Софийски университет "Свети Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика
**Катедра по математическа логика и приложенията ѝ**

# Вероятностни и темпорални модални логики

Димитър Панайотов Гелев

Дисертация
за присъждане на образователната и научна степен
доктор

Научна специалност 01.01.01 математическа логика

Научен ръководител: проф. д.м.н. Димитър Иванов Вакарелов

София, 2000 г.

Съдържание


**Увод** 6
- Тема и съдържание на дисертацията . . . 6
- Структура на дисертацията . . . 8
- Приноси на дисертацията . . . 8
- Публикации във връзка с дисертацията . . . 9
- Благодарности . . . 10

**Част I** 11

**Увод** 12

1 **Предварителни сведения за $QP$** 14
- 1.1 Език . . . 14
- 1.2 Модели и истинност . . . 14
- 1.3 Система за извод и пълнота . . . 15

2 **$\omega$-пълна система за извод за $QP$** 16
- 2.1 Спомагателните променливи $P_0$ . . . 16
- 2.2 Правилото $Ded$ . . . 19
- 2.3 $\omega$-пълнота на $QP$ . . . 20

3 **Динамична съждителна логика с качествени вероятности** 23
- 3.1 Език . . . 23
- 3.2 Модели и истинност . . . 23
- 3.3 Система за извод за $DQP$ . . . 25
- 3.4 $\omega$-пълнота на $DQP$ . . . 28
- Забележки . . . 29

4 **Разширение на $QP$, в което $QP$ е крайноаксиоматизируема** 30
- 4.1 Език . . . 30
- 4.2 Модели и истинност . . . 30
- 4.3 Система за извод за $EQP$ . . . 31
- 4.4 Отстранимост на схемите $B_m$ в системата за извод на $EQP$ . . . 33
- 4.5 Някои действия с модели на $EQP$ . . . 40
  - 4.5.1 Амалгамируемост на вероятностните пространства . . . 40
  - 4.5.2 Частични структури за $EQP$ и техните разширения . . . 42
  - 4.5.3 Разширяване на частичните структури за $EQP$ до (тотални) структури за $EQP$ . . . 46

**Част II** 50

**Увод** 51

5 **Предварителни сведения за $ITL$, $DC$ и разширенията им** 55
- 5.1 Интервална темпорална логика и логика на околностите 55
  - 5.1.1 Езици . . . 55
  - 5.1.2 Структури . . . 55

5.1.3 Модели и истинност . . . 56
5.1.4 Съкращения . . . 57
5.1.5 Системи за извод . . . 58
5.2 Смятане на продължителностите . . . 59
5.2.1 Език . . . 59
5.2.2 Структури, модели и истинност . . . 59
5.2.3 Съкращения . . . 60
5.2.4 Система за извод . . . 60
5.3 Смятане на продължителностите с $\mu$-оператор . . . 60
5.4 Смятане на продължителностите със слабо монотонно време . . . 61
5.5 Смятане на продължителностите с оператор $\backslash\backslash$. . . . 62
5.6 Смятане на продължителностите с квантор по променливите за състояния . . . 63

**6 Смятане на продължителностите с абстрактна семантика 64**

6.1 Свойството на крайните покрития в интервалната темпорална логика . . . 64
6.1.1 Непротиворечиви спрямо $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)}$ теории . . . 66
6.1.2 Каноничен модел за $ITL_{fin}(\Omega)$ . . . 70
Забележки . . . 75
6.2 Продължителност и крайнопроменливост в интервалната темпорална логика . . . 75
6.2.1 Формули, представящи състояния, и темпорални променливи, представящи продължителности . . . 76
Забележки . . . 80
6.3 Абстрактна семантика на смятането на продължителностите и съответната пълна система за извод . . . 81
6.4 Двумерни разширения на интервалната темпорална логика и смятането на продължителностите . . . 84
6.4.1 Езици . . . 84
6.4.2 Структури, модели и истинност . . . 84
6.4.3 Системи за извод и теореми за пълнота . . . 85
6.4.4 Смятане на продължителностите със слабо монотонно време 86
6.5 Смятане на продължителностите с квантор по променливите за състояния . . . 86
6.5.1 Двусортна интервална темпорална логика и двусортно смятане на продължителностите . . . 87
6.5.2 Пълна система за извод за смятането на продължителностите с квантор по променливите за състояния . . . 88
6.6 Смятане на продължителностите с оператора $\backslash\backslash$ . . . 91
6.6.1 $ITL_{\backslash\backslash}$ . . . 91
6.6.2 $ITL$ с дискретни предикати . . . 92
6.6.3 $\omega$-пълна система за извод за $ITL$ с дискретни предикати . . . 92
6.6.4 $ITL$ с квантор по дискретни съждителни променливи . . . 93
6.6.5 Превод на $ITL_{\backslash\backslash}$ в $ITL^D$ . . . 95
Забележки . . . 96
Заключение . . . 97

**7 Вероятностна интервална темпорална логика 98**

**Крайните вероятностни времеви автомати и интервалната логиката на околностите** . . . 98

7.1 **Език и семантика на вероятностната интервална темпорална логика** . . . 100

7.1.1 **Езици** . . . 100

7.1.2 **Модели на вероятностната интервална темпорална логика и истинност в тях** . . . 101

7.1.3 **Съкращения** . . . 104

7.2 **Система за извод за вероятностната интервална темпорална логика** . . . 104

7.2.1 **Системата** . . . 104

7.2.2 **Някои полезни теореми и производни правила** . . . 105

7.3 **Пълнота на системата за извод за вероятностната интервална темпорална логика** . . . 107

7.3.1 **Език на $NL$, съответен на отнапред зададен език на $PITL$** . . . 107

7.3.2 **Диаграмен език за семантиката на $PITL$** . . . 108

7.3.3 **Контекстът $\ell = c_0 \wedge \Diamond_r(\ell = c_1 \wedge \Diamond_r \Diamond_l(\ell = c_2 \wedge \Diamond_l(\ell = c_3 \wedge [])))$** . . . 109

7.3.4 **Интерполация в логиката на околностите** . . . 110

**Забележки** . . . 115

7.3.5 **Модел на произволно отнапред зададено непротиворечиво множество от формули в $PITL$ в диаграмния език** . . . 115

7.4 **Равенството на Чапмън-Колмогоров за оператора** $(.;.)$ . . . 119

**Забележки** . . . 121

**По-нататъшна работа над $PITL$** . . . 122

**Изброима адитивност на вероятностите в моделите на $PITL$** . . . 122

**Система за извод за $PDC$** . . . 122

**8 Итерацията в смятането на продължителностите 124**

8.1 **Аксиоми за итерацията в $DC^*$** . . . 125

8.2 **Локална отстранимост на итерацията** . . . 127

8.3 **Теорема за пълнота** . . . 130

**Приложение: Системи за извод 132**

**Към логиките от част I** . . . 132

$QP$ . . . 132

$DQP$ . . . 132

$EQP$ . . . 133

**Към логиките от част II** . . . 133

$ITL$ . . . 133

$ITL_{fin}(\Omega)$ . . . 133

$ITL_d(\Delta)$ . . . 134

$ITL$ **с квантор по дискретни съждителни променливи** . . . 134

**Формули, представящи състояния, и темпорални константи, представящи продължителности, в** $ITL$ . . . 134

$ITL^2$ . . . 134

$DC$ . . . 134

$DC$ **с абстрактна семантика** . . . 135

$DC^2$ **с абстрактна семантика** . . . 135

$DC$ **с абстрактна семантика и квантор по променливите за състояния** . . . 135

$NL$ . . . 136

$PITL$ . . . 136

**Равенството на Чапмън и Колмогоров във** $PITL$ . . . . . 136
$DC^*$ . . . . . 137

**Литература** **138**

# Увод

## Тема и съдържание на дисертацията

Дисертацията представя изследванията на автора в областта на аксиоматизацията на някои вероятностни и темпорални модални логики.

Този вид некласически логики са от основно значение при формалното описване на поведението на инженерни системи във времето и на вероятностни страни на това поведение за по-нататъшната формална проверка на правилността на устройството на системите. Въвеждането на етап на формално описване и проверка в проектирането на инженерни системи все по-широко се осъзнава като средство за подобряване на тяхната сигурност, особено когато се проектира апаратура и софтуер, чиято неправилна работа може да създаде опасности или да причини големи загуби.

Част от разглежданите логики са въведени от други автори. Това са съждителната логика с качествени вероятности $QP$, въведена в [Seg71], интервалната темпорална логика от първи ред $ITL$, въведена в [Mos85], смятането на продължителностите $DC$, въведено в [ZHR91], вероятностното разширение $PDC$ на $DC$, въведено в различни варианти в [LRSZ92, DZ94], тясно свързаната с $ITL$ логика на околностите от първи ред $NL$ [ZH96, ZCC96, RZ97, BZ97], смятането на продължителностите със слабо монотонно време $WDC$, въведено в [PD97], смятането на продължителностите с итерация $DC^*$, въведено в [DW94], смятането на продължителностите с оператора за синхронизация $\backslash\backslash$, въведено в [He99], и смятането на продължителностите с квантор по променливите за състояния.

Сред логиките, въведени от автора, са съждителната динамична логика с качествени вероятности $DQP$, едно разширение $EQP$ на $QP$, в което всички теореми на $QP$ са изводими с помощта на краен брой аксиомни схеми, интервалната темпорална логика от първи ред със свойството на крайните покрития $ITL_{fin}(\Omega)$, вероятностната интервална темпорална логика от първи ред $PITL$ и редица системи, свързани със споменатите и имащи техническа роля.

Първата част от дисертацията е посветена на $QP$ и нейните разширения $DQP$ и $EQP$. За разлика от други съждителни вероятностни логики (вж. напр. [Koz85, Ale94]), където по същество се въвлича в употреба индивидна област за представяне на вероятностите, $QP$ е *наистина чисто съждителна* логика. При въвеждането на $QP$ последователно е осъществен подходът вероятностните разсъждения да се формализират на *качествено*, а не *количествено* ниво. Цел на въвеждането на $DQP$ е разширяването на $QP$ до съждителна логика на вероятностните програми, каквато е съждителната динамична логика $PDL$[FL79] за недетерминистичните програми, при запазването на този подход.

Системата за извод за $QP$, предложена в [Seg71], съдържа безкрайна редица от аксиомни схеми. Още с появата на тази система възниква въпросът за възможността тя да бъде заместена от система, съдържаща само краен брой схеми. Няма основание да се предполага, че този въпрос има положителен отговор в първоначалния си вид. С въвеждането на $EQP$ в дисертацията е получен положителен отговор на въпроса в леко изменена форма: $EQP$ е консервативно разширение на $QP$ с два двуместни модални оператора, в което всички теореми на $QP$ са доказуеми с помощта на краен брой аксиомни схеми.

Логиките, на които е посветена втората част от дисертацията, дължат възникването си на потребностите на реални практически приложения. Логиките от първи ред $ITL$, $DC$, разширението $NL$ на $ITL$ и разширенията $PDC$, $WDC$, $DC^*$ и $DC$ с оператора за синхронизация $\backslash\backslash$ на $DC$ са предназначени за формално описване и проверка на правилността на устройството на инженерни системи, работещи в реално време - област на интензивни изследвания през последните години. За приложимостта на тези логики свидетелстват множеството формално изучени с тях конкретни системи, работещи в реално време [Dan98, HeZ94, XH95, YWZP94, ZHRR92, ZZ94]. С

помощта на $DC$ е формализирана семантиката на езика Verilog[IEEE95], който е един от най-широко използуваните езици за проектиране на хардуер[SX98] (около 25 000 регистрирани потребители по света).

Въпреки това, за част от тези логики не са намерени пълни системи за извод. Такава е ситуацията с $PDC$, $WDC$, $DC^*$, $DC$ с оператора $\backslash\backslash$ и $DC$ с квантор по променливите за състояния. Дори за известната система за извод за $DC$ е налице само теорема за относителна пълнота.

Втората част от тази дисертация е посветена на получаването на такива системи за извод. Част от трудностите при получаването им идват от това, че $DC$ и разширенията му са *интерпретирани* логики, в чиято семантика участвува системата на реалните числа. Затова в дисертацията е въведена абстрактна форма на семантиката на тези логики, както е направено в [Dut95] за $ITL$. В тази форма е отразено характерното за $DC$ условие интерпретациите на някои нелогически символи да са на части постоянни функции на времето. Това условие е формализирано чрез въвеждането на т. нар. *свойство на крайните покрития* на подходящи класове от формули, различни в различните варианти и разширения на $DC$.

За изучаването на свойството на крайните покрития в общия случай е въведено разширение $ITL_{fin}(\Omega)$ на $ITL$, където класът от формули $\Omega$, имащи свойството на крайните покрития, е параметър. За $ITL_{fin}(\Omega)$ е получена $\omega$-пълна система за извод, съдържаща едно $\omega$-правило. Системите за извод за $DC$ и разширенията на $DC$ с абстрактна семантика, получени в дисертацията, са разширения на системата за $ITL_{fin}(\Omega)$ за съответни подходящо избрани класове от формули $\Omega$ със специфични за всяко разширение на $DC$ аксиоми. Особен случай сред тези логики е вариантът на $DC$ с оператора за синхронизация $\backslash\backslash$, чиято семантика се отличава силно от семантиката на останалите разширения на $DC$. Въпросът за пълнотата на $DC$ с $\backslash\backslash$ е решен косвено, чрез въвеждане на подходящо разширение на $DC$ с по-близка до тази на $DC$ семантика, за което е получена пълна система за извод, и задаване на запазващ истинността превод на $DC$ с $\backslash\backslash$ в това нарочно разширение.

Избраният в дисертацията подход към аксиоматизацията на $ITL_{fin}(\Omega)$ води до значително съкращаване на броя на разширенията на $DC$, които с основание могат да се считат за съществено различни. В Годишния отчет на UNU/IIST[1] [UNUIIST99], където авторът работи през 1998 г., е отбелязано, че $ITL_{fin}(\Omega)$ е "обща рамка за някои разширения на $DC$".

Стъпка към решаването на въпроса за пълнотата в $PDC$ е въведената и изучена в дисертацията вероятностна интервална темпорална логика $PITL$. Най-общо казано, $PITL$ се отнася към $PDC$ така, както $ITL$ към $DC$. Семантиката на $PITL$ е обобщение на тази на $PDC$, която е въведена с помощта на клас крайни вероятностни времеви автомати. Изразителната сила на $PITL$ позволява изчерпателно описване на поведението на този вид автомати. $PITL$ е въведена като разширение на логиката на околностите $NL$. За $PITL$ е получена пълна система за извод, част от която е известната система за $NL$. Ключова стъпка в доказателството на пълнотата на тази система е получената в дисертацията нов вид интерполационна теорема, чиято формулировка е специфична за семантиката на $NL$ като модална логика.

В дисертацията е намерено разширение на системата за извод за $DC$ с абстрактна семантика с аксиоми за итерацията и е доказана пълнотата му за голям фрагмент от $DC^*$. Резултатът е получен чрез съчетаване на метода на присвояванията, известен от теорията на определимостта в модалната логика, с подходящи аналози на теоремите за отстранимост на кванторите в някои теории на предикатното смятане от първи ред. Аксиомите за итерацията в $DC^*$ са получени чрез подходяща адаптация на аксиомите за итерацията от съждителната динамична логика $PDL$.

[1] Международен институт за софтуерни технологии при Университета на ООН

## Структура на дисертацията

Дисертацията се състои от две части. Всяка част се предхожда от кратък увод и предварителни сведения, необходими за разбирането ѝ.

Първата част от дисертацията е посветена на съждителната система $QP$ и нейните разширения. Глава 2 представя $\omega$-пълна система за извод за $QP$. Тази система е получена от автора в [Гел94]. Подробното ѝ излагане в дисертацията е направено заради тясната ѝ връзка със съответната система за $DQP$ и за пълнота. Тази система е въведена и изучена в глава 3. В глава 4 е представено разширението $EQP$ на $QP$. Доказано е, че то е консервативно разширение и че в него всички теореми на $QP$ могат да бъдат получени с помощта на само краен брой аксиомни схеми.

Втората част е посветена на $ITL$, $DC$ и техните разширения.

В глава 6 е въведено разширението $ITL_{fin}(\Omega)$ на $ITL$. С въвеждането на това разширение в параграфи 6.1 и 6.2 в рамките на $ITL$ са получени аналози на свойството на специфичните за $DC$ променливи за състояния да бъдат на части постоянни функции на времето и на специфичните за $DC$ термове, изразяващи техните продължителности. С помощта на полученото за тези аналози в параграф 6.3 е получена $\omega$-пълна система за извод за вариант на $DC$ с абстрактна семантика, подобна на известната за $ITL$. В останалата част на глава 6 са направени подобни приложения на полученото за $ITL_{fin}(\Omega)$ за доказването на пълнотата на системи за извод за други споменати по-горе разширения на $DC$.

Вероятностната интервална темпорална логика $PITL$ е тема на следващата глава 7. Тъй като семантиката на тази логика е сравнително сложна, в началото на главата е даден уводен пример, мотивиращ въвеждането на $PITL$ по избрания начин. Следващите два параграфа съдържат точната дефиниция на $PITL$ (параграф 7.1) и системата за извод за $PITL$ (параграф 7.2), чиято пълнота е доказана в параграф 7.3. Ключова роля за краткостта на доказателството играят интерполационните теореми за $NL$, доказани в подпараграф 7.3.4. Тези теореми представляват и самостоятелен интерес. Причина за поместването им в дисертацията като част от доказателството на пълнотата на представената система за извод за $PITL$ са някои техни варианти, специфични за това доказателство. Формулирането на тези варианти се оказва най-удобно да бъде направено заедно, в контекста на доказателството. Последният параграф от глава 7 е посветен на аксиоматизацията на равенството на Чапмън-Колмогоров в рамките на абстрактната семантика на $PITL$.

В последната глава 8 се изследва аксиоматизация на разширението $DC^*$ на $DC$ с итерация. Представена е система за извод за $DC^*$, която е пълна за фрагмент от $DC^*$ относно клас от структури, по-тесен от този на $DC$ с абстрактна семантика, но все пак включващ съществените за приложенията. Доказателството се опира на така наречената локална отстранимост на итерацията в $DC^*$ и е разделено на две части. В едната част е доказано, че итерацията е локално отстранима в избрания фрагмент (параграф 8.2). Във другата част (параграф 8.3) е доказано, че в следствие на това представената система за извод е пълна в този фрагмент на $DC^*$.

Към дисертацията е приложен списък на системите за извод, застъпени и/или получени в нея.

## Приноси на дисертацията

Дисертацията съдържа следните оригинални приноси на автора:

∘ Теорема за $\omega$-пълнота на разширението на известната система за извод за $QP$ с подходящо $\omega$-правило. Това разширение на системата за извод за $QP$ позволява специалната конструкция, използувана за получаването на пълнотата ѝ в [Seg71, Gar75], да бъде заменена със стандартна канонична конструкция.

∘ Дефиниция на динамично разширение $DQP$ на $QP$. Разширението съдържа вероятностни аналози на известните от съждителната динамична логика действия

композиция, обединение и итерация на релации на достижимост, чиято роля в $DQP$ изпълняват абстрактен вид вероятностни разпределения. Композицията в $DQP$ е зададена с равенството на Чапмън и Колмогоров.

∘ Теорема за $\omega$-пълнота на подходяща система за извод за $DQP$.

∘ Доказателство на пълнотата по Халден на $QP$ и $DQP$.

∘ Дефиниция на консервативно разширение $EQP$ на $QP$, в което всички теореми на $QP$ са изводими с помощта на краен брой аксиомни схеми.

∘ Формулировка и доказателство на свойството *силна амалгамируемост* за вероятностни пространства.

∘ Дефиниция на *свойството на крайните покрития* в рамките на $ITL$ като аналог на свойството на специфичните за разширението $DC$ на $ITL$ изрази за състояния да представят на части постоянни функции на времето. Въвеждане на съответно разширение $ITL_{fin}(\Omega)$ на $ITL$.

∘ Теорема за $\omega$-пълнота на разширение на системата за извод на $ITL$ с подходящо $\omega$-правило за $ITL_{fin}(\Omega)$. Този и предишният резултати са ключови за постигнатото в глава 6 от дисертацията.

∘ Въвеждане на абстрактна семантика за $DC$ и $\omega$-пълна система за извод за тази семантика, получена като разширение на частен случай системата за извод на $ITL_{fin}(\Omega)$. Този резултат подобрява известния от [HZ92].

∘ Теореми за $\omega$-пълнота на подходящи системи за извод за тясно свързаните с $WDC$ "двумерни" варианти $ITL^2$ и $DC^2$ на $ITL$ и $DC$, получени също като разширения на частни случаи на системата за извод на $ITL_{fin}(\Omega)$.

∘ Теорема за $\omega$-пълнота на подходящо разширение на системата за извод за $DC$ с абстрактна семантика и квантор по променливите за състояния.

∘ Дефиниция и пълна система за извод за разширение на $ITL$ с *дискретни съждителни променливи* и квантор по тях. Тази логика е въведена с цел постигане на изразителната способност на $DC$ с оператора $\backslash\backslash$ с по-обикновени средства. Системата за извод за нея отново е разширение на частен случай на тази за $ITL_{fin}(\Omega)$.

∘ Запазващ общовалидността превод на разширението на $DC$ с $\backslash\backslash$ в $ITL$ с дискретни съждителни променливи. Този превод води до косвено решаване на въпроса за общовалидността в $DC$ с $\backslash\backslash$.

∘ Интерполационни теореми за $NL$.

∘ Дефиниция на вероятностно разширение $PITL$ за $ITL$. Семантиката на това разширение обобщава основаната на моделирането в $DC$ на поведението на вероятностни времеви крайни автомати семантика на вероятностното $DC$.

∘ Теорема за пълнота на подходяща система за извод за $PITL$.

∘ Аксиоми за итерацията в $DC$.

∘ Теорема за $\omega$-пълнота на фрагмент от разширението $DC^*$ на $DC$ с итерация за клас от структури, в които е в сила принципът на Архимед.

## Публикации във връзка с дисертацията и техни цитирания

Резултатите от глави 2 и 3 от дисертацията са издадени в [Gue95]. Резултатите от параграфи 6.1 и 6.3 от глава 6 са поместени в обзорната работа [ZGZ99]. Една по-слаба форма на резултата от глава 8 е поместена в [DG99].

По-ранни варианти на тези работи са издадени като доклади на изследователските институти, където са получени. Това са [Gel94a, Gue98a, Gue98b, Gue98c].

Работата [Gue98b] е цитирана в [Dim98]. Работата [DG99] е цитирана в [He99b] и [DVH99]. Работата [Gue98a] е цитирана в [ZNJ99]. Също там е цитирана и неиздадената работа [Gue98d], която по същество е приносът на автора в [ZGZ99].

## Благодарности

Авторът изразява благодарност на сътрудниците на Международния институт за софтуерни технологии при Университета на ООН в Макау (UNU/IIST) и на института като цяло, без чиято под подкрепа работата над втората част от дисертацията нямаше да бъде възможна. Ранните варианти на резултатите от тази част са били тема на многобройни семинари на групата DeTfoRS от UNU/IIST и многобройни плодотворни обсъждания с членовете на тази група проф. Дзоу Чаочен, д-р Дан Ван Хун, д-р Кшу Киуен, д-р Ху Ченгджун, Кшя Йонг, Жао Жианхуа, Жан Наиджун, д-р Уанг Жи, д-р Уанг Ханпинг, д-р Паритош Пандиа от Института за фундаментални изследвания TATA в Бомбай, Кътълин Дима, проф. Хъ Джифенг и др. Благодарение на съвместната си работа с тях авторът навлезе в такава интересна, динамична и практически полезна област на приложения за математическата логика, каквато е формалната спецификация и верификация на системите, работещи в реално време.

Авторът благодари на научния си ръководител, проф. Димитър Вакарелов, комуто дължи навлизането си в модалната логика.

Без настоятелните критични бележки на проф. Вакарелов към по-ранните варианти на въведените в дисертацията системи повечето резултати в нея щяха да останат в доста несъвършен вид. Тези критични бележки доведоха в частност до несравнимо по-добър от първоначалния[Gue98c] вариант на логиката $PITL$, изучена в глава 7, и до значително по-добрата форма на изложението изобщо.

# Част I

# Увод

Тази част е посветена на въвеждането и изучаването $\omega$-пълна аксиоматизация и на две разширения на съждителната вероятностна логика $QP$ на Сегерберг[Seg71]. Сегерберг въвежда тази логика като разширение на класическото съждително смятане с един двуместен модален оператор $\leq$. За интерпретирането на този оператор теоретико-множествената семантика на съждителното смятане се обогатява с въвеждането на вероятностни мерки $\mu_w$, определени върху множеството от възможните светове на разглежданата структура, по една за всеки възможен свят $w$. Истинността на формули от вида $\varphi \leq \psi$ се задава с условието:

$$w \models \varphi \leq \psi \leftrightarrow \mu_w(\{w' : w' \models \varphi\}) \leq \mu_w(\{w' : w' \models \psi\}).$$

Задаването едноместен модален оператор с дефиницията $\Diamond\varphi \rightleftharpoons \neg(\varphi \leq \bot)$ върху структурите на $QP$ поражда нормална модална логика, която, както е известно, съвпада с $KD = K + \Box\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$.

Неформално, $w \models \varphi \leq \psi$ означава

> *вероятността на $\varphi$ е по-малка или равна на вероятността на $\psi$ от гледна точка на $w$.*

Подходът на Сегерберг при създаването на $QP$ (Qualitative Probabilities) се отличава с формализирането на вероятностни разсъждения на качествено ниво, посредством оператора $\leq$. В езика не се въвеждат индивидни константи или променливи за явно посочване числените стойности на вероятностите, нито действия с тях. Не се предвижда и съответна компонента на структурите за $QP$. Така в $QP$ са въведени т. нар. *качествени*, а не *количествени* вероятности. С този избор се постига и ограничаването на $QP$ в чисто съждителен език, за разлика от други сродни системи [Koz85, Ale94], където по същество са налице безкванторни формули от първи ред.

Построяването на $\omega$-пълна система за извод за $QP$ цели, макар и на цената на неизбежното въвеждане на правило за извод с безброй много предпоставки, постигането на техническите удобства, които носи твърдението за пълнота, формулирано във вида

> $\Gamma$ *е изпълнимо, стига* $\Gamma$ *да е непротиворечиво*

за произволно множество от формули $\Gamma$. Такова твърдение не е вярно за системи само с крайни правила, защото свойството $\Gamma$ *е изпълнимо в* $QP$ не е компактно. Както се вижда по-долу, това е свързано с участието на реалните числа като стойности на вероятностните мерки в семантиката на $QP$. Затова въведеното $\omega$-правило по същество отразява построяването на реалните числа от Дедекиндови сечения.

