Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика
Катедра "Математическа логика и приложенията ѝ"

Едно субрекурсивно уточнение на основната теорема на алгебрата

Дипломна работа на Петър Христов Пешев
специалност "Информатика", ф. № 42270

Ръководител катедра:
проф. дмн. Ив. Сосков

Научен ръководител:
проф. дмн. Д. Скордев

София 2005

С благодарност към професор Скордев, без когото тази работа нямаше да е възможна

Съдържание

1. Въведение

Комплексните числа не могат да бъдат представени с изчислими функции, при която и да е от множеството еквивалентни дефиниции за изчислимост. Не е възможно едно неизброимо множество да се представи чрез изброимо, каквото са изчислимите функции. Въпреки това, множеството от изчислимите комплексни числа е достатъчно за решаване на практически проблеми, като например намиране на корени на полином с изчислими комплексни числа за коефициенти.

Системата, представена в този текст, установява изчислимост от нисък субрекурсивен клас за зависимостта на корените на един полином от неговите коефициенти. Ще докажем, че може ефективно да се намери произволно точно апроксимиране на корен на полином въз основа на съответни достатъчно точни апроксимации на неговите коефициенти като се използва един изключително нисък клас от изчислимост - втория клас на Гжегорчик. Като основа е използван един конструктивен метод за решаване на алгебрични уравнения с едно неизвестно [4], който е преработен в термините на теорията на изчислимостта.

2. ε^2 изчислими оператори

Дефиниция 1

Нека за всяко естествено число k да означим с F_k множеството на всички k-местни тотални функции в множеството на естествените числа. Множеството F_1 ще означаваме още и с F. Ако $f_0 \in F_m$, $f_1 \in F_{m+2}$ и $f_2 \in F_{m+1}$, то ще означаваме с $CBPR(f_0,f_1,f_2)$ функцията f от F_{m+1}, определена с помощта на равенствата

$$f(0,x_1,\ldots,x_m)=f_0(x_1,\ldots,x_m)$$
$$f(t+1,x_1,\ldots,x_m)=\min\{f_1(f(t,x_1,\ldots,x_m),t,x_1,\ldots,x_m),f_2(t,x_1,\ldots,x_m)\}$$

За тази функция ще казваме, че е получена от f_0, f_1 и f_2 чрез канонично ограничена примитивна рекурсия.

Дефиниция 2
(Дефиниция за ε^2 изчислим оператор)

Ако f е наредена n-ka от елементи на F, то ще означаваме нейните членове с $f_{[1]}, f_{[2]}, \ldots f_{[n]}$. Ще означаваме с O и с S съответно константата 0, разглеждана като 0-местна функция от F_0, и функцията $\lambda x.x+1$ от F. Нека n е дадено естествено число. За всяко естествено число k някои изображения на F^n в F_k ще наречем ε^2 изчислими n-местни оператори със стойности в F_k. Дефиницията е индуктивна :

0. Изображението Γ на F^n в F_0 , определено чрез равенството Γ(f) = O, е ε^2 изчислим n-местен оператор със стойности в F_0.

1. Изображението Γ на F^n в F_1 , определено чрез равенството Γ(f) = S, е ε^2 изчислим n-местен оператор със стойности в F_1

2. При всеки избор на естествените числа i и k, удовлетворяващи неравенствата $1 \le i \le k$, изображението Γ на F^n в F_k, определено чрез равенството $\Gamma(f)= \lambda\, x_1 \ldots x_k.x_i$, е ε^2 изчислим n-местен оператор със стойности в F_k.

3. Изображението Γ на F^n в F_1, определено чрез равенството $\Gamma(f)= \lambda\, x.x^2$, е ε^2 изчислим n-местен оператор със стойности в F_1.

4. При всеки избор на естественото число i, удовлетворяващо неравенствата $1 \le i \le n$, изображението Γ на F^n в F_1, определено чрез равенството $\Gamma(f)= f_{[i]}$, е ε^2 изчислим n-местен оператор със стойности в F_1.

5. Всеки път, когато Γ_0 е ε^2 изчислим n-местен оператор със стойности в F_m, а $\Gamma_1 \ldots \Gamma_m$ са ε^2 изчислими n-местни оператори със стойности в F_k, изображението Γ на F^n в F_k , определено чрез равенството $\Gamma(f) = \lambda x_1 \ldots x_k \Gamma_0(f)(\Gamma_1(f)(x_1,\ldots,x_k),\ldots,\Gamma_m(f)(x_1,\ldots,x_k))$, е ε^2 изчислим n-местен оператор със стойности в F_k.

6. Всеки път, когато Γ_0 е ε^2 изчислим n-местен оператор със стойности в F_m, Γ_1 е ε^2 изчислим n-местен оператор със стойности в F_{m+2}, Γ_2 е ε^2 n-местен изчислим оператор със стойности в F_{m+1}, изображението Γ на F^n в F_{m+1}, определено чрез равенството
$\Gamma(f) = CBPR(\Gamma_0(f), \Gamma_1(f), \Gamma_2(f))$, е ε^2 изчислим n-местен оператор със стойности в F_{m+1}.

Има тясна връзка между така дефинираните оператори и класовете на рекурсивните функционали дефинирани в [2]. Всеки оператор може да се разгледа като функционал, чийто аргументи са функциите, към които се прилага операторът, и числовите аргументи на функцията, която се получава като резултат.

Лесно се вижда, че множеството на ε^2 изчислимите оператори от F^0 в F_2 съвпада с множеството на функциите от втория клас на Гжегорчик (ε^2), дефинирано в [3]. Операцията CBPR не е съществено различна от ограничената рекурсия, а както ще докажем след малко функциите f_0, f_1, f_2 на Гжегорчик могат да бъдат изразени чрез ε^2 изчислими оператори.

Използвайки така въведените изчислими оператори, ще се стремим да докажем, че съществува ефективно намиране на корен на уравнение, като коефициентите на уравнението са зададени чрез външни функции, апроксимиращи корените на уравнението. Разумно е да се предположи, че не може да се използва по-нисък клас на изчислимост, тъй като, за да се оцени стойността на даден полином, е необходимо поне умножение, а ε^2 е най-малкият клас от класовете ε^n, който съдържа тази функция.

Ще докажем някои елементарни твърдения за така въведените оператори

Твърдение 2.1

Съществува ε^2 изчислим 0-местен оператор Γ със стойности в F_N, такъв че $\Gamma()(x_1,...,x_N) = f(x_1,...,x_N)$, когато f е дефинирана по някой от следните начини :

1) $f(x) = 0, \text{ako } x = 0$
$f(x) = x - 1, \text{ako } x > 0$

2) $f(x,y) = x \dot{-} y$

3) $f(t,x,y) = x, \text{ ako t} = 0$
$f(t,x,y) = y, \text{ ako t} > 0$

4) $f(x) = 2x$

5) $f(x,y) = x + y$

6) $f(x,y) = \max\{x,y\}$

7) $f(x,y) = xy$

8) $f(x,y) = |x - y|$

Доказателство

1) $f(x) = 0 \quad \text{ako } x = 0$
$f(x) = x - 1 \text{ ako } x > 0$

Нека

$\Gamma_0() = O$, където Γ_0 е 0-местен оператор със стойности в F_0

$\Gamma_1() = \lambda x_1 x_2.x_2$, където Γ_1 е 0-местен оператор със стойности в F_2

$\Gamma_2() = \lambda x.x$, където Γ_2 е 0-местен оператор със стойности в F_1

$\Gamma() = CBPR(\Gamma_0(), \Gamma_1(), \Gamma_2())$, където Γ_0 е 0-местен оператор със стойности в F_1

Съгласно дефиницията всички оператори са ε^2 изчислими. Ще докажем, че за всяко x е вярно : $\Gamma()(x) = f(x)$

Ако x=0, тогава $\Gamma()(x) = \Gamma_0()() = 0 = f(x)$.

Тогава $\Gamma()(x+1) = \min \{\Gamma_1()(\Gamma()(x),x),\Gamma_2()(x)\} = \min \{x,x\} = x = f(x+1)$

2) Нека $f(x,y) = x \dot{-} y$

$f(x,y) = 0$, ако $x < y$

$f(x,y) = x - y$, ако $x \geq y$

Нека

$\Gamma_0() = \lambda x.x$

$\Gamma_1() = \lambda x_1x_2x_3.\ \Gamma_{11}()(\Gamma_{12}()(x_1,x_2,x_3))$, където Γ_{11} е ε^2 изчислимият оператор означен с Г от предишната подточка (коригирано изваждане на 1), а $\Gamma_{12}=\lambda x_1x_2x_3.x_1$

$\Gamma_2() = \lambda x_1x_2.\ x_2$
Γ_2 е 0-местен ε^2 изчислим оператор със стойности в F_2.

Нека положим $\Gamma_3() = CBPR(\Gamma_0(), \Gamma_1(), \Gamma_2())$
Съгласно дефиницията Γ_3 е ε^2 изчислим, ще докажем, че

$$\Gamma_3() = \lambda tx.x \dot{-} t$$

Ako t=0, то тогава $\Gamma_3()(t,x) = \Gamma_0()(x) = x \dot{-} t$

Да допуснем, че твърдението е вярно за t, ще го докажем за t+1.

$$\Gamma_3(\ )(t+1,x) = \min\{\Gamma_1(\ )(\Gamma_3(\ )(t,x),t,x),\Gamma_2(\ )(t,x)\} = \min\left\{\left(\Gamma_3(\ )(t,x)\dot{-}1\right),\Gamma_2(\ )(t,x)\right\} =$$

$$\min\left\{\left(\left(x\dot{-}t\right)\dot{-}1\right),x\right\} = x\dot{-}(t+1)$$

Оттук може да се изведе и търсеният оператор Г :
$\Gamma_2() = \lambda x_1x_2\ \Gamma_3()(\Gamma_4()(x_1x_2), \Gamma_5()(x_1x_2))$, където $\Gamma_4()(x_1x_2) = \lambda x_1x_2.x_2$ и $\Gamma_5()(x_1x_2) = \lambda x_1x_2.x_1$

3) $f(t,x,y) = x$, ako $t = 0$
$f(t,x,y) = y$, ako $t > 0$

f може да се получи по следната схема за канонично ограничена примитивна рекурсия

$$f(0,x,y) = x$$

$$f(t+1,x,y) = \min\{y,y\}$$

Нека
$\Gamma_0() = \lambda\ x_1x_2.x_1$, Γ_0 е 0-местен ε^2 изчислим оператор със стойности в F_2.
$\Gamma_1() = \lambda\ x_1x_2x_3x_4.x_4$, където Γ_1 е ε^2 изчислимия оператор със стойности в F_4
$\Gamma_2() = \lambda x_1x_2x_3.x_3$, Γ_2 е 0-местен оператор със стойности в F_3.

Нека положим $\Gamma() = CBPR(\Gamma_0(), \Gamma_1(), \Gamma_2())$. Г е ε^2 изчислим, ще докажем, че за всяко t,x,y е вярно :

$$\Gamma()(t,x,y) = f(t,x,y)$$

Ako t=0, тогава

$\Gamma()(t,x,y) = \Gamma_0()(x,y) = x = f(t,x,y)$

Ако t > 0, тогава

$\Gamma(\ )(t,x,y) = \min\{\Gamma_1(\ )(\Gamma_3(\ )(t-1,x,y),t-1,x,y),\Gamma_2(\ )(t-1,x,y)\} = \min\{y,y\} = y = f(t,x,y)$

4) $f(x) = 2x$

Доказателството може да се извърши с оператори чрез следната схема за канонично ограничена примитивна рекурсия

$f(0) = 0$

$f(t+1) = \min\{f(t)+2, t^2+3\}$

$f_1 = \lambda tu.t+2$

$f_2 = \lambda t.t^2+3$

$f = CBPR(O, f_1, f_2)$

5) $f(x,y) = x + y$

Нека f_2, f_3, f_4 са функциите, получени съответно от подточки 2, 3 и 4.

Ако $x \geq y$, то $f(x,y) = 2x \dot{-} (x \dot{-} y) = f_2(f_4(x), f_2(x,y))$.

Ако $x < y$, то $f(x,y) = 2y \dot{-} (y \dot{-} x) = f_2(f_4(y), f_2(y,x))$.

Но ако $x \geq y$, то $f_2(y,x) = 0$, в противен случай $f_2(y,x)>0$. Използвайки f_3, може да извършим следното обединение

$f(x,y) = f_3(f_2(y,x), f_2(f_4(x), f_2(x,y)), f_2(f_4(y), f_2(y,x)))$

Оттук лесно се извежда търсеният оператор.

6) $f(x,y) = \max\{x,y\}$

Търсеният оператор може да се изведе от следното равенство :

$\max\{x,y\} = x + (y \dot{-} x)$

Нека Γ^2 и Γ^5 са операторите получени съответно от подточки 2 и 5.

Тогава операторът е

$\Gamma(\ ) = \lambda x_1 x_2.\Gamma^5(\ )(\Gamma^{id1}(\ )(x_1,x_2),(\Gamma^2(\ )(\Gamma^{id2}(\ )(x_1,x_2),\Gamma^{id1}(\ )(x_1,x_2))))$, където

$\Gamma^{id1}(\ ) = \lambda x_1 x_2.x_1$

$\Gamma^{id2}(\ ) = \lambda x_1 x_2.x_2$

7) $f(x,y)=xy$

Ще намерим оператора от следните равенства
$f(0,x)=0$
$f(t+1,x)=\min\{f(t,x)+x,\max(t+1,x)^2\}$
Нека Γ^5 и Γ^6 са операторите получени съответно от подточки 5 и 6.
Търсеният оператор Γ се получава по следния начин :

$\Gamma^{id1}(\ )=\lambda x_1 x_2 x_3 . x_1$
$\Gamma^{id3}(\ )=\lambda x_1 x_2 x_3 . x_3$
$\Gamma^{1}(\ )=\lambda x_1 x_2 x_3 . \Gamma^5(\ )(\Gamma^{id1}(\ )(x_1 x_2 x_3),\Gamma^{id3}(\ )(x_1 x_2 x_3))$
$\Gamma^{\exp}(\ )=\lambda x\ \ . x^2$
$\Gamma^{S}(\ )=\lambda x_1 x_2 . x_1+1$
$\Gamma^{id2}(\ )=\lambda x_1 x_2 . x_2$
$\Gamma^{2}(\ )=\lambda x_1 x_2 . \Gamma^{\exp}(\ )(\Gamma^6(\ )((\Gamma^S(\ )(x_1 x_2),\Gamma^{id2}(\ )(x_1 x_2))))$
$\Gamma=CBPR(O,\Gamma^1\ \ ,\Gamma^2)$

8) $f(x,y)=|x-y|$

Нека f_2 и f_5 са функциите получени съответно от подточки 2 и 5. Тогава търсената функция може да се намери по следния начин
$f(x,y)=(x\dot{-}y)+(y\dot{-}x)=f_5(f_2(x,y),f_2(y,x))$.

