Теория на множествата (изборен курс)
Януарска сесия на 2002/2003 уч. год.

1. Вярно ли е, че следната дефиниция за наредена двойка

$$\langle x, y\rangle = \{\{x, \varnothing\}, \{y, \{\varnothing\}\}\}$$

удовлетворява характеристичното условие за наредена двойка:

$$\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle \iff x = x' \,\&\, y = y' \ ?$$

Пресметнете $\bigcup\bigcup\langle x, y\rangle$.

2. Нека $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ е монотонна функция. Докажете, че съществува най-голяма относно теоретико множественото включване неподвижна точка X_0 на F, т. е. $X \subseteq X_0$ за всяка неподвижна точка X на F.

3. Нека A е множество и $b \notin A$. Ако $A \sim A \cup \{b\}$, докажете, че $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(A) \cup \{b\}$.

4. Нека Fin е множеството на крайните множества от естествени числа. Да се намерят всички минимални, най-малки, максимални и най-големи елементи (или да се покаже, че такива няма) в частично наредените множества $\langle Fin, \subseteq\rangle$ и $\langle Fin\setminus\{\varnothing\}, \subseteq\rangle$.

5. Нека A е множество и $P = \{f \mid f : B \to A,\ B \subseteq A\}$. Да се намерят всички най-малки, минимални, най-големи и максимални елементи на частично нареденото множество $\langle P, \subseteq_P\rangle$. Да се докаже, че всяка верига в това частично наредено множество има супремум.

6. Ако $\langle A, \leq\rangle$ е добре наредено множество, с Lim_A ще означаваме множеството от граничните му точки. (Вярно ли е, че $\langle \mathrm{Lim}_A, \leq \cap\ (\mathrm{Lim}_A \times \mathrm{Lim}_A)\rangle$ е също добре наредено?)

Да се намери множество от рационални числа A, което с естествената наредба между рационални числа е добре наредено, няма най-голям елемент и

а) Lim_A има точно 5 елемента;

б) $\langle \mathrm{Lim}_A, \leq \cap\ (\mathrm{Lim}_A \times \mathrm{Lim}_A)\rangle \cong \langle \omega, \leq\rangle$;

в) $\mathrm{Lim}_{\mathrm{Lim}_A}$ има точно 5 елемента;

г) $\mathrm{Lim}_{\mathrm{Lim}_A}$ с индуцираната наредба е изоморфно с $\omega + 1$.

7. Да се докаже, че следните две условия са еквивалентни:

(i) всяко множество A има функция селектор;

(ii) за всяко множество B множеството $\mathcal{P}(B)$ има функция селектор.

8. Нека α е ординал, f е функция с $\mathrm{Dom}(f) = \alpha$ и $f(\beta)$ е затворено множество от реални числа за всяко $\beta < \alpha$. Ако $(\forall\beta < \alpha)(\forall\gamma < \alpha)(\gamma < \beta \Longrightarrow f(\gamma) \subseteq f(\beta) \,\&\, f(\gamma) \neq f(\beta))$, да се докаже, че α е изброим ординал.

9. Нека A е изброимо множество от точки в равнината. Да се докаже, че съществуват множества X и Y, удовлетворяващи следните условия:

1) $X \cup Y = A$, $X \cap Y = \varnothing$;

2) всяка права, успоредна на абсцисната ос, пресича X в краен брой точки;

3) всяка права, успоредна на ординатната ос, пресича Y в краен брой точки.

10. Дефинирайте множество A с мощност на континуума, елементите на което са безкрайни множества от естествени числа, и такова че всеки два негови елемента са сравними по отношение на теоретико множественото включване.

Упътване. Използвайте редица, съдържаща всички рационални числа.

11. Нека за простота на изказа *наредба на рационалните числа* наричаме редица съдържаща всички рационални числа, всеки два елемента на която са различни, т. е. биекция на ω върху $\mathbb{Q}$.

Да се докаже, че за всяка редица от рационални числа $a_0, a_1, \ldots$ съществуват три такива наредби на рационалните числа $b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, \ldots$ $(i = 0, 1, 2)$, че

$$\forall n(a_n = b_n^{(0)} + b_n^{(1)} + b_n^{(2)}).$$

Да се посочи редица $a_0, a_1, \ldots$ от рационални числа, която не може да се представи като почленна сума на две наредби на рационалните числа.

Шест вярно решени и защитени задачи гарантират оценка 3. Всяка задача над този брой води до повишаване на оценката с една единица (като най-високата оценка е 6).