Естествено е структурите на $QP$ да се разглеждат като описания на експерименти с вероятностен характер. Ако провеждането на експеримента при начални условия, зададени чрез света $w$, причинява преход към света $w'$, $\varphi \leq \psi$ означава, че вероятността $w'$ да изпълнява $\psi$ е не по-малка от тази $w'$ да изпълнява $\varphi$. Първото от изучените разширения цели развиването на изразителната способност на $QP$ по отношение на разбирането на $\leq$ като оператор за сравняването на вероятностите на събития при изхода на експеримент. Във вида, в който е въведена от Сегерберг, $QP$ позволява описването на единствен едностъпков експеримент. Допускането на по-сложни експерименти води до въвеждането на повече оператори $\leq$ и действия с тях. Разгледаните в това разширение действия с вероятностните оператори са последователна и паралелна композиция и итерация. Те са аналози на действията композиция, обединение и итерация, извършвани над релациите на достижимост в съждителната динамична логика. Получената с тяхното въвеждане система може да се разглежда като съждителна логика на вероятностните програми.

Основният резултат, получен за това разширение, е теорема за $\omega$-пълнота. За съжаление системата за извод, чиято пълнота е получена, е доста сложна. Тя съдържа изброимо много аксиоми, свързани с последователната композиция, чиято семантика се задава интеграла от равенството на Чапмън-Колмогоров. Въпреки сложността си, обаче, тази система е полезна с това, че отразява елементи, присъствуващи, поради избягването на специализирани елементи на семантиката, във всички вероятностни програмни логики. В частност, елементи от нея, в далеч по-удобния вид, който позволява езикът от първи ред, са заимствувани в аксиоматизацията на вероятностната интервална темпорална логика, разгледана във втората част на дисертацията.

Второто разширение на $QP$, изучено тук, е въведено с цел решаването на един отворен въпрос, възникнал още с появата на $QP$. Аксиоматизацията, предложена от Сегерберг [Seg71] и по-късно леко преработена от Гарденфорс [Gar75], съдържа безкраен списък от схеми. Въпросът е за съществуването на пълна система с краен брой схеми за $QP$. Резултатите от [Ale94] върху друга логика с близка семантика подсказват, че в оригиналния език на $QP$ такава система не е възможна. Въведеното тук разширение съдържа още два модални оператора освен $\leq$, които, макар да се интерпретират в разширение на същите структури, нямат вероятностен смисъл.

Основният резултат за това консервативно разширение е, че в него с помощта на краен брой схеми са доказуеми всички теореми на $QP$. Освен това е получена теорема за $\omega$-пълнота на разширението в система, която, освен тези схеми, съдържа споменатото по-горе $\omega$-правило.

# 1 Предварителни сведения за $QP$

Тук даваме накратко известните ни резултати за $QP$, с чиято аксиоматизация и разширения се занимаваме в тази част.

## 1.1 Език

Нека $P$ е дадено изброимо множество от *съждителни променливи* $p$, $q$, $r$, ..., което не съдържа никой от символите $\bot$, $\top$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\leq$, (, ). С $\mathbf{L}_{\leq}(P)$ означаваме множеството от формули, което се задава със следната Бекус-Наурова форма:

$\varphi ::= \bot | p | \neg\varphi | (\varphi \wedge \varphi) | (\varphi \leq \varphi)$

Тук $p$ означава съждителна променлива от $P$. Константата $\top$ и връзките $\vee$, $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$ се използуват като съкращения по обичайния начин. Освен това се използуват и съкращенията $\varphi \equiv \psi \rightleftharpoons \varphi \leq \psi \wedge \psi \leq \varphi$, $\varphi < \psi \rightleftharpoons \neg(\psi \leq \varphi)$, $\Box\varphi \rightleftharpoons \top \leq \varphi$ и $\Diamond\varphi \rightleftharpoons \neg(\varphi \leq \bot)$. Скобите ( и ) се употребяват само за избягване на двусмисленост, като се приема, че приоритетът на връзките намалява в следния ред: $\leq$, $\equiv$ и $<$; $\neg$; $\wedge$ и $\vee$; $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$.

## 1.2 Модели и истинност

**Дефиниция 1.1** *Структура за* $QP$ е тройка от вида $\langle W, B, \mu\rangle$, където:

- $W$ е непразно множество от *възможни светове*;
- $B$ е булева алгебра от подмножества на $W$ по отношение на обединението, сечението и допълнението до $W$;
- $\mu$ е изображение от тип $W \to (B \to [0,1])$, което за всяко фиксирано $w \in W$ е вероятностна мярка върху $B$;
- за всеки $W', W'' \in B$, $\{w \in W : \mu_w(W') \leq \mu_w(W'')\} \in B$.

Тук *вероятностна мярка* наричаме изображение $p$ на $B$ в $[0,1]$, удовлетворяващо тъждествата:

- $p(W') + p(W'') = p(W' \cup W'')$ за $W', W'' \in B$, $W' \cap W'' = \emptyset$ (*адитивност*);
- $p(W) = 1$.

Вероятностните мерки, които разглеждаме тук, не са необходимо изброимо адитивни.

**Дефиниция 1.2** *Модел* на езика $\mathbf{L}_{\leq}(P)$ на $QP$ наричаме наредена двойка $\langle F, v\rangle$, където $F = \langle W, B, \mu\rangle$ е структура за $QP$, а $v$ е изображение на $P$ в $B$, което се нарича *оценка на променливите от* $\mathbf{L}_{\leq}(P)$.

**Дефиниция 1.3** Релацията $M, w \models \varphi$, където $M = \langle W, B, \mu, v\rangle$ е модел на езика $\mathbf{L}_{\leq}(P)$ на $QP$, $w \in W$ и $\varphi \in \mathbf{L}_{\leq}(P)$, се определя с индукция по строежа на $\varphi$ така:
$M, w \not\models \bot$;
$M, w \models p$, ако $w \in v(p)$, за $p \in P$;
$M, w \models \neg\varphi$, ако $M, w \not\models \varphi$;
$M, w \models \varphi \wedge \psi$, ако $M, w \models \varphi$ и $M, w \models \psi$;
$M, w \models \varphi \leq \psi$, ако $\mu(w)(\{w' \in W : M, w' \models \varphi\}) \leq \mu(w)(\{w' \in W : M, w' \models \psi\})$.

*Стандартното разширение* $\tilde{v}$ на $v$ до $\mathbf{L}_{\leq}(P)$ се задава с равенството

$$\tilde{v}(\varphi) = \{w \in W : M, w \models \varphi\}.$$

Индукция по строежа на $\varphi \in \mathbf{L}_{\leq}(P)$ показва, че винаги $\tilde{v}(\varphi) \in B$.

## 1.3 Система за извод и пълнота

Още в [Seg71] е посочена пълна система за извод за $QP$. Следният неин вариант, в който са отстранени голям брой аксиоми, които са следствия на останалите, е предложен в [Hoe92]:

($A0$) *всички класически съждителни тавтологии*

($A1$) $\Box(\varphi \Leftrightarrow \varphi') \wedge \Box(\psi \Leftrightarrow \psi') \Rightarrow (\varphi \leq \psi \Rightarrow \varphi' \leq \psi')$

($A2$) $\varphi \leq \psi \vee \psi \leq \varphi$

($A3$) $\bot \leq \varphi$

($A4$) $\Diamond \top$

($B_m$) $\Box(\varphi_1, \ldots, \varphi_m \mathsf{E} \psi_1, \ldots, \psi_m) \Rightarrow \left( \bigwedge_{i=1}^{m-1} \psi_i \leq \varphi_i \Rightarrow (\varphi_m \leq \psi_m) \right)$

($MP$) $\dfrac{\varphi \Rightarrow \psi,\ \varphi}{\psi}$ ($N$) $\dfrac{\varphi}{\top \leq \varphi}$

В редицата $B_m$, $m < \omega$, $\mathsf{E}$ е съкращение за (чисто съждителна) формула, изразяваща, че броят на истинните измежду $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ е равен на броя на истинните измежду $\psi_1, \ldots, \psi_m$. Ето една такава формула:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m \mathsf{E} \psi_1, \ldots, \psi_m \rightleftharpoons \bigvee_{k=0}^{m} \bigvee_{\substack{M,N \subseteq \{1,\ldots,m\} \\ cardM = cardN = k}} \bigwedge_{i \in M} \varphi_i \wedge \bigwedge_{i \notin M} \neg\varphi_i \wedge \bigwedge_{i \in N} \psi_i \wedge \bigwedge_{i \notin N} \neg\psi_i$$

В [Seg71] е доказана следната теорема за пълнотата на тази система за извод:

**Теорема 1.4** *Ако $\nvdash \varphi$ в горната система, то съществува модел $M = \langle W, B, \mu, v \rangle$ на $QP$ с крайно $W$ и $w \in W$ такива, че $M, w \models \neg\varphi$.*

В доказателството на тази теорема посоченият модел се строи така, че броят на елементите на $W$ може да се пресметне по дадената $\varphi$. За фиксирано $W$ и $v$ изпълнимостта в $M$ се определя лесно с помощта на подходящи крайни системи от линейни неравенства за стойностите на $\mu$. От това следва и разрешимостта на изпълнимостта в $QP$.

В [Seg71] горната теорема е доказана само за формули $\varphi$, които не съдържат вложени участия на $\leq$. Доказателство без това ограничение за структури на $QP$, по-близки до представените в [Hoe92] и тук, се съдържа в [Gar75].

# 2 $\omega$-пълна система за извод за $QP$

В тази глава разширяваме системата за извод на $QP$ с едно $\omega$-правило. Полученото разширение е консервативно, т.е. то не позволява извеждането на нови теореми на $QP$. Целта на е това разширение получаването на твърдение за пълнота във вида

$\Gamma$ *е изпълнимо, стига* $\Gamma$ *да е непротиворечиво*

за произволно множество от формули $\Gamma$. Следният пример показва, че такова твърдение не е вярно за системи, съдържащи само крайни правила за извод.
**Пример:** Нека $P = \{p_i : i < \omega\}$. Разглеждаме формулите $\xi_i \in \mathbf{L}_{\leq}(P)$, $i < \omega$, където:

$$\xi_0 \rightleftharpoons \neg(p_0 \leq \bot) \wedge p_0 \leq p_1,\ \xi_{i+1} \rightleftharpoons p_{i+1} \equiv p_1 \wedge \bigwedge_{j \leq i}(p_{i+1} \wedge p_j) \leq \bot.$$

Очевидно $M, w \models \xi_j$, $j \leq i$ при условие, че $0 < \mu_w(p_0) \leq \mu_w(p_1) = \ldots = \mu_w(p_j) \leq \frac{1}{j}$ и $v(p_{i_1}) \cap v(p_{i_2}) = \emptyset$, $1 \leq i_1 < i_2 \leq j$. Оттук следва, че всяко крайно подмножество на $\Xi = \{\xi_i : i < \omega\}$ е изпълнимо. От друга страна, от едновременната истинност на всички тези формули следва $0 < \mu_w(p_0) \leq \frac{1}{j}$ за всички цели положителни $j$, което е невъзможно. Следователно $\Xi \models \bot$, без това да е вярно за някое крайно подмножество на $\Xi$. Но един извод от $\Xi$ в система само с крайни правила винаги би бил извод от някое крайно подмножество на $\Xi$.

Противоречието, получено в примера, се основава на неравенствата $0 < \mu_w(p_0) < \frac{1}{j}$ за всяко цяло положително $j$. За изразяването на това неравенство използуваме редица от помощни съждителни променливи $p_i$, на чиито оценки налагаме ограничения чрез формулите $\xi_i$. Подобна редица ни е необходима и за записването на $\omega$-правилото, което добавяме към системата за извод на $QP$. Ограниченията, които налагаме на оценките на съждителните променливи от тази редица, не следва да се отразят на множеството от теоремите на $QP$. Затова постъпваме по следния начин. Разглеждаме език $\mathbf{L}_{\leq}(P \cup P_0)$, където $P$ и $P_0$ са непресичащи се изброими множества от съждителни променливи, като спомагателните променливи образуват множеството $P_0$. Провеждайки извод в този език, се интересуваме от връзката между непротиворечивостта и изпълнимостта само за множества от формули от $\mathbf{L}_{\leq}(P) \subset \mathbf{L}_{\leq}(P \cup P_0)$. Тъй като в тях не участвуват променливи от $P_0$, ограниченията, наложени на техните оценки, както е показано по-долу, не се отразяват върху изпълнимостта на такива множества от формули.

В следващия параграф въвеждаме променливите $P_0$ и аксиомите, които изразяват желаните свойства на оценките им, и показваме съвместимостта на тези аксиоми с произволни изпълними $\Gamma \subset \mathbf{L}_{\leq}(P)$. В параграф 2.2 въвеждаме интересуващото ни $\omega$-правило и доказваме лема на Линденбаум за системата за извод на $QP$, разширена с него. В параграф 2.3 доказваме теоремата за пълнота на така разширената система в желания от нас вид.

## 2.1 Спомагателните променливи $P_0$

Тук и до края на тази глава с $P_0$ означаваме изброимото множество от съждителни променливи $\{p_{i,j} : 0 \leq i < j, j < \omega\}$. Нека за $j < \omega$ с $\Pi_j$ означим формулата

$$\bigwedge_{i<j} p_{i,j} \equiv p_{0,j} \wedge \Box\left(\bigvee_{i<j} p_{i,j}\right) \wedge \bigwedge_{i_1<i_2<j}(p_{i_1,j} \wedge p_{i_2,j}) \leq \bot$$

Нека $M = \langle W, B, \mu, v\rangle$ е модел на $QP$ и $M, w \models \Pi_j$. Тогава от първия конюнктивен член на $\Pi_j$ следва $\mu_w(v(p_{0,j})) = \ldots = \mu_w(v(p_{j-1,j}))$, от втория следва $\sum\limits_{i<j} \mu_w(v(p_{i,j})) \geq 1$,

а от третия следва $\mu_w(v(p_{i_1,j} \cap v(p_{i_2,j})) = 0$. Нека означим $\bigvee_{k=i_1}^{i_2-1} p_{k,j}$ с $R_{i_1,i_2,j}$ за $i_1 \leq i_2 \leq j$ и $R_{i,j} \rightleftharpoons R_{0,i,j}$ за краткост. Горните наблюдения правят следните леми очевидни.

**Лема 2.1** *Нека* $\langle W, B, \mu, v\rangle, w \models \Pi_j$. *Тогава* $\mu_w(\tilde{v}(R_{i_1,i_2,j})) = \frac{i_2 - i_1}{j}$.

**Лема 2.2** *Следните формули са общовалидни:*

$\Pi_j \wedge \Pi_{j'} \Rightarrow (\varphi \leq R_{i,j} \Rightarrow \varphi \leq R_{i',j'})$ *за* $j'i \geq ji'$;

$\Pi_j \Rightarrow (\varphi \leq R_{i,j} \Rightarrow \varphi \leq R_{k,i+k,j})$ *за* $i + k \leq j$.

В останалата част на този параграф доказваме, че множеството $\Pi = \{\Pi_j : j < \omega\}$ е изпълнимо едновременно с всяко изпълнимо множество $\Gamma \subset \mathbf{L}_{\leq}(P)$. Доказателството разделяме на две стъпки. Първо построяваме модел за $\Pi$ (твърдение 2.8). След това доказваме, че от изпълнимостта на произволни $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbf{L}_{\leq}(P)$ следва изпълнимостта на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, стига никое $p \in P$ да не участвува във формули и от $\Gamma_1$ и от $\Gamma_2$. За крайни $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ това свойство е известно като пълнота по Халден на модалните логики (вж. напр. [BH83]). Запазваме този термин и за по-силната му форма, която получаваме тук.

Нека $W$ е декартовото произведение $\prod_{0<j<\omega} \{0, \ldots, j-1\}$. Нека $B$ е булевата алгебра, породена от подмножествата $W_{i,j} = \{w \in W : w(j) = i\}$ за $0 \leq i < j < \omega$. Следното твърдение ще ни позволи да използуваме индукция, за да докажем полезни свойства на елементите на $B$:

**Лема 2.3** $B = \bigcup_{k<\omega} B_k$, *където*

$$B_0 = \{W_{i,j} : 0 \leq i < j < \omega\},\ B_{k+1} = \{W' \setminus W'' : W', W'' \in \bigcup_{k' \leq k} B_{k'}\}.$$

Нека за всяко $n < \omega$, $W' \in B$ с $R^n_{W'}$ означим $\{w \restriction n : w \in W'\}$. Тук $w \restriction n$ означава ограничението на $w$ върху $\{1, \ldots, n-1\}$.

**Лема 2.4** *За всяко* $W' \in B$ *съществува* $n < \omega$ *такова, че*

$$W' = \{w \in W : w \restriction n \in R^n_{W'}\}.$$

**Доказателство:** Нека $k$ е най-малкото число, за което $W' \in B_k$. Провеждаме индукция по $k$. Ако $k = 0$, то $W' = W_{i,j}$ за някои $i, j$, $0 \leq i < j < \omega$. Тогава можем да вземем $n = j + 1$. Нека $k > 0$ и $W' = W'' \setminus W'''$, като $W'', W''' \in \bigcup_{k'<k} B_k$. Нека $W'' = \{w \in W : w \restriction n'' \in R^{n''}_{W''}\}$, $W''' = \{w \in W : w \restriction n''' \in R^{n'''}_{W'''}\}$. Тогава вземаме $n = \max(n'', n''')$. $\dashv$

**Лема 2.5** *Нека* $W' = \{w \in W : w \restriction n_i \in R^{n_i}_{W'}\}$ *за* $i = 1, 2$. *Тогава*

$$\frac{card(R^{n_1}_{W'})}{(n_1 - 1)!} = \frac{card(R^{n_2}_{W'})}{(n_2 - 1)!}.$$

**Доказателство:** Нека $n_1 < n_2$. Тогава $R^{n_2}_{W'}$ се състои от продълженията $w_2$ на елементите на $R^{n_1}_{W'}$, които удовлетворяват $w_2(i) \in \{0, \ldots, i-1\}$. Всяко $w_1 \in R^{n_1}_{W'}$ има $n_1 \times \ldots \times (n_2 - 1)$ такива продължения. Продълженията на различни $w_1$ са различни. Следователно $card(R^{n_2}_{W'}) = card(R^{n_1}_{W'}) \times n_1 \times \ldots \times (n_2 - 1)$. Оттук търсеното равенство се получава с разделяне на $(n_2 - 1)!$. $\dashv$

Нека $m(W') = \frac{card(R^n_{W'})}{(n-1)!}$ за $W' \in B$ и $n$ такова, че $W' = \{w \in W : w \restriction n \in R^n_{W'}\}$. От лема 2.4 следва, че $m(W')$ е определено за всяко $W' \in B$. От лема 2.5 следва, че $m(W')$ не зависи от избора на $n$, а само от $W'$.

**Лема 2.6** *Функцията $m$ е неотрицателна мярка на $B$ и $m(W) = 1$.*

**Доказателство:** Нека $W_i = \{w \in W : w\restriction n_i \in R^{n_i}_{W_i}\}$ $i = 1, 2$. Очевидно $W_i = \{w \in W : w\restriction n \in R^n_{W_i}\}$ за $n = \max(n_1, n_2)$. Нека $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Тогава $R^n_{W_1} \cap R^n_{W_2} = \emptyset$. Следователно

$$m(W_1 \cup W_2) = \frac{card(R^n_{W_1 \cup W_2})}{(n-1)!} = \frac{card(R^n_{W_1}) + card(R^n_{W_2})}{(n-1)!} = m(W_1) + m(W_2).$$

Следователно $m$ е адитивна. Тъй като $W = \{w \in W : w\restriction 1 \in R^1_W\}$, $m(W) = card(R^1_W)/0! = 1$. $\dashv$

**Лема 2.7** $m(W_{i,j}) = \frac{1}{j}$ *за всички* $i, j$, $0 \leq i < j < \omega$.

**Доказателство:** Непосредствена проверка. $\dashv$

**Твърдение 2.8** *Множеството* $\Pi \subset \mathbf{L}_{\leq}(P_0)$ *е изпълнимо.*

**Доказателство:** Строим модел за $\Pi$. Нека $W$ и $B$ са както по-горе. Нека $\mu(w) = m$ за всяко $w \in W$. За всеки две $W', W'' \in B$ множеството $\{w \in W : \mu(w)(W') \leq \mu(w)(W'')\}$ е или $\emptyset$ или $W$. Следователно $B$ е затворена относно образуването на такива множества и $\langle W, B, \mu\rangle$ е структура за $QP$. Нека $v$ е оценка на променливите $P_0$, определена с равенството $v(p_{i,j}) = W_{i,j}$. С непосредствена проверка се установява, че $\langle W, B, \mu, v\rangle, w \models \Pi_j$ за всяко $w \in W$ и всяко $j < \omega$. $\dashv$

Сега преминаваме към доказването на пълнотата по Халден на $QP$. За тази цел строим произведения на модели, изпълняващи множества от формули от езици с чужди множества от съждителни променливи. За определянето на мерките, с които се интерпретира операторът $\leq$ върху тези произведения, ни е необходима лемата по-долу.

**Лема 2.9** *Нека $W$ е непразно множество и $B$ е изброима булева алгебра от подмножества на $W$. Нека $B'$ е подалгебра на $B$, а $m' : B' \to [0, 1]$ е мярка на $B'$. Тогава съществува мярка $m : B \to [0, 1]$ такава, че $m\restriction B' = m'$.*

**Доказателство:** Нека $B = \{A_i : i < \omega\}$. Разглеждаме степента $P = [0, 1]^B$. $P$ е компактно метрично пространство по отношение на стандартната метрика $d(x, y) = \sum_{i<\omega} 2^{-i}|x(A_i) - y(A_i)|$. Всяко $x \in P$ е функция от $B$ към $[0, 1]$, която е мярка, стига да удовлетворява условията $c_W(x) : x(W) = 1$ и $c_{W',W''}(x) : x(W') + x(W'') = x(W' \cup W'')$ за всички $W', W'' \in B$. За $x\restriction B' = m'$ е достатъчно да са изпълнени условията $d_{W'}(x) : x(W') = m'(W')$ за всички $W' \in B'$. Условията $C = \{c_W\} \cup \{c_{W',W''} : W', W'' \in B\} \cup \{d'_W : W' \in B'\}$ са не повече от изброимо много. Освен това всяко крайно подмножество на $C$ е изпълнимо, защото, както лесно се вижда, за всяка крайна подалгебра на $B''$ може да се определи мярка в $[0, 1]$, която да съвпада с $m'$ върху $B' \cap B''$. Множествата от вида $\{x \in P : c(x)\}$, където $c \in C$, са затворени, и тъй като $P$ е компактно, са компактни. Всяко крайно сечение на такива множества е непразно, защото крайните подмножества на $C$ са изпълними. Следователно непразно е и $\bigcap_{c\in C} \{x \in P : c(x)\}$. $m$ може да бъде произволен елемент на това сечение. $\dashv$

**Теорема 2.10** *Нека $\Gamma_i \subset \mathbf{L}_{\leq}(P_i)$, $i = 1, 2$ са изпълними и $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Тогава $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ е изпълнимо.*

**Доказателство:** Нека $\langle W_i, B_i, \mu_i, v_i\rangle, w_i \models \Gamma_i$. Строим модел за $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Нека $W = W_1 \times W_2$. Лесно се вижда, че най-малката булева алгебра от подмножества на $W$, която съдържа множествата от вида $W'_1 \times W_2$ и $W_1 \times W'_2$, $W'_i \in B_i$, $i = 1, 2$, се състои от крайните обединения на множества от вида $W'_1 \times W'_2$, $W'_i \in B_i$, $i = 1, 2$. Нека я означим с $B^0$. Лесно се вижда, че за всяко $\langle w_1, w_2\rangle$ съществува единствена мярка

$m_{\langle w_1,w_2\rangle}$ на $B_0$, за която $m_{\langle w_1,w_2\rangle}(W_1' \times W_2') = \mu_1(w_1)(W_1')\mu_2(w_2)(W_2')$ за всички $W_i' \in B_i$, $i = 1, 2$. Нека $\mu^0(\langle w_1, w_2\rangle) = m_{\langle w_1,w_2\rangle}$. Не може да се твърди, че $\{w \in W : \mu^0(w)(W') \leq \mu^0(W'')\} \in B^0$ винаги, когато $W', W'' \in B^0$. Затова построяваме $B$ и $\mu$ като обединения на редици $B^k$, $\mu^k$, $k < \omega$, първите членове на които са определени по-горе така: Нека $B^{k+1}$ е булевата алгебра, породена от разширението на $B^k$ с множествата от вида $\{w \in W : \mu^k(w)(W') \leq \mu^k(W'')\}$, където $W', W'' \in B^k$. Нека за всяко $w \in W$ $\mu^{k+1}(w)$ е разширение на $\mu^k(w)$ до $B^{k+1}$. Такова разширение съществува според лема 2.9. Сега очевидно $F = \langle W, B, \mu\rangle$, където $B = \bigcup\limits_{k<\omega} B^k$ и $\mu = \bigcup\limits_{k<\omega} \mu^k$, е структура за $QP$.

Нека $v : P_1 \cup P_2 \to B$ е определена така

$$v(p) = \begin{cases} v_1(p) \times W_2, & \text{ако } p \in P_1; \\ W_1 \times v_2(p), & \text{ако } p \in P_2. \end{cases}$$

Индукция по строежа на $\varphi \in \mathbf{L}_{\leq}(P_i)$ показва, че $\langle F, v\rangle, \langle w_1, w_2\rangle \models \varphi$ тогава и само тогава, когато $\langle W_i, B_i, \mu_i, v_i\rangle, w_i \models \varphi$, $i = 1, 2$. В частност, за взетите в началото на доказателството $w_1$ и $w_2$, $\langle F, v\rangle, \langle w_1, w_2\rangle \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. $\dashv$

**Следствие 2.11** *Нека $\Gamma \subset \mathbf{L}_{\leq}(P)$ е изпълнимо и $P \cap P_0 = \emptyset$. Тогава $\Gamma \cup \Pi$ е изпълнимо.*

## 2.2 Правилото *Ded*

Примерът, който показва неизбежността на безкрайните правила в система с търсената от нас форма на пълнота, се опира на невъзможността без такива правила да се докаже, че една вероятност, която е безкрайно близка до 0, е всъщност 0. Правилото, което въвеждаме тук, изразява, че вероятности, които са така близки, че между тях няма нито едно рационално число, съвпадат. С други думи, ако отдясно на две вероятности лежат едни и същи рационални числа, двете вероятности са равни. Това наблюдение стои в основата на построението на реалните числа по Дедекинд, откъдето идва означението на правилото. Интересуващото ни равенство може да бъде изразено с две неравенства, от които е достатъчно с правилото да се формулира само едното. За да изразим необходимите ни рационални стойности, използуваме, че аксиомите $\Pi_j$ налагат такива стойности на формулите $R_{i,j}$, $i < j < \omega$:

$$\frac{\forall j\ \theta \Rightarrow \Pi_j \wedge \bigwedge\limits_{i<j} (\psi \leq R_{i,j} \Rightarrow \varphi \leq R_{i,j})}{\theta \Rightarrow \varphi \leq \psi}\ \mathit{Ded}$$

Завършваме този параграф с лемата на Линденбаум за системата за извод за $QP$, която се получава с добавянето на *Ded* към известната ни система. За целта дефинираме за тази система някои известни понятия.

