	4,80
Ню Йорк	2,50	3,10	3,30	5,40

Да се формулира и реши линейна оптимизационна задача, с чиято помощ произведената продукция да бъде транспортирана при минимални сумарни разходи и нуждите на отделните райони да бъдат задоволени.

9. В таблица 10 са посочени разстоянията между Бостон, Чикаго, Далас, ЛА и Маями. Всеки от тези градове се нуждае от 40 MWh електроенергия. Чикаго, Далас и Маями могат да произвеждат по 70 MWh. Преносът на 1 MWh на разстояние 100 мили струва 4 долара.

Таблица 10. Разстояния между градовете (в мили)

	Бостон (1)	Чикаго (2)	Далас (3)	ЛА (4)	Маями (5)
Чикаго (1)	983	0	1205	2112	1390
Далас (2)	1815	1205	0	801	1332
Маями (3)	1539	1390	1332	2757	0

Да се формулира и реши линейна оптимизационна задача, с чиято помощ произведената електроенергия да бъде транспортирана при минимални сумарни разходи и нуждите на отделните градове да бъдат задоволени.

10. Всеки ден северна, централна и южна Калифорния използват по 100 милиона галона вода. Северна и централна Калифорния са осигурени със 120 милиона галона вода всяка, докато южна Калифорния е осигурена само с 40 милиона галона. Разходите за транспорт на един милион галона вода между отделните райони са дадени в таблица 11.

Таблица 11. Разходи за транспорт на 1 милион галона вода (в долари)

	Северна	Централна	Южна
Северна	5000	7000	10 000
Централна	7000	5000	6000
Южна	10 000	6000	5000

Търсенето на вода не може да бъде задоволено напълно. Затова всеки недоставен милион галона вода влече след себе си разходите, показани в таблица 12.

Таблица 12. Разходи за недоставяне на 1 милион галона вода (в долари)

Северна	Централна	Южна
6000	5500	9000

Да се формулира и реши линейна оптимизационна задача, с чиято помощ да бъде разпределена водата в Калифорния, като сумарните разходите за транспорт и недоставяне на вода да бъдат минимални.

11. Да се определи оптимално разпределение на три багера от различен тип между три обекта, ако горивото за извършване на изкопните работи от i-тия багер на j-тия обект, $i, j = 1, 2, 3$, се дава с таблицата

	Обект		
Багер	I	II	III
1	9	14	7
2	8	6	9
3	12	11	14

12. Компания разполага с три нови машини от различен тип. Налице са четири завода на компанията, които могат да получат тези машини. Всеки завод може да получи само една машина и всяка машина може да бъде разположена само в един завод. Очакваната печалба от поставянето на дадена машина в даден завод се дава с таблицата

	Завод			
Машина	I	II	III	IV
1	13	16	12	11
2	15	0	13	20
3	5	7	10	6

Как да се разположат машините, така че общата печалба да бъде максимална.

Отговори и решения

1. Нека променливите на задачата A_1, A_3, B_1, B_2, C_3, D_2 са количествата продукция от изделията 1, 2, 3, произведени от техник A, B, C, D. Тогава целевата функция е $\max z = 6(A_1+B_1)+7(B_2+D_2)+10(A_3+C_3)$. Ограниченията са $2A_1 + 3A_3 \leq 120$, $2{,}5B_1 + 3B_2 \leq 120$, $4C_3 \leq 120$, $3{,}5D_2 \leq 120$, $A_1 + B_1 \leq 80$, $B_2 + D_2 \leq 50$, $A_3 + C_3 \leq 50$, $A_1 \geq 0$, $A_3 \geq 0$, $B_1 \geq 0$, $B_2 \geq 0$, $C_3 \geq 0$, $D_2 \geq 0$.

2. Нека произведените мишки, клавиатури и джойстици са означени съответно с M, K, J. Целевата функция е $\max z = 8M + 11K + 9J$, а ограниченията са $0{,}2M + 0{,}3K + 0{,}24J \leq 13000$, $0{,}04M + 0{,}055K + 0{,}04J \leq 3000$, $0 \leq M \leq 15\,000$, $0 \leq K \leq 25\,000$, $0 \leq J \leq 11\,000$.

3. Нека произведените гривни, огърлици и обеци са означени съответно с x_1, x_2, x_3. Целевата функция е $\max z = 300x_1 + 200x_2 + 100x_3$, а ограниченията са $0{,}35x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}05x_3 \leq 160$, $1{,}2x_1 + 0{,}75x_2 + 0{,}5x_3 \leq 800$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

4. Нека количеството на произведеното светло пиво е x_1 барела, а количеството на произведената бира е x_2 барела. Целевата функция е $\max z = 40x_1 + 50x_2$, а ограниченията са $x_1 + 2x_2 \leq 40$, $x_1 + x_2 \leq 30$, $2x_1 + x_2 \leq 40$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

5. Нека x_j, $j = 1, 2, 3$, е количеството на включената в дажбата сурова храна с качество j (в kg). Целевата функция е $\min z = 0{,}25x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}08x_3$, а ограниченията са $0{,}7x_1 + 0{,}8x_2 \geq 10$, $0{,}9x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}8x_3 \leq 7{,}5$, $0{,}8x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}9x_3 \geq 12$, $0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}4x_3 \geq 15$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