Оттук може да се намери търсеният оператор.

Твърдение 2.2
(Добавяне на фиктивни функции)
За всеки елементарно изчислим оператор Γ_0 от F^n в F_k, съществува елементарно изчислим оператор Γ от F^{n+m} в F_k, такъв че
$\Gamma(f_1,\dots,f_n)=\Gamma(f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_m)$ за произволни функции $g_1,\dots,g_m$.

Доказателство:
Това твърдение може лесно да се докаже с индукция по построението на Γ_0.
Нека Γ_0 удовлетворява точка 0 от дефиницията. Тогава можем да дефинираме Γ като изображение на F^{n+m} в F_0 определено чрез равенството $\Gamma(f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_m)=O$.

Ако Γ_0 удовлетворява някоя от точките 1-4, доказателството е аналогично.
Нека Γ_0 удовлетворява точка 5. Γ_0 е дефинирано по следния начин :

$$\Gamma_0(f_1,...,f_n) = \lambda x_1...x_k \Gamma^*{}_0(f_1,...,f_n)(\Gamma^*{}_1(f_1,...,f_n)(x_1,...,x_k),...,\Gamma^*{}_l(f_1,...,f_n)(x_1,...,x_k))$$

Съгласно индукционното предположение съществуват оператори такива че

$$\Gamma^*{}_0(f_1,...,f_n) = \Gamma^{**}{}_0(f_1,...,f_n,g_1,...,g_m)$$

...

$$\Gamma^*{}_l(f_1,...,f_n) = \Gamma^{**}{}_l(f_1,...,f_n,g_1,...,g_m)$$

Тогава следният оператор е елементарно изчислим и отговаря на условието

$$\Gamma(f_1,...,f_n,g_1,...,g_m) = \lambda x_1...x_k \Gamma^{**}{}_0(f_1,...,f_n,g_1,...,g_m)$$
$$(\Gamma^{**}{}_1(f_1,...,f_n,g_1,...,g_{m_n})(x_1,...,x_k),...,\Gamma^{**}{}_l(f_1,...,f_n,g_1,...,g_m)(x_1,...,x_k))$$

Ако Γ_0 удовлетворява точка 6, то доказателството е аналогично на точка 5.

Твърдение 2.3

Нека Γ^1 и Γ^2 са дадени ε^2 изчислими k-местни оператори със стойности във F_1. Тогава съществуват ε^2 изчислими k-местни оператори със стойности във F_1, такива че

1) $\Gamma_1(f_1,...,f_k)(n) = \Gamma^1(f_1,...,f_k)(n) = 0$ ako $\Gamma^1(f_1,...,f_k)(n) = 0$
$\Gamma_1(f_1,...,f_k)(n) = \Gamma^1(f_1,...,f_k)(n) - 1$ ako $\Gamma^1(f_1,...,f_k)(n) > 0$

2) $\Gamma_2(f_1,...,f_k)(n) = \Gamma^1(f_1,...,f_k)(n) + \Gamma^2(f_1,...,f_k)(n)$

3) $\Gamma_3(f_1,...,f_k)(n) = \max\{\Gamma^1(f_1,...,f_k)(n), \Gamma^2(f_1,...,f_k)(n)\}$

4) $\Gamma_4(f_1,...,f_k)(n) = \Gamma^1(f_1,...,f_k)(n)\Gamma^2(f_1,...,f_k)(n)$

5) $\Gamma_5(f_1,...,f_k)(n) = \Gamma^1(f_1,...,f_k)(n)^c$, където c е фиксирана константа

6) $\Gamma_7(f_1,...,f_k)(n) = c$, където c е фиксирана константа

Доказателство:

1) $\begin{array}{l}\Gamma_1(f_1,...,f_k)(n)=\Gamma^1(f_1,...,f_k)(n)=0 \quad \text{ako } \Gamma^1(f_1,...,f_k)(n)=0\\ \Gamma_1(f_1,...,f_k)(n)=\Gamma^1(f_1,...,f_k)(n)-1 \quad \text{ako } \Gamma^1(f_1,...,f_k)(n)>0\end{array}$

От твърдение 2.1 1-ва подточка следва, че съществува ε^2 изчислим оператор Γ_0:

$\Gamma_0(\ )(n)=0, \ \text{ako } n=0$

$\Gamma_0(\ )(n)=n-1, \ \text{ako } n>0$

Съгласно твърдението за добавяне на фиктивни функции съществува ε^2 изчислим оператор

$\Gamma_0{*}(f_1,...,f_k)(n)=0, \ \text{ako } n=0$

$\Gamma_0{*}(f_1,...,f_k)(n)=n-1, \ \text{ako } n>0$

Съгласно 5-та точка от дефиницията за ε^2 изчислим оператори, съществува ε^2 изчислим оператор Γ :

$\Gamma(f_1,...,f_k)=\lambda x_1 \Gamma_0(f_1,...,f_k)(\Gamma_1(f_1,...,f_k)(x_1))$

Γ отговаря на условията в тази подточка

Подточки 2)-4) от това твърдение имат аналогично доказателство чрез използване на твърдение 2.1

5)

Понеже c е фиксирана константа, можем *c-1* пъти да извършим умножение.

$$\Gamma_7(f_1,...,f_k)(n)=\Gamma^4(f_1,...,f_k)(\Gamma^1(f_1,...,f_k)(n),\Gamma^4(f_1,...,f_k)\underbrace{(....\Gamma^4(f_1,...,f_k)(\Gamma^1(f_1,...,f_k)(n),\Gamma^1(f_1,...,f_k)(n))...}_{c-3})$$

Където

$\Gamma^4(f_1...f_k)$ е операторът от подточка 4

6)

Ще намерим търсения оператор, като извършим *c* събирания :

$$\Gamma_7(f_1,...,f_k)(n)=\Gamma^S(f_1,...,f_k)(\Gamma^S(f_1,...,f_k)\underbrace{(....\Gamma^S(f_1,...,f_k)(\Gamma^O(f_1,...,f_k))}_{c-2}...)$$

Където

$\Gamma^S(f_1,...,f_k)=S$

$\Gamma^O(f_1,...,f_k)=O$

Понеже c е фиксирана константа, дефиницията е коректна.

Твърдение 2.4

(Суперпозиция на оператори)

Ако Γ_0 е ε^2 изчислим n-местен оператор със стойности в F_k, а $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$ са ε^2 изчислими r-местни оператори със стойности в F_{l+1}, то съществува такъв ε^2 изчислим r-местен оператор Г със стойности в F_{k+l}, че при всеки избор на функциите $f_1,\dots,f_r$ от F и на естествените числа $x_1,\dots x_k, y_1,\dots y_l$ е вярно

$$\Gamma(f_1,\dots,f_r)(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_l)=\Gamma_0(\lambda t.\Gamma_1(f_1,\dots,f_r)(y_1,\dots,y_l,t),\dots,\lambda t.\Gamma_n(f_1,\dots,f_r)(y_1,\dots,y_l,t))(x_1,\dots,x_k)$$

Доказателство:

Ще докажем това твърдение чрез индукция по построението на Γ_0

Нека

$\Gamma_0(g_1,\dots,g_n)(\;)=O$, тогава можем да намерим

$\Gamma(f_1,\dots,f_r)(y_1,\dots,y_m)=O$

Аналогично е построяването за подточки 1-3 от дефиницията.

Нека

$\Gamma_0(g_1,\dots,g_n)=g_i$ за някое i

Ще докажем, че следният оператор е ε^2 изчислим

$\Gamma\ (f_1,\dots,f_r)(x,y_1,\dots,y_l)=\lambda t.\Gamma_i(f_1,\dots,f_r)(y_1,\dots,y_l,t)(x)$

Нека

$\Gamma_1^{id}(f_1,\dots,f_r)(x,y_1,\dots,y_l)=y_1$

...

$\Gamma_l^{id}(f_1,\dots,f_r)(x,y_1,\dots,y_l)=y_l$

$\Gamma_{l+1}^{id}(f_1,\dots,f_r)(x,y_1,\dots,y_l)=x$

тогава е в сила равенството

$.\Gamma\ (f_1,\dots,f_r)(x,y_1,\dots,y_l)=\Gamma_i(f_1,\dots,f_r)(\Gamma_1^{id}(f_1,\dots,f_r)(x,y_1,\dots,y_l),\dots,\Gamma_{l+1}^{id}(f_1,\dots,f_r)(x,y_1,\dots,y_l))$

по 5-та точка на дефиницията, операторът е ε^2 изчислим и отговаря на условието.

Нека

$\Gamma_0(g_1,...,g_n) = \lambda x_1...x_k \Delta_0(g_1,...,g_n)(\Delta_1(g_1,...,g_n)(x_1,...,x_k),...,\Delta_m(g_1,...,g_n)(x_1,...,x_k))$,
където индукционното предположение е изпълнено за
$\Delta_0, \Delta_1, ...\Delta_m$.
Съгласно индукционното предположение съществуват ε^2 изчислими оператори $\Delta^*_0, \Delta^*_1, ..., \Delta^*_m$, за които е вярно

$\Delta^*_0(f_1,...,f_r)(z_1,...,z_m,y_1,...,y_l) = \Delta_0(\lambda t.\Gamma_1(f_1,...,f_r)(y_1,...,y_l,t),...,\lambda t.\Gamma_n(f_1,...,f_r)(y_1,...,y_l,t))(z_1,...,z_m)$

$\Delta^*_i(f_1,...,f_r)(x_1,...,x_k,y_1,...,y_l) = \Delta_i(\lambda t.\Gamma_1(f_1,...,f_r)(y_1,...,y_l,t),...,\lambda t.\Gamma_n(f_1,...,f_r)(y_1,...,y_l,t))(x_1,...,x_k)$

за $1 \le i \le m$

Тогава следният оператор е ε^2 изчислим и удовлетворява условието на твърдението

$$\Gamma(f_1,...,f_r)(x_1,...,x_k,y_1,...,y_l) = \Delta^*_0(f_1,...,f_r)(\Delta^*_1(f_1,...,f_r)(x_1,...,x_k,y_1,...,y_l),...,$$
$$\Delta^*_m(f_1,...,f_r)(x_1,...,x_k,y_1,...,y_l),\Delta^{id}_1(f_1,...,f_r)(x_1,...,x_k,y_1,...,y_l),...,\Delta^{id}_l(f_1,...,f_r)(x_1,...,x_k,y_1,...,y_l))$$

, където

$\Delta^{id}_1(f_1,...,f_r)(x_1,...,x_k,y_1,...,y_l) = y_1$

...

$\Delta^{id}_l(f_1,...,f_r)(x_1,...,x_k,y_1,...,y_l) = y_l$

Ако Г е построен по 6-та точка на дефиницията, то построението е аналогично на това от 5-та.

Нека
$\Gamma_0(g_1,...,g_n) = CBPR(\Delta_0(g_1,...,g_n),\Delta_1(g_1,...,g_n),\Delta_2(g_1,...,g_n))$
където индукционното предположение е изпълнено за
$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$.
Съгласно индукционното предположение съществуват ε^2 изчислими оператори $\Delta^*_0, \Delta^*_1, \Delta^*_2$, за които е вярно

$\Delta^*_0(f_1,...,f_r)(x_1,...,x_{k-1},y_1,...,y_l) = \Delta_0(\lambda t.\Gamma_1(f_1,...,f_r)(y_1,...,y_l,t),...,\lambda t.\Gamma_n(f_1,...,f_r)(y_1,...,y_l,t))(x_1,...,x_{k-1})$

$\Delta^*_1(f_1,...,f_r)(x_1,...,x_{k+1},y_1,...,y_l) = \Delta_0(\lambda t.\Gamma_1(f_1,...,f_r)(y_1,...,y_l,t),...,\lambda t.\Gamma_n(f_1,...,f_r)(y_1,...,y_l,t))(x_1,...,x_{k+1})$

$\Delta^*_2(f_1,...,f_r)(x_1,...,x_k,y_1,...,y_l) = \Delta_0(\lambda t.\Gamma_1(f_1,...,f_r)(y_1,...,y_l,t),...,\lambda t.\Gamma_n(f_1,...,f_r)(y_1,...,y_l,t))(x_1,...,x_k)$

Тогава следният оператор е ε^2 изчислим и удовлетворява условието на твърдението

$$\Gamma(f_1,...,f_r) = CBPR(\Delta^*_0(f_1,...,f_r),\Delta^*_1(f_1,...,f_r),\Delta^*_2(f_1,...,f_r))$$

3. Представяне на комплексни числа и ε^2 изчислимост. Основни свойства.

В тази глава ще дефинираме ε^2 изчислимост за функции и представяне на комплексни числа и полиноми. Ще докажем някои помощни твърдения свързани с тях, които ще се използват в следващите части.

Дефиниция 3
Представяне на комплексно число z = a+bi или негови апроксимиращи функции ще наричаме коя да е 6-рка от едноместни тотални изчислими функции в множеството на естествените числа $f_1,...,f_6$, такава че за всяко естествено n е вярно

$$\left|\frac{f_1(n)-f_2(n)}{f_3(n)+1}-a\right| \le \frac{1}{n+1} \quad \text{и} \quad \left|\frac{f_4(n)-f_5(n)}{f_6(n)+1}-b\right| \le \frac{1}{n+1}$$

Ако съществува представяне за някое комплексно число z, ще казваме, че то е изчислимо.
Под представяне на реално число *x* ще разбираме коя да е тройка от функции $f_1,...,f_3$, такава че за всяко естествено n е вярно

$$\left|\frac{f_1(n)-f_2(n)}{f_3(n)+1}-x\right| \le \frac{1}{n+1}$$

Дефиниция 4
Ще казваме за една функция φ с n аргумента комплексни числа и резултат комплексно число, че е ε^2 изчислима, ако има шест ε^2 изчислими оператори $\Gamma_1,...,\Gamma_6$ от F^{6n} в F_1 такива, че всеки път когато n-те последователни шесторки в една 6n-членна редица $f_1,...,f_{6n}$ са представяния съответно на някои комплексни числа $z_1,...,z_n$, шесторката от функции $\Gamma_1(f_1,...,f_{6n}),...,\Gamma_6(f_1,...,f_{6n})$ е представяне на комплексното число $\varphi(z_1,...,z_n)$

Така въведеното понятие за изчислимост на функция като преобразувание на редици от рационални числа чрез функционали е близко до така наречения “Полски подход” използвано от много автори в изчислимия анализ. Използването на класове от преобразувания на функции като средство за изучаване на изчислимостта е въведено в [1], докато разширението на дефиницията за реални функции е изследвано по-подробно в [2].