**Дефиниция 2.12** i. Формулите, които са частни случаи на схемите $A0$-$A4$, $B_m$, $m < \omega$, и формулите, които могат да бъдат изведени от тях с помощта на $MP$, *Ded* и $N$, наричаме *теореми* на $QP$.

Нека $\Gamma \subseteq \mathbf{L}_{\leq}(P)$.

ii. С $Cn(\Gamma)$ означаваме множеството от формулите от $\mathbf{L}_{\leq}(P)$, които са теореми на $QP$, формулите от $\Gamma$ и формулите, които могат да бъдат изведени от споменатите дотук с помощта на $MP$ и *Ded*.

iii. Нека $\varphi \in \mathbf{L}_{\leq}(P)$. Означаваме множеството $\{\psi \in \mathbf{L}_{\leq}(P) : \varphi \Rightarrow \psi \in \Gamma\}$ с $\Gamma + \varphi$.

iv. $\Gamma$ е *теория*, ако $\Gamma = Cn(\Gamma)$.

v. $\Gamma$ е *непротиворечиво*, ако $\bot \notin Cn(\Gamma)$.

vi. Едно непротиворечиво множество $\Gamma$ е *максимално*, ако $\Gamma$ не се съдържа строго в никое непротиворечиво подмножество на $\mathbf{L}_{\leq}(P)$.

Следващото твърдение е добре известно.

**Факт 2.13** *Ако* $\Gamma$ *е максимално непротиворечиво множество от формули, то* $\Gamma$ *е теория. Ако* $\Gamma$ *е максимална теория, то*

- $\neg\varphi \in \Gamma$ *тогава и само тогава, когато* $\varphi \notin \Gamma$*;*
- $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ *тогава и само тогава, когато* $\varphi, \psi \in \Gamma$*.*

**Лема 2.14** *Нека* $\Gamma \subseteq \mathbf{L}_{\leq}(P)$*,* $\varphi \in \mathbf{L}_{\leq}(P)$ *и* $\Gamma = Cn(\Gamma)$*. Тогава* $Cn(\Gamma \cup \{\varphi\}) = \Gamma + \varphi$*.*

**Доказателство:** $\Gamma + \varphi \subseteq Cn(\Gamma \cup \{\varphi\})$, защото $Cn(\Gamma \cup \{\varphi\})$ е затворено относно $MP$. Обратното включване доказваме с индукция по височината на извода на $\varphi \in Cn(\Gamma \cup \{\varphi\})$ от $\Gamma \cup \{\varphi\}$ по правилата $MP$ и $Ded$. $\varphi \in \Gamma + \varphi$, защото тавтологията $\varphi \Rightarrow \varphi$ е от $\Gamma$. Ако $\psi$ е от $\Gamma$, то $\psi \in \Gamma + \varphi$, защото тавтологията $\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$ е от $\Gamma$. Ако $\psi$ е получено по $MP$ от $\chi \Rightarrow \psi, \chi \in \Gamma + \varphi$, то $\varphi \Rightarrow \psi \in \Gamma$ следва от $\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi), \chi \Rightarrow \psi \in \Gamma$, а оттук $\psi \in \Gamma + \varphi$. Ако $\psi$ има вида $\theta \Rightarrow \chi_1 \leq \chi_2$ и е получено по $Ded$ от $\theta \Rightarrow \alpha_j \in \Gamma + \varphi$, $j < \omega$, където $\alpha_j \rightleftharpoons \Pi_j \wedge \bigwedge\limits_{i<j} (\chi_2 \leq R_{i,j} \Rightarrow \chi_1 \leq R_{i,j})$, то $\varphi \wedge \theta \Rightarrow \alpha_j \in \Gamma$ за $j < \omega$, откъдето $\varphi \wedge \theta \Rightarrow \chi_1 \leq \chi_2 \in \Gamma$ по $Ded$. Следователно $\theta \Rightarrow \chi_1 \leq \chi_2 \in \Gamma + \varphi$. $\dashv$

**Теорема 2.15** *Нека* $\Gamma_0 \subset \mathbf{L}_{\leq}(P)$ *е непротиворечиво. Тогава съществува максимално непротиворечиво* $\Gamma \subset \mathbf{L}_{\leq}(P)$ *такова, че* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$*.*

**Доказателство:** Тъй като $P$ е изброимо, $\mathbf{L}_{\leq}(P)$ също е изброимо. Нека $\mathbf{L}_{\leq}(P) = \{\varphi_i : i < \omega\}$. Можем да приемем, че $\Gamma_0 = Cn(\Gamma_0)$. Строим редица $\Gamma_i \subset \mathbf{L}_{\leq}(P)$, $i < \omega$, където $\Gamma_0$ е вече споменатото. Нека $\Gamma_i$ е вече построено. Разглеждаме случаите:

1. $\Gamma_i + \varphi_i$ е противоречиво. Тогава $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$.

2а. $\Gamma_i + \varphi_i$ е непротиворечиво и $\varphi_i$ има вида $\neg(\theta \Rightarrow \chi_1 \leq \chi_2)$. Тогава $\Gamma_i + \varphi_i + \neg(\theta \Rightarrow \alpha_j)$ също е непротиворечиво за някое $j$, където $\alpha_j$ е както в доказателството на лема 2.14. В противен случай би било изпълнено $\theta \Rightarrow \alpha_j \in \Gamma_i + \varphi_i$ за всички $j < \omega$, откъдето $\neg\varphi_i \in \Gamma_i$ по $MP$ и $Ded$. В този случай $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i + \varphi_i + \neg(\theta \Rightarrow \alpha_j)$, където $j$ е най-малкото с горното свойство.

2б. $\Gamma_i + \varphi_i$ е непротиворечиво, но $\varphi_i$ не е от горния вид. Тогава $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i + \varphi_i$.

Нека $\Gamma = \bigcup\limits_{i<\omega} \Gamma_i$. $\Gamma$ е затворено относно $MP$, защото $\Gamma_i = Cn(\Gamma_i)$ за всички $i$ по лема 2.14. Нека $\theta \Rightarrow \chi_1 \leq \chi_2 \notin \Gamma$. Тогава, ако $\theta \Rightarrow \chi_1 \leq \chi_2$ е $\varphi_i$, $\neg\varphi_i \in \Gamma_i$. Нека $\neg\varphi_i$ е $\varphi_{i'}$. Тогава $\Gamma_{i'+1} = \Gamma_{i'} + \neg\varphi_i + \neg(\theta \Rightarrow \alpha_j)$ за някое $j < \omega$. Следователно $\Gamma$ не съдържа всичките предпоставки за извеждането на $\theta \Rightarrow \chi_1 \leq \chi_2$ по $Ded$, т.е. $\Gamma$ е затворено и относно $Ded$, откъдето $\Gamma = Cn(\Gamma)$.

$\bot \notin \Gamma$, защото $\bot \notin \Gamma_i$ за всички $i < \omega$. За да докажем и че $\Gamma$ е максимална, допускаме, че $\Gamma' \supset \Gamma$ е непротиворечиво и $\varphi \in \Gamma' \setminus \Gamma$. Нека $\varphi$ е $\varphi_i$. Тогава $\Gamma_i + \varphi_i$ също е непротиворечива, защото $\Gamma_i \subset \Gamma'$, и следователно $\varphi \in \Gamma_{i+1}$. Това е противоречие. $\dashv$

Лемата на Линденбаум е добре известно твърдение. Тук привеждаме нейно доказателство само заради присъствието на $\omega$-правилото в нашата система за $QP$. Както се вижда, това доказателство не използува конкретните *аксиоми* на $QP$. Системите за извод на разширенията на $QP$, разгледани в следващите глави, се отличават само по специфичните аксиоми. Затова теорема 2.15 се отнася и за тях без изменения.

## 2.3 $\omega$-пълнота на $QP$

Въвеждането на $Ded$ прави съответната канонична структура структура за $QP$. Тук използуваме тази структура за да докажем $\omega$-пълнотата на системата за извод.

Нека $W$ се състои от всички максимални теории в езика $\mathbf{L}_{\leq}(P \cup P_0)$, които съдържат $\Pi$.

**Лема 2.16** *Нека* $\varphi \in \mathbf{L}_{\leq}(P)$ *и* $\varphi \in w$ *за всяко* $w \in W$*. Тогава* $\varphi$ *е теорема на* $QP$*.*

**Доказателство:** Допускаме противното. Тогава $\neg\varphi$ е изпълнима в следствие на пълнотата на предварително известната ни система за $QP$. Оттук, по теорема 2.10,

следва, че $\Pi \cup \{\varphi\}$ също е изпълнимо. От коректността на нашата система за извод следва, че $\Pi \cup \{\varphi\}$ е непротиворечиво. От теорема 2.15 следва, че то се съдържа в някое $w \in W$. Това $w$, следователно, не съдържа $\varphi$. $\dashv$

За всяко $\varphi \in \mathbf{L}_{\leq}(P \cup P_0)$ с $m_\varphi$ означаваме множеството $\{w \in W : \varphi \in W\}$. От равенствата $m_\varphi \cap m_\psi = m_{\varphi \wedge \psi}$ и $W \setminus m_\varphi = m_{\neg\varphi}$ следва, че $B = \{m_\varphi : \varphi \in \mathbf{L}_{\leq}(P \cup P_0)\}$ е булева алгебра от подмножества на $W$.

**Лема 2.17** *Ако* $m_\varphi = m_\psi$, *то* $\inf\left\{\frac{k}{j} : \varphi \leq R_{k,j} \in w\right\} = \inf\left\{\frac{k}{j} : \psi \leq R_{k,j} \in w\right\}$ *за всяко* $w \in W$.

**Доказателство:** От $m_\varphi = m_\psi$ следва, че $\varphi \Leftrightarrow \psi \in w$ за всяко $w \in W$. Тогава, по лема 2.16 и правилото $N$, $\Box(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ е теорема на $QP$. Теорема на $QP$ е и $\Box(R_{k,j} \Leftrightarrow R_{k,j})$. Оттук, по $A1$ и $MP$ получаваме, че $\varphi \leq R_{k,j} \Leftrightarrow \psi \leq R_{k,j} \in w$ за всяко $w \in W$, откъдето непосредствено следва лемата. $\dashv$

Горната лема показва, че равенството $\mu(w)(m_\varphi) = \inf\left\{\frac{k}{j} : \varphi \leq R_{k,j} \in w\right\}$ коректно определя изображение от тип $W \to (B \to [0,1])$.

**Лема 2.18** $\mu(w)$ *е мярка на* $B$ *и* $\mu(w)(W) = 1$ *за всяко* $w \in W$.

**Доказателство:** Равенството $\mu(w)(W) = 1$ е очевидно. Доказваме адитивността на $\mu(w)$. Нека $W_i \in B$, $W_i = m_{\varphi_i}$, $i = 1,2$ и $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Тогава $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in w$ за всяко $w \in W$, откъдето, по лема 2.16 $\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ е теорема на $QP$.

Нека $r_i = \mu(w)(W_i)$, $i = 1,2$. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват естествени $k_i, j_i$ такива, че $k_i \leq j_i$ и $\varphi_i \leq R_{k_i,j_i} \in w$ и $r_i \leq \frac{k_i}{j_i} < r_i + \varepsilon$, $i = 1,2$. От лема 2.2 следва, че формулите

$$\Pi_{j_i} \wedge \Pi_{nj_i} \Rightarrow (\varphi_i \leq R_{k_i,j_i} \Rightarrow \varphi_i \leq R_{nk_i,nj_i}),\ i = 1,2,$$

са общовалидни за всички $n > 0$, и, следователно, са теореми на $QP$. От тях за $i = 1$ и $n = j_2$ и за $i = 2$ и $n = j_1$ съответно получаваме $\varphi_1 \leq R_{k_1j_2,j_1j_2}, \varphi_2 \leq R_{k_2j_1,j_1j_2} \in w$. Оттук, поради общовалидността на формулата $\Pi_{j_1j_2} \Rightarrow (\varphi_2 \leq R_{k_2j_1,j_1j_2} \Rightarrow \varphi_2 \leq R_{k_1j_2,k_1j_2+k_2j_1,j_1j_2})$ (отново лема 2.2) получаваме, че $\varphi_2 \leq R_{k_1j_2,k_1j_2+k_2j_1,j_1j_2} \in w$.

Нека забележим, че формулата

$$\varphi_1 \leq R_{k_1j_2,j_1j_2} \wedge \varphi_2 \leq R_{k_1j_2,k_1j_2+k_2j_1,j_1j_2} \Rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2) \leq R_{k_1j_2+k_2j_1,j_1j_2}$$

също е общовалидна и, следователно, теорема на $QP$. Оттук следва, че $\varphi_1 \vee \varphi_2 \leq R_{k_1j_2+k_2j_1,j_1j_2} \in w$, което означава, че $\mu(w)(m_{\varphi_1 \vee \varphi_2}) \leq \frac{k_1j_2+k_2j_1}{j_1j_2} < r_1 + r_2 + 2\varepsilon$. Оттук, поради произволния избор на $\varepsilon$, $\mu(w)(W_1 \cup W_2) \leq \mu(w)(W_1) + \mu(w)(W_2)$. С аналогични разсъждения се получава и обратното неравенство, откъдето следва адитивността на $\mu(w)$. $\dashv$

**Лема 2.19** $\{w \in W : \mu(w)(m_\varphi) \leq \mu(w)(m_\psi)\} = m_{\varphi \leq \psi}$ *за* $\varphi, \psi \in \mathbf{L}_{\leq}(P \cup P_0)$.

**Доказателство:** $\Box(\psi, R_{k,j}, \varphi \mathsf{E} \varphi, \psi, R_{k,j}) \Rightarrow (\varphi \leq \psi \wedge \psi \leq R_{k,j} \Rightarrow \varphi \leq R_{k,j}) \in w$ за всяко $w \in W$, $k \leq j < \omega$, защото тази формула е частен случай на $B_3$. Оттук, тъй като $\psi, R_{k,j}, \varphi \mathsf{E} \varphi, \psi, R_{k,j}$ е булева тавтология и, следователно, $\Box(\psi, R_{k,j}, \varphi \mathsf{E} \varphi, \psi, R_{k,j})$ е теорема на $QP$ по $N$, а $\varphi \leq \psi \in w$ за всяко $w \in m_{\varphi \leq \psi}$, получаваме $\psi \leq R_{k,j} \Rightarrow \varphi \leq R_{k,j}$ за такива $w$. Следователно $\left\{\frac{k}{j} : \psi \leq R_k, j \in w\right\} \subseteq \left\{\frac{k}{j} : \varphi \leq R_{k,j} \in w\right\}$, откъдето $\inf\left\{\frac{k}{j} : \psi \leq R_k, j \in w\right\} \geq \inf\left\{\frac{k}{j} : \varphi \leq R_{k,j} \in w\right\}$, т.е. $\mu(w)(m_\varphi) \leq \mu(w)(m_\psi)$ за $w \in m_{\varphi \leq \psi}$.

Обратно, нека $\mu(w)(m_\varphi) \leq \mu(w)(m_\psi)$. Тогава за всеки две $k, j$, $k \leq j < \omega$, такива, че $\psi \leq R_{k,j} \in w$ съществуват $k', j'$, $k' \leq j', \omega$, такива, че $\varphi \leq R_{k',j'} \in w$ и $\frac{k'}{j'} \leq \frac{k}{j}$. За такива $k, j, k', j'$ според лема 2.2 са общовалидни формулите $\Pi_j \wedge \Pi_{j'} \Rightarrow (\varphi \leq R_{k',j'} \Rightarrow R_{k,j})$. Следователно $\varphi \leq R_{k,j} \in w$ винаги, когато $\psi \leq R_{k,j} \in w$, откъдето получаваме, че $\Pi_j \wedge \bigwedge\limits_{k \leq j} (\psi \leq R_{k,j} \Rightarrow \varphi \leq R_{k,j}) \in w$ за всички $j < \omega$. По *Ded* оттук следва, че $\varphi \leq \psi \in w$.
С това лемата е доказана. $\dashv$

Горната лема показва, че $B$ е затворена относно образуването на множества от вида $\{w \in W : \mu(w)(W') \leq \mu(w)(W'')\}$, където $W', W'' \in B$. Следователно $F = \langle B, W, \mu \rangle$ е структура за $QP$. Определяме оценка $v$ на променливите $p \in P \cup P_0$ в $B$ с равенството $v(p) = m_p$. Така получаваме модел $\langle F, v \rangle$ на $QP$.

**Лема 2.20 (за истинност)** *Нека $\varphi \in \mathbf{L}_{\leq}(P \cup P_0)$, $w \in W$. Тогава $\langle F, I \rangle, w \models \varphi$ точно когато $\varphi \in w$.*

**Доказателство:** Индукция по строежа на $\varphi$. За $\varphi \doteq p$, $p \in P \cup P_0$ твърдението следва от дефиницията на $v$. За $\varphi \doteq \neg\psi$ и $\varphi \doteq \psi_1 \wedge \psi_2$ твърдението следва съответно от максималността и дедуктивната затвореност на $w$. Доказателството за $\varphi \doteq \psi_1 \leq \psi_2$ повтаря това на лема 2.19. $\dashv$

Сега ще използуваме модела $\langle F, v \rangle$ за да докажем интересуващата ни теорема за $\omega$-пълнота на $QP$. Както е споменато в началото на тази глава, тя установява еквивалентност между изпълнимостта на множества от формули в езика $\mathbf{L}_{\leq}(P)$ и непротиворечивостта им в системата за извод, включваща $\Pi$ и правилото $Ded$, която е в езика $\mathbf{L}_{\leq}(P \cup P_0)$.

**Теорема 2.21 (за $\omega$-пълнота на $QP$)** *Едно множество $\Gamma \subset \mathbf{L}_{\leq}(P)$ е изпълнимо тогава и само тогава, когато $\Gamma \cup \Pi$ е непротиворечиво.*

**Доказателство:** Ако $\Gamma$ е изпълнимо, то $\Gamma \cup \Pi$ също е изпълнимо по следствие 2.11. Тъй като нашата система за извод е коректна, то $\Gamma \cup \Pi$ е непротиворечиво в нея. Обратно, ако $\Gamma \cup \Pi$ е непротиворечиво, то $\Gamma \cup \Pi \subset w$ за някое $w \in W$ и, следователно, $\langle F, v \rangle, w \models \varphi$ за всяко $\varphi \in \Gamma$. За да получим изпълнимостта на $\Gamma$ от модел за езика $\mathbf{L}_{\leq}(P)$, е достатъчно да вземем $F$ и ограничението на $v$ върху $P$. $\dashv$

***

Всичко казано дотук важи и в следния по-общ случай, който се оказва технически полезен в следващата глава. Нека, вместо единствен оператор $\leq$, въведем произволно множество от оператори $\leq_\sigma$, $\sigma \in \Sigma$. Структури за така получената $QP$ с много оператори $\leq$ са тройки от вида $\langle W, B, M \rangle$, където $\langle W, B, \mu \rangle$ е структура за $QP$ с един оператор $\leq$ за всяко $\mu \in M$. Моделите за така получения език $\mathbf{L}_{\leq}(P, \Sigma)$ за $QP$ с много оператори имат вида $\langle W, B, M, v \rangle$, където, освен че $v(p) \in B$ за всяко $p \in P$, $v(\sigma) \in M$ задава интерпретацията на $\leq_\sigma$ за всяко $\sigma \in \Sigma$.

# 3 Динамична съждителна логика с качествени вероятности

Както посочихме в увода към тази част, тук представяме разширение на $QP$, което позволява съответните структури да се разглеждат като описания на сложно устроени вероятностни експерименти или, по-формално, процеси. В това разширение на оператора $\leq$ се поставя индекс - специален израз, който, за разлика от описания по-горе случай на $QP$ с много оператори $\leq$, задава структурата на разглеждания процес. При това $w \models \varphi \leq_t \psi$ може да се разбира като твърдението, че след протичането на процес $t$ с начално състояние, описано чрез възможния свят $w$, вероятността да се достигне състояние, удовлетворяващо $\varphi$, е не по-голяма от тази да се достигне състояние, удовлетворяващо $\psi$. Изразът $t$ може да задава елементарни процеси или сложни процеси, получени чрез съчетаването на по-прости. Допустимите за построяването на сложни процеси действия са описани по-долу.

## 3.1 Език

Както се споменава по-горе, езикът на динамичната логика с качествени вероятности ($DQP$) се получава с индексирането на $\leq$ с термове $t$, които означават процеса, за чийто изход се отнасят сравняваните вероятности. Нека е дадено непразно множество $\Sigma$ от *променливи за процеси* $\sigma$, $\tau$, ..., което не съдържа съждителни връзки, нито препинателни знаци, споменати в параграф 1.1, нито някой от символите $Id$, $^*$, ; или $+$. С $\mathbf{T}(\Sigma)$ означаваме множеството от *термове*, което се задава със следната Бекус-Наурова форма:

$t ::= Id|\sigma|(t^*)|(t;t)|(t+t)$

Тук $\sigma$ е променлива от $\Sigma$. Константата $Id$ е терм за процеса, чиито входно и изходно състояния съвпадат. Връзките ;, $+$ и $^*$ наричаме съответно *последователна* и *паралелна композиция* и *итерация*. Нека, както в параграф 1.1, $P$ е изброимо множество от съждителни променливи. С $\mathbf{L}_{DQP}(P,\Sigma)$ означаваме множеството от формулите, зададени със следната Бекус-Наурова форма:

$\varphi ::= \bot|p|\neg\varphi|(\varphi \wedge \varphi)|(\varphi \leq_t \varphi)$

Тук $p$ означава променлива от $P$, а $t$ - терм от $\mathbf{T}(\Sigma)$. Тъй като най-често $\Sigma$ е фиксирано, съкращаваме $\mathbf{L}_{DQP}(P,\Sigma)$ и $\mathbf{T}(\Sigma)$ съответно до $\mathbf{L}_{DQP}(P)$ и $\mathbf{T}$. Както и във формулите, в термовете употребяваме скоби само за избягването на нееднозначност, приемайки, че приоритетът на връзките намалява в следния ред: $^*$, ;, $+$. Съкращенията $\equiv$, $<$, $\Box$ и $\Diamond$ употребяваме както и в $QP$ (Параграф 1.1), но със съответен индекс $t$, например $\Box_t\varphi \rightleftharpoons \top \leq_t \varphi$.

За всяко $t \in \mathbf{T}(\Sigma)$ $\leq_t$ може да се разглежда като отделен оператор в език за $QP$ с много оператори $\leq$. Затова езикът $\mathbf{L}_{DQP}(P,\Sigma)$ на $DQP$ може да се отъждестви с езика $\mathbf{L}_{\leq}(P,\mathbf{T}(\Sigma))$ на $QP$ с много оператори $\leq$. При това структурата на термовете $t \in \mathbf{T}(\Sigma)$ се пренебрегва.

## 3.2 Модели и истинност

**Дефиниция 3.1** *Структура за $DQP$* е тройка от вида $\langle W, B, M\rangle$, където:

- $\langle W, B, \mu\rangle$ е структура за $QP$ (Дефиниция 1.1) за всяко $\mu \in M$;
- $M$ съдържа изображение $\mu^{Id}$, определено с равенството:

$$\mu^{Id}(w)(W') = \begin{cases} 1 & \text{ако } w \in W'; \\ 0 & \text{ако } w \in W \setminus W'. \end{cases}$$

- $M$ е затворено относно операциите ;, +, определени с равенствата:

$$(\mu;\nu)(w_0)(W') = \int\limits_{w\in W} \nu(w)(W')d\mu(w_0),$$

$$(\mu+\nu)(w)(W') = \frac{1}{2}(\mu(w)(W') + \nu(w)(W')).$$

- За всяко $\mu \in M$, $M$ съдържа единственото решение на уравнението

$$x = \mu^{Id} + \mu; x, \tag{1}$$

  което означаваме с $\mu^*$.

За коректността на горната дефиниция трябва да определим интеграла, чрез който е зададена операцията ; и да докажем единствеността на решението на уравнението (1). За интеграла приемаме следната дефиниция:

**Дефиниция 3.2** Нека $F = \langle W, B, \mu\rangle$ е структура за $QP$, $w_0 \in W$ и $f : W \to [0,1]$. Нека $A \subset B$ е крайно *разбиване* на $W$, т.е. състои се от две по две непресичащи се подмножества на $W$ и $\cup A = W$. С $\underline{I}^f_A$ и $\overline{I}^f_A$ означаваме съответно сборовете:

$$\sum_{W'\in A} \inf_{w\in W'} f(w)\mu(w_0)(W') \text{ и } \sum_{W'\in A} \inf_{w\in W'} f(w)\mu(w_0)(W').$$

Нека $\underline{I}^f = \sup\limits_A \underline{I}^f_A$ и $\overline{I}^f = \inf\limits_A \overline{I}^f_A$, където $A$ пробягва крайните разбивания на $W$ на елементи на $B$. Считаме $\int f d\mu(w_0)$ за определен, ако $\underline{I}^f = \overline{I}^f$, и полагаме $\int f d\mu(w_0) = \underline{I}^f$.

Лесно е да се забележи, че операцията ; от дефиниция 3.1 е асоциативна. С непосредствена проверка се установява, че редът $\sum\limits_{k<\omega} \frac{1}{2^{k+1}}(\underbrace{\mu;\ldots;\mu}_{k \text{ пъти}})$ е решение на (1). Единствеността му се доказва по метода на свиващите изображения така:

Нека $\nu^1$ и $\nu^2$ са решения на (1) и $W' \in B$. Нека $D = \sup\limits_{w\in W} |\nu^2(w)(W') - \nu^1(w)(W')|$. Ако $D > 0$, съществува $w_0 \in W$ такова, че $|\nu^2(w_0)(W') - \nu^1(w_0)(W')| > \frac{1}{2}D$. Тогава

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}D &< |\nu^2(w_0)(W') - \nu^1(w_0)(W')| = \\ &= \left|\frac{1}{2}\int\limits_{w\in W} \nu^2(w)(W')d\mu(w_0) - \frac{1}{2}\int\limits_{w\in W} \nu^1(w)(W')d\mu(w_0)\right| \leq \\ &= \frac{1}{2}\left|\int\limits_{w\in W} \nu^2(w)(W') - \nu^1(w)(W')d\mu(w_0)\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\int\limits_{w\in W} |\nu^2(w)(W') - \nu^1(w)(W')|d\mu(w_0) \leq \frac{1}{2}D, \end{aligned}$$

което е противоречие.

**Дефиниция 3.3** Модел на езика $\mathbf{L}_{DQP}(P,\Sigma)$ на $DQP$ наричаме наредена двойка от вида $\langle F, v\rangle$, където $F = \langle W, B, M\rangle$ е структура за $DQP$, а $v$ е *оценка на променливите*, която на всяко $p \in P$ съпоставя елемент на $B$ и на всяко $\sigma \in \Sigma$ съпоставя елемент на $M$.