6. Нека количеството на царевицата е x_1, на костното брашно — x_2, а на люцерната — x_3 (в kg). Целевата функция е $\min z = 84x_1 + 72x_2 + 60x_3$, а ограниченията са $90x_1 + 20x_2 + 40x_3 \geq 200$, $30x_1 + 80x_2 + 60x_3 \geq 180$, $10x_1 + 20x_2 + 60x_3 \geq 150$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

7. а) В този случай сумарното производство е по-малко от сумарното потребление и ще останат незадоволени потребители. При същите означения се променят само ограниченията на модела

$$
\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} = 1000,\\
&x_{21} + x_{22} = 1300,\\
&x_{31} + x_{32} = 1200,\\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 2300,\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 1400,\\
&x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3,\ \ j = 1, 2.
\end{aligned}
$$

б) В този случай сумарното производство е по-голямо от сумарното потребление и ще останат нереализирани автомобили. При същите означения се променят само ограниченията на модела

$$
\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} \le 1000,\\
&x_{21} + x_{22} \le 1500,\\
&x_{31} + x_{32} \le 1200,\\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2000,\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1400,\\
&x_{ij} \ge 0,\ i = 1,2,3,\ j = 1,2.
\end{aligned}
$$

8. Нека x_{ij} е превозеното количество на препарата от завод i до район j, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3,4$. Целевата функция е $\min z = 5x_{11} + 3{,}5x_{12} + 4{,}2x_{13} + 2{,}2x_{14} + 3{,}2x_{21} + 2{,}6x_{22} + 1{,}8x_{23} + 4{,}8x_{24} + 2{,}5x_{31} + 3{,}1x_{32} + 3{,}3x_{33} + 5{,}4x_{34}$, а ограниченията са $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 10\,000$, $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 12\,000$, $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 14\,000$, $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 9000$, $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6000$, $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 6000$, $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 13\,000$, $x_{ij} \ge 0$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3,4$.

9. Нека променливите на задачата са доставените количества електроенергия от i-тия производител, $i = 1,2,3$, до j-тия потребител, $j = 1,\dots,5$. Целевата функция е $\min z = 0{,}04(983x_{11} + 1205x_{13} + 2112x_{14} + 1390x_{15} + 1815x_{21} + 1205x_{22} + 801x_{24} + 1332x_{25} + 1539x_{31} + 1390x_{32} + 1332x_{33} + 2757x_{34})$, а ограниченията са $\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le 70$, $i = 1,2,3$, $\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 40$, $j = 1,\dots,5$, $x_{ij} \ge 0$, $i = 1,2,3$, $j = 1,\dots,5$.

10. Нека променливите на задачата x_{ij}, $i,j = 1,2,3$, са количествата на получената вода в район i, транспортирана от район j, като индексите $1,2,3$ отговарят съответно на северна, централна и южна Калифорния. С y_j, $j = 1,2,3$, означаваме количеството на недоставената вода в съответния район. Тогава целевата функция (измерена в хиляди долари) е $\min z = 5x_{11} + 7x_{12} + 10x_{13} + 7x_{21} + 5x_{22} + 6x_{23} + 10x_{31} + 6x_{32} + 5x_{33} + 6y_1 + 5{,}5y_2 + 9y_3$, а ограниченията са $\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le 120$, $i = 1,2,3$, $\sum_{j=1}^{3} y_j \le 300$, $\sum_{i=1}^{3} x_{ij} + y_j = 100$, $j = 1,2,3$, $x_{ij} \ge 0$, $y_j \ge 0$, $i,j = 1,2,3$.

11. Нека x_{ij}, $i,j = 1,2,3$, са двоични променливи, като $x_{ij} = 1$, ако i-тият багер работи на j-тия обект, и $x_{ij} = 0$ в противен случай. Целевата функция е $\min z = 9x_{11} + 14x_{12} + 7x_{13} + 8x_{21} + 6x_{22} + 9x_{23} + 12x_{31} + 11x_{32} + 14x_{33}$, а ограниченията са $x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} = 1$, $i = 1,2,3$, $x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} = 1$, $j = 1,2,3$, $x_{ij} \in \{0,1\}$.

12. Подобно на транспортната задача и тук можем да решаваме само балансирана задача за назначения. За целта добавяме фиктивна машина (с номер 4), като цените за назначаване на тази машина на произволен завод са равни на нула. Целевата функция е $\max z = 13x_{12} + 16x_{22} + 12x_{13} + 11x_{14} + 15x_{21} + 13x_{23} + 20x_{24} + 5x_{31} + 7x_{32} + 10x_{33} + 6x_{34}$, а ограниченията са $\sum\limits_{j=1}^{4} x_{ij} = 1$, $i = 1, \dots, 4$, $\sum\limits_{i=1}^{4} x_{ij} = 1$, $j = 1, \dots, 4$, $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $i, j = 1, \dots, 4$.