Други автори, например [7] , въвеждат изчислимост на реални функции чрез машини на Тюринг, които преобразуват безкрайни редици от целочислени представяния на аргументите. Тук въведената изчислимост е много по-тесен клас, тъй като се използва само дадено подмножество на примитивно рекурсивните оператори.

Дефиниция 5
Под представяне на полином ще разбираме редица, която е конкатенация на представянията на неговите коефициенти.

В по-нататъшното изложение ще разглеждаме полиноми с коефициент 1 пред най-високата степен. С цел да облекчим означенията ще изпускаме представянето на константата 1 от представянето на такива полиноми.

В следващите няколко твърдения, ще докажем, че някои често срещани комплексни функции (събиране, умножение и т.н.) са ε^2 изчислими.

Твърдение 3.1
(Суперпозиция на ε^2 изчислими функции)
Всеки път, когато φ е ε^2 изчислима n-местна комплексна функция, а $\psi_1,...,\psi_n$ са ε^2 изчислими m-местни комплексни функции, функцията θ, определена чрез равенството
$\theta(x_1,...,x_m)=\varphi(\psi_1(x_1,...,x_m),...,\psi_n(x_1,...,x_m))$, е ε^2 изчислима m-местна комплексна функция.

Доказателство:
Лесно могат да се конструират нужните 6 оператори чрез суперпозицията, използвана в твърдение 2.4. Нека $\Gamma^{\varphi}{}_1,...,\Gamma^{\varphi}{}_6$ са

операторите, които преобразуват представяне на аргументите на φ, а $\Gamma^{\psi i}{}_1,...,\Gamma^{\psi i}{}_6$ са тези за g_i.

Тогава следните оператора са ε^2 изчислими и отговарят на условието.

$$\Gamma_1^{\theta}(f_1,...,f_{6m})(n)=\Gamma_1^{\varphi}\left(\lambda t.\Gamma_1^{\psi 1}(f_1,...,f_{6m})(t),...,\lambda t.\Gamma_6^{\psi m}(f_1,...,f_{6m})(t)\right)(n)$$
…
$$\Gamma_6^{\theta}(f_1,...,f_{6m})(n)=\Gamma_6^{\varphi}\left(\lambda t.\Gamma_1^{\psi 1}(f_1,...,f_{6m})(t),...,\lambda t.\Gamma_6^{\psi m}(f_1,...,f_{6m})(t)\right)(n)$$

Твърдение 3.2

Функцията, която преобразува произволни комплексни числа a и b в комплексното число $a+b$, е ε^2 изчислима.

Доказателство:

Тази част от представянето, която апроксимира реалната част на a, ще обозначаваме с

$$A_{ra}(n)=\frac{u_{ra}(n)-v_{ra}(n)}{w_{ra}(n)+1}$$

Функциите, които апроксимират имагинерната част, ще означаваме с

$$A_{ca}(n)=\frac{u_{ca}(n)-v_{ca}(n)}{w_{ca}(n)+1}$$

По подобен начин ще обозначаваме и функциите за b и за $a+b$

Ще докажем, че съществуват шест ε^2 изчислими оператори, такива че

$\Gamma_1(u_{ra}, v_{ra}, w_{ra}, u_{ca}, v_{ca}, w_{ca}, u_{rb}, v_{rb}, w_{rb}, u_{cb}, v_{ca}, w_{cb}) = u_{ra+b}$

....

$\Gamma_6(u_{ra}, v_{ra}, w_{ra}, u_{ca}, v_{ca}, w_{ca}, u_{rb}, v_{rb}, w_{rb}, u_{cb}, v_{ca}, w_{cb}) = w_{ca+b}$

Ще изведем реалната част на апроксимиращите функции за a+b.

Нека да въведем $A_{ra+b}(n)=A_{ra}(2n+2)+A_{rb}(2n+2)$

Така въведената рационална функция апроксимира реалната част на a+b , защото

$$\left|A_{ra+b}(n)-(a_r+b_r)\right|\le\left|A_{ra}(2n+2)-a_r\right|+\left|A_{rb}(2n+2)-b_r\right|\le\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+3}<\frac{2}{2n+2}=\frac{1}{n+1}$$

Оттук могат да се изведат

$$\frac{u_{ra+b}(n)-v_{ra+b}(n)}{w_{ra+b}(n)+1}=\frac{u_{ra}(2n+2)-v_{ra}(2n+2)}{w_{ra}(2n+2)+1}+\frac{u_{rb}(2n+2)-v_{rb}(2n+2)}{w_{rb}(2n+2)+1}i$$

$$u_{ra+b}(n)=u_{ra}(2n+2)w_{rb}(2n+2)+u_{ra}(2n+2)+u_{rb}(2n+2)w_{ra}(2n+2)+u_{rb}(2n+2)$$

Следните оператори са ε^2 изчислими

$$\Gamma^1(u_{ra},...,w_{cb})(n)=u_{ra}(n)$$
$$\Gamma^2(u_{ra},...,w_{cb})(n)=u_{rb}(n)$$
$$\Gamma^3(u_{ra},...,w_{cb})(n)=w_{ra}(n)$$
$$\Gamma^4(u_{ra},...,w_{cb})(n)=w_{rb}(n)$$
$$\Gamma^{++}(u_{ra},...,w_{cb})(n)=2n+2$$

$$\Gamma^*(u_{ra},...,w_{cb})(n)=$$
$$\Gamma^1(u_{ra},...,w_{cb})(\Gamma^{++}(u_{ra},...,w_{cb})(n))\Gamma^4(u_{ra},...,w_{cb})(\Gamma^{++}(u_{ra},...,w_{cb})(n))+\Gamma^1(u_{ra},...,w_{cb})(\Gamma^{++}(u_{ra},...,w_{cb})(n))+$$
$$\Gamma^2(u_{ra},...,w_{cb})(\Gamma^{++}(u_{ra},...,w_{cb})(n))\Gamma^3(u_{ra},...,w_{cb})(\Gamma^{++}(u_{ra},...,w_{cb})(n))+\Gamma^2(u_{ra},...,w_{cb})(\Gamma^{++}(u_{ra},...,w_{cb})(n))=$$
$$u_{ra}(2n+2)w_{rb}(2n+2)+u_{ra}(2n+2)+u_{rb}(2n+2)w_{ra}(2n+2)+u_{rb}(2n+2)=u_{ra+b}(n)$$

Вижда се, че

$$\Gamma^*(u_{ra},...,w_{cb})(n)=u_{ra+b}(n)$$

Аналогично се извеждат и останалите 5 формули

$$v_{ra+b}(n)=v_{ra}(2n+2)w_{rb}(2n+2)+v_{ra}(2n+2)+v_{rb}(2n+2)w_{ra}(2n+2)+v_{rb}(2n+2)$$
$$w_{ra+b}(n)=w_{ra}(2n+2)w_{rb}(2n+2)+w_{ra}(2n+2)+w_{rb}(2n+2)$$
$$u_{ca+b}(n)=u_{ca}(2n+2)w_{cb}(2n+2)+u_{ca}(2n+2)+u_{cb}(2n+2)w_{ca}(2n+2)+u_{cb}(2n+2)$$
$$v_{ra+b}(n)=v_{ca}(2n+2)w_{cb}(2n+2)+v_{ca}(2n+2)+v_{cb}(2n+2)w_{ca}(2n+2)+v_{cb}(2n+2)$$
$$w_{ra+b}(n)=w_{ca}(2n+2)w_{cb}(2n+2)+w_{ca}(2n+2)+w_{cb}(2n+2)$$

Останалите 5 оператора се конструират аналогично.

Твърдение 3.3

Функцията, която преобразува произволни комплексни числа a и b в комплексното число ab, е ε^2 изчислима.

Доказателство:

Ще използваме означения както в предходното твърдение, нека представянето за a да е $u_{ra}, v_{ra}, w_{ra}, u_{ca}, v_{ca}, w_{ca}$, докато b има представяне $u_{rb}, v_{rb}, w_{rb}, u_{cb}, v_{ca}, w_{cb}$. Ще докажем, че съществуват шест ε^2 изчислими оператори, такива че

$\Gamma_1(u_{ra}, v_{ra}, w_{ra}, u_{ca}, v_{ca}, w_{ca}, u_{rb}, v_{rb}, w_{rb}, u_{cb}, v_{ca}, w_{cb}) = u_{rab}$

....

$\Gamma_6(u_{ra}, v_{ra}, w_{ra}, u_{ca}, v_{ca}, w_{ca}, u_{rb}, v_{rb}, w_{rb}, u_{cb}, v_{ca}, w_{cb}) = w_{cab}$

Нека да положим $c = u_{ra}(0) + u_{rb}(0) + 3$, $d = u_{ca}(0) + u_{cb}(0) + 3$

Нека да дефинираме

$$C(n) = A_{ra}(cn+c)A_{rb}(cn+c)$$
$$D(n) = A_{ca}(dn+d)A_{cb}(dn+d)$$

Тогава

$$\left|C(n)-a_r b_r\right| \le \left|A_{ra}(cn+c)A_{rb}(cn+c)-a_r A_{rb}(cn+c)\right|+\left|a_r A_{rb}(cn+c)-a_r b_r\right| \le$$
$$\left|A_{ra}(cn+c)-a_r\right|\left|A_{rb}(cn+c)\right|+\left|a_r\right|\left|A_{rb}(cn+c)-b_r\right| \le \frac{\left|A_{rb}(cn+c)\right|}{cn+c+1}+\frac{\left|a_r\right|}{cn+c+1} <$$
$$\frac{\left|b_r\right|+1}{cn+c+1}+\frac{\left|a_r\right|}{cn+c+1} < \frac{\left|A_{rb}(0)\right|+\left|A_{ra}(0)\right|+3}{cn+c+1} < \frac{u_{ra}(0)+u_{ra}(0)+3}{cn+c+1} < \frac{c}{cn+c+1} < \frac{1}{n+1}$$

Използвайки подобни неравенства, лесно се доказва, че:

$$\left|D(n)-a_c b_c\right| \le \frac{1}{n+1}$$

Реалната част на ab може да се апроксимира със следната функция:

$$A_{ra*b}(n) = C(2n+2) - D(2n+2)$$

Ще докажем че така зададената функция наистина апроксимира реалната част на ab:

$$\left|A_{ra*b}(n)-(ab)_r\right| = \left|C(2n+2)-D(2n+2)-a_r b_r + a_c b_c\right| \le \left|C(2n+2)-a_r b_r\right|+\left|D(2n+2)-a_c b_c\right|$$
$$< \frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+3} < \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{n+1}$$

Ще изведем формули за u_{rab}

$$C(2n+2)-D(2n+2)=A_{ra}(2cn+3c)A_{rb}(2cn+3c)-A_{ca}(2dn+3d)A_{cb}(2dn+3d)=$$
$$\frac{u_{ra}(2cn+3c)-v_{ra}(2cn+3c)}{w_{ra}(2cn+3c)}*\frac{u_{rb}(2cn+3c)-v_{rb}(2cn+3c)}{w_{rb}(2cn+3c)}-$$
$$\frac{u_{ca}(2dn+3d)-v_{ca}(2dn+3d)}{w_{ca}(2dn+3d)}*\frac{u_{cb}(2dn+3d)-v_{cb}(2dn+3d)}{w_{cb}(2dn+3d)}$$

Оттук се извеждат следните формули :

$$u_{ra*b}=u_{ra}(2cn+3c)u_{rb}(2cn+3c)w_{ca}(2dn+3d)w_{cb}(2dn+3d)+$$
$$v_{ra}(2cn+3c)v_{rb}(2cn+3c)w_{ca}(2dn+3d)w_{cb}(2dn+3d)+$$
$$u_{ca}(2dn+3d)v_{cb}(2dn+3d)w_{ra}(2cn+3c)w_{rb}(2cn+3c)+$$
$$v_{ca}(2dn+3d)u_{cb}(2dn+3d)w_{ra}(2cn+3c)w_{rb}(2cn+3c)$$

$$v_{ra*b}=u_{ra}(2cn+3c)v_{rb}(2cn+3c)w_{ca}(2dn+3d)w_{cb}(2dn+3d)+$$
$$v_{ra}(2cn+3c)u_{rb}(2cn+3c)w_{ca}(2dn+3d)w_{cb}(2dn+3d)+$$
$$u_{ca}(2dn+3d)u_{cb}(2dn+3d)w_{ra}(2cn+3c)w_{rb}(2cn+3c)+$$
$$v_{ca}(2dn+3d)v_{cb}(2dn+3d)w_{ra}(2cn+3c)w_{rb}(2cn+3c)$$

$$w_{ra*b}=w_{ra}(2cn+3c)w_{rb}(2cn+3c)w_{ca}(2dn+3d)w_{cb}(2dn+3d)$$

Оттук могат лесно да намерят първите 3 ε^2 изчислими оператори отговарящи на условията.

Имагинерната част също така може да бъде апроксимирана по следния начин:

$e = u_{ra}(0) + u_{cb}(0) + 3$ и $f = u_{ca}(0) + u_{rb}(0) + 3$

$$A_{ca*b}(n)=A_{ra}(2en+2e+2)A_{cb}(2en+2e+2)+A_{ca}(2fn+2f+2)A_{rb}(2fn+2f+2)$$

Твърдение 3.4

Функцията, която преобразува кое да е комплексно число z в реалното число $|z|^2$, е ε^2 изчислима.

Доказателство:

Нека z е във вида $z=a+bi$

Понеже a и b може да се разгледат като комплексни числа с представяне на имагинерната част O,O,O , то можем да приложим твърдения 3.1, 3.2 и 3.3. Тогава функцията, която преобразува a и b в

a^2+b^2, е ε^2 изчислима. Съгласно дефиницията съществуват шест ε^2 изчислими оператори $\Gamma^*{}_1,...,\Gamma^*{}_6$, такива че
$\Gamma^*{}_1(u_{ra},v_{ra},w_{ra},O,O,O,u_{rb},v_{rb},w_{rb},O,O,O),...,\Gamma^*{}_6(u_{ra},v_{ra},w_{ra},O,O,O,u_{rb},v_{rb},w_{rb},O,O,O)$
са представяне на $|z|^2$. Понеже $|z|^2$ е реално число, ще разгледаме само първите 3 от тях. Съгласно твърдение 3.2 съществуват 3 ε^2 изчислими оператори $\Gamma_1,...,\Gamma_3$, такива че
$\Gamma_1(u_{ra},v_{ra},w_{ra},u_{rb},v_{rb},w_{rb}),...,\Gamma_3(u_{ra},v_{ra},w_{ra},u_{rb},v_{rb},w_{rb})$ са представяне на a^2+b^2.
Твърдението е доказано.