За даден модел $M = \langle W, B, M, v\rangle$ на $\mathbf{L}(P,\Sigma)$ дефинираме стандартното разширение $\tilde{v}$ на $v$ до $\mathbf{T}(\Sigma)$ с индукция по строежа на термовете от $\mathbf{T}(\Sigma)$ с равенствата $\tilde{v}(Id) = \mu^{Id}$, $\tilde{v}(t_1; t_2) = \tilde{v}(t_1); \tilde{v}(t_2)$, $\tilde{v}(t_1 + t_2) = \tilde{v}(t_1) + \tilde{v}(t_2)$ и $\tilde{v}(t^*) = \tilde{v}(t)^*$. Релацията $\models$ се определя за $DQP$ както за $QP$ (Дефиниция 1.3). Също по подобен начин се определя и стандартното разширение на $v$ до $\mathbf{L}_{DQP}(P,\Sigma)$. Различна в определението на $\models$ е само клаузата за формули от вида $\varphi \leq_t \psi$, заради индекса $t$ на $\leq$:
$M, w \models \varphi \leq_t \psi$, ако $\tilde{v}(t)(w)(\tilde{v}(\varphi)) \leq \tilde{v}(t)(w)(\tilde{v}(\psi))$.

За дадена структура $F = \langle W, B, M\rangle$ съществува просто съответствие между моделите $\langle F, v\rangle$ за даден език $\mathbf{L}_{DQP}(P,\Sigma)$ на $DQP$ и моделите $\langle F, v'\rangle$ за съответния език $\mathbf{L}_{\leq}(P, \mathbf{T}(\Sigma))$ за $QP$ с много оператори $\leq$. То се изразява с равенствата $v'(p) = v(p)$ за $p \in P$ и $v'(t) = \tilde{v}(t)$ за $t \in \mathbf{T}(\Sigma)$.

## 3.3 Система за извод за $DQP$

Системата за извод, която представяме за $DQP$, се състои от аксиомите и правилата за $QP$, включително $Ded$, и аксиомни схеми за константата $Id$ и връзките ;, + и $^*$. Отново спомагателна роля играят променливите $P_0$ и съответен вариант на аксиомите $\Pi$ за тях. При това тяхната роля още повече се разграничава от тази на останалите (обикновени) съждителни променливи в езика: Валидни са само онези частни случаи на новите аксиомни схеми, в които формулата $\varphi$ не съдържа променливи от $P_0$. Отново системата за извод е съставена с оглед установяване на еквивалентност между непротиворечивост и изпълнимост за множества от формули без участия на променливи от $P_0$.

Нека фиксираме език $\mathbf{L}_{DQP}(P \cup P_0) = \mathbf{L}_{DQP}(P \cup P_0, \Sigma)$ на $DQP$, където $P \cap P_0 = \emptyset$, $P$ е изброимо, а $P_0$ е както в параграф 2.1. Нека с $\Pi$ означим множеството $\{\Pi^t_j : t \in \mathbf{T}(\Sigma), j < \omega\}$, където $\Pi^t_j$ е като $\Pi_j$, но с индекс $t$ на всички участия на оператора $\leq$:

$$\bigwedge_{i<j} p_{i,j} \equiv_t p_{0,j} \wedge \Box_t \left( \bigvee_{i<j} p_{i,j} \right) \wedge \bigwedge_{i_1<i_2<j} (p_{i_1,j} \wedge p_{i_2,j}) \leq_t \bot$$

Новите аксиомни схеми привличат голям обем "аритметика" с формули от вида $R_{k,j} \rightleftharpoons \bigvee\limits_{i<k} p_{i,j}$. С цел да опростим записа ѝ, въвеждаме съкращението $\frac{k}{j} \rightleftharpoons R_{k,j}$. Ето аксиомните схеми за $Id$, ;, + и $^*$:

$(I)$ $\quad \varphi \Leftrightarrow \Box_{Id}\varphi$

$(U_{k_1,k_2,j})$ $\quad \Pi_j^{t_1} \wedge \Pi_j^{t_2} \wedge \Pi_{2j}^{t_1+t_2} \wedge \varphi \leq_{t_1} \frac{k_1}{j} \wedge \varphi \leq_{t_2} \frac{k_2}{j} \Rightarrow \varphi \leq_{t_1+t_2} \frac{k_1+k_2}{2j}$

$(M_{p,j,l})$ $\quad \Pi_j^{t_1} \wedge \Box_{t_1}\Pi_l^{t_2} \wedge \Pi_{jl}^{t_1;t_2} \wedge \bigwedge\limits_{q_1<q_2<p} (\psi_{q_1} \wedge \psi_{q_2}) \leq_{t_1} \bot \wedge \Box_{t_1}\left(\bigvee\limits_{q<p} \psi_q\right) \wedge$

$$\wedge \bigwedge_{q<p} \psi_q \leq_{t_1} \frac{i_q}{j} \wedge \bigwedge_{q<p} \Box_{t_1}\left(\psi_q \Rightarrow \varphi \leq_{t_2} \frac{k_q}{l}\right) \Rightarrow \varphi \leq_{t_1;t_2} \frac{\sum\limits_{q<p} i_q k_q}{jl}$$

$$\Pi_j^{t_1} \wedge \Box_{t_1}\Pi_l^{t_2} \wedge \Pi_{jl}^{t_1;t_2} \wedge \bigwedge_{q_1<q_2<p} (\psi_{q_1} \wedge \psi_{q_2}) \leq_{t_1} \bot \wedge \Box_{t_1}\left(\bigvee_{q<p} \psi_q\right) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{q<p} \frac{i_q}{j} \leq_{t_1} \psi_q \wedge \bigwedge_{q<p} \Box_{t_1}\left(\psi_q \Rightarrow \frac{k_q}{l} \leq_{t_2} \varphi\right) \leq_{t_2} \varphi \Rightarrow \frac{\sum\limits_{q<p} i_q k_q}{jl} \leq_{t_1;t_2} \varphi$$

$(F_{k,j})$ $\quad \Pi_j^{t^*} \wedge \Pi_j^{Id+t;t^*} \Rightarrow \left(\varphi \leq_{t^*} \frac{k}{j} \Leftrightarrow \varphi \leq_{Id+t;t^*} \frac{k}{j}\right)$

Допустими са всички техни частни случаи, където $\psi$, $\chi$, $\chi_1$, $\chi_2$, $\psi_q$, $q < \omega$, са от $\mathbf{L}_{DQP}(P \cup P_0)$, а $\varphi$ е от езика $\mathbf{L}'_{DQP}(P, P_0, \Sigma)$, определен с Бекус-Науровата форма:

$\varphi ::= \bot | p | \neg\varphi | (\varphi \wedge \varphi) | (\varphi \leq_t \varphi) | (\varphi \leq_t R_{k,j}) | (R_{k,j} \leq_t \varphi)$

в която $p$ означава променлива от $P$.

Схемата $I$ е известна от съждителната динамична логика, където с нея се характеризира релацията на достижимост *идентитет*. Това не е изненадващо, защото $\mu^{Id}$ не е съществено вероятностно. Схемите $U_{k_1,k_2,j}$, $k_1, k_2 < j < \omega$, изразяват оценката за средното от дефиницията на $+$, която може да бъде получена при съответни оценки за събираемите. Схемите $M_{p,j,l}$, $0 < p, j, l < \omega$, изразяват оценяването на интеграла от дефиницията на ; с интегрални суми отгоре. Изненадваща е простотата на схемите за итерацията $F_{k,j}$, $k \leq j < \omega$. Тя се дължи на единствеността на решението на уравнението $x = Id + \mu; x$, което наричаме итерация на $\mu$. Съответното уравнение в съждителната динамична логика в общия случай има много решения.

По-долу доказваме коректността на схемите $I$, $U_{k_1,k_2,j}$, $M_{p,j,l}$ и $F_{k,j}$ в следната ситуация: Нека $\langle W, B, M, v\rangle$ е модел на езика $\mathbf{L}_{\leq}(P \cup P_0, \mathbf{T}(\Sigma))$ на $QP$ с много оператори $\leq$, в който са валидни формулите $\Pi$. Нека $B' = \{\tilde{v}(\varphi) : \varphi \in \mathbf{L}'_{DQP}(P, P_0, \Sigma)$. Нека $M' = \{\mu' : \mu'(w) = \mu(w)\restriction B'$ за всяко $w \in W$ и някое $\mu \in M\}$. Нека $\langle W, B', M', v'\rangle$ е модел на езика $\mathbf{L}_{DQP}(P, \Sigma)$ на $DQP$. Нека $v'(p) = v(p)$ за $p \in P$ и $\tilde{v'}(t)$ е ограничението от $M'$, съответно на $v(t)$ за $t \in \mathbf{T}(\Sigma)$. Тогава $I$, $U$, $M_{p,j,l}$ и $F$ са валидни в $\langle W, B, M, v\rangle$.
**Доказателство:** Навсякъде в доказателството съкращаваме $\langle W, B, M, v\rangle, w \models \ldots$ до $w \models \ldots$.

$I$: Нека $w \in W$. Тъй като $W' = \tilde{v}(\varphi) \in B'$, имаме или $w \models \varphi$ и $v(t)(W') = 1$, или $w \not\models \varphi$ и $v(t)(W') = 0$. Тъй като винаги $v(t)(\tilde{v}(\top)) = 1$, $I$ е изпълнена и в двата случая.

$U_{k_1,k_2,j}$: Нека $w \in W$. Тъй като $w \models \Pi_j^{t_1}, \Pi_j^{t_2}, \Pi_{2j}^{t_1+t_2}$, $v(t_i)(w)\left(\tilde{v}\left(\frac{k_i}{j}\right)\right) = \frac{k_i}{j}$, $i = 1, 2$, и $v(t_1 + t_2)(w)\left(\tilde{v}\left(\frac{k_1+k_2}{2j}\right)\right) = \frac{k_1+k_2}{2j}$. Тъй като $\tilde{v}(\varphi) \in B'$, $v(t_1 + t_2)(w)(\tilde{v}(\varphi)) = \frac{1}{2}(v(t_1)(w)(\tilde{v}(\varphi)) + v(t_2)(w)(\tilde{v}(\varphi)))$. Ако $w \models \varphi \leq_{t_1} \frac{k_i}{j}$, то $v(t_i)(w)(\tilde{v}(\varphi)) \leq \frac{k_i}{j}$, $i = 1, 2$, откъдето $v(t_1 + t_2)(w)(\tilde{v}(\varphi)) \leq \frac{k_1+k_2}{2j}$ и, следователно, $w \models \varphi \leq_{t_1+t_2} \frac{k_1+k_2}{2j}$.

$M_{p,j,l}$: Нека $w_0 \in W$. Тъй като $w \models \Pi_l^{t_2}$ за всички $w \in W$, $w_0 \models \Box_{t_1}\Pi_l^{t_2}$. Освен това $w_0 \models \Pi_j^{t_1}, \Pi_{jl}^{t_1;t_2}$. Следователно $v(t_1)(w_0)\left(\tilde{v}\left(\frac{i_q}{j}\right)\right) = \frac{i_q}{j}$ и $v(t_2)(w)\left(\tilde{v}\left(\frac{k_q}{l}\right)\right) = \frac{k_q}{l}$ за

всички $q < p$ и всички $w \in W$. Освен това $v(t_1;t_2)(w_0)\left(\tilde{v}\left(\frac{\sum i_q k_q}{jl}\right)\right) = \frac{\sum i_q k_q}{jl}$. Нека $f = \lambda w.v(t_2)(w)(\tilde{v}(\varphi))$. Ако $w_0 \models \Box_{t_1}\left(\psi_q \Rightarrow \varphi \leq_{t_2} \frac{k_q}{l}\right)$, то $f(w) \leq \frac{k_q}{l}$ за $w \in \tilde{v}(\psi_q) \setminus Z_q$, където $Z_q$ е такова, че $v(t_1)(Z_q) = 0$, $q < p$. Нека $w_0 \models (\psi_{q_1} \wedge \psi_{q_2}) \leq_{t_1} \bot$, $q_1 < q_2 < p$, и $w_0 \models \Box_{t_1}\left(\bigvee_{q<p} \psi_q\right)$. Нека $Z' = \bigcup_{q_1<q_2<p} \tilde{v}(\psi_{q_1}) \cap \tilde{v}(\psi_{q_2})$, а $Z'' = W \setminus \left(\bigcup_{q<p} \tilde{v}(\psi_q)\right)$. Тогава $v(t_1)(Z') = v(t_1)(Z'') = 0$ и $A = \{\tilde{v}(\psi_q)\setminus(Z' \cup Z_q) : q < p\} \cup \{Z_q \setminus Z' : q < p\} \cup \{Z', Z''\}$ е крайно разбиване на $W$ с елементи от $B$. Тогава, тъй като $\tilde{v}(\varphi) \in B'$, $v(t_1;t_2)(w_0)(\tilde{v}(\varphi)) \leq \underline{I}^f_A \leq \frac{\sum i_q k_q}{jl}$. Оттук следва, че $w_0 \models \varphi \leq_{t_1;t_2} \frac{\sum i_q k_q}{jl}$. Доказателството за втората схема е аналогично.

$F_{k,j}$: Нека $w \in W$. Тъй като $\models \Pi^{t^*}_j, \Pi^{Id+t;t^*}_j$, $v(t^*)(w)\left(\tilde{v}\left(\frac{k}{j}\right)\right) = v(Id+t;t^*)(w)\left(\tilde{v}\left(\frac{k}{j}\right)\right) = \frac{k}{j}$. Тъй като $\tilde{v}(\varphi) \in B'$, $v(t^*)(w)(\tilde{v}(\varphi)) = v(Id+t;t^*)(w)(\tilde{v}(\varphi))$. Оттук следва, че $w \models \varphi \leq_{t^*} \frac{k}{j} \Leftrightarrow \varphi \leq_{Id+t;t^*} \frac{k}{j}$. $\dashv$

Нека обясним избора на горната ситуация, в която имаме коректност на нововъведените схеми. Лема 2.1 показва, че, например, $\mu^{Id}(w)(v(p_{k,j})) = \frac{1}{j}$, когато $w \models \Pi^{Id}_j$, а в модели на $DQP$ $\mu^{Id}(w)$ взема само стойностите 0 и 1. Следователно $\Pi$ не може да бъде изпълнено от модел на $DQP$. От друга страна, ние се интересуваме от връзката между непротиворечивост и изпълнимост за подмножества $\Gamma$ на $\mathbf{L}_{DQP}(P)$, където променливите, от които са построени формулите $\Pi$, не се срещат. Ролята на тези променливи и формули в установяването на тази връзка е чисто синтактична: те позволяват записването на схемите $U_{k_1,k_2,j}$, $M_{p,j,l}$ и $F_{k,j}$ и правилото $Ded$, които са необходими за изводите с формули от $\Gamma \subset \mathbf{L}_{DQP}(P)$ за евентуалното получаване на противоречивост на $\Gamma$. С тези схеми се изразяват свойства на вероятности в модели на $DQP$, изразени с помощта на $\varphi$, за която във всички схеми е наложено ограничението $\varphi \in \mathbf{L}'_{DQP}(P, P_0, \Sigma)$. В избраната ситуация от това ограничение следва, че $\tilde{v}(\varphi) \in B'$ и $v(t)(w)(\tilde{v}(\varphi)) = \tilde{v'}(t)(w)(\tilde{v'}(\varphi))$, където $\langle W, B', M', v'\rangle$ е модел на $DQP$, съдържащ се в модела $\langle W, B, M, v\rangle$ на $QP$ с много оператори $\leq$. Следващото твърдение показва, че за всеки модел на $DQP$ може да се намери модел на $QP$ с много оператори $\leq$ така, че да се възпроизведе горната ситуация с модел на $DQP$ в качеството на $\langle W, B', M', v'\rangle$, който в съответни възможни светове изпълнява същите формули като изходния. Това означава, че в тази ситуация няма съществени ограничения върху модела на $DQP$.

**Твърдение 3.4** *Нека $\langle W, B, M, v\rangle$ е модел за езика $\mathbf{L}_{DQP}(P, \Sigma)$ на $DQP$. Тогава съществува модел $\langle W', B', M', v'\rangle$ за езика $\mathbf{L}_{\leq}(P \cup P_0, \mathbf{T}(\Sigma))$ на $QP$ с много оператори $\leq$, в който са валидни формулите $\Pi$, и сюрективно изображение $\pi : W' \to W$, такива, че $\pi^{-1}(\tilde{v}(\varphi)) = \tilde{v'}(\varphi)$ за $\varphi \in \mathbf{L}_{DQP}(P, \Sigma)$.*

**Доказателство:** Това твърдение се доказва като твърдение 2.8 и теорема 2.10. Разглеждаме $\langle W, B, M, v\rangle$ като модел $\langle W_1, B_1, M_1, v_1\rangle$ за езика $\mathbf{L}_{\leq}(P, \mathbf{T}(\Sigma))$ на $QP$ с много оператори $\leq$, полагайки $W_1 = W$, $B_1 = B$, $M_1 = M$ и $v_1(t) = \tilde{v}(t)$ за $t \in \mathbf{T}(\Sigma)$ и $v_1(p) = v(p)$ за $p \in P$. Очевидно $w \models \varphi$ е еднакво вярно в двата модела за всяко $w \in W$ и $\varphi \in \mathbf{L}_{\leq}(P, \mathbf{T}(\Sigma)) = \mathbf{L}_{DQP}(P, \Sigma)$. Нека $\langle W_2, B_2, M_2, v_2\rangle$ е модел на $\mathbf{L}_{\leq}(P_0, \mathbf{T}(\Sigma))$, в който са валидни формулите $\{\Pi^t_j : j < \omega, t \in \mathbf{T}(\Sigma)\}$. Такъв модел може да се получи от построения за доказването на твърдение 2.8, като всички оператори $\leq_t$ се интерпретират еднакво, по начина, избран в онзи модел. Сега построяваме $\langle W', B', M', v'\rangle$ по $\langle W_i, B_i, M_i, v_i\rangle$, $i = 1,2$, както в доказателството на теорема 2.10. Това, че се работи с повече от един оператор $\leq$, не усложнява построението. Както и в доказателството на теорема 2.10, $W' = W_1 \times W_2$ и, ако $\varphi \in \mathbf{L}_{\leq}(P, \mathbf{T}(\Sigma))$, $\langle W, B, M, v\rangle, w_1 \models \varphi$ е равносилно на $\langle W', B', M', v'\rangle, \langle w_1, w_2\rangle \models \varphi$ за всички $w_2 \in W_2$. Следователно проекцията $\pi_1$ на $W_1 \times W_2$ върху $W_1 = W$ изпълнява условията на твърдението. $\dashv$

## 3.4 $\omega$-пълнота на $DQP$

В този параграф доказваме, че едно множество от формули $\Gamma \subset \mathbf{L}_{DQP}(P)$ е изпълнимо в модел на този език точно когато $\Gamma \cup \Pi$ е непротиворечиво в системата, представена в предходния параграф. Доказателството следва пътя на даденото за $\omega$-пълнотата на $QP$ и показва начина, по който свойствата на $Id$, $+$, $;$ и $^*$ се изразяват от съответните схеми. Понятията от дефиниция 2.12 се пренасят за случая на $DQP$ без изменения, като освен схемите $A0$-$A4$ и $B_m$, се добавят и $I$, $U_{k_1,k_2,j}$, $M_{p,j,l}$ и $F_{k,j}$. Без изменения остават в сила и твърденията 2.13, 2.14 и 2.15.

Нека фиксираме изброимо множество от съждителни променливи $P$, $P \cap P_0 = \emptyset$, и непразно множество от променливи за процеси $\Sigma$. Повтаряйки построенията от параграф 2.3, получаваме модел $\langle W, B, M, v\rangle$ за езика $\mathbf{L}_{\leq}(P \cup P_0, \mathbf{T}(\Sigma))$ на $QP$ с много оператори $\leq$, чиито възможни светове са всичките максимални теории $w$ в този език, съдържащи формулите $\Pi = \{\Pi_j^t : j < \omega, t \in \mathbf{T}(\Sigma)\}$, и където $w \models \varphi$ точно когато $\varphi \in w$ за всяка $\varphi$ от езика. Нека $B' = \{\tilde{v}(\varphi) : \varphi \in \mathbf{L}'_{DQP}(P, P_0, \Sigma)\}$. Нека за всяко $\mu \in M$ с $\mu_{B'}$ означим изображението от тип $W \to (B' \to [0,1])$, определено с равенството $\mu_{B'}(w) = \mu(w) \restriction B'$.

**Лема 3.5** *За всички $t, t_1, t_2 \in \mathbf{T}(\Sigma)$ са изпълнени равенствата:*

i. $(v(Id))_{B'} = \mu^{Id}$,

ii. $(v(t_1 + t_2))_{B'} = (v(t_1))_{B'} + (v(t_2))_{B'}$,

iii. $(v(t_1; t_2))_{B'} = (v(t_1))_{B'}; (v(t_2))_{B'}$,

iv. $(v(t^*))_{B'} = ((v(t))_{B'})^*$.

**Доказателство:** i. Нека $w \in W$ и $W' = \tilde{v}(\varphi)$ за някое $\varphi \in \mathbf{L}'_{DQP}(P, P_0)$. Тогава $w \models \varphi$ точно когато $w \models \Box_{Id}\varphi$, защото $w$ съдържа съответния частен случай на $I$. Оттук $v(Id)(w)(W') = 1$ в случай, че $w \models \varphi$. Иначе, тъй като $v(Id)(w)$ е вероятностна мярка на $B$, $v(Id)(w)(W') = 0$.

ii. Нека отново $w \in W$ и $W' = \tilde{v}(\varphi)$ за някое $\varphi \in \mathbf{L}'_{DQP}(P, P_0)$. Нека $r_i = v(t_i)(w)(W')$, $i = 1, 2$. Нека $k_i, j$ са такива, че $r_i \leq \frac{k_i}{j}$, $k_i \leq j < \omega$, $i = 1, 2$. Тогава $w \models \varphi \leq \frac{k_i}{j}$, $i = 1, 2$ и, тъй като $w$ съдържа $U_{k_1,k_2,j}$, $\Pi_j^{t_1}$, $\Pi_j^{t_2}$ и $\Pi_{2j}^{t_1+t_2}$, $w \models \varphi \leq_{t_1} \frac{k_1}{j} \wedge \varphi \leq_{t_2} \frac{k_2}{j} \Rightarrow \varphi \leq_{t_1+t_2} \frac{k_1+k_2}{2j}$. Следователно, $v(t_1 + t_2)(w)(W') \leq \frac{k_1+k_2}{2j}$. Тъй като това е вярно за всички $k_1$, $k_2$ и $j$ с посочените свойства, $v(t_1 + t_2)(w)(W') \leq \frac{r_1+r_2}{2}$. Обратното неравенство се получава, като по подобен начин се оцени $v(t_1 + t_2)(w)(W \setminus W') = 1 - v(t_1 + t_2)(w)(W')$ с помощта на частните случаи на $U_{k_1,k_2,j}$ за $\neg\varphi$ вместо $\varphi$.

iii. Нека отново $w \in W$ и $W' = \tilde{v}(\varphi)$ за някое $\varphi \in \mathbf{L}'_{DQP}(P, P_0)$. Нека $f = \lambda w.v(t_2)(w)(W')$. Нека $0 < p < \omega$ и $\psi_0 \rightleftharpoons \varphi \leq_{t_2} \bot$, $\psi_i \rightleftharpoons \frac{q-1}{p} <_{t_2} \varphi \wedge \varphi \leq_{t_2} \frac{q}{p}$, за $q = 1, \ldots, p$. Нека $W_q = \tilde{v}(\psi_q)$, $q = 0, \ldots, p$. Тъй като $w \models \Pi_p^{t_2}$ за всяко $w \in W$, $f(w) = 0$ за $w \in W_0$ и $f(w) \in \left(\frac{q-1}{p}, \frac{q}{p}\right]$ за $w \in W_q$,$q = 1, \ldots, p$. Следователно $w_0 \models (\psi_{q_1} \wedge \psi_{q_2}) \leq_{t_1} \bot$ за $q_1 < q_2 \leq p$. Също така $w_0 \models \Box_{t_1}\left(\bigvee_{q \leq p} \psi_q\right)$. Освен това $w_0 \models \Pi_j^{t_1}, \Box_{t_1}\Pi_p^{t_2}, \Pi_{jp}^{t_1;t_2}$. Нека $k_q$, $q = 0, \ldots, p$ са най-малките естествени числа, за които $w_0 \models \psi_q \leq_{t_1} \frac{k_q}{j}$, $q = 0, \ldots, p$. Тогава, тъй като първата схема $M_{p+1,j,p}$ е в $w_0$, $w_0 \models \varphi \leq_{t_1;t_2} \frac{\sum_{q=1}^{p} ik_q}{jp}$. По аналогичен начин, използувайки, че при този избор на $k_q$ имаме $w_0 \models \frac{k_q - 1}{j} \leq_{t_1} \psi_q$, $q = 0, \ldots, p$, от съответния частен случай на втората схема $M_{p+1,j,p}$ получаваме $w_0 \models \frac{\sum_{q=2}^{p}(q-1)(k_q-1)}{jp} \leq_{t_1;t_2} \varphi$. Това означава, че

$v(t_1;t_2)(w_0)(W') \in \left[\frac{\sum_{q=1}^{p} qk_q}{jp}, \frac{\sum_{q=2}^{p}(q-1)(k_q-1)}{jp}\right]$, а този интервал е ограничен от оценките отдолу и отгоре съответно за малката и голямата суми за $\int f dv(t_1)(w_0)$, образувани за разбиването $\{W_q : q \leq p\} \subset B'$ на $W$. При неограниченото нарастване на $p$ и $j$ дължината на този интервал клони към 0. Следователно $\int f dv(t_1)(w_0)$ е определен и $(v(t_1;t_2))_{B'}(w_0)(W') = \int f dv(t_1)(w_0) = (v(t_1);(t_2))_{B'}(w_0)(W')$.

iv. За да докажем и това равенство, е достатъчно да забележим, че от $w \models \Pi_j^{t^*}, \Pi_j^{Id+t;t^*}$ за всички $w \in W$ и всевъзможните частни случаи на $F_{k,j}$, $k \leq j < \omega$, $\varphi \in \mathbf{L}_{\leq}(P)$, по начин, подобен на предходните случаи, следва, че $(v(t^*))_{B'}$ е решение на (1) за $\mu = (v(t))_{B'}$, каквото съществува единствено. $\dashv$

Нека $M' = \{\mu_{B'} : \mu \in M\}$. От лема 3.5 следва, че $M'$ съдържа $\mu^{Id}$ и е затворено относно ;, + и $^*$. $B'$ очевидно е булева алгебра, затворена относно образуването на множества от вида $\{w \in W : \mu(w)(W') \leq \mu(w)(W'')\}$ за $W', W'' \in B'$ и $\mu \in M'$. Следователно $\langle W, B', M' \rangle$ е структура за $DQP$. Нека $v'(p) = v(p)$ за $p \in P$ и $v'(\sigma) = (v(\sigma))_{B'}$, за $\sigma \in \Sigma$. Тогава $\langle W, B', M', v' \rangle$ е модел за $\mathbf{L}_{DQP}(P, \Sigma)$. Отново от лема 3.5 с индукция по построението за всеки терм $t \in \mathbf{T}(\Sigma)$ се получава, че $\tilde{v'}(t) = (v(t))_{B'}$. Също с индукция по построението за всяка формула $\varphi \in \mathbf{L}_{DQP}(P, \Sigma)$ се получава, че $\tilde{v'}(\varphi) = \tilde{v}(\varphi) = \{w \in W : \varphi \in w\}$. Използувайки тези свойства на $\langle W, B', M', v' \rangle$, лесно можем да получим следната теорема:

**Теорема 3.6 (за $\omega$-пълнота на $DQP$)** *Нека $\Gamma \subset \mathbf{L}_{DQP}(P, \Sigma)$. Тогава $\Gamma$ е изпълнимо в модел за езика $\mathbf{L}_{DQP}(P, \Sigma)$ на $DQP$ точно когато $\Gamma \cup \Pi$ е непротиворечиво в представената по-горе система за извод за $DQP$.*

**Доказателство:** Ако $\Gamma$ е изпълнимо, то по даден модел за $\Gamma$, използувайки твърдение 3.4, можем да създадем ситуацията, в която показахме коректността на схемите $I$, $U_{k_1,k_2,j}$, $M_{p,j,l}$ и $F_{k,j}$ за модел на $QP$ с много оператори $\leq$, който изпълнява $\Gamma$, $\Pi$ и всички частни случаи на тези схеми. Оттук следва непротиворечивостта на $\Gamma \cup \Pi$. Обратно, ако $\Gamma \cup \Pi$ е непротиворечиво, то $\Gamma \cup \Pi \subset w$ за някое $w \in W$, откъдето следва, че $\langle W, B', M', v' \rangle, w \models \Gamma$. $\dashv$

## Забележки

От теоремата за $\omega$-пълнота на $DQP$ лесно се получава:

**Следствие 3.7** *Ако $\varphi \in \mathbf{L}_{DQP}(P, \Sigma)$ и $\varphi \in Cn(\Pi)$, то $\varphi$ е общовалидна в класа от моделите на $\mathbf{L}_{DQP}(P, \Sigma)$.*

Това означава, че за извеждането на общовалидни формули в $DQP$ могат да бъдат използувани аксиомите от $\Pi$. Изведените формули са общовалидни само в случай, че не съдържат съждителни променливи от $P_0$, защото, по условие $P \cap P_0 = \emptyset$. Самите аксиоми от $\Pi$ не са общовалидни формули в $DQP$. В частност, никой модел на $DQP$ с крайно множество от възможни светове не изпълнява тези аксиоми. Същото се отнася и за специфичните за връзките ; и + в $DQP$ аксиоми. Така е в $\omega$-пълната система за $QP$. Тази черта на разглежданите системи за извод ги отличава от известните системи за извод.