Тук сме приложили твърдението за суперпозицията при k=l=0 и за ε^2 изчислимите оператори

$$\Gamma_1^{**}(u_{ra},v_{ra},w_{ra},u_{rb},v_{rb},w_{rb})=u_{ra}$$

...

$$\Gamma_6^{**}(u_{ra},v_{ra},w_{ra},u_{rb},v_{rb},w_{rb})=w_{rb}$$

$$\Gamma_7^{**}(u_{ra},v_{ra},w_{ra},u_{rb},v_{rb},w_{rb})=O$$

...

$$\Gamma_{12}^{**}(u_{ra},v_{ra},w_{ra},u_{rb},v_{rb},w_{rb})=O$$

Твърдение 3.5

Всеки полином, разглеждан като функция на своите коефициенти и аргумент, е ε^2 изчислима функция.

Доказателство:

Нека полиномът е от вида $P(z)=\alpha_N z^N+\alpha_{N-1}z^{N-1}+...+\alpha_0$

Ще докажем твърдението индуктивно по степента N на полинома. За N=0 твърдението е очевидно. Да допуснем, че е вярно за N-1, ще се стремим да докажем, че е вярно за N.

P(z) може да се представи като $P(z)=\alpha_N z^N+P_1(z)$, като $P_1(z)$ е полином от N-1-ва степен, за който може да се приложи индукционното предположение. Чрез прилагане на твърдения 3.1, 3.2 и 3.3 и на индукционното предположение лесно се вижда, че функцията f, дефинирана като $f(\alpha_0,...,\alpha_N,z)=P(z)$, е ε^2 изчислима.

Твърдение 3.6

За всяко положително цяло число N съществува такъв ε^2 изчислим оператор Γ от F^{6N} в F_7, че винаги, когато $f_1,...f_{6N}$ е представяне на даден полином от N-та степен P(z) с коефициент 1 пред z^N, за произволни естествени числа $y_1,...y_6,t$ са в сила импликациите

$$\Gamma\left(f_1,...,f_{6N}\right)\left(y_1,...,y_6,t\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \left|P\left(\frac{y_1-y_2}{y_3+1}+\frac{y_4-y_5}{y_6+1}i\right)\right|\le\frac{1}{t+1}$$

$$\left|P\left(\frac{y_1-y_2}{y_3+1}+\frac{y_4-y_5}{y_6+1}i\right)\right|\le\frac{1}{2(t+1)} \quad \Rightarrow \quad \Gamma\left(f_1,...,f_{6N}\right)\left(y_1,...,y_6,t\right)=0$$

Доказателство:

Нека z е рационално комплексно число, такова че $z=\frac{y_1-y_2}{y_3+1}+\frac{y_4-y_5}{y_6+1}i$.

Едно представяне на z е $g_1(t)=y_1,\ldots,g_6(t)=y_6$.

Съгласно предните две твърдения съществуват три оператора $\Gamma_1^*,\Gamma_2^*,\Gamma_3^*$ от F^{6N+6} в F, такива че

$$\left|\frac{\Gamma*_1\left(f_1,...,f_{6N},g_1,...,g_6\right)(t)-\Gamma*_2\left(f_1,...,f_{6N},g_1,...,g_6\right)(t)}{\Gamma*_3\left(f_1,...,f_{6N},g_1,...,g_6\right)(t)+1}-\left|P(z)\right|^2\right|\le\frac{1}{t+1}$$

Съгласно твърдение 2.4 (суперпозиция на оператори) съществуват три ε^2 изчислими оператора $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ от F^{6N+6} в F, такива че

$$\left|\frac{\Gamma_1\left(f_1,...,f_{6N}\right)\left(y_1,...,y_6,t\right)-\Gamma_2\left(f_1,...,f_{6N}\right)\left(y_1,...,y_6,t\right)}{\Gamma_3\left(f_1,...,f_{6N}\right)\left(y_1,...,y_6,t\right)+1}-\left|P(z)\right|^2\right|\le\frac{1}{t+1}$$

Тук сме използвали твърдението при k=1, l=6, r= 6N

Използвайки твърденията в част 2, може да се докаже, че следният оператор е ε^2 изчислим:

$$\Gamma\left(f_1,...,f_{6N}\right)\left(y_1,...,y_6,t\right)=2(t+1)^2\left|\Gamma_1\left(f_1,...,f_{6N}\right)\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)-\Gamma_2\left(f_1,...,f_{6N}\right)\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)\right|\dot{-}$$

$$\left|\Gamma_3\left(f_1,...,f_{6N}\right)\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)+1\right|$$

Ще докажем, че Γ удовлетворява изискваните условия и двете импликации са в сила.
Да допуснем, че $\Gamma(f_1,...f_{6N})(y_1,...,y_6,t)=0$. От дефиницията на операцията коригирано изваждане следва

$$\left|\Gamma_3(f_1,...,f_{6N})\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)+1\right| \geq 2(t+1)^2\left|\Gamma_1(f_1,...,f_{6N})\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)-\Gamma_2(f_1,...,f_{6N})\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2\right.\right.$$

$$\frac{1}{2(t+1)^2} \geq \frac{\left|\Gamma_1(f_1,...,f_{6N})\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)-\Gamma_2(f_1,...,f_{6N})\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)\right|}{\left|\Gamma_3(f_1,...,f_{6N})\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)+1\right|}$$

От свойствата на $\Gamma_1 .. \Gamma_3$ следва, че

$$\left|\frac{\Gamma_1(f_1,...f_{6N})\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)-\Gamma_2(f_1,...f_{6N})\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)}{\Gamma_3(f_1,...f_{6N})\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)+1}-\left|P(z\ )\right|^2\right| \leq \frac{1}{4(t+1)^2}$$

Следователно

$$\left|P(z\ )\right|^2 \leq \frac{1}{4(t+1)^2}+\left|\frac{\Gamma_1(f_1,...,f_{6N})\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)-\Gamma_2(f_1,...,f_{6N})\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)}{\Gamma_3(f_1,...,f_{6N})\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)+1}\right| \leq$$

$$\frac{1}{4(t+1)^2}+\frac{1}{2(t+1)^2}<\frac{1}{(t+1)^2}$$

Оттук

$$\left|P(z\ )\right| \leq \frac{1}{t+1}$$

Ще докажем втората импликация. Нека $\left|P(z\ )\right| \leq \dfrac{1}{2(t+1)}$, тогава

$$\left|P(z)\right|^2 \leq \frac{1}{4(t+1)^2}$$

От свойствата на $\Gamma_1 ... \Gamma_3$

$$\left|\frac{\Gamma_1(f_1,...,f_{6N})\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)-\Gamma_2(f_1,...,f_{6N})\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)}{\Gamma_3(f_1,...,f_{6N})\left(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1\right)+1}-\left|P(z)\right|^2\right| \leq \frac{1}{4(t+1)^2}$$

$$\left|\frac{\Gamma_1(f_1,...,f_{6N})(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1)-\Gamma_2(f_1,...,f_{6N})(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1)}{\Gamma_3(f_1,...,f_{6N})(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1)+1}\right|<\frac{1}{4(t+1)^2}+|P(z_i)|^2\le$$

$$\frac{1}{4(t+1)^2}+\frac{1}{4(t+1)^2}=\frac{1}{2(t+1)^2}$$

Оттук

$$\left|\Gamma_3(f_1,...,f_{6N})(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1)+1\right|>$$

$$2(t+1)^2\left|\Gamma_1(f_1,...,f_{6N})(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1)-\Gamma_2(f_1,...,f_{6N})(y_1,...,y_6,4(t+1)^2-1)\right|$$

Следователно $\Gamma(f_1,...,f_{6N})(y_1,...,y_6,t)=0$

Твърдение 3.7

За всяко положително цяло число N съществува ε^2 изчислим оператор, който изобразява F^{6N} в F_0 и такъв, че $\Gamma(f_1,...,f_{6N})(\ )>\max\{1,|\alpha_0|,...,|\alpha_{N-1}|\}$, когато $f_1,...,f_{6N}$ са представяне на произволен полином от N-та степен P(z) с коефициент 1 пред z^N - $P(z)=z^N+\alpha_{N-1}z^{N-1}+...+\alpha_0$

Доказателство:

Съгласно твърдение 3.4 съществуват 3 ε^2 изчислими оператори, които апроксимират $|\alpha_i|^2$ за 0≤i≤N-1.

Съгласно твърдението за фиктивните функции съществуват 3N+3 ε^2 изчислими оператори :

$$\left|\frac{\Gamma^i{}_1(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma^i{}_2(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma^i{}_3(f_1,...,f_{6N})(k)+1}-|\alpha_i|^2\right|\le\frac{1}{k+1}$$

Нека дефинираме N оператора, които изобразяват F^{6N} в F_0

за всяко i : 0≤i≤N-1 :

$$\Gamma^{*i}(f_1,...,f_{6N})(\ )=\left|\Gamma^i{}_1(f_1,...f_{6N+6})(1)-\Gamma^i{}_2(f_1,...f_{6N+6})(1)\right|+1$$

Може да се докаже, че така дефинираните оператори са ε^2 изчислими.

От свойствата на $\Gamma^i{}_1$ … $\Gamma^i{}_3$ се вижда, че при k=1

$$\left|\frac{\Gamma^i{}_1(f_1,...,f_{6N})(1)-\Gamma^i{}_2(f_1,...,f_{6N})(1)}{\Gamma^i{}_3(f_1,...,f_{6N})(1)+1}-|\alpha_i|^2\right|\le\frac{1}{2}$$

Оттук

$$|\alpha_i|^2 \le \frac{\left|\Gamma^i{}_1(f_1,...,f_{6N})(1) - \Gamma^i{}_2(f_1,...,f_{6N})(1)\right|}{\Gamma^i{}_3(f_1,...,f_{6N})(1)+1} + \frac{1}{2} <$$
$$\left|\Gamma^i{}_1(f_1,...,f_{6N})(1) - \Gamma^i{}_2(f_1,...,f_{6N})(1)\right| + 1 = \Gamma^{*i}(f_1,...,f_{6N})(\ )$$

Ще докажем, че $\Gamma^{*i}(f_1,...,f_{6N})(\ ) > |\alpha_i|$

Ако $|\alpha_i| \ge 1$, то
$|\alpha_i| \le |\alpha_i|^2 < \Gamma^{*i}(f_1,...,f_{6N})(\ )$
Ако $|\alpha_i| < 1$, то
$|\alpha_i| < 1 < \left|\Gamma^i{}_1(f_1,...,f_{6N})(1) - \Gamma^i{}_2(f_1,...,f_{6N})(1)\right| + 1 = \Gamma^{*i}(f_1,...,f_{6N})(\ )$

Понеже N е фиксирано, можем да дефинираме

$$\Gamma(f_1,...,f_{6N})(\ ) = \max\{1, \max\{\ \Gamma^{*0}(f_1,...,f_{6N})(\ ), \max\{\Gamma^{*1}(f_1,...,f_{6N})(\ ).....\Gamma^{*N-1}(f_1,...,f_{6N})(\ )\}...\}$$

Като приложим твърдение 2.3 N+2 пъти, може да се докаже, че Г е ε^2 изчислим оператор.

Твърдение 3.8

За всяко положително цяло число N съществува ε^2 изчислим оператор от F^{6N} в F_1, такъв че
$\Gamma(f_1,...,f_{6N})(k) > 2^{3N/2+6} C_{N+1,[(N+1)/2]}{}^3 A^3 (5NA)^{3N+3} (\kappa+1)^3$

където $f_1,...,f_{6N}$ са представяне на произволен полином от N-та степен P(z) с коефициент 1 пред z^N
$P(z) = z^N + \alpha_{N-1} z^{N-1} + ... + \alpha_0$, $A = \max\{1, |\alpha_0|, ..., |\alpha_{N-1}|\}$, а C е биномният коефициент $c(n,m) = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$

Доказателство:

За фиксирано N можем да намерим цяла константа c, по-голяма от числото $2^{3N/2+6}C_{N+1,[(N+1)/2]}{}^3(5N)^{3N+3}$. Тогава съществува ε^2 изчислим оператор Γ_1 от F^{6N} в F_0

$\Gamma_1(f_1,..., f_{6N})(\ ) = c$. Нека Γ_2 е операторът от предното твърдение, тогава търсеният оператор може да се дефинира по следния начин

$$\Gamma(f_1,...,f_{6N})(k) = \Gamma_1(f_1,...,f_{6N})(\ )\Gamma_2(f_1,...,f_{6N})(\ )^{3N+6}(k+1)^3$$

4. Конструиране на корен на полином

В тази глава ще докажем основния резултат – съществуват ε^2 изчислими оператори, които могат да "решат" едно уравнение, като преобразуват произволно представяне на коефициентите в представяне на корените.

Ще докажем, че за всяко k и за произволен полином можем да намерим такова комплексно число z_k, че $|P(z_k)| \le \frac{1}{k+1}$. Това няма да ни даде веднага търсения корен на полинома (тъй като z_k зависи от k), но ще използваме този резултат при конструирането на операторите, които ще дадат представяне на корена.

Теорема 1

За всяко положително цяло число N съществуват шест ε^2 изчислими оператори $\Gamma_1,\Gamma_2..,\Gamma_6$ от F^{6N} в F_1 , такива че за всяко неотрицателно цяло число k и за произволно представяне $f_1,...,f_{6N}$ на произволен полином от N-та степен P(z) с коефициент 1 пред z^N

$P(z) = z^N + \alpha_{N-1}z^{N-1} + ... + \alpha_0$ е вярно

$$\left| P\left(\frac{\Gamma_1(f_1,...,f_{6N})(k) - \Gamma_2(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_3(f_1,...,f_{6N})(k)+1} + \frac{\Gamma_4(f_1,...,f_{6N})(k) - \Gamma_5(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_6(f_1,...,f_{6N})(k)+1} i \right) \right| \le \frac{1}{k+1}$$

За да докажем теорема 1, ще използваме аналог на теоремата на Коши както е доказана в [4]. Формулираната там теорема показва, че за всеки комплексен полином P(z) и за всяко естествено k, съществува комплексно число z_c , такова че $|P(z_c)| < 1/(k+1)$. Това число се намира в една от точките на мрежа с център 0,0 дължина 2a и стъпка a/n, където a е произволно число, по-голямо от $5AN$, докато n е число по-голямо от $2^{3N/2+6} C_{N+1,[N+1/2]}{}^3 A^3 a^{3N+3} (\kappa+1)^3$. A е максималната абсолютна стойност на коефициентите на полинома, N е степента на полинома.

Ще приложим тази теорема с точност 2k+2 (два пъти по-голяма от зададената в условието точност). Съгласно твърдения 3.7 и 3.8 съществуват 2 ε^2 изчислими оператора, такива че $\Gamma^*{}_1(f_1..f_{6N})(k) > 2^{3N/2+6} C_{N+1,[N+1/2]}{}^3 A^3 a^{3N+3} (k+1)^3$

$\Gamma^*{}_2(f_1..f_{6N})() > 5N\max\{1, |\alpha_0| \ \dots \ |\alpha_{N-1}|\}$

С цел да облекчим означенията ще използваме n_0 и a_0 съответно вместо $\Gamma^*{}_1(f_1..f_{6N})(2\kappa+1)$ и $\Gamma^*{}_2(f_1..f_{6N})()$

Съгласно използваната теорема на Коши на мрежата

$$\frac{(p+iq)a_0}{n_0} \quad p, q \in \{-n_0 \dots n_0\}$$

съществува z, такова че $|P(z)| < \dfrac{1}{2k+2}$.

Ще докажем теоремата по следния начин : ще подредим всичките $(2n_0+1)^2$ точки в мрежата отдолу нагоре и отляво надясно. По този начин за фиксирано k ще получим една редица $z_1, z_2, \dots, z_{(2n_0+1)^2}$ от комплексни числа. Ще намерим шест ε^2 изчислими оператори $\Gamma^z{}_1 \dots \Gamma^z{}_6$ от F^{6N} в F_1, такива че:

$$z_j = \frac{\Gamma^z{}_1(f_1,\dots,f_{6N})(j,k) - \Gamma^z{}_2(f_1,\dots,f_{6N})(j,k)}{\Gamma^z{}_3(f_1,\dots,f_{6N})(j,k)+1} + \frac{\Gamma^z{}_4(f_1,\dots,f_{6N})(j,k) - \Gamma^z{}_5(f_1,\dots,f_{6N})(j,k)}{\Gamma^z{}_6(f_1,\dots,f_{6N})(j,k)+1} i$$

Използвайки твърдение 3.6, ще намерим ε^2 изчислим оператор $\Gamma^*{}_3$, такъв че

$$\Gamma^*{}_3(f_1,\dots,f_{6N})(j,k) = 0 \quad \Rightarrow \quad |P(z_j)| \le \frac{1}{k+1}$$

$$\left|P\left(z_j\right)\right| \le \frac{1}{2(k+1)} \quad \Rightarrow \quad \Gamma^*{}_3\left(f_1,...,f_{6N}\right)(j,k)=0$$

Съгласно приложената теорема на Коши за всяко k има поне един индекс j_0 от 1 до $(2n_0+1)^2$, такъв че $\left|P\left(z_{j_0}\right)\right| < \frac{1}{2(k+1)}$. Тогава този индекс ще нулира $\Gamma^*{}_3$. Тогава чрез рекурсия можем да дефинираме такъв ε^2 изчислим оператор $\Gamma^*{}_4$, че , ако $\Gamma^*{}_4\left(f_1,...,f_{6N}\right)(k_0)=j_0$, то $\Gamma^*{}_3\left(f_1,...,f_{6N}\right)(j_0,k_0)=0$. За ограничаваща функция при рекурсивната дефиниция на $\Gamma^*{}_4$ можем да използваме $(2n_0+1)^2$.

Тогава ще можем да дефинираме операторите, търсени в тази теорема, по следния начин

$$\Gamma^*{}_5\left(f_1,...,f_{6N}\right)(k)=2k+2$$
$$\Gamma_1\left(f_1,...,f_{6N}\right)(k)=\Gamma^z{}_1\left(f_1,...,f_{6N}\right)\left(\Gamma^*{}_4\left(f_1,...,f_{6N}\right)(k),\Gamma^*{}_5\left(f_1,...,f_{6N}\right)(k)\right)$$
$$...$$
$$\Gamma_6\left(f_1,...,f_{6N}\right)(k)=\Gamma^z{}_6\left(f_1,...,f_{6N}\right)\left(\Gamma^*{}_4\left(f_1,...,f_{6N}\right)(k),\Gamma^*{}_5\left(f_1,...,f_{6N}\right)(k)\right)$$

Тогава

$$\left|P\left(\frac{\Gamma_1\left(f_1,...,f_{6N}\right)(k)-\Gamma_2\left(f_1,...,f_{6N}\right)(k)}{\Gamma_3\left(f_1,...,f_{6N}\right)(k)+1}+\frac{\Gamma_4\left(f_1,...,f_{6N}\right)(k)-\Gamma_5\left(f_1,...,f_{6N}\right)(k)}{\Gamma_6\left(f_1,...,f_{6N}\right)(k)+1}i\right)\right|=\left|P\left(z_j\right)\right|\le\frac{1}{k+1}$$

и теоремата е доказана.

Ще докажем твърденията, които бяха пропуснати в главното доказателство.

Ще докажем, че съществуват ε^2 изчислими оператори $\Gamma^z{}_1$ … $\Gamma^z{}_6$ от доказателсвото. Наредили сме в редица $z_1,z_2,...,z_{(2n_0+1)^2}$ комплексни числа, които са на мрежата

$$\frac{(p+iq)a_0}{n_0},\ \mathrm{p,q}\in\{-n_0,...,n_0\},$$

където $\Gamma^*{}_1\left(f_1,...,f_{6N}\right)(2k+1)=n_0$ и $\Gamma^*{}_2\left(f_1,...,f_{6N}\right)()=a_0$

Ето последователността на индексите:

$2n_0(2n_0+1)+1$	...	...	...	$2n_0(2n_0+1)+2n_0+1$
$(2n_0-1)(2n_0+1)+1$	...	...	...	$(2n_0-1)(2n_0+1)+2n_0+1$
...	...	...	...	...
$(2n_0+1)+1$	...	...	...	...
1	2	...	$2n_0-1$	$2n_0+1$

И координатите на точките

$\frac{-a_0n_0+0a_0}{n_0},\frac{-a_0n_0+2n_0a_0}{n_0}$	...	...	...	$\frac{-a_0n_0+2n_0a_0}{n_0},\frac{-a_0n_0+2n_0a_0}{n_0}$
$\frac{-a_0n_0+0a_0}{n_0},\frac{-a_0n_0+(2n_0-1)a_0}{n_0}$	...	...	...	$\frac{-a_0n_0+2n_0a_0}{n_0},\frac{-a_0n_0+(2n_0-1)a_0}{n_0}$
...	...	0,0	...	...
$\frac{-a_0n_0+0a_0}{n_0},\frac{-a_0n_0+1a_0}{n_0}$	...	...	...	...
$\frac{-a_0n_0+0a_0}{n_0},\frac{-a_0n_0+0a_0}{n_0}$	$\frac{-a_0n_0+1a_0}{n_0},\frac{-a_0n_0+0a_0}{n_0}$	...	$\frac{-a_0n_0+(2n_0-1)a_0}{n_0},\frac{-a_0n_0+0a_0}{n_0}$	$\frac{-a_0n_0+2n_0a_0}{n_0},\frac{-a_0n_0+0a_0}{n_0}$

$\Gamma^{z}{}_{1} \ldots \Gamma^{z}{}_{6}$ са такива оператори, които от индекса в първата таблица дават 6-те части на рационалното комплексното число във втората таблица. Ето една подходяща конструкция

$$\Gamma^{z}{}_{1}(f_1,\dots f_{6N})(j,k)=rem(j\dot{-}1,2n_0+1)a_0=rem(j\dot{-}1,2\Gamma^{*}{}_{1}(f_1,\dots,f_{6N})(2k+2)+1)\Gamma^{*}{}_{2}(f_1,\dots,f_{6N})(2k+2)$$

$$\Gamma^{z}{}_{2}(f_1,\dots,f_{6N})(j,k)=a_0n_0=\Gamma^{*}{}_{1}(f_1,\dots,f_{6N})(2k+2)\Gamma^{*}{}_{2}(f_1,\dots,f_{6N})(2k+2)$$

$$\Gamma^{z}{}_{3}(f_1,\dots,f_{6N})(j,k)=n_0=\Gamma^{*}{}_{1}(f_1,\dots,f_{6N})(2k+2)$$

$$\Gamma^{z}{}_{4}(f_1,\dots,f_{6N})(j,k)=qt(j\dot{-}1,2n_0+1)a_0=qt(j\dot{-}1,2\Gamma^{*}{}_{1}(f_1,\dots,f_{6N})(2k+2)+1)\Gamma^{*}{}_{2}(f_1,\dots,f_{6N})(2k+2)$$

$$\Gamma^{z}{}_{5}(f_1,\dots,f_{6N})(j,k)=a_0n_0=\Gamma^{*}{}_{1}(f_1,\dots,f_{6N})(2k+2)\Gamma^{*}{}_{2}(f_1,\dots,f_{6N})(2k+2)$$

$$\Gamma^{z}{}_{6}(f_1,\dots,f_{6N})(j,k)=n_0=\Gamma^{*}{}_{1}(f_1,\dots,f_{6N})(2k+2)$$

Тук qt и rem са стандартните целочислени функции за деление и остатък. Използвайки твърденията в [8], може да се докаже, че тези функции могат да се дефинират чрез канонично ограничена примитивна рекурсия с ограничаваща функция умножение. Тогава съществуват 0-местни ε^2 изчислими оператори в F_2, такива че $\Gamma(\ )(x,y)=rem(x,y)$ и $\Gamma(\ )(x,y)=qt(x,y)$. $\Gamma^{z}{}_{1} \ldots \Gamma^{z}{}_{6}$ са ε^2 изчислими оператори.

Ще дадем конструкциите за $\Gamma^{*}{}_{3}$ и $\Gamma^{*}{}_{4}$.

Нека $\Gamma^{**}{}_0$ е операторът от твърдение 3.6. Тогава $\Gamma^{*}{}_3$ може да се дефинира по следния начин

$$\Gamma^{*}{}_3(f_1,...,f_{6N}) = \lambda jk.\Gamma^{**}{}_0(f_1,...,f_{6N})(\Gamma^{z}{}_1(f_1,...,f_{6N})(j,k),...\Gamma^{z}{}_6(f_1,...,f_{6N})(j,k),k)$$

Ще докажем, че съществува ε^2 изчислим оператор $\Gamma^*{}_4$, с исканите свойства.

Следните оператори $\Gamma^{**}{}_1$... $\Gamma^{**}{}_6$ са ε^2 изчислими

$\Gamma^{**}{}_1(f_1,...,f_{6N})(k) = \mathrm{O}$

$\Gamma^{**}{}_2(f_1,...,f_{6N})(u,t,k) = t+1$ ако $\Gamma^{*}{}_3(f_1,...,f_{6N})(t+1,k) = 0$

$\Gamma^{**}{}_2(f_1,...,f_{6N})(u,t,k) = u$ ако $\Gamma^{*}{}_3(f_1,...,f_{6N})(t+1,k) > 0$

$\Gamma^{**}{}_3(f_1,...,f_{6N})(t,k) = (2 * \Gamma^{*}{}_1(f_1,...,f_{6N})(k)+1)^2$

$\Gamma^{**}{}_4(f_1,...,f_{6N}) = CBRP(\Gamma^{**}{}_1(f_1,...,f_{6N}),\Gamma^{**}{}_2(f_1,...,f_{6N}),\Gamma^{**}{}_3(f_1,...,f_{6N}))$

$\Gamma^{**}{}_5(f_1,...,f_{6N}) = \lambda k.k$

Тогава и $\Gamma^{*}{}_4$

$\Gamma^{*}{}_4(f_1,...,f_{6N}) = \lambda k.\Gamma^{**}{}_4(f_1,...,f_{6N})(\Gamma^{**}{}_3(f_1,...,f_{6N})(k),\Gamma^{**}{}_5(f_1,...,f_{6N}))$

е ε^2 изчислим и удовлетворява исканите условия.

(Пресмятането на $\Gamma^*{}_4$(j) може да се опише със следния псевдо код :

```
for (int j = (2n0(k)+1)^2+1; j > 0; j--) {
    if (Г*3(j)==0) break;
}
return j;
```

Така доказахме теоремата.

Теорема 1 не може да се използва директно за намиране на апроксимиращи функции за корен на уравнението. Наистина като задаваме за к монотонно нарастващи числа, можем да конструираме чрез тази теорема редица $z_1 \ldots z_n$, такава че $|P(z_n)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. За съжаление, редицата z_n може да не е сходяща. В общия случай P(z) има няколко корена и ако z_n е приближение за един корен, то z_{n+1} може да бъде приближение за друг корен. Такава конструкция няма да ни доведе до търсеното решение.

Ще използваме теорема 1, за да конструираме 6 оператора, апроксимиращи корен на полинома P(z). Преди да пристъпим към доказателството, че съществуват такива оператори, ще докажем няколко помощни твърдения.

Твърдение 4.1

За всяко положително цяло число N, за всеки полином Q от N-та степен с комплексни коефициенти и за всяко комплексно число z_0 е вярно :
Ако $|Q(z_0)| < 1$ и $\alpha_N=1$, то $|z_0|\leq 1+NA$, където A е максималната абсолютна стойност на коефициентите на полинома.

Доказателство:

Да допуснем, че $|Q(z)| < 1$, $\alpha_N=1$ и $|z|>1+NA$. Тогава
$|Q(z)| \geq |z|^N - NA|z|^{N-1} = |z|^{N-1}(|z|-NA) \geq 1*1=1$
Стигнахме до противоречие, откъдето следва, че допускането не е било вярно.

Твърдение 4.2

За всички неотрицателни реални числа *u*, *v*, *a* и *b* е вярно, че ако $uv < ab$, то $u < a$ или $v < b$

Доказателство:

Да допуснем, че това твърдение не е вярно и $u \geq a$, $v \geq b$. Тогава $uv \geq ab$, което е противоречие.

Твърдение 4.3

За всяко положително цяло число N съществуват 6N-6 ε^2 изчислими оператори $\Gamma_{11},\Gamma_{21}..,\Gamma_{61},\Gamma_{12},...,\Gamma_{5,N-1},\Gamma_{6,N-1}$ от F^{6N} в F_7, такива че ако $f_1,...,f_{6N}$ е произволно представяне на кой да е полином P(z) от N-та степен с коефициент 1 пред най-високата степен, то функциите $\lambda t.\Gamma_{11}(f_1,...,f_{6N})(a,b,c,d,e,f,t),...,\lambda t.\Gamma_{6,N-1}(f_1,...,f_{6N})(a,b,c,d,e,f,t)$ са представяне на полинома $P_0(z)$, където:

P(z)=P(z_0)+*(z-* z_0)$P_0(z)$. Със z_0 сме обозначили $\dfrac{a-b}{c+1}+\dfrac{d-e}{f+1}i$.