Равенството, с което е определена последователната композиция ; на вероятностните разпределения в моделите на $DQP$, е известно като *равенство на Чапмън-Колмогоров*. То изразява разпределението, описващо поведението на процес, състоящ се от последователното протичане на два по-прости. За разлика от ;, при определянето на + има известен произвол: Начинът, по който се разпределя вероятността за протичане на $t_1 + t_2$ като $t_1$ или като $t_2$, не е единственият, който представлява интерес и може да се аксиоматизира в $DQP$, а само един от най-простите. При друг избор на + автоматично се получава и съответен вариант на итерацията $^*$.

# 4 Разширение на $QP$, в което $QP$ е крайноаксиоматизируема

В тази глава представяме разширение $EQP$ на $QP$, в което всички теореми на $QP$ са доказуеми с помощта на краен брой аксиомни схеми. $EQP$ е консервативно разширение на $QP$ и съдържа още два двуместни модални оператора освен $\leq$, които нямат чисто вероятностен смисъл. За получаването на консервативността на $EQP$ доказваме силната амалгамируемост на класа на вероятностните пространства, която представлява и самостоятелен интерес.

## 4.1 Език

Както е споменато по-горе, езикът на $EQP$ се получава с добавяне на два двуместни модални оператора към езика на $QP$. Означаваме тези оператори с $\mathbf{c}$ и $\mathbf{r}$. Нека $P$ е изброимо множество от съждителни променливи. С $\mathbf{L}_{EQP}(P)$ означаваме множеството от формулите, зададени със следната Бекус-Наурова форма:

$\varphi ::= \bot | p | \neg\varphi | (\varphi \wedge \varphi) | (\varphi \leq \varphi) | \mathbf{c}(\varphi, \varphi) | \mathbf{r}(\varphi, \varphi)$

Тук $p$ означава променлива от $P$. Когато $P$ е известно от контекста, съкращаваме $\mathbf{L}_{EQP}(P)$ до $\mathbf{L}$. Съкращенията и употребата на скоби са както в $QP$ (Параграф 1.1).

## 4.2 Модели и истинност

**Дефиниция 4.1** *Структура за $EQP$* е петорка от вида $\langle W, B, \mu, c, r\rangle$, където $\langle W, B, \mu\rangle$ е структура за $QP$, а $c$ и $r$ са изображения от $B \times B$ към $B$, които изпълняват условията:

($\mathbf{c}1$) $c(W', W'') \subseteq W''$
($\mathbf{c}2$) $\mu(w)(c(W', W'')) = \min(\mu(w)(W'), \mu(w)(W''))$
($\mathbf{r}1$) $r(W', W'') \subseteq W''$
($\mathbf{r}2$) $\mu(w)(r(W', W'')) = \mu(w)(W')\mu(w)(W'')$
($\mathbf{r}\wedge$) $r(W'_1 \wedge W'_2, W'') = r(W'_1, W'') \cap r(W'_2, W'')$
($\mathbf{r}\neg$) $r(W \setminus W', W'') = W'' \setminus r(W', W'')$

Нека в структурата $\langle W, B, \mu, c, r\rangle$ $W = \{\emptyset\}$, $B = \{\emptyset, W\}$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(W) = 1$, а $c(W', \emptyset) = r(W', \emptyset) = \emptyset$ и $c(W', W) = r(W', W) = W'$ за всички $W' \in B$. Това е най-простата възможна структура, която отговаря на горната дефиниция. Съществуването на тази структура и коректността на представената по-долу система за извод за $EQP$ показват, че $EQP$ не е противоречива.

Една структура за $EQP$ може да бъде крайна само в случай, че единствените стойности на $\mu$ са 0 и 1: От $\mathbf{r}2$ следва, че в структури, съдържащи свят $w$ и множество $W'$ от $B$, за което $0 < \mu(w)(W') < 1$, за всяко $k < \omega$ съществува множество $W''$ такова, че $\mu(w)(W'') = (\mu(w)(W'))^k$.

Неформално, изображенията $c$ и $r$ в структурите на $EQP$ осигуряват в тези структури съществуването на събития със следните свойства:

∘ От събитието $c(W', W'')$ следва събитието $W''$. Вероятността на $c(W', W'')$ е равна на по-малката от вероятностите на $W'$ и $W''$.

∘ При фиксирано $W''$ събитията $r(W', W'')$, $W' \in B$, образуват булева алгебра $B'$ с най-голям елемент $W''$. Изображението $W' \to r(W', W'')$ е епиморфизъм на $B$ в тази алгебра. Ако $\mu(w)(W'') \neq 0$, същото изображение е епиморфизъм на вероятностното пространство $\langle W, B, \lambda W'.\mu(w)(W')\rangle$ във вероятностното пространство $\langle W'', B', \lambda W'.\frac{\mu(w)(W')}{\mu(w)(W'')}\rangle$.

**Дефиниция 4.2** Модел на езика $\mathbf{L}_{EQP}(P)$ на $EQP$ наричаме наредена двойка от вида $\langle F, v\rangle$, където $F = \langle W, B, \mu, c, r\rangle$ е структура за $EQP$, а $v$ е *оценка на променливите*, която на всяко $p \in P$ съпоставя елемент на $B$.

Релацията $\models$ за $EQP$ се определя с клаузите от дефиницията на $\models$ за $QP$ (Дефиниция 1.3) и клаузите:
$M, w \models \mathbf{c}(\varphi, \psi)$, ако $w \in c(\{w' \in W : M, w \models \varphi\}, \{w' \in W : M, w \models \psi\})$.
$M, w \models \mathbf{r}(\varphi, \psi)$, ако $w \in r(\{w' \in W : M, w \models \varphi\}, \{w' \in W : M, w \models \psi\})$.
Както в $QP$ се определя и стандартното разширение $\tilde{v}$ на $v$ до $\mathbf{L}_{EQP}(P)$.

## 4.3 Система за извод за $EQP$

Системата за извод, която представяме за $EQP$, се състои от аксиомните схеми $A0$-$A4$, схемата $B_3$, правилата $MP$ и $N$, схемите

$(C1)$ $\quad \mathbf{c}(\varphi, \psi) \Rightarrow \psi$
$(C2_l)$ $\quad \psi \leq \varphi \Rightarrow \mathbf{c}(\varphi, \psi) \equiv \psi$
$(C2_r)$ $\quad \varphi \leq \psi \Rightarrow \mathbf{c}(\varphi, \psi) \equiv \varphi$
$(R1)$ $\quad \mathbf{r}(\varphi, \psi) \Rightarrow \psi$
$(R2)$ $\quad \Diamond\psi \Rightarrow (\mathbf{r}(\varphi, \psi) \leq \mathbf{r}(\psi, \chi) \Leftrightarrow \varphi \leq \chi)$
$(R\wedge)$ $\quad \mathbf{r}(\varphi_1, \psi) \wedge \mathbf{r}(\varphi_2, \psi) \Leftrightarrow \mathbf{r}(\varphi_1 \wedge \varphi_2, \psi)$
$(R\neg)$ $\quad \mathbf{r}(\neg\varphi_1, \psi) \Leftrightarrow \psi \wedge \neg\mathbf{r}(\varphi_1, \psi)$

и правилата

$$(E_{\mathbf{c}}) \ \frac{\vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi' \ \ \vdash \psi \Leftrightarrow \psi'}{\vdash \mathbf{c}(\varphi, \psi) \Leftrightarrow \mathbf{c}(\varphi', \psi')} \qquad (E_{\mathbf{r}}) \ \frac{\vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi' \ \ \vdash \psi \Leftrightarrow \psi'}{\vdash \mathbf{r}(\varphi, \psi) \Leftrightarrow \mathbf{r}(\varphi', \psi')}$$

Системата не включва схемите $B_m$ за $m > 3$. Коректността й се установява с проверка на валидността на аксиомите и на запазването на истинността при прилагане на правилата.

В останалата част на този параграф доказваме някои теореми на $EQP$, които използуваме по-нататък. Някои от теоремите са и теореми на $QP$, чиито доказателства привеждаме само за да покажем, че те не зависят от $B_m$ за $m > 3$. Части от доказателствата, използуващи само $A0$ и $MP$, отбелязваме с $PC$.

**Твърдение 4.3**

$\vdash_{EQP} \Box\varphi \Rightarrow \Box(\varphi \Leftrightarrow \top)$
$\vdash_{EQP} (\varphi \leq \bot) \Rightarrow \Box(\varphi \Leftrightarrow \bot)$
$(T)$ $\quad \vdash_{EQP} \varphi \leq \psi \wedge \psi \leq \chi \Rightarrow \varphi \leq \chi$
$(\Box\wedge)$ $\quad \vdash_{EQP} \Box\varphi \wedge \Box\psi \Rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$
$(K)$ $\quad \vdash_{EQP} \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$
$(B_2)$ $\quad \vdash_{EQP} \Box(\varphi_1, \varphi_2 \mathsf{E} \psi_1, \psi_2) \Rightarrow (\psi_1 \leq \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \leq \psi_2)$

**Доказателство:** Първата теорема се получава от частния случай на $A1$ $\Box(\top \Leftrightarrow \top) \wedge \Box(\varphi \Leftrightarrow (\varphi \Leftrightarrow \top)) \Rightarrow \Box\varphi \Rightarrow \Box(\varphi \Leftrightarrow \top)$. Втората се получава от частния случай на $B_3$ $\Box(\bot, \bot, \top \mathsf{E} \bot, \varphi, \varphi \Leftrightarrow \bot) \Rightarrow (\bot \leq \bot \wedge \varphi \leq \bot \Rightarrow \top \leq (\varphi \Leftrightarrow \bot))$ и частния случай на $A3$ $\bot \leq \bot$. $T$ се получава от частния случай на $B_3$ $\Box(\psi, \chi, \varphi \mathsf{E} \varphi, \psi, \chi) \Rightarrow (\varphi \leq \psi \wedge \psi \leq \chi \Rightarrow \varphi \leq \chi)$. Ето доказателства на $\Box\wedge$, $K$ и $B_2$:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\Box(\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \neg\psi))$ | $PC$, $N$ |
| 2 | $\bot \leq \neg(\varphi \vee \psi)$ | $A3$ |
| 3 | $\Box(\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \neg\psi), \neg(\varphi \vee \psi), \varphi \mathsf{E} \top, \bot, \varphi \vee \neg\psi)$ | $PC$, $N$ |
| 4 | $\Box(\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \neg\psi), \neg(\varphi \vee \psi), \varphi \mathsf{E} \top, \bot, \varphi \vee \neg\psi) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\Box(\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \neg\psi)) \wedge \bot \leq \neg(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \varphi \leq (\varphi \vee \neg\psi))$ | $B_3$ |
| 5 | $\varphi \leq (\varphi \vee \neg\psi)$ | 1-4, $PC$ |
| 6 | $\Box\varphi \wedge \varphi \leq (\varphi \vee \neg\psi) \Rightarrow \Box(\varphi \vee \neg\psi)$ | $T$ |
| 7 | $\Box(\varphi \vee \neg\psi, \psi, \top \mathsf{E} \top, \top, \varphi \wedge \psi)$ | $PC$, $N$ |
| 8 | $\Box(\varphi \vee \neg\psi, \psi, \top \mathsf{E} \top, \top, \varphi \wedge \psi) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\Box(\varphi \vee \neg\psi) \wedge \Box\psi \Rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi))$ | $B_3$ |
| 9 | $\Box\varphi \wedge \Box\psi \Rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$ | 5-8, $PC$ |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge \Box\varphi \Rightarrow \Box((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge \varphi)$ | $\Box\wedge$ |
| 2 | $\Box((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge \varphi, \psi \wedge \neg\varphi, \top \mathsf{E} \top, \bot, \psi)$ | $PC$, $N$ |
| 3 | $\bot \leq (\psi \wedge \neg\varphi)$ | $A3$ |
| 4 | $\Box((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge \varphi, \psi \wedge \neg\varphi, \top \mathsf{E} \top, \bot, \psi) \Rightarrow$ $(\Box((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge \varphi) \wedge \bot \leq (\psi \wedge \neg\varphi) \Rightarrow \Box\psi)$ | $B_3$ |
| 5 | $\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$ | 1-4, $PC$ |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\Box((\varphi_1, \varphi_2 \mathsf{E} \psi_1, \psi_2) \Rightarrow (\bot, \varphi_1, \varphi_2 \mathsf{E} \bot, \psi_1, \psi_2))$ | $PC$, $N$ |
| 2 | $\Box((\varphi_1, \varphi_2 \mathsf{E} \psi_1, \psi_2) \Rightarrow (\bot, \varphi_1, \varphi_2 \mathsf{E} \bot, \psi_1, \psi_2)) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\Box(\varphi_1, \varphi_2 \mathsf{E} \psi_1, \psi_2) \Rightarrow \Box(\bot, \varphi_1, \varphi_2 \mathsf{E} \bot, \psi_1, \psi_2))$ | $K$ |
| 3 | $\bot \leq \bot$ | $A2$ |
| 4 | $\Box(\bot, \varphi_1, \varphi_2 \mathsf{E} \bot, \psi_1, \psi_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\bot \leq \bot \wedge \psi_1 \leq \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \leq \psi_2)$ | $B_3$ |
| 5 | $\Box(\varphi_1, \varphi_2 \mathsf{E} \psi_1, \psi_2) \Rightarrow (\psi_1 \leq \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \leq \psi_2)$ | 1-4, $PC$ |

$\dashv$

**Твърдение 4.4**

| | |
|---|---|
| $(R3)$ | $\vdash_{EQP} \mathbf{r}(\varphi, \psi) \equiv \mathbf{r}(\psi, \varphi)$ |
| $(R4)$ | $\vdash_{EQP} \Diamond\psi \Rightarrow (\mathbf{r}(\varphi, \psi) \leq \mathbf{r}(\chi, \psi) \Leftrightarrow \varphi \leq \chi)$ |
| $(R5)$ | $\vdash_{EQP} \Diamond\psi \Rightarrow (\mathbf{r}(\psi, \varphi) \leq \mathbf{r}(\psi, \chi) \Leftrightarrow \varphi \leq \chi)$ |
| $(R\bot_l)$ | $\vdash_{EQP} \mathbf{r}(\bot, \varphi) \Leftrightarrow \bot$ |
| $(R\bot_r)$ | $\vdash_{EQP} \mathbf{r}(\varphi, \bot) \Leftrightarrow \bot$ |
| $(R\top_l)$ | $\vdash_{EQP} \mathbf{r}(\top, \varphi) \Leftrightarrow \varphi$ |
| $(R\bot'_l)$ | $\vdash_{EQP} \mathbf{r}(\bot, \varphi) \leq \bot$ |
| $(R\bot'_r)$ | $\vdash_{EQP} \mathbf{r}(\varphi, \bot) \leq \bot$ |
| $(R\top'_l)$ | $\vdash_{EQP} \mathbf{r}(\top, \varphi) \equiv \varphi$ |
| $(R\top'_r)$ | $\vdash_{EQP} \mathbf{r}(\varphi, \top) \equiv \varphi$ |

**Доказателство:** $R4$ и $R5$ са прости следствия от $R2$, $R3$ и $T$. $R3$ можем да получим от $\vdash_{EQP} \mathbf{r}(\varphi, \psi) \leq \mathbf{r}(\psi, \varphi)$ и $\vdash_{EQP} \mathbf{r}(\psi, \varphi) \leq \mathbf{r}(\varphi, \psi)$. Доказателствата са еднакви и затова даваме само първото:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\Box(\mathbf{r}(\varphi, \psi) \Rightarrow \psi)$ | $R1$, $N$ |
| 2 | $\Box(\mathbf{r}(\varphi, \psi) \Rightarrow \psi, \bot, \mathbf{r}(\varphi, \psi) \mathsf{E} \top, \psi, \bot)$ | $PC$, $N$ |
| 3 | $\Box(\mathbf{r}(\varphi, \psi) \Rightarrow \psi, \bot, \mathbf{r}(\varphi, \psi) \mathsf{E} \top, \psi, \bot) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\Box(\mathbf{r}(\varphi, \psi) \Rightarrow \psi) \wedge \psi \leq \bot \Rightarrow \mathbf{r}(\varphi, \psi) \leq \bot)$ | $B_3$ |
| 4 | $\psi \leq \bot \Rightarrow \mathbf{r}(\varphi, \psi) \leq \bot$ | 1, 2, 3, $PC$ |
| 5 | $\bot \leq \mathbf{r}(\psi, \varphi)$ | $A3$ |
| 6 | $\mathbf{r}(\varphi, \psi) \leq \bot \wedge \bot \leq \mathbf{r}(\psi, \varphi) \Rightarrow \mathbf{r}(\varphi, \psi) \leq \mathbf{r}(\psi, \varphi)$ | $T$ |
| 7 | $\psi \leq \bot \Rightarrow \mathbf{r}(\varphi, \psi) \leq \mathbf{r}(\psi, \varphi)$ | 4, 5, 6, $PC$ |
| 8 | $\varphi \leq \varphi$ | $A2$, $PC$ |
| 9 | $\Diamond\psi \Rightarrow (\mathbf{r}(\varphi, \psi) \leq \mathbf{r}(\psi, \varphi) \Leftrightarrow \varphi \leq \varphi)$ | $R2$ |
| 10 | $\Diamond\psi \Rightarrow \mathbf{r}(\varphi, \psi) \leq \mathbf{r}(\psi, \varphi)$ | 8, 9, $PC$ |
| 11 | $\psi \leq \bot \vee \Diamond\psi$ | $PC$ |
| 12 | $\mathbf{r}(\varphi, \psi) \leq \mathbf{r}(\psi, \varphi)$ | 7, 10, 11, $PC$ |

По-долу доказваме $R\bot_r$, $R\top_l$ и $R\bot_l$. Теоремите $R\bot'_l$, $R\bot'_r$ и $R\top'_l$ лесно се получават от тях с помощта на $A1$. $R\top'_r$ се получава от $R\top'_l$ с помощта на $R3$.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\mathbf{r}(\varphi, \bot) \Rightarrow \bot$ | $R1$ |
| 2 | $\bot \Rightarrow \mathbf{r}(\varphi, \bot)$ | $PC$ |
| 3 | $\mathbf{r}(\varphi, \bot) \Leftrightarrow \bot$ | 1, 2, $PC$ |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\mathbf{r}(\top, \varphi) \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\mathbf{r}(\bot, \varphi)$ | $R\neg$ |
| 2 | $\mathbf{r}(\bot, \varphi) \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\mathbf{r}(\top, \varphi)$ | $R\neg$ |
| 3 | $\mathbf{r}(\top, \varphi) \Leftrightarrow \varphi$ | 1, 2, $PC$ |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\mathbf{r}(\bot, \varphi) \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\mathbf{r}(\top, \varphi)$ | $R\neg$ |
| 2 | $\mathbf{r}(\bot, \varphi) \Leftrightarrow \varphi$ | $R\top_l$ |
| 3 | $\mathbf{r}(\bot, \varphi) \Leftrightarrow \bot$ | 1, 2, $PC$ |

$\dashv$

**Твърдение 4.5** *Нека за формули $\alpha$, които не съдържат $\leq$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{r}$, с $\alpha^\gamma$ означим $[\mathbf{r}(p_0,\gamma)/p_0,\ldots,\mathbf{r}(p_{n-1},\gamma)/p_{n-1}]\alpha$, където $\gamma$ е произволна фиксирана формула, а $p_i$, $i<n$, са всичките съждителни променливи, които участвуват в $\alpha$. Тогава $\vdash_{EQP} \mathbf{r}(\alpha,\gamma) \Leftrightarrow \gamma \wedge \alpha^\gamma$.*

**Доказателство:** Индукция по строежа на $\alpha$. За $\alpha \doteq \bot$ теоремата следва от $R\bot_l$. За $\alpha \doteq p_i$, $i<n$, $\alpha^\gamma \doteq \mathbf{r}(\alpha,\gamma)$ и теоремата се получава от $R1$. Ако $\alpha \doteq \neg\beta$, използуваме, че $\alpha^\gamma \doteq \neg\beta^\gamma$ и доказателството:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\mathbf{r}(\beta,\gamma) \Leftrightarrow \gamma \wedge \beta^\gamma$ | предположение |
| 2 | $\mathbf{r}(\neg\beta,\gamma) \Leftrightarrow \gamma \wedge \neg\mathbf{r}(\beta,\gamma)$ | $R\neg$ |
| 3 | $\mathbf{r}(\neg\beta,\gamma) \Leftrightarrow \gamma \wedge \neg\beta^\gamma$ | 1 2, $PC$ |

Ако $\alpha \doteq \beta_1 \wedge \beta_2$, използуваме, че $\alpha^\gamma \doteq \beta_1^\gamma \wedge \beta_2^\gamma$ и доказателството:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\mathbf{r}(\beta_1,\gamma) \Leftrightarrow \gamma \wedge \beta_1^\gamma$ | предположение |
| 2 | $\mathbf{r}(\beta_2,\gamma) \Leftrightarrow \gamma \wedge \beta_2^\gamma$ | предположение |
| 3 | $\mathbf{r}(\beta_1 \wedge \beta_2,\gamma) \Leftrightarrow \mathbf{r}(\beta_1,\gamma) \wedge \mathbf{r}(\beta_2,\gamma)$ | $R\wedge$ |
| 4 | $\mathbf{r}(\beta_1 \wedge \beta_2,\gamma) \Leftrightarrow \gamma \wedge (\beta_1^\gamma \wedge \beta_2^\gamma)$ | 1, 2, 3, $PC$ |

$\dashv$

**Твърдение 4.6** *Нека $\vdash_{EQP} \alpha \Leftrightarrow \beta$ и $p$ е съждителна променлива. Тогава $\vdash_{EQP} [\alpha/p]\gamma \Leftrightarrow [\beta/p]\gamma$.*

**Доказателство:** Индукция по строежа на $\gamma$. Случаите $\gamma \doteq \bot$, $\gamma \doteq p$ и $\gamma \doteq q$, където $q \not\doteq p$, както и случаите $\gamma \doteq \neg\delta$ и $\gamma \doteq \delta_1 \wedge \delta_2$ са тривиални. За случая $\gamma \doteq \delta_1 \leq \delta_2$ се прилага $A1$. За случаите $\gamma \doteq \mathbf{c}(\delta_1,\delta_2)$ и $\gamma \doteq \mathbf{r}(\delta_1,\delta_2)$ се прилагат съответно $E_{\mathbf{c}}$ и $E_{\mathbf{r}}$. $\dashv$

## 4.4 Отстранимост на схемите $B_m$ в системата за извод на $EQP$

В този параграф доказваме, че всички схеми $B_m$ са теореми на $EQP$. Тъй като всички теореми на $QP$ са доказуеми в известната система, образувана от $A0$-$A4$, $B_m$, $m<\omega$, и правилата $MP$ и $N$, това означава, че те могат да бъдат доказани и в крайната система за $EQP$, където вместо $B_m$, $m>3$, участвуват аксиомните схеми за $\mathbf{c}$ и $\mathbf{r}$ от параграф 4.3.