Доказателство:

Ще отбележим, че полиномът P_0(z) е от N-1ва степен, но очевидно има коефициент 1 пред най-високата степен, затова и неговото представяне е чрез 6N-6 функции и твърдението е формулирано коректно.

За различни стойности на *a,b,c,d,e,f,* ще се получават различна стойност за z_0 и различни коефициенти на P_0(z). Но за дадени a,b,c,d,e,f функциите $\lambda t.\Gamma_{11}(f_1,...,f_{6N})(a,b,c,d,e,f,t),...,\lambda t.\Gamma_{6N-1}(f_1,...,f_{6N})(a,b,c,d,e,f,t)$ ще бъдат представяне на съответния полином P_0(z).

Нека да обозначим $P_0(z)=\sum_{m=0}^{N-1}\beta_m z^m$, вижда се че $\beta_m = \sum_{q=m+1}^{N}\alpha_q {z_0}^{q-1-m}$

Представянето на α_q е от функциите $f_1...f_{6N}$ а на z_0 дадени числа - a,b,c,d,e,f . Тогава може да се намерят и ε^2 изчислими оператори, които да са представяне на β_m .

От конструкцията можем да изведем и горна граница на абсолютните стойности на коефициентите на полинома $P_0(z)$

$$A_1 = \max|\beta_m| = \max\left|\sum_{q=m+1}^{N}\alpha_q {z_1}^{q-1-m}\right| < NA(1+NA)^{N-1}$$

Твърдение 4.4

За всяко положително цяло число N съществува ε^2 изчислим оператор Γ^1 от F^{6N} в F_0, такъв че за произволно представяне $f_1,...,f_{6N}$ на кой да е полином P(z) от N-та степен с коефициент 1 пред най-високата степен е вярно
$\Gamma^1(f_1,...,f_{6N})(\ )\geq 3+(N-1)NA(1+NA)^{N-1}+NA$, където A е горна граница на абсолютните стойности на коефициентите на P(z).

Доказателство:

Съгласно твърдение 3.7 съществува ε^2 изчислим оператор Γ^0 от F^{6N} в F_0, такъв че $\Gamma^0(f_1,...,f_{6N})(\ ) > \max\{1,|\alpha_0|,...,|\alpha_{N-1}|\}$.

Тъй като N е фиксирано число, може да се докаже, че съществува ε^2 изчислим оператор Γ^1 със следните свойства :

$$\Gamma^1(f_1,...,f_{6N})(\ ) = 3 + (N-1)N * \Gamma^0(f_1,...,f_{6N})(\ )(1 + N * \Gamma^0(f_1,...,f_{6N})(\ ))^{N-1} + N * \Gamma^0(f_1,...,f_{6N})(\ )$$

Вижда се, че

$$\Gamma^1(f_1,...,f_{6N})(\ ) \geq 3 + (N-1)NA(1+NA)^{N-1} + NA$$

Твърдение 4.5

За всяко положително цяло число N съществуват шест ε^2 изчислими оператори, които изобразяват F^{6N} в F_1 , такива че за произволно представяне $f_1,...,f_{6N}$ на кой да е полином P(z) от N-та степен с коефициент 1 пред най-високата степен, за всяко неотрицателно цяло число к и за някое естествено число c : $c \geq 3 + (N-1)NA(1+NA)^{N-1} + NA$ (A е някоя горна граница на абсолютните стойности на коефициентите на P(z)) е вярно

$$\left| P\left(\frac{\Gamma_1(f_1,...,f_{6N})(k) - \Gamma_2(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_3(f_1,...,f_{6N})(k)+1} + \frac{\Gamma_4(f_1,...,f_{6N})(k) - \Gamma_5(f_1,...f_{6N})(k)}{\Gamma_6(f_1,...,f_{6N})(k)+1} i \right) \right| \leq \frac{1}{(k+1)c}$$

Доказателство:

Съгласно теорема 1 може да се намерят шест ε^2 изчислими оператори $\Gamma_{1*}, \Gamma_{2*}..,\Gamma_{6*}$, за които е вярно :

$$\left| P\left(\frac{\Gamma_{1*}(f_1,...,f_{6N})(k) - \Gamma_{2*}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3*}(f_1,...,f_{6N})(k)+1} + \frac{\Gamma_{4*}(f_1,...,f_{6N})(k) - \Gamma_{5*}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6*}(f_1,...,f_{6N})(k)+1} i \right) \right| \leq \frac{1}{k+1}$$

Съгласно твърдение 4.4 може да се намери ε^2 изчислимия оператор Γ^0 от F^{6m} в F_0 такъв че :

$$\Gamma^0(f_1,...,f_{6N}) = c \geq 3 + (N-1)NA(1+NA)^{N-1} + NA$$

Може да се намери ε^2 изчислимия оператор Γ^1 от F^{6m} в F_1 такъв че :

$$\Gamma^1(f_1,...,f_{6N}) = \lambda k.(k+1)*\Gamma^0(f_1,...,f_{6N})$$

Тогава можем да намерим ε^2 изчислими оператори $\Gamma_1, \Gamma_2 .., \Gamma_6$

$$\Gamma_1(f_1,...,f_{6N}) = \lambda k \Gamma_{1*}(f_1,...,f_{6N})\left(\Gamma^1(f_1,...,f_{6N})(k)\right)$$

...

$$\Gamma_6(f_1,...,f_{6N}) = \lambda k \Gamma_{6*}(f_1,...,f_{6N})\left(\Gamma^1(f_1,...,f_{6N})(k)\right)$$

Тогава

$$\left|P\left(\frac{\Gamma_1(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_2(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_3(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_4(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_5(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_6(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i\right)\right|=$$

$$\left|P\left(\frac{\Gamma_{1*}(f_1,...,f_{6N})(kc+c)-\Gamma_{2*}(f_1,...,f_{6N})(kc+c)}{\Gamma_{3*}(f_1,...,f_{6N})(kc+c)+1}+\frac{\Gamma_{4*}(f_1,...,f_{6N})(kc+c)-\Gamma_{5*}(f_1,...,f_{6N})(kc+c)}{\Gamma_{6*}(f_1,...,f_{6N})(kc+c)+1}i\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{kc+c+1} < \frac{1}{(k+1)c}$$

Теорема 2

За всяко положително цяло число N съществуват 6N ε^2 изчислими оператори $\Gamma_{11}, \Gamma_{21} .., \Gamma_{61}, \Gamma_{12}, ..., \Gamma_{5N}, \Gamma_{6N}$ от F^{6N} в F, такива че за произволно представяне $f_1,...,f_{6N}$ на полином P(z) от N-та степен с коефициент 1 пред най-високата степен, за всяко цяло неотрицателно число k и за всяко реално число δ е вярно :

- $$\left|P\left(\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i\right)\right| \leq \frac{1}{k+1}$$

  е вярно за всяко j в интервала {1..N}
- Ако $|P(z)| < \delta$ и $\frac{1}{\mathrm{k}+1} \leq \delta < 1$, то

$$\min_{1\leq j\leq N}\left|\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i-z\right| < 2\delta^{\frac{1}{2^N}}$$

Доказателство:

Ще извършим доказателството чрез индукция по N – степента на полинома.

a) Нека N=1. Тогава P(z)= z+ α_0. Ще докажем, че съществуват ε^2 изчислими оператори $\Gamma_1, \Gamma_2 .., \Gamma_6$, за които е вярно :

- $$\left| P\left(\frac{\Gamma_1(f_1,...,f_6)(k) - \Gamma_2(f_1,...,f_6)(k)}{\Gamma_3(f_1,...,f_6)(k)+1} + \frac{\Gamma_4(f_1,...,f_6)(k) - \Gamma_5(f_1,...,f_6)(k)}{\Gamma_6(f_1,...,f_6)(k)+1} i \right) \right| \le \frac{1}{k+1}$$
- Ако $|P(z)| = |z + \alpha_0| < \delta$, където $\frac{1}{\mathrm{k}+1} \le \delta < 1$, то

$$\left| \frac{\Gamma_1(f_1,...,f_6)(k) - \Gamma_2(f_1,...,f_6)(k)}{\Gamma_3(f_1,...,f_6)(k)+1} + \frac{\Gamma_4(f_1,...,f_6)(k) - \Gamma_5(f_1,...,f_6)(k)}{\Gamma_6(f_1,...,f_6)(k)+1} i - z \right| < 2\ \delta^{\frac{1}{2}}$$

Нека да положим

$$z_k = \frac{f_2(k) - f_1(k)}{f_3(k)+1} + \frac{f_5(k) - f_4(k)}{f_6(k)+1} i$$

Тогава за всяко естествено k

$$|P(z_k)| = |z_k + \alpha_0| \le \frac{1}{k+1}$$

При $|P(z)| = |z + \alpha_0| < \delta$ ще имаме

$$|z - z_k| \le |z + \alpha_0| + |\alpha_0 + z_k| \le |P(z)| + \frac{1}{k+1} < 2\delta < 2\delta^{\frac{1}{2}}$$

b) Нека теоремата е вярна за N-1 и съществуват 6N-6 ε^2 изчислими оператори F^{6N-6} в F_1 - $\Gamma_{11}^{ip}, \Gamma_{21}^{ip} .., \Gamma_{61}^{ip}, \Gamma_{21}^{ip}, ..., \Gamma_{5,N-1}^{ip}, \Gamma_{6,N-1}^{ip}$ с исканите свойства. Ще докажем, че теоремата е вярна и за N.

Това доказателство ще извършим използвайки конструкцията в [6]. Нека $\Gamma_{11}^{st43}, \Gamma_{21}^{st43} .., \Gamma_{61}^{st43}, \Gamma_{21}^{st43}, ..., \Gamma_{5,N-1}^{st43}, \Gamma_{6,N-1}^{st43}$ са ε^2 изчислимите оператори от F^{6N} в F_7 на от твърдение 4.3. Нека Γ^{st44} е ε^2 изчислимият оператор от F^{6N} в F_0 от твърение 4.4. Нека $\Gamma_1^{st45}, \Gamma_2^{st45} .., \Gamma_6^{st45}$ са ε^2 изчислимите оператори от F^{6N} в F_1 от твърдение 4.5.
Следните оператори са ε^2 изчислими:

$$\Gamma_{11}^{P1}(f_1,...,f_{6N})(k,t) = \Gamma_{11}^{st43}(f_1,...,f_{6N})(\Gamma_1^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k),...,\Gamma_6^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k),t)$$
$$\Gamma_{21}^{P1}(f_1,...,f_{6N})(k,t) = \Gamma_{21}^{st43}(f_1,...,f_{6N})(\Gamma_1^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k),...,\Gamma_6^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k),t)$$
...
$$\Gamma_{6,N-1}^{P1}(f_1,...,f_{6N})(k,t) = \Gamma_{6,N-1}^{st43}(f_1,...,f_{6N})(\Gamma_1^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k),...,\Gamma_6^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k),t)$$

$\Gamma_{11}(f_1,...,f_{6N})(k)=\Gamma_1^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k)$
...
$\Gamma_{61}(f_1,...,f_{6N})(k)=\Gamma_6^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k)$
Съгласно твърдението за суперпозиция следните 6N-6 оператори са ε^2 изчислими

$\Gamma^*{}_{12}(f_1,...,f_{6N})(m,k)=\Gamma_{11}^{ip}\left(\lambda t.\Gamma_{11}^{P1}(f_1,...,f_{6N})(k,t),...,\lambda t.\Gamma_{6N-1}^{P1}(f_1,...,f_{6N})(k,t)\right)(m)$
$\Gamma^*{}_{22}(f_1,...,f_{6N})(m,k)=\Gamma_{21}^{ip}\left(\lambda t.\Gamma_{11}^{P1}(f_1,...,f_{6N})(k,t),...,\lambda t.\Gamma_{6N-1}^{P1}(f_1,...,f_{6N})(k,t)\right)(m))$
...
$\Gamma^*{}_{6N}(f_1,...,f_{6N})(m,k)=\Gamma_{6,N-1}^{ip}\left(\lambda t.\Gamma_{11}^{P1}(f_1,...,f_{6N})(k,t),...,\lambda t.\Gamma_{6N-1}^{P1}(f_1,...,f_{6N})(k,t)\right)(m)$
Приложили сме твърдението за l=1 и r=6N.