Нека разгледаме схемата $B_m$

$$\Box(\varphi_1,\ldots,\varphi_m \mathsf{E}\psi_1,\ldots,\psi_m) \Rightarrow \left(\bigwedge_{i=1}^{m-1} \psi_i \leq \varphi_i \Rightarrow (\varphi_m \leq \psi_m)\right)$$

Нека $F = \{\varphi_1,\ldots,\varphi_m,\psi_1,\ldots,\psi_m\}$. За всяко $\theta \in F$ имаме

$$\vdash_{EQP} \theta \leq \bot \vee \Diamond\theta, \Diamond\neg\theta \vee \Box\theta, \theta \leq \neg\theta \vee (\neg\theta) \leq \theta.$$

Наистина, първите две формули са съждителни тавтологии, а третата е частен случай на $A2$. Оттук следва, че

$$\vdash_{EQP} \theta \leq \bot \vee \Box\theta \vee (\Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta) \vee (\Diamond\neg\theta \wedge (\neg\theta) \leq \theta).$$

Това показва, че за да получим $\vdash_{EQP} B_m$, е достатъчно да докажем

$$\vdash_{EQP} \Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow B_m \text{ и } \vdash_{EQP} \Diamond\neg\theta \wedge (\neg\theta) \leq \theta \Rightarrow B_m \tag{2}$$

за всяко $\theta \in F$, както и

$$\vdash_{EQP} \bigwedge_{\theta\in G} \theta \leq \bot \wedge \bigwedge_{\theta\in F\setminus G} \Box\theta \Rightarrow B_m \tag{3}$$

за всяко $G \subseteq F$. Най-напред ще докажем теоремите (3) на $EQP$. Нека означим предпоставката на (3) с $A$. Нека за всяко $\theta \in F$ с $\theta^G$ означим $\top$, ако $\theta \in G$, и $\bot$ в противен

случай. Тогава, прилагайки многократно първите две теореми от твърдение 4.3, получаваме, че

$$\vdash_{EQP} A \Rightarrow \bigwedge_{\theta \in F} \Box(\theta \Leftrightarrow \theta^G),$$

откъдето, прилагайки многократно $A1$, получаваме

$$\vdash_{EQP} A \Rightarrow \left( \left( \bigwedge_{i=1}^{m-1} \psi_i \leq \varphi_i \Rightarrow (\varphi_m \leq \psi_m) \right) \Leftrightarrow \left( \bigwedge_{i=1}^{m-1} \psi_i^G \leq \varphi_i^G \Rightarrow \varphi_m^G \leq \psi_m^G \right) \right), \qquad (4)$$

а, прилагайки многократно $\Box\wedge$, получаваме:

$$\vdash_{EQP} A \Rightarrow \Box \left( \bigwedge_{\theta \in F} \theta \Leftrightarrow \theta^G \right).$$

Сега, използувайки, че

$$\bigwedge_{\theta \in F} \theta \Leftrightarrow \theta^G \Rightarrow ((\varphi_1, \ldots, \varphi_m \mathsf{E} \psi_1, \ldots, \psi_m) \Leftrightarrow (\varphi_1^G, \ldots, \varphi_m^G \mathsf{E} \psi_1^G, \ldots, \psi_m^G))$$

е съждителна тавтология, прилагаме $K$ и получаваме

$$\vdash_{EQP} A \Rightarrow \Box(\varphi_1, \ldots, \varphi_m \mathsf{E} \psi_1, \ldots, \psi_m) \Leftrightarrow \Box(\varphi_1^G, \ldots, \varphi_m^G \mathsf{E} \psi_1^G, \ldots, \psi_m^G).$$

Оттук и от (4) следва, че $\vdash_{EQP} A \Rightarrow (B_m \Leftrightarrow B_m^G)$, където $B_m^G$ е резултатът от заместването на $\theta$ с $\theta^G$ в $B_m$ за всички $\theta \in F$. $B_m^G$ е частен случай на $B_m$, в който не участвуват съждителни променливи. Тъй като $B_m$ е общовалидна, $\vdash_{EQP} B_m^G$. Оттук и $\vdash_{EQP} A \Rightarrow B_m$.

Продължаваме с доказателството на (2). Първо нека изложим идеята зад това доказателство.

Смисълът на $B_m$ е следният: $\Box(\varphi_1, \ldots, \varphi_m \mathsf{E} \psi_1, \ldots, \psi_m)$ означава, че с оценките на $\varphi_i$, $i = 1, \ldots, m$, и оценките на $\psi_i$, $i = 1, \ldots, m$, покриват множеството от възможните светове навсякъде с еднаква кратност, с точност до подмножество с вероятност 0. Оттук следва, че сборовете на вероятностите на $\varphi_i$, $i = 1, \ldots, m$, и на вероятностите на $\psi_i$, $i = 1, \ldots, m$, са равни. Тогава, ако вероятностите на $\psi_i$, са по-малки или равни съответно на вероятностите на $\varphi_i$, за $i < m$, то вероятностите на $\varphi_m$ и $\psi_m$ изпълняват обратното неравенство.

Езикът на $QP$ не позволява по дадени $\varphi_i$ да се образува формула с вероятност $\sum_{i=1}^{m} \mu(w)(\tilde{v}(\varphi_i))$, каквато би опростила формализирането на разсъжденията водещи до заключението на $B_m$. В доказателството се стремим да получим подобна формула и да я използуваме, за да изведем $B_m$. Разширяването на $QP$ с $\mathbf{c}$ позволява образуването на такава формула само ако въпросният сбор е не по-голям от 1. За $m = 3$, например, $\varphi_1 \vee \mathbf{c}(\varphi_2, \neg\varphi_1) \vee \mathbf{c}(\varphi_3, \neg(\varphi_1 \vee \mathbf{c}(\varphi_2, \neg\varphi_1)))$ е такава формула. В общия случай сборът от вероятностите може да достига $m$. Затова вместо с $\varphi_i$ и $\psi_i$, може да се работи с формули от вида $\mathbf{r}(\varphi_i, \alpha)$ и $\mathbf{r}(\psi_i, \alpha)$, където $\alpha$ има положителна вероятност, по-малка от $\frac{1}{m}$, и да се използува, че $\mathbf{r}$ възпроизвежда съотношенията между първите си операнди при фиксиран втори операнд. Предпоставката $\Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta$ в (2) позволява намирането на подходящи $\alpha$.

Преминаваме към самото доказателство. Ще докажем $\vdash_{EQP} \Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow B_m$, без да използуваме, че $\theta \in F \cup \{\neg\phi : \phi \in F\}$, с което двата случая в (2) се обединяват.

Нека $\theta_0 \rightleftharpoons \top$, $\theta_{i+1} \rightleftharpoons \mathbf{r}(\theta, \theta_i)$, $i < \omega$. По-нататък $\theta_i$ се използуват за $i \leq m$. Нека $\omega_i \rightleftharpoons \mathbf{c}(\theta_m, \theta_{i-1} \wedge \neg\theta_i)$ за $0 < i < \omega$.

**Твърдение 4.7** *За всички $i < \omega$:*

$\vdash_{EQP} \Diamond\theta \Rightarrow \Diamond\theta_i$

$\vdash_{EQP} \Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \theta_{i+1} \leq (\theta_i \wedge \neg\theta_{i+1})$

**Доказателство:** Доказваме първата теорема с индукция по $i$. $\Diamond\theta_0$ е $A4$. Оттук следва, че $\vdash_{EQP} \Diamond\theta \Rightarrow \Diamond\theta_0$. За $i > 0$ имаме следното доказателство:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\Diamond\theta \Rightarrow \Diamond\theta_{i-1}$ | индукционно предположение |
| 2 | $\mathbf{r}(\bot, \theta_{i-1}) \equiv \bot$ | $R\bot'_l$ |
| 3 | $\Diamond\theta_{i-1} \Rightarrow (\theta \leq \bot \Leftrightarrow \mathbf{r}(\theta, \theta_{i-1}) \leq \mathbf{r}(\bot, \theta_{i-1}))$ | $R4$ |
| 4 | $\mathbf{r}(\theta, \theta_{i-1}) \leq \mathbf{r}(\bot, \theta_{i-1}) \wedge \mathbf{r}(\bot, \theta_{i-1}) \leq \bot \Rightarrow \mathbf{r}(\theta, \theta_{i-1}) \leq \bot$ | $T$ |
| 5 | $\Diamond\theta \Rightarrow \Diamond\mathbf{r}(\theta, \theta_{i-1})$ | 1-4, $PC$ |

Втората теорема има следното доказателство:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\Diamond\theta \Rightarrow \Diamond\theta_i$ | |
| 2 | $\Diamond\theta_i \Rightarrow (\theta \leq \neg\theta \Leftrightarrow \mathbf{r}(\theta, \theta_i) \leq \mathbf{r}(\neg\theta, \theta_i))$ | $R4$ |
| 3 | $\Box(\mathbf{r}(\theta, \theta_i) \Leftrightarrow \mathbf{r}(\theta, \theta_i))$ | $PC$, $N$ |
| 4 | $\Box(\mathbf{r}(\neg\theta, \theta_i) \Leftrightarrow (\theta_i \wedge \mathbf{r}(\theta, \theta_i)))$ | $R\wedge$, $N$ |
| 5 | $\Box(\mathbf{r}(\theta, \theta_i) \Leftrightarrow \mathbf{r}(\theta, \theta_i)) \wedge$ $\wedge\Box(\mathbf{r}(\neg\theta, \theta_i) \Leftrightarrow (\theta_i \wedge \mathbf{r}(\theta, \theta_i))) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\mathbf{r}(\theta, \theta_i) \leq \mathbf{r}(\neg\theta, \theta_i) \Rightarrow \mathbf{r}(\theta, \theta_i) \leq (\theta_i \wedge \mathbf{r}(\theta, \theta_i)))$ | $A1$ |
| 6 | $\Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \mathbf{r}(\theta, \theta_i) \leq (\theta_i \wedge \mathbf{r}(\theta, \theta_i))$ | 1-5, $PC$ |

$\dashv$

**Твърдение 4.8** *За* $i = 1, \ldots, m$
$\vdash_{EQP} \Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \omega_i \equiv \theta_m$
$\vdash_{EQP} \Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \Diamond\omega_i$
*За* $0 < i < j \leq m$
$\vdash_{EQP} (\omega_i \wedge \omega_j) \leq \bot$

**Доказателство:** Най-напред доказваме, че $\vdash_{EQP} \Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \theta_m \leq (\theta_{i-1} \wedge \neg\theta_i)$ за $1 \leq i \leq m$ с индукция по $i$ отгоре надолу. За $i = m$ това е втората теорема от твърдение 4.7. За $i < m$ имаме следното доказателство

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\bot \leq (\theta_i \wedge \theta_{i+1})$ | $A3$ |
| 2 | $\Box(\theta_i \wedge \theta_{i+1}, \theta_i \wedge \neg\theta_{i+1} \mathsf{E} \bot, \theta_i) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\bot \leq (\theta_i \wedge \theta_{i+1}) \Rightarrow (\theta_i \wedge \neg\theta_{i+1}) \leq \theta_i)$ | $B_2$ |
| 3 | $\Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \theta_m \leq (\theta_i \wedge \neg\theta_{i+1})$ | индукционно предположение |
| 4 | $\Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \theta_i \leq (\theta_{i-1} \wedge \neg\theta_i)$ | Твърдение 4.7 |
| 5 | $\theta_m \leq (\theta_i \wedge \neg\theta_{i+1}) \wedge (\theta_i \wedge \neg\theta_{i+1}) \leq \theta_i \Rightarrow \theta_m \leq \theta_i$ | $T$ |
| 6 | $\theta_m \leq \theta_i \wedge \theta_i \leq (\theta_{i-1} \wedge \neg\theta_i) \Rightarrow \theta_m \leq\leq (\theta_{i-1} \wedge \neg\theta_i)$ | $T$ |
| 7 | $\Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \theta_m \leq (\theta_{i-1} \wedge \neg\theta_i)$ | 1-6, $PC$ |

Сега първата теорема се получава от частния случай на $C2_l$ $\theta_m \leq (\theta_{i-1} \wedge \neg\theta_i) \Rightarrow \mathbf{c}(\theta_m, \theta_{i-1} \wedge \neg\theta_i) \equiv \theta_m$.

Втората теорема има следното доказателство:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \omega_i \equiv \theta_m$ | първата теорема |
| 2 | $\Diamond\theta \Rightarrow \Diamond\theta_m$ | Твърдение 4.7 |
| 3 | $\theta_m \leq \omega_i \wedge \omega_i \leq \bot \Rightarrow \theta_m \leq \bot$ | $T$ |
| 4 | $\Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \Diamond\omega_i$ | 1, 2, 3, $PC$ |

За да получим третата теорема, първо с индукция по $i$ отгоре надолу доказваме, че $\vdash_{EQP} \theta_{j-1} \Rightarrow \theta_i$. За $i = j - 1$ това е съждителна тавтология. За $i < j - 1$ използуваме индукционното предположение и частния случай на $R1$ $\theta_{i+1} \Rightarrow \theta_i$. Сега третата теорема има следното доказателство:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\omega_i \Rightarrow (\theta_{i-1} \wedge \neg\theta_i)$ | $C1$ |
| 2 | $\omega_j \Rightarrow (\theta_{j-1} \wedge \neg\theta_j)$ | $C1$ |
| 3 | $\theta_{j-1} \Rightarrow \theta_j$ | помощна теорема |
| 4 | $\neg(\omega_i \wedge \omega_j)$ | 1, 2, 3, $PC$ |
| 5 | $\Box(\neg(\omega_i \wedge \omega_j), \omega_i \wedge \omega_j \mathsf{E}\top, \bot)$ | $PC$, $N$ |
| 6 | $\Box(\neg(\omega_i \wedge \omega_j), \omega_i \wedge \omega_j \mathsf{E}\top, \bot) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\Box(\neg(\omega_i \wedge \omega_j)) \Rightarrow (\omega_i \wedge \omega_j) \leq \bot)$ | $B_2$ |
| 7 | $\Box(\neg(\omega_i \wedge \omega_j))$ | 5, $N$ |
| 8 | $(\omega_i \wedge \omega_j) \leq \bot$ | 5, 6, 7, $PC$ |

$\dashv$

Нека разгледаме множеството от елементарните конюнкции на формулите от $F$. Нека $\Gamma$ съдържа по една формула от всеки клас на еквивалентност в това множество по отношение на релацията, зададена с условието $\vdash_{EQP} \alpha \Leftrightarrow \beta$, освен от класа на формулите, еквивалентни на $\bot$, ако има такива. Нека $\Gamma(\phi) = \{\gamma \in \Gamma : \vdash_{EQP} \gamma \Rightarrow \phi\}$ за всяко $\phi \in F$. Следното твърдение по същество е от класическата съждителна логика:

**Лема 4.9** i. $\vdash_{EQP} \bigvee\limits_{\gamma \in \Gamma(\phi)} \gamma \Leftrightarrow \phi$ *за всяко* $\phi \in F$. *Това условие определя* $\Gamma(\phi)$ *еднозначно.*

ii. *Ако* $\gamma', \gamma'' \in \Gamma$, *или* $\gamma' \doteq \gamma''$, *или* $\vdash_{EQP} \neg(\gamma' \wedge \gamma'')$

iii. *Ако* $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma(\phi)$ *то* $\vdash_{EQP} \gamma \Rightarrow \neg\phi$ *за всяко* $\phi \in F$.

iv $\vdash_{EQP} \mathbf{E} \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{\gamma \in \Gamma} (\varphi_1 \wedge \gamma, \ldots, \varphi_m \wedge \gamma \mathsf{E} \psi_1 \wedge \gamma, \ldots, \psi_m \wedge \gamma)$

Нека $\phi^{(i)} \rightleftharpoons \mathbf{r}(\phi, \omega_i)$ за всяка формула $\phi \in \mathbf{L}$ и $i = 1, \ldots, m$. Нека $\mathbf{E} \rightleftharpoons \varphi_1, \ldots, \varphi_m \mathsf{E} \psi_1, \ldots, \psi_m$, $\mathbf{E}^{(k)} \rightleftharpoons \varphi_1^{(k)}, \ldots, \varphi_m^{(k)} \mathsf{E} \psi_1^{(k)}, \ldots, \psi_m^{(k)}$

**Твърдение 4.10** *За* $k = 1, \ldots, m$*:*

$\vdash_{EQP} \Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow (\psi_k \leq \varphi_k \Leftrightarrow \psi_k^{(k)} \leq \varphi_k^{(k)})$.

$\vdash_{EQP} \phi^{(k)} \Leftrightarrow \bigvee\limits_{\gamma \in \Gamma(\phi)} \gamma^{(k)}$ *за всяко* $\phi \in F$

$\vdash_{EQP} \Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \Box\mathbf{E} \Rightarrow \bigvee\limits_{i=1}^{m} \varphi_i^{(i)} \equiv \bigvee\limits_{i=1}^{m} \psi_i^{(i)}$

$\vdash_{EQP} \Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \wedge \bigvee\limits_{i=k}^{m} \varphi_i^{(i)} \leq \bigvee\limits_{i=k}^{m} \psi_i^{(i)} \wedge \bigwedge\limits_{i=k}^{m-1} \psi_i^{(i)} \leq \varphi_i^{(i)} \Rightarrow \varphi_m^{(m)} \leq \psi_m^{(m)}$

**Доказателство:** Първата теорема следва от частния случай на $R4$ $\Diamond\omega_k \Rightarrow (\psi_k \leq \varphi_k \Leftrightarrow \psi_k^{(k)} \leq \varphi_k^{(k)})$ и втората теорема от твърдение 4.8.

За да получим втората теорема, нека забележим, че от лема 4.9, i по $E_{\mathbf{r}}$ следва $\vdash_{EQP} \phi^{(k)} \Leftrightarrow \left(\bigvee\limits_{\gamma \in \Gamma(\phi)} \gamma\right)^{(k)}$. Оттук теоремата следва с помощта на твърдение 4.5.

Преминаваме към третата теорема. За всяко $\gamma \in \Gamma$ $\vdash_{EQP} \Diamond\gamma \vee \gamma \leq$. Затова е достатъчно за всяко $\Gamma' \subseteq \Gamma$ да докажем

$$\vdash_{EQP} \Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \wedge \bigwedge_{\gamma \in \Gamma'} \Diamond\gamma \wedge \bigwedge_{\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma'} \gamma \leq \bot \wedge \Box\mathbf{E} \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \varphi_i^{(i)} \equiv \bigvee_{i=1}^{m} \psi_i^{(i)}. \tag{5}$$

Нека $\gamma^{\Delta} \rightleftharpoons \bot$, ако $\gamma \in \Gamma \setminus \Delta$ и $\gamma^{\Delta} \rightleftharpoons \gamma$, ако $\gamma \in \Delta$. От лема 4.9, iii следва

$$\vdash_{EQP} (\varphi_1 \wedge \gamma, \ldots, \varphi_m \wedge \gamma \mathsf{E} \psi_1 \wedge \gamma, \ldots, \psi_m \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\gamma^{\Gamma(\varphi_1)}, \ldots, \gamma^{\Gamma(\varphi_m)} \mathsf{E} \gamma^{\Gamma(\psi_1)}, \ldots, \gamma^{\Gamma(\psi_m)})$$

От лема 4.9, iv получаваме

$$\vdash_{EQP} \mathbf{E} \Leftrightarrow \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} (\gamma^{\Gamma(\varphi_1)}, \ldots, \gamma^{\Gamma(\varphi_m)} \mathsf{E} \gamma^{\Gamma(\psi_1)}, \ldots, \gamma^{\Gamma(\psi_m)})$$

Оттук с многократно прилагане на $K$ и $\Box\wedge$ получаваме

$$\vdash_{EQP} \Box\mathbf{E} \Rightarrow \bigwedge_{\gamma\in\Gamma} \Box(\gamma^{\Gamma(\varphi_1)},\ldots,\gamma^{\Gamma(\varphi_m)}\mathsf{E}\gamma^{\Gamma(\psi_1)},\ldots,\gamma^{\Gamma(\psi_m)})$$

Сега нека забележим, че ако $card\{i : \gamma \in \Gamma(\varphi_i)\} \neq card\{i : \gamma \in \Gamma(\psi_i)\}$, то $\vdash_{EQP} \Box(\gamma^{\Gamma(\varphi_1)},\ldots,\gamma^{\Gamma(\varphi_m)}\mathsf{E}\gamma^{\Gamma(\psi_1)},\ldots,\gamma^{\Gamma(\psi_m)}) \Rightarrow \neg\Diamond\gamma$. Това се получава като приложим $K$ към $(\gamma^{\Gamma(\varphi_1)},\ldots,\gamma^{\Gamma(\varphi_m)}\mathsf{E}\gamma^{\Gamma(\psi_1)},\ldots,\gamma^{\Gamma(\psi_m)}) \Rightarrow \neg\gamma$, което в този случай е съждителна тавтология. Следователно, достатъчно е да докажем (5) при условие, че $card\{i : \gamma \in \Gamma(\varphi_i)\} = card\{i : \gamma \in \Gamma(\psi_i)\}$ за всяко $\gamma \in \Gamma'$, тъй като в останалите случаи предпоставката на (5) е противоречива.

От втората теорема с многократно прилагане на $\Box\wedge$ и $K$ се получава

$$\vdash_{EQP} \Box\left(\bigvee_{i=1}^{m}\varphi_i^{(i)} \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m}\bigvee_{\gamma\in\Gamma(\varphi_i)}\gamma^{(i)}\right) \text{ и } \vdash_{EQP} \Box\left(\bigvee_{i=1}^{m}\psi_i^{(i)} \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m}\bigvee_{\gamma\in\Gamma(\psi_i)}\gamma^{(i)}\right)$$

Оттук, с помощта на $A1$ получаваме

$$\vdash_{EQP} \bigvee_{i=1}^{m}\varphi_i^{(i)} \equiv \bigvee_{i=1}^{m}\psi_i^{(i)} \Leftrightarrow \left(\bigvee_{i=1}^{m}\bigvee_{\gamma\in\Gamma(\varphi_i)}\gamma^{(i)}\right) \equiv \left(\bigvee_{i=1}^{m}\bigvee_{\gamma\in\Gamma(\psi_i)}\gamma^{(i)}\right) \tag{6}$$

От условието $card\{i : \gamma \in \Gamma(\varphi_i)\} = card\{i : \gamma \in \Gamma(\psi_i)\}$ следва, че от двете страни на $\equiv$ в дясната част на (6) за всяко $\gamma \in \Gamma$ има еднакъв брой $\gamma^{(i)}$ за различните $i$. Освен това, нека забележим, че $\vdash_{EQP} \Diamond\theta\wedge\theta \leq \neg\theta \Rightarrow \gamma^{(i)} \equiv \gamma^{(j)}$. Доказателството е следното:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \omega_i \equiv \theta_m$ | Твърдение 4.8 |
| 2 | $\Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \omega_j \equiv \theta_m$ | |
| 3 | $\omega_i \leq \theta_m \wedge \theta_m \leq \omega_j \Rightarrow \omega_i \leq \omega_j$ | $T$ |
| 4 | $\omega_j \leq \theta_m \wedge \theta_m \leq \omega_i \Rightarrow \omega_j \leq \omega_i$ | $T$ |
| 5 | $\Diamond\gamma \Rightarrow (\omega_i \leq \omega_j \Leftrightarrow \gamma^{(i)} \leq \gamma^{(j)})$ | $R5$ |
| 6 | $\Diamond\gamma \Rightarrow (\omega_j \leq \omega_i \Leftrightarrow \gamma^{(j)} \leq \gamma^{(i)})$ | $R5$ |
| 7 | $\Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow (\Diamond\gamma \Rightarrow \gamma^{(i)} \equiv \gamma^{(j)})$ | 1-6, $PC$ |
| 8 | $\Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \Diamond\omega_i$ | Твърдение 4.8 |
| 9 | $\Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \Diamond\omega_j$ | Твърдение 4.8 |
| 10 | $\Diamond\omega_i \Rightarrow (\gamma \leq \bot \Leftrightarrow \gamma^{(i)} \leq \mathbf{r}(\bot,\omega_i))$ | $R3$ |
| 11 | $\Diamond\omega_j \Rightarrow (\gamma \leq \bot \Leftrightarrow \gamma^{(j)} \leq \mathbf{r}(\bot,\omega_j))$ | $R3$ |
| 12 | $\mathbf{r}(\bot,\omega_i) \leq \bot$ | $R\bot_l'$ |
| 13 | $\mathbf{r}(\bot,\omega_i) \leq \bot$ | $R\bot_l'$ |
| 14 | $\gamma^{(i)} \leq \mathbf{r}(\bot,\omega_i) \wedge \mathbf{r}(\bot,\omega_i) \leq \bot \Rightarrow \gamma^{(i)} \leq \bot$ | $T$ |
| 15 | $\gamma^{(j)} \leq \mathbf{r}(\bot,\omega_j) \wedge \mathbf{r}(\bot,\omega_j) \leq \bot \Rightarrow \gamma^{(j)} \leq \bot$ | $T$ |
| 16 | $\bot \leq \gamma^{(j)}$ | $A3$ |
| 17 | $\bot \leq \gamma^{(i)}$ | $A3$ |
| 18 | $\gamma^{(i)} \leq \bot \wedge \bot \leq \gamma^{(j)} \Rightarrow \gamma^{(i)} \leq \gamma^{(j)}$ | $T$ |
| 19 | $\gamma^{(j)} \leq \bot \wedge \bot \leq \gamma^{(i)} \Rightarrow \gamma^{(j)} \leq \gamma^{(i)}$ | $T$ |
| 20 | $\Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \wedge \gamma \leq \bot \Rightarrow \gamma^{(i)} \equiv \gamma^{(j)}$ | 8-19, $PC$ |
| 21 | $\Diamond\gamma \vee \gamma \leq \bot$ | $PC$ |
| 22 | $\Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta\wedge \Rightarrow \gamma^{(i)} \equiv \gamma^{(j)}$ | 7, 20, 21, $PC$ |

По-нататък, ако $\gamma' \not\equiv \gamma''$ или $i \neq j$, $\vdash_{EQP} (\gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(j)}) \leq \bot$. Наистина, ако $i = j$ и $\gamma' \not\equiv \gamma''$, имаме доказателството:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(\gamma'^{\wedge}\gamma'') \Leftrightarrow \bot$ | Лема 4.9, ii |
| 2 | $(\gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(i)}) \Leftrightarrow \mathbf{r}(\bot, \omega_i)$ | 1, Твърдение 4.5, $PC$ |
| 3 | $\mathbf{r}(\bot, \omega_k) \Leftrightarrow \bot$ | $R\bot_l$ |
| 5 | $\Box\neg(\gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(i)})$ | 2, 3, $PC$, $N$ |
| 6 | $\Box(\neg(\gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(i)}), \gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(i)} \mathsf{E}\top, \bot)$ | $PC$, $N$ |
| 7 | $\Box(\neg(\gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(i)}), \gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(i)} \mathsf{E}\top, \bot) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\Box\neg(\gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(i)}) \Rightarrow (\gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(i)}) \leq \bot)$ | $B_2$ |
| 8 | $(\gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(i)}) \leq \bot$ | 5, 6, 7, $PC$ |

Иначе имаме доказателството

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\gamma'^{(i)} \Rightarrow \omega_i$ | $R1$ |
| 2 | $\gamma''^{(j)} \Rightarrow \omega_j$ | $R1$ |
| 3 | $\Box(\bot, \omega_i \wedge \omega_j \wedge \neg(\gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(j)}), \gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(j)} \mathsf{E}\omega_i \wedge \omega_j, \bot, \bot)$ | 1, 2,, $PC$, $N$ |
| 4 | $(\omega_i \wedge \omega_j) \leq \bot$ | Твърдение 4.8 |
| 5 | $\bot \leq (\omega_i \wedge \omega_j \wedge \neg(\gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(j)}))$ | $A3$ |
| 6 | $\Box(\bot, \omega_i \wedge \omega_j \wedge \neg(\gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(j)}), \gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(j)} \mathsf{E}\omega_i \wedge \omega_j, \bot, \bot) \Rightarrow$ $\Rightarrow ((\omega_i \wedge \omega_j) \leq \bot \wedge \bot \leq (\omega_i \wedge \omega_j \wedge \neg(\gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(j)})) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\gamma'^{(i)} \wedge \gamma''^{(j)}) \leq \bot)$ | $B_3$ |