Тогава следните 6N-6 оператори са ε^2 изчислими

$\Gamma_{12}(f_1,...,f_{6N})(k)=\Gamma_{12}^*(f_1,...,f_{6N})\left(\Gamma^{st44}(f_1,...,f_{6N})(\ )*(k+1),k\right)$
$\Gamma_{22}(f_1,...,f_{6N})(k)=\Gamma_{22}^*(f_1,...,f_{6N})\left(\Gamma^{st44}(f_1,...,f_{6N})(\ )*(k+1),k\right)$
...
$\Gamma_{6N}(f_1,...,f_{6N})(k)=\Gamma_{6N}^*(f_1,...,f_{6N})\left(\Gamma^{st44}(f_1,...,f_{6N})(\ )*(k+1),k\right)$

Ще докажем, че така дефинираните ε^2 изчислими оператори $\Gamma_{11},\Gamma_{21}..,\Gamma_{61},\Gamma_{12},...,\Gamma_{5N},\Gamma_{6N}$ удовлетворяват условията. За произволно k и j от 1 до N нека да оценим

$$\left|P\left(\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i\right)\right|$$

За j=1 тази стойност е ограничена от $\frac{1}{(k+1)c}\le\frac{1}{k+1}$ съгласно твърдение 4.5. Ще докажем, че това число е ограничено и при j >1.
Нека за краткост да означим

$$z_k=\frac{\Gamma_1^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_2^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_3^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_4^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_5^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_6^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i$$

, редицата $\Gamma_1^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k),...\Gamma_6^{st45}(f_1,...,f_{6N})(k)$ със $\overline{z_k}$ а пък $\Gamma^{st44}(f_1,...f_{6N})(\ )$ ще обозначим със c

Съгласно твърдение 4.3 следните 6N-6 функции :
$\lambda t.\Gamma_{11}^{P1}(f_1,...f_{6N})(k,t)...\lambda t.\Gamma_{6,N-1}^{P1}(f_1,...f_{6N})(k,t)$
са представяне на полинома $P_k(z)$, където:
$P(z)=P(z_к)+(z- z_к)P_k(z)$
и за всяко $i \in 1..N-1$ и за произволно t ще е вярно, че
$\left|\frac{\Gamma_{1i}^{P1}(f_1,...,f_{6N})(k,t)-\Gamma_{2i}^{P1}(f_1,...,f_{6N})(k,t)}{\Gamma_{3i}^{P1}(f_1,...,f_{6N})(k,t)+1}-\alpha_{i-1r}\right|<\frac{1}{t+1}$ и
$\left|\frac{\Gamma_{4i}^{P1}(f_1,...,f_{6N})(k,t)-\Gamma_{5i}^{P1}(f_1,...,f_{6N})(k,t)}{\Gamma_{6i}^{P1}(f_1,...,f_{6N})(k,t)+1}-\alpha_{i-1c}\right|<\frac{1}{t+1}$ където α_i е коефициент от $P_k(z)$

Понеже полиномът P(z) е с коефициент 1 пред най-високата степен, то тогава и всеки полином $P_k(z)$ ще има също коефициент 1 пред най-високата степен. Можем да приложим индукционното предположение за $\Gamma_{11}^{ip},\Gamma_{21}^{ip}..,\Gamma_{61}^{ip},\Gamma_{21}^{ip},...,\Gamma_{5N-1}^{ip},\Gamma_{6N-1}^{ip}$ и $P_k(z)$. Тогава съгласно дефиницията на $\Gamma_{12},...,\Gamma_{5N},\Gamma_{6N}$ следните твърдения ще са верни:

- $$\left|P_k\left(\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i\right)\right| \le \frac{1}{\Gamma^{st44}(f_1,...,f_{6N})(\ )*(k+1)+1}=\frac{1}{c(k+1)+1}<\frac{1}{c(k+1)}$$

  е вярно за всяко j в интервала {2..N}
- Ако $|P_k(z)|<\delta$ и $\frac{1}{\Gamma^{st44}(f_1,...,f_{6N})(\ )*(k+1)+1}=\frac{1}{c*(k+1)+1}\le\delta<1$, то
$$\min_{2\le j\le N}\left|\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i-z\right|<2\delta^{\frac{1}{2^{N-1}}}$$

Понеже $P(z)=P(z_к)+(z- z_к)P_k(z)$ можем да оценим за j >1:

$$\left|P\left(\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i\right)\right| \le$$

$$\left|P(z_k)\right| +$$
$$\left|\left(\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i\right)-z_k\right| *$$

$$\left|P_k\left(\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i\right)\right| \le$$
$$\left|P(z_k)\right| + \left|\left(\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i\right)\right| *$$
$$\left|P_k\left(\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i\right)\right| +$$

$$\left|z_k\right| * \left|P_k\left(\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i\right)\right|$$

От твърдение 4.5 следва, че $\left|P(z_k)\right| \le \frac{1}{(k+1)c}$ От тук, съгласно твърдение 4.1, $\left|z_k\right| \le 1 + NA$. Както видяхме от индукционното предположение, следва, че

$$\left|P_k\left(\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i\right)\right| < \frac{1}{(k+1)c}$$

Съгласно твърдение 4.1 за полинома $P_k(z)$ следва, че
$$\left|\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i\right| \le 1 + (N-1)A_1$$

където A_1 е горната граница на коефициентите на $P_k(z)$.Съгласно наблюдението в твърдение 4.3 за горната граница :
$$\left|\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i\right| \le 1 + (N-1)NA(1+NA)^{N-1}$$

Тогава можем да продължим оценката

$$\left|P\left(\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i\right)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{(k+1)c}+\frac{1+(N-1)NA(1+NA)^{N-1}}{(k+1)c}+\frac{1+NA}{(k+1)c}=\frac{c}{(k+1)c}=\frac{1}{k+1}$$

Ще докажем втората част от теоремата.

Да допуснем, че за дадено к : $|P(z)|<\delta$ и $\frac{1}{\mathrm{k}+1}\le\delta<1$. Тогава от

*P(z)=P(*z*)+(z-* z*)P**(z).*

можем да получим

$$|(z-z_k)P_k(z)|\le|P(z)|+|P(z_k)|<\delta+\frac{1}{(k+1)c}<2\delta$$

Тъй като $2\delta=2\delta^{\frac{1}{2^N}}*\delta^{1-\frac{1}{2^N}}$, съгласно твърдение 4.2, са възможни 2 случая :

1) $|(z-z_k)|<2\delta^{\frac{1}{2^N}}$ -

$$\left|\frac{\Gamma_{11}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{21}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{31}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{41}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{51}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{61}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i-z\right|<2\delta^{\frac{1}{2^N}}$$

или

2) $|P_k(z)|<\delta^{1-\frac{1}{2^N}}$

Но $\frac{1}{(k+1)c+1}<\frac{1}{k+1}<\delta<\delta^{1-\frac{1}{2^N}}<1$ Можем да приложим индукционното предположение за $\delta^{1-\frac{1}{2^N}}$, тогава

$$\min_{2\le j\le N}\left|\frac{\Gamma_{1j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i-z\right|<$$

$$2\left(\delta^{1-\frac{1}{2^N}}\right)^{\frac{1}{2^{N-1}}}=2\delta^{\left(1-\frac{1}{2^N}\right)\frac{1}{2^{N-1}}}<2\delta^{\frac{1}{2}*\frac{1}{2^{N-1}}}=2\delta^{\frac{1}{2^N}}$$

Който и от двата случая 1) или 2) е верен, се вижда, че :

$$\min_{1\le j\le N}\left|\frac{\Gamma_{1j}(f_1,\ldots,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}(f_1,\ldots,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}(f_1,\ldots,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}(f_1,\ldots,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}(f_1,\ldots,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}(f_1,\ldots,f_{6N})(k)+1}i-z\right|<2\delta^{\frac{1}{2^N}}$$

Така доказахме теорема 2.

Твърдение 4.6

Нека N е дадена положително цяло число и нека $\Gamma_1^*,\Gamma_2^*..,\Gamma_6^*$ са ε^2 изчислими оператори от F^N в F.

Ще положим със $z_k(f_1,\ldots,f_N)$

$$z_k(f_1,\ldots,f_N)=\frac{\Gamma_1^*(f_1,\ldots,f_N)(k)-\Gamma_2^*(f_1,\ldots,f_N)(k)}{\Gamma_3^*(f_1,\ldots,f_N)(k)+1}+\frac{\Gamma_4^*(f_1,\ldots,f_N)(k)-\Gamma_5^*(f_1,\ldots,f_N)(k)}{\Gamma_6^*(f_1,\ldots,f_N)(k)+1}i$$

Нека Q е някое подмножество на F^N и нека Г е ε^2 изчислим оператор от F^N в F , такъв че за всеки избор на N-ka от функции $f_1,\ldots,f_N$, принадлежаща на даденото множество Q, и за всички положителни цели числа n, p и q , такива че $p>\Gamma(f_1,\ldots f_N)(n)$ и $q>\Gamma(f_1,\ldots f_N)(n)$, е вярно

$$|z_p(f_1,\ldots,f_N)-z_q(f_1,\ldots,f_N)|<\frac{1}{n+1}$$

Тогава за произволна N-торка от функции $f_1,\ldots,f_N$ принадлежаща на даденото множество Q редицата

$z_0(f_1,\ldots,f_N)\ldots z_k(f_1,\ldots,f_N)\ldots$

е сходяща и съществуват шест ε^2 изчислими оператори $\Gamma_1,\Gamma_2..,\Gamma_6$ от F^N в F, които преобразуват всяка N-рка от Q в границата на съответната редица.

Доказателство:

Съгласно критерия на Коши редицата е сходяща. Ще намерим $\Gamma_1,\Gamma_2..,\Gamma_6$, които да са представяне на границата на редицата. Нека с $z_{\lim}(f_1,\ldots,f_N)$ да означим границата на редицата.

Следните шест ε^2 изчислими оператори удовлетворяват условието на твърдението:

$\Gamma_1(f_1,\ldots,f_N)(n)=\Gamma_1^*(f_1,\ldots,f_N)(\Gamma(f_1,\ldots,f_N)(n+1)+1)$

...

$$\Gamma_6(f_1,...,f_N)(n) = \Gamma_6^*(f_1,...,f_N)(\Gamma(f_1,...,f_N)(n+1)+1)$$

Ще докажем, че за произволни функции $f_1,...,f_N$ от Q е вярно

$$\left|z_{\lim}(f_1,...,f_N) - z_{\Gamma(f_1,...,f_N)(n+1)+1}(f_1,...,f_N)\right| < \frac{1}{n+1}.$$

За всяко естествено число n при $q = \Gamma(f_1,...,f_N)(n+1)+1$ ще имаме неравенството

$\left|z_p(f_1,...,f_N) - z_q(f_1,...,f_N)\right| < \frac{1}{n+2}$ при всяко цяло число p>q.

Като извършим граничен преход в него при фиксирано n, оставяйки p да клони към безкрайност, получаваме

$$\left|z_{\lim}(f_1,...,f_N) - z_q(f_1,...,f_N)\right| \le \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$$

Теорема 3

За всяко положително цяло число N съществуват шест ε^2 изчислими оператори, преобразуващи кое да е представяне на кой да е полином P от N-та степен с коефициент 1 пред най-високата степен в компонентите в някое представяне на негов корен.

Доказателство :

Нека $f_1,...,f_{6N}$ е произволно представяне на кой да е полином P(z) с коефициент 1 пред най-високата степен. Ще докажем тази теорема като построим редица от комплексни числа и ще приложим свойствата от твърдение 4.6. Ще конструираме редицата по следния начин : ще намерим z_0, като вземем първите шест оператори от теорема 2 при k=0. Нека сме намерили z_t, тогава ще генерираме N точки $z_{(t+1)1},...,z_{(t+1)N}$, като приложим теорема 2 при

$k = (t+2)^{2^{N+1}} - 1$ и $\delta = \frac{1}{(t+1)^{2^{N+1}}}$. За z_{t+1} ще вземем първото $z_{(t+1)q}$, за което е вярно $\left|z_{(t+1)q} - z_t\right| < \frac{2}{(t+1)^2}$, като ще докажем, че съществува поне един такъв индекс.

Нека $\Gamma_{11}^{th2},\Gamma_{21}^{th2},...,\Gamma_{61}^{th2},\Gamma_{12}^{th2},...,\Gamma_{5N}^{th2},\Gamma_{6N}^{th2}$ са ε^2 изчислимите оператори от F^{6N} в F от теорема 2. Нека за краткост да означим с $\varsigma_j(f_1,...f_{6N})(k)$ комплексното число

$$\frac{\Gamma_{1j}^{th2}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{2j}^{th2}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{3j}^{th2}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_{4j}^{th2}(f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_{5j}^{th2}(f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_{6j}^{th2}(f_1,...,f_{6N})(k)+1}i.$$

Следните 6 оператори от F^{6N} в F_2 са ε^2 изчислими :

$\Gamma_1^{cd}(f_1,...,f_{6N})(k,q)=\Gamma_{1q}^{th2}(f_1,...,f_{6N})(k)$,ако q е някое от числата $1,...,N$
$\Gamma_1^{cd}(f_1,...,f_{6N})(k,q)=0$ в противен случай.
…
$\Gamma_6^{cd}(f_1,...,f_{6N})(k,q)=\Gamma_{6q}^{th2}(f_1,...,f_{6N})(k)$,ако q е някое от числата $1,...,N$
$\Gamma_6^{cd}(f_1,...,f_{6N})(k,q)=0$ в противен случай.

Вижда се, че

$$\frac{\Gamma_1^{cd}(f_1,...,f_{6N})(k,q)-\Gamma_2^{cd}(f_1,...,f_{6N})(k,q)}{\Gamma_3^{cd}(f_1,...,f_{6N})(k,q)+1}+\frac{\Gamma_4^{cd}(f_1,...,f_{6N})(k,q)-\Gamma_5^{cd}(f_1,...,f_{6N})(k,q)}{\Gamma_6^{cd}(f_1,...,f_{6N})(k,q)+1}i=\varsigma_q(f_1,...f_{6N})(k)$$

за $q\in\{1,...,N\}$. Ще построим редицата по следния рекурсивен начин. Ако сме намерили вече z_t , то за z_{t+1} ще вземем $\varsigma_j(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1\right)$, където j е първото такова число, че $\left|\varsigma_j(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1\right)-z_t\right|<\frac{2}{(t+1)^2}$.

Ще намерим Γ^{rec} - ε^2 изчислим оператор от F^{6N} в F, такъв че, по всяко t, да пресметне необходимото q от множеството $\{1,...,N\}$, такова че
$z_t=\varsigma_q(f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}}-1\right)$

Ще дефинираме Γ^{rec} чрез канонично ограничена примитивна рекурсия. Следните оператори са ε^2 изчислими

$\Gamma_0^{rec}(f_1,...,f_{6N})(\ )=1$

$\Gamma_2^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t) = N+1$

При дадени q и t, ако q е някое от числата $1,...,N$ и за някое j от числата $1,...,N-1$ е изпълнено неравенството
$\left|\varsigma_q\ (f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}}-1\right)-\varsigma_j(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1\right)\right| < \frac{2}{(t+1)^2}$, то $\Gamma_1^{rec}(f_1,...f_{6N})(q,t)$ е най-малкото такова j, а в противен случай $\Gamma_1^{rec}(f_1,...,f_{6N})(q,t) = N$.

Неравенството $\left|\varsigma_q\ (f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}}-1,q\right)-\varsigma_j(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1\right)\right| < \frac{2}{(t+1)^2}$ е еквивалентно с
$\left|\varsigma_q\ (f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}}-1,q\right)-\varsigma_j(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1\right)\right|^2 < \left(\frac{2}{(t+1)^2}\right)^2$ и лесно може да се намери ε^2 изчислим оператор, който да сравни N-1 пъти две рационални числа. Така Γ_1^{rec} е ε^2 изчислим.