Като използуваме това, получаваме

$$\vdash_{EQP} \Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \Rightarrow \left(\bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{\gamma\in\Gamma(\varphi_i)} \gamma^{(i)}\right) \equiv \left(\bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{\gamma\in\Gamma(\psi_i)} \gamma^{(i)}\right), \tag{7}$$

използувайки многократно, че

$$\vdash_{EQP} \alpha_1 \equiv \alpha_2 \wedge \beta_1 \equiv \beta_2 \wedge (\alpha_1 \wedge \beta_1) \leq \bot \wedge (\alpha_2 \wedge \beta_2) \leq \bot \Rightarrow (\alpha_1 \vee \beta_1) \equiv (\alpha_2 \vee \beta_2).$$

Тази теорема е просто следствие от

$$\vdash_{EQP} (\beta_2 \wedge \alpha_2) \leq \bot \wedge \beta_1 \leq \beta_2 \wedge \alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow (\alpha_1 \vee \beta_1) \leq (\alpha_2 \vee \beta_2)$$

и

$$\vdash_{EQP} (\beta_1 \wedge \alpha_1) \leq \bot \wedge \beta_2 \leq \beta_1 \wedge \alpha_2 \leq \alpha_1 \Rightarrow (\alpha_2 \vee \beta_2) \leq (\alpha_1 \vee \beta_1).$$

Доказателствата на двете теореми са еднакви. Затова доказваме само първата:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\Box(\beta_2 \wedge \alpha_2, \beta_2 \wedge \neg\alpha_2 \mathsf{E}\bot, \beta_2)$ | $PC$, $N$ |
| 2 | $\Box(\beta_2 \wedge \alpha_2, \beta_2 \wedge \neg\alpha_2 \mathsf{E}\bot, \beta_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow ((\beta_2 \wedge \alpha_2) \leq \bot \Rightarrow \beta_2 \leq (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2))$ | $B_2$ |
| 3 | $\bot \leq (\beta_1 \wedge \alpha_1)$ | $A3$ |
| 4 | $\Box(\beta_1 \wedge \alpha_1, \beta_1 \wedge \neg\alpha_1 \mathsf{E}\bot, \beta_1)$ | $PC$, $N$ |
| 5 | $\Box(\beta_1 \wedge \alpha_1, \beta_1 \wedge \neg\alpha_1 \mathsf{E}\bot, \beta_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\bot \leq \beta_1 \wedge \alpha_1 \Rightarrow (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1) \leq \beta_1))$ | $B_2$ |
| 6 | $(\beta_1 \wedge \neg\alpha_1) \leq \beta_1 \wedge \beta_1 \leq \beta_2 \Rightarrow (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1) \leq \beta_2$ | $T$ |
| 7 | $(\beta_1 \wedge \neg\alpha_1) \leq \beta_2 \wedge \beta_2 \leq (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2) \Rightarrow (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1) \leq (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2)$ | $T$ |
| 8 | $(\beta_2 \wedge \alpha_2) \leq \bot \wedge \beta_1 \leq \beta_2 \Rightarrow (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1) \leq (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2)$ | 1-7, $PC$ |
| 9 | $\Box(\alpha_2, \beta_2 \wedge \neg\alpha_2, \alpha_1 \vee \beta_1 \mathsf{E}\alpha_1, \beta_1 \wedge \neg\alpha_1, \alpha_2 \vee \beta_2)$ | $PC$, $N$ |
| 10 | $\Box(\alpha_2, \beta_2 \wedge \neg\alpha_2, \alpha_1 \vee \beta_1 \mathsf{E}\alpha_1, \beta_1 \wedge \neg\alpha_1, \alpha_2 \vee \beta_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\alpha_1 \leq \alpha_2 \wedge (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1) \leq (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2) \Rightarrow (\alpha_1 \vee \beta_1) \leq (\alpha_2 \vee \beta_2)$ | $B_3$ |
| 11 | $(\beta_2 \wedge \alpha_2) \leq \bot \wedge \beta_1 \leq \beta_2 \wedge \alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow (\alpha_1 \vee \beta_1) \leq (\alpha_2 \vee \beta_2)$ | 8, 9, 10, $PC$ |

От (7) и (6) непосредствено следва (5). Нека отбележим, че предпоставката $\bigwedge\limits_{\gamma\in\Gamma'} \Diamond\gamma \wedge \bigwedge\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma'} \gamma \leq \bot \wedge \Box\mathbf{E}$ в (5) послужи, за да изключим случаите $card\{i : \gamma \in \Gamma(\varphi_i)\} \neq card\{i : \gamma \in \Gamma(\psi_i)\}$.

Четвъртата теорема доказваме с индукция по $k$ отгоре надолу. За $k = m$ теоремата е съждителна тавтология. Нека $\beta_1 \rightleftharpoons \varphi_{k-1}^{(k-1)}$, $\beta_2 \rightleftharpoons \psi_{k-1}^{(k-1)}$, $\alpha_1 \rightleftharpoons \bigvee\limits_{i=k}^{m} \varphi_i^{(i)}$,

$\alpha_2 \rightleftharpoons \bigvee_{i=k}^{m} \psi_i^{(i)}$. Тогава, за да направим индуктивната стъпка, е достатъчно да докажем $\vdash_{EQP} (\alpha_1 \wedge \beta_1) \leq \bot$ и $\vdash_{EQP} (\alpha_1 \vee \beta_1) \leq (\alpha_2 \vee \beta_2) \wedge \beta_2 \leq \beta_1 \wedge (\alpha_1 \wedge \beta_1) \leq \bot \Rightarrow \alpha_1 \leq \alpha_2$. Доказателствата са следните:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\alpha_1 \Rightarrow \bigvee_{i=k}^{m} \omega_i$ | $R1$, $PC$ |
| 2 | $\beta_1 \Rightarrow \omega_{k-1}$ | $R1$ |
| 3 | $\omega_i \Rightarrow \theta_{i-1}$, $i = k, \ldots, m$ | $C1$, $PC$ |
| 4 | $\omega_{k-1} \Rightarrow \neg\theta_{k-1}$ | $C1$, $PC$ |
| 5 | $\theta_{i-1} \Rightarrow \theta_{k-1}$, $i = k, \ldots, m$ | $R1$, $PC$ |
| 6 | $\Box((\alpha_1 \wedge \beta_1) \Leftrightarrow \bot)$ | 1-5, $PC$, $N$ |
| 7 | $\Box(\bot \Leftrightarrow \bot)$ | $PC$, $N$ |
| 8 | $\bot \leq \bot$ | $A3$ |
| 9 | $\Box((\alpha_1 \wedge \beta_1) \Leftrightarrow \bot) \wedge \Box(\bot \Leftrightarrow \bot) \wedge \bot \leq \bot \Rightarrow (\alpha_1 \wedge \beta_1) \leq \bot$ | $A1$ |
| 10 | $(\alpha_1 \wedge \beta_1) \leq \bot$ | 6-9, $PC$ |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\Box(\alpha_1 \vee \beta_1 \Leftrightarrow \alpha_1 \vee (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1))$ | $PC$, $N$ |
| 2 | $\Box(\alpha_2 \vee \beta_2 \Leftrightarrow \alpha_2 \vee (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2))$ | $PC$, $N$ |
| 3 | $\Box(\alpha_1 \vee \beta_1 \Leftrightarrow \alpha_1 \vee (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1)) \wedge \Box(\alpha_2 \vee \beta_2 \Leftrightarrow \alpha_2 \vee (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2)) \Rightarrow$ $\Rightarrow ((\alpha_1 \vee \beta_1) \leq (\alpha_2 \vee \beta_2) \Rightarrow (\alpha_1 \vee (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1)) \leq (\alpha_2 \vee (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2)))$ | $A1$ |
| 4 | $(\alpha_1 \vee \beta_1) \leq (\alpha_2 \vee \beta_2) \Rightarrow (\alpha_1 \vee (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1)) \leq (\alpha_2 \vee (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2))$ | 1, 2, 3, $PC$ |
| 5 | $\Box(\bot, \beta_1 \mathsf{E} \beta_1 \wedge \alpha_1, \beta_1 \wedge \neg\alpha_1)$ | $PC$, $N$ |
| 6 | $\Box(\bot, \beta_1 \mathsf{E} \alpha_1 \wedge \beta_1, \beta_1 \wedge \neg\alpha_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow ((\alpha_1 \wedge \beta_1) \leq \bot \Rightarrow \beta_1 \leq (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1))$ | $B_2$ |
| 7 | $\Box(\alpha_2 \wedge \beta_2, \beta_2 \wedge \neg\alpha_2 \mathsf{E} \bot, \beta_2)$ | $PC$, $N$ |
| 8 | $\bot \leq (\alpha_2 \wedge \beta_2)$ | $A3$ |
| 9 | $\Box(\alpha_2 \wedge \beta_2, \beta_2 \wedge \neg\alpha_2 \mathsf{E} \bot, \beta_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\bot \leq (\alpha_2 \wedge \beta_2) \Rightarrow (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2) \leq \beta_2)$ | $B_2$ |
| 10 | $\beta_2 \leq \beta_1 \wedge \beta_1 \leq (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1) \Rightarrow \beta_2 \leq (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1)$ | $T$ |
| 11 | $(\beta_2 \wedge \neg\alpha_2) \leq \beta_2 \wedge \beta_2 \leq (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1) \Rightarrow (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2) \leq (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1)$ | $T$ |
| 12 | $\beta_2 \leq \beta_1 \Rightarrow (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2) \leq (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1)$ | $5 - 11$, $PC$ |
| 13 | $\Box(\alpha_2 \vee (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2), \beta_1 \wedge \neg\alpha_1, \alpha_1 \mathsf{E} \alpha_1 \vee (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1), \beta_2 \wedge \neg\alpha_2, \alpha_2)$ | $PC$, $N$ |
| 14 | $\Box(\alpha_2 \vee (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2), \beta_1 \wedge \neg\alpha_1, \alpha_1 \mathsf{E} \alpha_1 \vee (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1), \beta_2 \wedge \neg\alpha_2, \alpha_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow ((\alpha_1 \vee (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1)) \leq (\alpha_2 \vee (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2)) \wedge$ $\wedge (\beta_2 \wedge \neg\alpha_2) \leq (\beta_1 \wedge \neg\alpha_1) \Rightarrow \alpha_1 \leq \alpha_2)$ | $B_3$ |
| 15 | $(\alpha_1 \vee \beta_1) \leq (\alpha_2 \vee \beta_2) \wedge \beta_2 \leq \beta_1 \wedge (\alpha_1 \wedge \beta_1) \leq \bot \Rightarrow \alpha_1 \leq \alpha_2$ | 4, 12-14, $PC$ |

$\dashv$

Твърдение 4.10 съдържа необходимото за доказателството на (2). Наистина, от първата теорема за $k = 1, \ldots, m-1$ и от и третата теорема от твърдението получаваме

$$\vdash_{EQP} \Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \wedge \mathbf{E} \wedge \bigwedge_{i=1}^{m-1} \psi_i \leq \varphi_i \Rightarrow \left( \bigvee_{i=1}^{m} \varphi_i^{(i)} \equiv \bigvee_{i=k}^{m} \psi_i^{(i)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{m-1} \psi_i^{(i)} \leq \varphi_i^{(i)} \Rightarrow \varphi_m^{(m)} \leq \psi_m^{(m)} \right).$$

Оттук и от четвъртата теорема от твърдението за $k = 1$ получаваме

$$\vdash_{EQP} \Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \wedge \mathbf{E} \wedge \bigwedge_{i=1}^{m-1} \psi_i \leq \varphi_i \Rightarrow \varphi_m^{(m)} \leq \psi_m^{(m)}.$$

Прилагайки първата теорема от твърдението за $k = m$ получаваме

$$\vdash_{EQP} \Diamond\theta \wedge \theta \leq \neg\theta \wedge \mathbf{E} \wedge \bigwedge_{i=1}^{m-1} \psi_i \leq \varphi_i \Rightarrow \varphi_m \leq \psi_m,$$

т.е. (2). Оттук и от (3) окончателно получаваме $\vdash_{EQP} B_m$.

## 4.5 Някои действия с модели на $EQP$

В този параграф представяме някои резултати за структурите на $EQP$, които използуваме, за да докажем, че $EQP$ е консервативно разширение на $QP$. Доказателството се основава на разширяването на произволен модел на $QP$ до модел на $EQP$, който изпълнява същите формули от езика на $QP$. Структурата на изходния модел на $QP$ при това се разглежда като *частична* структура за $EQP$, т.е. такава, в която операциите $c$ и $r$ не са навсякъде определени. Построяването на необходимата *тотална* структура за $EQP$ се състои в доопределянето на $c$ и $r$ във редица от разширения на изходната частична структура. Тези разширения са също частични структури за $EQP$ и всяко от тях в определен смисъл се *влага* в следващите в тази редица. За всеки терм, построим с операциите $c$ и $r$, съществува член от редицата, от който нататък този терм има стойност. Търсената тотална структура за $EQP$ се получава като подходящ вид *граница* (вж. напр. [Мал70]) на тази редица от частични структури.

### 4.5.1 Амалгамируемост на вероятностните пространства

Свойството *амалгамируемост* на различни класове от булеви алгебри с оператори е изучавано от различни автори [Мак79, Mar95] заради тясната му връзка с интерполационната теорема за съответните модални логики.

**Дефиниция 4.11** Нека $\mathbf{K}$ е клас от алгебри (с дадена сигнатура). $\mathbf{K}$ има свойството *силна амалгамируемост*, ако за всеки три алгебри $B_0, B_1, B_2 \in \mathbf{K}$ и влагания $g_i : B_0 \to B_i$, $i = 1, 2$, съществуват алгебра $B_3 \in \mathbf{K}$ и влагания $f_i : B_i \to B_3$, $i = 1, 2$, такива, че $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$ и $f_1(|B_1|) \cap f_2(|B_2|) = (f_1 \circ g_1)(|B_0|)$.

По-нататък вместо ситуацията от дефиниция 4.11 ще работим в по-простата, но еквивалентна на нея ситуация, където $|B_0| = |B_1| \cap |B_2|$, $B_0$ е подалгебра на $B_1$ и $B_2$ и $g_1 = g_2 = id_{B_0}$. Тогава за $f_1$ и $f_2$ е достатъчно да бъде изпълнено $f_1 \restriction |B_0| = f_2 \restriction |B_0|$, $f_1(|B_1|) \cap f_2(|B_2|) = f_1(|B_0|) = f_2(|B_0|)$.

**Теорема 4.12** *Класът на булевите алгебри има свойството силна амалгамируемост.*

Доказателство на тази теорема може да се намери например в [Гре78], глава 5. Тук доказваме аналогично тази теорема твърдение за вероятностните пространства, които се срещат в структурите за $QP$. В структурите за $QP$ участвуват булеви алгебри от подмножества на дадени множества (от възможни светове), в които действията са сечение и допълнение до множеството от възможни светове. Най-напред доказваме вариант на теорема 4.12, подходящ за този случай.

**Твърдение 4.13** *Нека $B_i$, $i = 0, 1, 2$ са булеви алгебри. Нека $B_0$ е подалгебра на $B_1$ и $B_2$ и $|B_0| = |B_1| \cap |B_2|$. Нека $B_1$ се състои от подмножества на $W_1$ и операциите в нея бъдат сечение и допълнение до $W_1$. Тогава съществува булева алгебра $B$ от подмножества на някое $W \supseteq W_1$ и влагания $f_i : B_i \to B$, $i = 1, 2$, такива, че $f_1 \restriction B_0 = f_2 \restriction B_0$, $f_1(|B_1|) \cap f_2(|B_2|) = f_1(|B_0|) = f_2(|B_0|)$ и $f_1(W') \supseteq W'$ за всяко $W' \in B_1$. Освен това, ако $B_1$ и $B_2$ са крайни или изброими, то $B$ също е съответно крайна или изброима.*

**Доказателство:** Очевидно $B_1$ е подалгебра на $B_1' = 2^{W_1}$. Прилагаме теорема 4.12 към $B_0$, $B_1'$ и $B_2$, приемайки, че $|B_2| \cap |B_1'| = |B_0|$. Нека $B^*$ е булева алгебра, а $f_1' : B_1' \to B^*$ и $f_2' : B_2 \to B^*$ са влагания в $B^*$, за които $f_1' \restriction B_0 = f_2' \restriction B_0$ и $f_1'(2^{W_1}) \cap f_2'(|B_2|) = f_1'(|B_0|) = f_2'(|B_0|)$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $B^*$ се състои от подмножества на някое множество $W^*$ и действията в нея са сечение и допълнение до $W^*$. Нека $g : W_1 \to W^*$ има свойството $g(w) \in f_1'(\{w\})$ за всяко $w \in W_1$. Изображението $g$ очевидно е инективно. Нека $W = W^* \setminus g(W_1) \cup W_1$. Нека $f : B^* \to 2^W$ е зададено с равенството $f(W') = W' \setminus g(W') \cup g^{-1}(W' \cap g(W_1))$ за всяко $W' \in B^*$. Очевидно $f$ е влагане на $B^*$ в $2^W$ и $f(f_1'(W')) \supseteq W'$ за всяко $W' \in B_1$. Нека

$f_i = f \circ f'_i$, $i = 1, 2$, и $B$ е подалгебрата на $2^W$, породена от $f_1(|B_1|) \cup f_2(|B_2|)$. Тогава $B$ има исканите свойства и, ако $B_1$ и $B_2$ са крайни или изброими, $B$ също е съответно крайна или изброима. $\dashv$

**Лема 4.14** *Нека $B_i$, $i = 0, 1, 2$ и $B$ са крайни булеви алгебри, изпълняващи условията на твърдение 4.13. Тогава за всеки две вероятностни мерки $m_i : B_i \to [0, 1]$, $i = 1, 2$, такива, че $m_1 \restriction B_1 = m_2 \restriction B_2$, съществува вероятностна мярка $m : B \to [0, 1]$, такава, че $m \restriction B_i = m_i$, $i = 1, 2$.*

**Доказателство:** Нека $B$ се състои от подмножества на $W$. Отъждествявайки $B_i$ с образите им в $B$ при $f_i$, $i = 1, 2$, можем да приемем, че $B_1, B_2 \subseteq B$. Ще допускаме и мерки, които за $W$ имат стойност, по-малка от 1. Тъй като $B$ е крайна, всяко $W' \in B$ по единствен начин се представя във вида $W' = \bigcup_{i=1}^{n} W'_i$, където $W'_i$ са минимални в $B$, т.е., ако $W'' \in B$ и $W'' \subseteq W'_i$, или $W'' = W'_i$, или $W'' = \emptyset$. От горното представяне следва, че всяка мярка на $B$ еднозначно се определя от стойностите си за минималните елементи на $B$. Ще докажем лемата с индукция по броя на минималните елементи на $B$. Ако $B$ няма минимални елементи, то $B_0 = B_1 = B_2 = B = \{\emptyset\}$ и няма какво да се доказва. Нека $W'$ е минимален елемент на $B$. Тогава, тъй като $B \supseteq B_1, B_2$, съществуват минимални елементи $W'_i$ на $B_i$ такива, че $W' \subseteq W'_i$, $i = 1, 2$. Полагаме $m(W') = \min(m_1(W'_1), m_2(W'_2))$. Сега определяме булевите алгебри $B'_i$, $i = 0, 1, 2$ от подмножества на $W \setminus W'$, $B'$ и мерките $m'_i$ на $B'_i$, $i = 1, 2$, така: $B'_i = \{W'' \setminus W' : W'' \in B_i\}$, $m'_i(W'') = m_i(W'') - m(W')$, за $W'' \supseteq W'$ и $m'_i(W'') = m_i(W'')$ за $W'' \not\supseteq W'$. Също така полагаме $B' = \{W'' \setminus W' : W'' \in B\}$. Алгебрите $B'_i$, $i = 0, 1, 2$, и $B$, и мерките $m'_i$, $i = 1, 2$ изпълняват същите условия като $B_i$, $i = 0, 1, 2$ и $B'$, и $m_i$, $i = 1, 2$, с тази разлика, че $m_i(W \setminus W')$ са може би по-малки от 1. Освен това броят на минималните елементи на $B'$ е с единица по-малък от този на минималните елементи на $B$. Според индукционното допускане $m$ с исканите свойства може да бъде определена за $B'_i$, $i = 0, 1, 2$, и $B$, и мерките $m'_i$, $i = 1, 2$. Непосредствена проверка показва, че полагайки $m(W'') = m(W'' \cap W') + m(W'' \setminus W')$ за $W'' \in B$, които в общия случай не са минимални, задава $m$ с исканите свойства. $\dashv$

Използувайки свойствата на подходящо компактно метрично пространство, както в доказателството на лема 2.9, лесно можем да докажем, че лема 4.14 е изпълнена и когато разглежданите булеви алгебри са изброими:

**Следствие 4.15** *Нека $B_i$, $i = 0, 1, 2$ и $B$ са изброими булеви алгебри, изпълняващи условията на твърдение 4.13. Тогава за всеки две вероятностни мерки $m_i : B_i \to [0, 1]$, $i = 1, 2$, такива, че $m_1 \restriction B_1 = m_2 \restriction B_2$, съществува вероятностна мярка $m : B \to [0, 1]$ такава, че $m \restriction B_i = m_i$, $i = 1, 2$.*

**Доказателство:** Нека $B$ се състои от подмножества на $W$. Да разгледаме пространството $P = [0, 1]^B$ със стандартната метрика $d(x, y) = \sum_{i<\omega} 2^{-i} |x(A_i) - y(A_i)|$. $\langle X, d \rangle$ е компактно метрично пространство. Всяко $x \in P$ е функция от $B$ към $[0, 1]$, която е вероятностна мярка, ако изпълнява условията $c_W(x) : x(W) = 1$ и $c_{W',W''}(x) : x(W') + x(W'') = x(W' \cup W'')$ за всички $W', W'' \in B$. За $x \restriction B_i = m_i$ е достатъчно да са изпълнени условията $d_{W'}(x) : x(W') = m_i(W')$ за всяко $W' \in B_i$, $i = 1, 2$. Тези условия задават затворени и, следователно, компактни подмножества на $X$. За $m$ с исканите свойства е достатъчно да изберем произволен елемент на сечението на всички тези подмножества на $X$, стига то да не е $\emptyset$. Допускаме, че сечението е $\emptyset$. Тогава съществуват краен брой от подмножествата, които също имат крайно сечение. Нека $B'_i$, $i = 0, 1, 2$ и $B'$ са булевите алгебри, породени съответно от елементите на $B_i$, $i = 0, 1, 2$ и $B$, които участвуват в условията, определящи тази крайна система от подмножества на $X$. $B'_i$, $i = 0, 1, 2$ и $B'$ са крайни и, заедно с ограниченията $m_i \restriction B'_i$ на $m_i$, $i = 1, 2$, изпълняват условията на лема 4.14. Нека $m' : B' \to [0, 1]$ е мярката, чието съществуване твърди лемата. Тогава всяко $x \in P$, за което $x \restriction B' = m'$, е елемент на крайното сечение, което допуснахме, че е $\emptyset$, а това е противоречие. $\dashv$

### 4.5.2 Частични структури за $EQP$ и техните разширения

Тук определяме частичните структури за $EQP$, влаганията на такива структури, границите на редиците от частични структури от описания по-горе вид и техните свойства.

**Дефиниция 4.16** Петорката $\langle W, B, \mu, c, r\rangle$ наричаме *частична структура за* $EQP$, ако $\langle W, B, \mu\rangle$ е структура за $QP$, а $c$ и $r$ са частични изображения от $B \times B$ към $B$, които удовлетворяват **c**1, **c**2, **r**1, **r**2, **r**$\wedge$ и **r**$\neg$ за онези елементи на $B$, за които са дефинирани.

В частична структура $F = \langle W, B, \mu, c, r\rangle$ за $EQP$ с $\mu$ означаваме още и изображението от $B \times B$ към $B$, определено с равенството

$$\mu(W', W'') = \{w \in W : \mu(w)(W') \leq \mu(w)(W'')\}.$$

С $\mathbf{T}(A)$ означаваме множеството от термовете, образувани от елементите на $A \subseteq B$ с булевите операции и операциите $\mu$, $c$ и $r$, а с $\mathbf{T}(F, A)$ - множеството на тези от тях, които имат стойност в $F$.

**Дефиниция 4.17** *Нека $F_i = \langle W_i, B_i, \mu_i, c_i, r_i\rangle$, $i = 1, 2$, са частични структури за $EQP$. Наредената двойка $\langle f, g\rangle$ се нарича влагане на $F_1$ в $F_2$, ако $f$ е влагане на $B_1$ в $B_2$, а $g$ е инективно изображение на $W_1$ в $W_2$, и са изпълнени условията:*

- *За всяко $w \in W_1$ и всяко $W' \in B_1$ от $w \in W'$ следва $g(w) \in f(W')$.*
- *За всяко $w \in W_1$ и всяко $W' \in B_1$ $\mu_2(g(w))(f(W')) = \mu_1(w)(W')$.*
- *За всеки две $W', W'' \in B_1$ $f(\mu_1(W', W'')) = \mu_2(f(W'), f(W''))$.*
- *Ако $c_1(W', W'')$, съответно $r(W', W'')$, е определено, то определено е и $c_2(f(W'), f(W''))$, съответно $r_2(f(W'), f(W''))$, и $c_2(f(W'), f(W'')) = f(c_1(W', W''))$, съответно $r_2(f(W'), f(W'')) = f(r_1(W', W''))$.*

Очевидно, ако $\langle f, g\rangle$ е влагане на $F_1$ в $F_2$, то $\mathbf{T}(F_1, A) \subseteq \mathbf{T}(F_2, f(A))$ за всяко подмножество $A$ на булевата алгебра на $F_1$. По-нататък разглеждаме редици $F_i = \langle W_i, B_i, \mu_i, c_i, r_i\rangle$, $i < \omega$, от частични структури за $EQP$ със следните свойства: $W_i$, $i < \omega$, са две по две непресичащи се множества. За всяко $i < \omega$ е дадено влагане $\langle f_i, g_i\rangle$ на $F_i$ в $f_{i+1}$. В такава редица за $i < j < \omega$ с $f_{i,j}$ и $g_{i,j}$ означаваме съответно $f_{j-1} \circ \ldots \circ f_i$ и $g_{j-1} \circ \ldots \circ g_i$. За всяко $i < \omega$ с $f_{i,i}$ и $g_{i,i}$ означаваме съответно $id_{B_i}$ и $id_{W_i}$. Очевидно $\langle f_{i,j}, g_{i,j}\rangle$ е влагане на $F_i$ в $F_j$ за всички $i \leq j < \omega$. В следващите дефиниции и твърдения предполагаме, че е фиксирана редица от горния вид.

**Дефиниция 4.18** Релацията $\sim$ в множеството $\bigcup\limits_{i<\omega} W_i$ определяме с условието: $w' \sim w''$ тогава и само тогава, когато съществуват $i \leq j < \omega$ такива, че $w'' = g_{i,j}(w')$ или $w' = g_{i,j}(w'')$.