Тогава Γ^{rec} е ε^2 изчислим оператор от от F^{6N} в F, където
$\Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N}) = CBPR\left(\Gamma_0^{rec}(f_1,...,f_{6N}),\Gamma_1^{rec}(f_1,...,f_{6N}),\Gamma_2^{rec}(f_1,...,f_{6N})\right)$

Следните шест оператори от F^{6N} в F са ε^2 изчислими :
$\Gamma_1\ (f_1,...,f_{6N})(t) = \Gamma_1^{cd}(f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}}-1,\Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t)\right)$
....
$\Gamma_6(f_1,...,f_{6N})(t) = \Gamma_6^{cd}(f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}}-1,\Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t)\right)$

Нека да разгледаме редицата

$$\frac{\Gamma_1\ (f_1,...,f_{6N})(1)-\Gamma_2\ (f_1,...,f_{6N})(1)}{\Gamma_3(f_1,...,f_{6N})(1)+1}+\frac{\Gamma_4(f_1,...,f_{6N})(1)-\Gamma_5(f_1,...,f_{6N})(1)}{\Gamma_6\ (f_1,...,f_{6N})(1)+1}i\ , \ ...,$$
$$\frac{\Gamma_1\ (f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_2\ (f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_3\ (f_1,...,f_{6N})(k)+1}+\frac{\Gamma_4\ (f_1,...,f_{6N})(k)-\Gamma_5\ (f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_6\ (f_1,...,f_{6N})(k)+1}i\ ,...$$

Ще докажем че за произволни $f_1,...,f_{6N}$, които са представяне на на кой да е полином P(z) с коефициент 1 пред най-високата степен, редицата е сходяща и границата и е корен на полинома P.

За краткост нека означаваме

$$z_k(f_1,...,f_{6N}) = \frac{\Gamma_1\ (f_1,...,f_{6N})(k) - \Gamma_2\ (f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_3\ (f_1,...,f_{6N})(k)+1} + \frac{\Gamma_4\ (f_1,...,f_{6N})(k) - \Gamma_5\ (f_1,...,f_{6N})(k)}{\Gamma_6\ (f_1,...,f_{6N})(k)+1} i$$

Съгласно конструкцията $\Gamma_1^{rec}(f_1,...,f_{6N})(q,t) \in \{1..N\}$, за произволни естествени числа q и t. Тогава $\Gamma_1^{rec}(f_1,...,f_{6N})(q,t) < \Gamma_2^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t) = N+1$.
Ако $t > 0$, то $\Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t) = \Gamma_1^{rec}(f_1,...,f_{6N})(\Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t-1), t-1) \in \{1..N\}$.
Ако $t = 0$, то $\Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t) = 1$.

Нека да обозначим $\Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t)$ със j. Тогава $j \in \{1..N\}$ и

$$\Gamma_1\ (f_1,...,f_{6N})(t) = \Gamma_1^{cd}(f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}} - 1, j\right) = \Gamma_{1j}^{th2}(f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}} - 1\right)$$

...

$$\Gamma_6\ (f_1,...,f_{6N})(t) = \Gamma_6^{cd}(f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}} - 1, j\right) = \Gamma_{6j}^{th2}(f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}} - 1\right)$$

Нека да оценим $|P(z_t(f_1,...,f_{6N}))|$. Съгласно построението на Γ_1, ..., Γ_6

$$|P(z_t(f_1,...,f_{6N}))| =$$

$$| P(\frac{\Gamma_{1j}^{th2}(f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}} - 1\right) - \Gamma_{2j}^{th2}(f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}} - 1\right)}{\Gamma_{3j}^{th2}(f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}} - 1\right) + 1} +$$

$$\frac{\Gamma_{4j}^{th2}(f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}} - 1\right) - \Gamma_{5j}^{th2}(f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}} - 1\right)}{\Gamma_{6j}^{th2}(f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}} - 1\right) + 1} i) |$$

Тогава, съгласно първата подточка от теорема 2,
$|P(z_t(f_1,...,f_{6N}))| \le \frac{1}{(t+1)^{2^{N+1}}}$. Оттук редицата $|P(z_t(f_1,...,f_{6N}))|$ е сходяща и клони към 0. Ако съществува $\lim_{t\to\infty} z_t(f_1,...,f_{6N})$, то

$$\left|P\left(\lim_{t\to\infty} z_t(f_1,...,f_{6N})\right)\right| = \left|\lim_{t\to\infty} P(z_t(f_1,...,f_{6N}))\right| = 0$$

Ако има граница на редицата $z_1(f_1,...,f_{6N}),..., z_t(f_1,...,f_{6N}),...$ то тя ще е корен на полинома.

Ще докажем чрез твърдение 4.6, че граница съществува и могат да се намерят ε^2 изчислими оператори, които са нейно представяне. За да приложим твърдение 4.6 трябва да намерим ε^2 изчислим оператор Γ от $\mathrm{F}^{6\mathrm{N}}$ в F , такъв че да е вярно следното условие :

Ако $p > \Gamma(f_1,...,f_{6N})(t)$ и $q > \Gamma(f_1,...,f_{6N})(t)$ то $\left|z_p(f_1,...,f_{6N}) - z_q(f_1,...,f_{6N})\right| < \frac{1}{t+1}$

Нека да оценим $\left|z_t(f_1,...,f_{6N}) - z_{t+1}(f_1,...,f_{6N})\right|$ за $t > 0$. От доказаното преди малко може да се види, че $\left|P(z_{t+1}(f_1,...,f_{6N}))\right| \le \frac{1}{(t+2)^{2^{N+1}}}$. Но

$\frac{1}{(t+2)^{2^{N+1}}} < \frac{1}{(t+1)^{2^{N+1}}} < 1$, тогава съгласно втората част на теорема 2

$$\min_{1\le j\le N}\left|\varsigma_j(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1\right) - z_t(f_1,...,f_N)\right| < 2\left(\frac{1}{(t+1)^{2^{N+1}}}\right)^{\frac{1}{2^N}} = \frac{2}{(t+1)^2}$$

Приложили сме твърдението за $k = (t+2)^{2^{N+1}} - 1$, $\delta = \frac{1}{(t+1)^{2^{N+1}}}$

Ще докажем, че z_{t+1} е такова, че :

$\left|z_{t+1}(f_1,...,f_{6N}) - z_t(f_1,...,f_{6N})\right| < \frac{2}{(t+1)^2}$

Нека $\Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t) = u$, $\Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t+1) = v$

Както видяхме по-рано $u, v \in \{1..N\}$. Тогава съгласно направените дефиниции:

$$z_{t+1}(f_1,...,f_{6N}) = \frac{\Gamma_1\ (f_1,...,f_{6N})(t+1) - \Gamma_2\ (f_1,...,f_{6N})(t+1)}{\Gamma_3\ (f_1,...,f_{6N})(t+1)+1} + \frac{\Gamma_4\ (f_1,...,f_{6N})(t+1) - \Gamma_5\ (f_1,...,f_{6N})(t+1)}{\Gamma_6\ (f_1,...,f_{6N})(t+1)+1} i =$$

$$\frac{\Gamma_1^{cd}(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1, \Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t+1)\right) - \Gamma_2^{cd}(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1, \Gamma^{rec}(f_1,...f_{6N})(t+1)\right)}{\Gamma_3^{cd}(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1, \Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t+1)\right)+1} +$$

$$\frac{\Gamma_4^{cd}(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1, \Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t+1)\right) - \Gamma_5^{cd}(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1, \Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t+1)\right)}{\Gamma_6^{cd}(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1, \Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t+1)\right)+1} i =$$

$$\frac{\Gamma_{1v}{}^{th2}(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1\right)-\Gamma_{2v}{}^{th2}(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1\right)}{\Gamma_{3v}{}^{th2}(f_1,...f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1\right)+1}+$$
$$\frac{\Gamma_{4v}{}^{th2}(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1\right)-\Gamma_{5v}{}^{th2}(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1\right)}{\Gamma_{6v}{}^{th2}(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1\right)+1}i=\varsigma_v(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1\right)$$

Аналогично

$$z_t(f_1,...,f_{6N})=\varsigma_u(f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}}-1\right)$$

От дефиницията на Γ^{rec} се вижда, че след като $\Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t+1)=v$ то :

$$\Gamma^{rec}(f_1,...,f_{6N})(t+1)=\Gamma_1^{rec}(f_1,...,f_{6N})(u,t)=v$$

Както видяхме от прилагането на теорема 2

$$\min_{1\le j\le N}\left|\varsigma_u(f_1,...f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}}-1\right)-\varsigma_j(f_1,...f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1\right)\right|<\frac{2}{(t+1)^2}$$

От дефиницията на Γ_1^{rec} следва, че

$$\left|\varsigma_u\ (f_1,...,f_{6N})\left((t+1)^{2^{N+1}}-1\right)-\varsigma_v(f_1,...,f_{6N})\left((t+2)^{2^{N+1}}-1\right)\right|<\frac{2}{(t+1)^2},$$

Тогава

$$|z_{t+1}(f_1,...,f_{6N})-z_t(f_1,...,f_{6N})|<\frac{2}{(t+1)^2}$$

Нека $\Gamma(f_1,...,f_{6N})(n)=2n+2$, ще докажем, че за всички естествени числа n,p и q е вярно , че $|z_p(f_1,...,f_{6N})-z_q(f_1,...,f_{6N})|<\frac{1}{n+1}$, ако $p,q>\Gamma(f_1,...,f_{6N})(n)$

Нека за определеност $p>q$, а $\Gamma(f_1,...,f_{6N})(n)=n_0$. Тогава

$$\left|z_p(f_1,...,f_{6N})-z_q(f_1,...,f_{6N})\right|\le\left|z_p(f_1,...,f_{6N})-z_{p-1}(f_1,...,f_{6N})\right|+...+\left|z_{q+1}(f_1,...,f_{6N})-z_q(f_1,...,f_{6N})\right|$$
$$<2\left(\frac{1}{p^2}+...+\frac{1}{(q+1)^2}\right)<2\left(\frac{1}{p(p-1)}+...+\frac{1}{(q+1)q}\right)=2\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}+...+\frac{1}{q}-\frac{1}{q+1}\right)=2\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$$
$$<\frac{2}{q}<\frac{2}{n_0}=\frac{2}{2n+2}=\frac{1}{n+1}$$

Съгласно твърдение 4.6 съществуват шест ε^2 изчислими оператори $\Gamma_1,\Gamma_2..,\Gamma_6$ от F^N в F, които са представяне на корен на уравнението.

Използвайки тази теорема, ще докажем две лесни следствия.

Твърдение 4.7

За всяко положително цяло число N има такива 6N на брой ε^2-изчислими оператори от F^{6N} в F, че винаги, когато $f_1,...,f_{6N}$ е произволно представяне на кой да е полином $P(z)$ от степен N с коефициент 1 пред най-високата степен, последователните 6-ки от тези оператори преобразуват $f_1,...,f_{6N}$ в представяне на комплексни числа $z_1,...,z_N$ със свойството $P(z)=(z-z_1)...(z-z_N)$ за всяко z

Доказателство :

Ще докажем това твърдение с индукция по N. При N=1 можем директно да решим уравнението. Да допуснем, че е вярно за N, ще го докажем за N+1.

Нека $P(z)= z^{N+1} + \alpha_N z^N + \ldots + \alpha_0$ с представяне $f_1,...,f_{6N+6}$

Съгласно теорема 3 съществуват шест ε^2 изчислими оператори $\Gamma_1^{N+1},...,\Gamma_6^{N+1}$, които преобразуват някое представяне на полинома *P(z)* в z_{N+1} - някое представяне на корена.

Нека да разгледаме полинома $P_0(z)$, получен чрез

$P(z)=(z- z_{N+1})P_0(z)$

Полиномът $P_0(z)$ е от N-та степен и има коефициент 1 пред най-високата степен. Нека да обозначим полинома с $P_0(z)=\sum_{m=0}^{N}\beta_m z^m$. Вижда се, че $\beta_m=\sum_{q=m+1}^{N+1}\alpha_q {z_{N+1}}^{q-1-m}$. Съгласно твърденията за умножение и събиране съществуват ε^2-изчислими оператори, които преобразуват $f_1,...,f_{6N+6}$ в някое представяне $g_1,...,g_{6N}$ на полинома $P_0(z)$. Съгласно твърдението за суперпозиция и индукционното предположение има ε^2-изчислими оператори от F^{6N} в F, такива че $\Gamma_1^1,...,\Gamma_6^N$ са представяне на комплексните числа $z_1,...,z_N$ със свойството $P_0(z)=(z-z_1)...(z-z_N)$ за всяко z.

Твърдение 4.8

Ако $P(z)$ е полином с коефициент 1 пред най-високата степен и с представяне, съставено от функции от класа ε^2, то и всеки от корените на $P(z)$ има представяне, съставено от такива функции.

Доказателство :

Лесно може да се провери с индукция по построението на произволен ε^2 изчислим Γ, че ако $f_1,...,f_{6N}$ са от класа ε^2, то и $\Gamma(f_1,...,f_{6N})$ е в този клас. Тогава, съгласно предното твърдение, всеки от корените има представяне, съставено от функции в ε^2. Това твърдение представлява усилване на резултата, доказан в [5], тъй като представлява конструктивен начин на намиране на представянето.

5. Анализ на резултата

Доказаният резултат представлява конструктивно намиране с много нисък клас на изчислимост на корен на полином с комплексни коефициенти. При фиксирано N, алгоритъмът има полиномиална оценка за временна сложнност заради употребата на ε^2 изчислими оператори. За съжаление броят на оценяванията, които трябва да се извършат, е прекалено голям за практическо изчисление. Например, за да се намери корен полинома $P(z)= z^6 -10$ с точност 1/100, е необходимо в най-лошия случай според теорема 1 да се оцени стойността на полинома в близо $5*10^{143}$ точки. Това число се получава от редицата $z_1, z_2,..., z_{(2n_0+1)^2}$, която построихме в теорема 1. Тук $n_0=2^{15}C_{7,3}^{3}10^{3}300^{21}202^{3}$. За да се извърши индуктивната конструкция в теорема 2, за всяка от N-те стъпки умножаваме необходимата точност поне с A^N. Taka, за да приложим теорема 1 на последната стъпка, ще е необходимо да се работи с k по-голямо от 10^{36}, което ще доведе до още по-голямо нарастване на броя на необходимите операции.

Библиография

1) Grzegorczyk, A.:
Computable functionals, Fundamenta mathematica 42, (1955) , p168 - p202

2) Grzegorczyk, A.:
On the definition of computable real continuous functions, Fund. Math. 44, (1957), p61- p71

3) Grzegorczyk A. Some classes of recursive functions. Rozprawy Matem., 4, (1953), p1-p45.

4) Rosenbloom P.C., An Elementary Proof of the Fundamental Theorem of Algebra. The Amer. Math. Monthly, 52, (1945), no. 10, p562-p570

5) Skordev, D., Computability of Real Numbers by Using a Given Class of Functions in the Set of the Natural Numbers, Mathematical Logic Quarterly, 48 (2002), p91-p100

6) Skordev, D., On a Lemma of Paul C. Rosenbloom, manuscript

7) Weihrauch, K., A Simple Introduction to Computable Analysis, FernUniversität D - 58084 Hagen, 2nd edition, (1995), p20

8) Сосков И., Дичев А., Теория на програмите, Университетско издателство "Св. Климент Охридски", София 1998, стр.43-стр.44