**Лема 4.19** *$\sim$ е релация на еквивалентност в $\bigcup\limits_{i<\omega} W_i$. Всеки клас на еквивалентност спрямо $\sim$ има вида $\{g_{i,j}(w) : i \leq j < \omega\}$ за някое $i < \omega$ и някое $w \in W_i$.*

**Доказателство:** Непосредствена проверка. $\dashv$

Нека $W = \{[w]_\sim : w \in W_i, i < \omega\}$. Нека $f$ е изображението на $\bigcup\limits_{i<\omega} B_i$ в $W$, зададено за всяко $i < \omega$ и всяко $W' \in B_i$ с равенството

$$f(W') = \{[w]_\sim : w \in f_{i,j}(W'), i \leq j < \omega\}.$$

**Лема 4.20** *Нека $W' \in B_i$, $W'' \in B_j$ и $j \geq i$. Тогава $f_{i,j}(W') = W''$ е равносилно на $f(W') = f(W'')$.*

**Доказателство:** ($\rightarrow$) Нека $w \in f_{i,k}(W')$ за някое $k \geq i$. Тогава, ако $k < j$, то $g_{k,j}(w) \in f_{k,j}(f_{i,k}(W')) = W''$. Оттук, $[w]_\sim = [g_{k,j}(w)]_\sim \in f(W'')$. Ако $k \geq j$, то $w \in f_{j,k}(W'')$ и отново $[w]_\sim \in f(W'')$. Нека $w \in f_{j,k}(W'')$ за някое $k \geq j$. Тогава $w \in f_{i,k}(W')$, откъдето $[w]_\sim \in f(W')$.

($\leftarrow$) Нека $f_{i,j}(W') = W'''$. Тогава $f(W'') = f(W') = f(W''')$ по лема 4.20. Доказваме, че $W'' = W'''$. Нека $A = \{w \in W_j : [w]_\sim \in f(W'')\}$. Ако $w \in A$, то $[w]_\sim = [w']_\sim$ за някое $w' \in f_{j,k}(W'')$ и някое $k \geq j$. От лема 4.19 следва, че $w' = g_{j,k}(w)$. Това означава, че $w \in W''$, защото $\langle f_{j,k}, g_{j,k}\rangle$ е влагане на $F_j$ в $F_k$. Освен това, от $w \in W''$ следва $[w]_\sim \in f(W'')$, откъдето $w \in A$. Следователно $A = W''$. Аналогично $\{w \in W_j : [w]_\sim \in f(W''')\} = W'''$. Сега $W'' = W'''$ следва от $f(W'') = f(W''')$. $\dashv$

Нека $B = \{f(W') : W' \in B_i, i < \omega\}$.

**Лема 4.21** *$B$ е булева алгебра от подмножества на $W$ спрямо сечението и допълнението до $W$.*

**Доказателство:** Достатъчно е да докажем, че $W \in B$ и $f(W') \setminus f(W'') \in B$ за всеки две $W', W'' \in \bigcup_{i<\omega} B_i$. Тъй като $W_k = f_{0,k}(W_0)$ за всяко $k < \omega$, $f(W_0) = \{[w]_\sim : w \in f_{(0,k}(W_0), k < \omega\} = W$. Следователно $W \in B$. Ако $W' \in B_i$, $W'' \in B_j$ и $k = \max(i,j)$, то $f(W') = f(f_{i,k}(W'))$ и $f(W'') = f(f_{j,k}(W''))$ по лема 4.20. Следователно, без ограничение на общността можем да считаме, че $i = j = k$. Ще докажем, че $f(W') \setminus f(W'') = f(W' \setminus W'')$. Нека $[w]_\sim \in f(W') \setminus f(W'')$. Тогава $[w]_\sim = [w']_\sim$ за някое $w' \in f_{k,k'}(W')$, $k' \geq k$. Ако $[w]_\sim = [w'']_\sim$ за някое $w'' \in f_{k,k''}(W'')$, $k'' \geq k$, то $[w]_\sim \in f(W'')$, което е противоречие. Следователно $w' \in f_{k,k'}(W') \setminus f_{k,k'}(W'')$ за някое $k' \geq k$. Оттук, тъй като $\langle f_{k,k'}, g_{k,k'}\rangle$ е влагане на $F_k$ във $F_{k'}$, $w' \in f_{k,k'}(W' \setminus W'')$. Следователно $[w]_\sim = [w']_\sim \in f(W' \setminus W'')$. Обратно, нека $[w]_\sim = [w']_\sim \in f(W' \setminus W'')$. Тогава $[w]_\sim = [w']_\sim$ за някое $w' \in f_{k,k'}(W' \setminus W'')$ и някое $k' \geq k$. Следователно $w' \in f_{k,k'}(W') \setminus f_{k,k'}(W'')$, а оттук, $g_{k',n}(w') \in f_{k,n}(W') \setminus f_{k,n}(W'')$ за всички $n \geq k'$. Това означава, че $[w']_\sim \in f(f_{k,k'}(W')) = f(W')$. Ако, освен това, е изпълнено и $[w]_\sim \in f(W'')$, то $[w]_\sim = [w'']_\sim$ за някое $w'' \in f_{k,k''}(W'')$ и някое $k'' \geq k$. Оттук $g_{k'',n}(w'') \in f_{k,n}(W'')$ за всички $n \geq k''$. Но, тъй като $[w]_\sim = [w']_\sim = [w'']_\sim$, от лема 4.19 следва, че $g_{k',n}(w') = g_{k'',n}(w'')$ за $n \geq \max(k', k'')$, което е противоречие. Следователно $[w]_\sim \in f(W') \setminus f(W'')$. $\dashv$

**Лема 4.22** *Нека $w' \in W_{i'}$, $w'' \in W_{i''}$, $W' \in W_{j'}$, $W'' \in W_{j''}$. Нека $[w']_\sim = [w'']_\sim$ и $f(W') = f(W'')$. Тогава, ако $k' = \max(i', j')$, а $k'' = \max(i'', j'')$, то $\mu(g_{i',k'}(w'))(f_{j',k'}(W')) = \mu(g_{i'',k''}(w''))(f_{j'',k''}(W''))$.*

**Доказателство:** Нека $n = \max(k', k'')$. Тогава от $[w']_\sim = [w'']_\sim$ по лема 4.19 следва, че $g_{i',n}(w') = g_{i'',n}(w'')$, а от $f(W') = f(W'')$ по лема 4.20 следва, че $f_{j',n}(W') = f_{j'',n}(W'')$. Тъй като $\langle f_{k',n}, g_{k',n}\rangle$ и $\langle f_{k'',n}, g_{k'',n}\rangle$ са влагания съответно на $F_{k'}$ и $F_{k''}$ в $F_n$, са изпълнени равенствата

$$\mu(g_{i',k'}(w'))(f_{j',k'}(W')) = \mu(g_{i',n}(w'))(f_{j',n}(W')) =$$

$$= \mu(g_{i'',n}(w''))(f_{j'',n}(W'')) = \mu(g_{i'',k''}(w''))(f_{j'',k''}(W'')).$$

$\dashv$

Определяме $\mu : W \rightarrow (B \rightarrow [0,1])$ по следния начин: Ако $w \in W_i$, $W' \in B_j$ за някои $i, j < \omega$ и $k = \max(i,j)$, полагаме $\mu([w]_\sim)(f(W')) = \mu(g_{i,k}(w))(f_{j,k}(W'))$. От предходната лема следва, че това определение е коректно.

**Лема 4.23** *$\mu([w]_\sim)$ е вероятностна мярка на $B$ за всяко $[w]_\sim \in W$.*

**Доказателство:** Нека $W' \in B_i$, $W'' \in B_j$ и $f(W') \cap f(W'') = \emptyset$. Нека $w \in B_k$ и $l = \max(i,j,k)$. Тъй като $f(W') = f(f_{i,l}(W'))$ и $f(W'') = f(f_{j,l}(W''))$, имаме

$$f(W') \cup f(W'') = f(f_{i,l}(W')) \cup f(f_{j,l}(W'')) = W \setminus ((W \setminus f(f_{i,l}(W'))) \setminus f(f_{j,l}(W''))) =$$

$$= f(W_l \setminus ((W_l \setminus f_{i,l}(W')) \setminus f_{j,l}(W''))) = f(f_{i,l}(W') \cup f_{j,l}(W''))$$

(вж. доказателството на лема 4.20). Аналогично, от

$$\emptyset = f(W') \cap f(W'') = f(f_{i,l}(W') \cap f_{j,l}(W''))$$

получаваме $f_{i,l}(W') \cap f_{j,l}(W'') = \emptyset$. Оттук

$$\mu([w]_\sim)(f(W') \cup f(W'')) = \mu_l(g_{k,l}(w))(f_{i,l}(W') \cup f_{j,l}(W'')) =$$

$$= \mu_l(g_{k,l}(w))(f_{i,k}(W')) + \mu_l(g_{k,l}(w))(f_{j,l}(W'')) = \mu([w]_\sim)(f(W')) + \mu([w]_\sim)(f(W'')).$$

Равенството $\mu([w]_\sim)(W) = 1$ за всяко $[w]_\sim \in W$ следва от равенството $\mu_n(w)(W_n) = 1$, където $w \in W_n$. $\dashv$

**Лема 4.24** *Ако $W', W'' \in B_i$, то*

$$\mu(f(W'), f(W'')) = \{[w]_\sim \in W : \mu([w]_\sim)(f(W')) \leq \mu([w]_\sim)(f(W''))\}$$

*съвпада с $f(\mu_i(W', W''))$. $B$ е затворена относно $\mu$.*

**Доказателство:** Нека $[w]_\sim = [w']_\sim$ за някое $w' \in f_{i,j}(\mu_i(W', W''))$ и някое $j \geq i$. Тогава, тъй като $\langle f_{i,j}, g_{i,j}\rangle$ е влагане на $F_i$ в $F_j$,

$$\mu_j(w')(f_{i,j}(W')) \leq \mu_j(w')(f_{i,j}(W'')),$$

откъдето

$$\mu([w']_\sim)(f(W')) \leq \mu([w']_\sim)(f(W'')).$$

Следователно $f(\mu_i(W', W'')) \subseteq \mu(f(W'), f(W''))$. Обратно, ако

$$\mu([w']_\sim)(f(W')) \leq \mu([w']_\sim)(f(W'')),$$

по определението на $\mu$ за $j \geq i$, $w' \in W_j$ имаме $\mu_j(w')(f_{i,j}(W')) \leq \mu_j(w')(f_{i,j}(W''))$. Следователно $w' \in \mu_j(f_{i,j}(W'), f_{i,j}(W'')) = f_{i,j}(\mu_i(W', W''))$, откъдето $[w'] \in f(\mu_i(W', W''))$. Следователно $\mu(f(W'), f(W'') \subseteq f(\mu_i(W', W''))$, с което равенството от лемата е доказано.

Нека $W' \in B_i$, $W'' \in B_j$. Нека $k = \max(i, j)$. Тогава

$$\mu(f(W'), f(W'')) = \mu(f(f_{i,k}(W')), f(f_{j,k}(W''))) = f(\mu_k(f_{i,k}(W'), f_{j,k}(W''))) \in B.$$

$\dashv$

Полученото дотук показва, че $\langle W, B, \mu\rangle$ е структура за $QP$. Преминаваме към определянето на частичните операции $c$ и $r$ в $B$.

**Лема 4.25** *Нека $W' \in B_{i'}$, $W'' \in B_{i''}$, $W''' \in B_{i'''}$ и $f(W'') = f(W''')$. Нека $j \geq \max(i', i'')$, $j' \geq \max(i', i''')$. Тогава*

$$f(c_l(f_{i',l}(W'), f_{i'',l}(W''))) = f(c_{l'}(f_{i',l'}(W'), f_{i''',l}(W')))$$

*и*

$$f(c_l(f_{i'',l}(W''), f_{i',l}(W'))) = f(c_{l'}(f_{i''',l'''}(W'''), f_{i',l}(W'))),$$

*стига съответните стойности на $c_l$ и $c_{l'}$ да съществуват. Същото е вярно и за $r_l$ и $r_{l'}$.*

**Доказателство:** Нека $k = \max(l, l')$. От лема 4.20 имаме, че $f_{i'',k}(W'') = f_{i''',k}(W''')$. Тогава, тъй като $\langle f_{j,k}, g_{j,k}\rangle$ са влагания на $F_j$ в $F_k$ за $j = i', i'', i'''$, имаме

$$f(c_l(f_{i',l}(W'), f_{i'',l}(W''))) = f(f_{l,k}(c_l(f_{i',l}(W'), f_{i'',l}(W'')))) =$$

$$= f(c_k(f_{i',k}(W'), f_{i'',k}(W''))) = f(c_k(f_{i',k}(W'), f_{i''',k}(W'''))) =$$
$$= f(f_{l',k}(c_l(f_{i',l'}(W'), f_{i''',l'}(W''')))) = f(c_{l'}(f_{i',l'}(W'), f_{i''',l}(W''))).$$

Равенството, в което $W''$ и $W'''$ задават вторите аргументи съответно на $c_l$ и $c_{l'}$, се получава по същия начин. Доказателството за $r$ е същото. $\dashv$

Нека $W' \in B_i$, $W'' \in B_j$. Ако съществува $l \geq i, j$ такова, че $c_l(f_{i,l}(W'), f_{j,l}(W''))$ е определено, полагаме $c(f(W'), f(W'')) = f(c_l(f_{i,l}(W'), f_{j,l}(W')))$. Иначе $c(f(W'), f(W''))$ е неопределено. Аналогично $r(f(W'), f(W'')) = f(r_l(f_{i,l}(W'), f_{j,l}(W')))$, ако $r_l(f_{i,l}(W'), f_{j,l}(W''))$ е определено за някое $l \geq i, j$.

**Лема 4.26** *Нека $W', W'' \in B_i$. Тогава, ако $c_i(W', W'')$ е определено, то $c(f(W'), f(W'')) = f(c_i(W', W''))$. Същото е вярно и за $r_i$ и $r$.*

**Доказателство:** Следва от определенията на $c$ и $r$. $\dashv$

**Твърдение 4.27** *$F = \langle W, B, \mu, c, r\rangle$ е частична структура за $EQP$.*

**Доказателство:** $\langle W, B, \mu\rangle$ е структура за $QP$, както следва от леми 4.21, 4.23 и 4.24. Остава да докажем, че $c$ и $r$ изпълняват **c**1, **c**2, **r**1, **r**2, **r**$\neg$ и **r**$\wedge$ за онези елементи на $B$, за които са определени. Всяко от условията за $f(W')$, $f(W'')$, ... следва от съответното условие за образите на $W'$, $W''$, ..., в първата от структурите $F_i$, в която съответните операции над тези образи са дефинирани. Доказателствата са напълно еднообразни. Доказваме само **r**$\wedge$ за пример.

Нека $W' \in B_{i'}$, $W'' \in B_{i''}$, $W''' \in B_{i'''}$. Нека $j \geq i', i'', i'''$ е такова, че $r_j(f_{i',j}(W'), f_{i''',j}(W'''))$, $r_j(f_{i'',j}(W''), f_{i''',j}(W'''))$ и $r_j(f_{i',j}(W') \cap f_{i'',j}(W''), f_{i''',j}(W'''))$ са определени. Тогава, тъй като $F_j$ е частична структура за $EQP$,

$$r_j(f_{i',j}(W'), f_{i''',j}(W''')) \cap r_j(f_{i'',j}(W''), f_{i''',j}(W''')) =$$
$$= r_j(f_{i',j}(W') \cap f_{i'',j}(W''), f_{i''',j}(W''')).$$

Оттук

$$r(f(W') \cap f(W''), f(W''')) = f(r_j(f_{i',j}(W') \cap f_{i'',j}(W''), f_{i''',j}(W'''))) =$$
$$= f(r_j(f_{i',j}(W'), f_{i''',j}(W''')) \cap r_j(f_{i'',j}(W''), f_{i''',j}(W'''))) =$$
$$= f(r_j(f_{i',j}(W'), f_{i''',j}(W'''))) \cap f(r_j(f_{i'',j}(W''), f_{i''',j}(W'''))) =$$
$$= r(f(f_{i',j}(W')), f(f_{i''',j}(W'''))) \cap r(f(f_{i'',j}(W'')), f(f_{i''',j}(W'''))) =$$
$$= r(f(W'), f(W''') \cap r(f(W''), f(W''')).$$

$\dashv$

От определенията на $c$ и $r$ следва, че за всяко $i < \omega$ и $A \subseteq B_i$ $\mathbf{T}(F, f(A)) = \bigcup_{i \leq j < \omega} \mathbf{T}(F_j, f_{i,j}(A))$. Нека $g : \bigcup_{i<\omega} W_i \to W$ е определено с равенството $g(w) = [w]_\sim$.

**Твърдение 4.28** *$\langle f\restriction B_i, g\restriction W_i\rangle$ е влагане на $F_i$ в $F$ за всяко $i < \omega$.*

**Доказателство:** Ако $w, w' \in W_i$ и $[w]_\sim = [w']_\sim$, то от лема 4.19 следва, че $w = w'$. Това показва, че $g\restriction W_i$ е инективно. Както е показано в доказателството на лема 4.20, $f(W' \setminus W'') = f(W') \setminus f(W'')$ за всеки две $W', W'' \in B_i$. Освен това $f(W_i) = W$. Следователно $f\restriction B_i$ е влагане на $B_i$ в $B$. Нека $w \in W'$ и $W' \in B_i$. Тогава, тъй като $w = g_{i,i}(w) \in f_{i,i}(W')$, $g(w) = [w]_\sim \in f(W')$. $\mu(g(w))(f(W')) = \mu_i(w)(W')$ за всяко $w \in W_i$ и всяко $W' \in B_i$ според определението на $\mu$. Освен това за всеки две $W', W'' \in B_i$ $\mu(f(W'), f(W'')) = f(\mu_i(W', W''))$ според лема 4.24 и $c(f(W'), f(W'') = f(c_i(W', W''))$ и $r(f(W'), f(W'')) = f(r_i(W', W''))$, когато $c_i(W', W'')$ и, съответно, $r_i(W', W'')$ са определени според лема 4.26. $\dashv$

Построената по-горе частична структура $F$ за $EQP$ наричаме *граница* на редицата $F_i$, $i < \omega$ от частични структури за $EQP$.

### 4.5.3 Разширяване на частичните структури за $EQP$ до (тотални) структури за $EQP$

Тук доказване, че всяка крайна частична структура $F_0 = \langle W_0, B_0, \mu_0, c_0, r_0\rangle$ за $EQP$ с изброима $B_0$ може да бъде вложена в (тотална) структура за $EQP$, стига да изпълнява следното условие: За всяко $W^* \in B_0$ множеството $B^* = \{W' \in B_0 : r_0(W', W^*)$ е определено$\}$ е подалгебра на $B_0$. Доказателството е устроено по следния начин. Тъй като $B_0$ е крайна, $\mathbf{T}(B_0)$ е изброимо и може да се представи като изброимо обединение на непресичащите се крайни множества $\mathbf{T}_k(B_0)$, които определяме по следния начин: $\mathbf{T}_k(B_0) = \{t \in \mathbf{T}(B_0) : t$ съдържа точно $k$ участия на символи измежду $\neg, \wedge, \leq, c$ и $r\}$. Нека $\mathbf{T}(B_0) = \{t_j : j < \omega\}$ и тази номерация е такава, че ако $t_{j'} \in \mathbf{T}_i(B_0)$, а $t_{j''} \in \mathbf{T}_{i+1}(B_0)$, то $j' < j''$. Очевидно, ако $t \in \mathbf{T}_k(B_0)$, подтермовете на $t$ са в $\mathbf{T}_i(B_0)$ за $i < k$ и, следователно имат по-малки номера в редицата $t_i$, $i < \omega$. Сега нека разгледаме редицата от частични структури за $EQP$ $F_i$, $i < \omega$, чийто първи член е дадената частична структура, а всеки следващ член $F_i$ е разширение на предходния, в което $c$ и $r$ са доопределени така, че термът $t_i$ да има стойност. Очевидно границата на такава редица от разширения на $F_0$ е структура за $EQP$, в която имат стойност всички термове от $\mathbf{T}(B_0)$.

Основните стъпки в описаната конструкция са построяването на разширение на дадена частична структура за $EQP$ $F_1 = \langle W_1, B_1, \mu_1, c_1, r_1\rangle$, в което $r(W', W^*)$ се доопределя за някое фиксирано $W^*$ и всички $W' \in B_1$, и построяването на разширение в което $c(W', W'')$ се додефинира за някои фиксирани $W', W'' \in B_1$.

Най-напред описваме стъпката за доопределяне на $r$. Нека фиксираме частичната структура за $EQP$ $F_1$ с крайно $B_1$ и множеството $W^* \in B_1$. Нека означим подалгебрата $\{W' \in B_1 : r_1(W', W^*)$ е определено$\}$ на $B_1$ с $B^*$. Нека $B^0 = \{W' \cap W^* : W' \in B_1\}$. Очевидно $B^0$ булева алгебра от подмножества на $W^*$ и $B^r = \{r_1(W', W^*) : W' \in B^*\}$ е подалгебра на $B^0$. При това от свойствата на $r_1$ следва, че изображението $f_{W^*}$ от $B^*$ към $B^0$, което на всяко $W' \in B^*$ съпоставя $r(W', W^*)$, е влагане на $B^*$ в $B^0$ (с образ $B^r$). Нека за всяко $w \in W_1$ определим вероятностна мярка $\mu^0_w$ на $B^0$ по следния начин: Ако $\mu_1(w)(W^*) \neq 0$, то $\mu^0_w(W' \cap W^*) = \mu_1(w)(W' \cap W^*)/\mu_1(w)(W^*)$. Иначе $\mu^0_w$ е кое да е разширение на $\mu^*_w$, която се определя върху $B^r$ с равенството $\mu^*_w(r_1(W', W^*)) = \mu_1(w)(W')$. Такова разширение съществува вследствие на лема 2.9. И в двата случая $\mu^0_w(f_{W^*}(W')) = \mu_1(w)(W')$ за всяко $w \in W_1$ и $W' \in B^*$. Да разгледаме $B^*$, $B_1$ и $B^0$. $B^*$ е подалгебра на $B_1$, която посредством $f_{W^*}$ се влага в $B^0$. За всяко $w$ $\mu_1(w)\restriction B^*$, $\mu_1(w)$ и $\mu^0_w$ изпълняват условията на лема 4.14. Следователно съществува крайна булева алгебра $B^e$ и влагания $f' : B_1 \to B^e$ и $f'' : B^0 \to B^e$ такива, че $f'\restriction B^* = f'' \circ f_{W^*}$ и $f'(|B^*|) = f'(|B_1|) \cap f''(|B^0|)$, и за всяко $w$ съществува вероятностна мярка $\mu^e_w$ на $B^e$, която удовлетворява равенствата $\mu^e_w(f'(W')) = \mu_1(w)(W')$ за $W' \in B_1$ и $\mu^e_w(f''(W')) = \mu^0_w(W')$ за $W' \in B^0$. Можем да считаме, че $B_1$ се състои от подмножества на някое множество $W^e \supseteq W^*$, че $f''(W') \supseteq W'$ за $W' \in B^0$ и че $W^e \cap W_1 = W^*$.

Сега нека $W_2 = W_1 \cup W^e$, $B^0_2 = \{(W' \setminus W^*) \cup W'' : W' \in B_1, W' \in B^e\}$. Нека $f : B_1 \to B^0_2$ бъде определено с равенството $f(W') = W' \setminus W^* \cup f''(W' \cap W^*)$ за всяко $W' \in B_1$.

**Лема 4.29** *$B^0_2$ е булева алгебра от подмножества на $W_2$. $f$ е влагане на $B_1$ в $B^0_2$.*

**Доказателство:** Тъй като $W_1 \cap W^e = W^*$, $W_2 \setminus ((W' \setminus W*) \cup W'') = ((W_1 \setminus W') \setminus W^*) \cup (W^e \setminus W'') \in B^0_2$, стига $W' \in B_1$ и $W'' \in B^e$. Също така $((W' \setminus W^*) \cup W'') \cap ((W''' \setminus W^*) \cup W^{IV}) = ((W' \cap W''') \setminus W^*) \cup (W'' \cap W^{IV}) \in B^0_2$, когато $W', W''' \in B_1$ и $W'', W^{IV} \in B^e$. Също такава непосредствена проверка показва, че $f$ е влагане на $B_1$ в $B^0_2$. $\dashv$

Нека за всяко $w \in W_1$ и всяко $W' \in B^0_2$ определим $\mu^0_{2,w} : B^0_2 \to [0,1]$ с равенството $\mu^0_{2,w}(W') = \mu_1(w)(W' \cap (W_1 \setminus W^*)) + \mu^e_w(W' \cap W^e)\mu_1(w)(W^*)$. Нека за всяко $w \in W^e \setminus W^*$ определим $\mu^0_{2,w} : B^0_2 \to [0,1]$ по следния начин. Избираме $w' \in \bigcap_{\substack{W' \in B_1 \\ w \in f''(W')}} W'$. Тъй като

$B_1$ е крайна и непразното сечение $\bigcap_{\substack{W' \in B_1 \\ w \in f''(W')}} f''(W')$ е сечение на краен брой елементи на $B_2^0$. Тъй като $f''(W') \supseteq W'$ за всяко $W' \in B_1$, $w' \in \bigcap_{\substack{W' \in B_1 \\ w \in f''(W')}} f''(W')$. Полагаме $\mu^0_{2,w} = \mu^0_{2,w'}$.

**Лема 4.30** *$\mu^0_{2,w}$ е вероятностна мярка на $B_2^0$ за всяко $w \in W_2$. $\mu^0_{2,w}(f(W')) = \mu_1(w)(W')$ за всяко $w \in W_1$ и всяко $W' \in B_1$.*

**Доказателство:** Нека $w \in W_1$. Тогава адитивността на $\mu^0_{2,w}$ следва от адитивността на $\mu_1(w)$ и $\mu^e_w$. Освен това $\mu^0_{2,w}(W_2) = \mu_1(w)(W_1 \setminus W^*) + \mu^e_w(W^e)\mu_1(w)(W^*) = \mu_1(w)(W_1 \setminus W^*) + \mu_1(w)(W^*) = 1$. Нека $w \in W^e \setminus W^*$. Тогава $\mu^0_{2,w}$ съвпада с $\mu^0_{2,w'}$ за някое $w' \in W_1$. Ако $\mu_1(w)(W^*) = 0$, то $\mu^0_{2,w}(f(W')) = \mu_1(w)(f(W') \cap (W_1 \setminus W^*)) = \mu_1(w)(W' \setminus W^*) = \mu_1(w)(W')$. Иначе $\mu^0_{2,w}(f(W')) = \mu_1(w)(f(W') \cap (W_1 \setminus W^*)) + \mu^e_w(f(W') \cap W^e)\mu_1(w)(W^*) = \mu_1(w)(W' \setminus W^*) + \mu^e_w(f''(W' \cap W^*))\mu_1(w)(W^*) = \mu_1(w)(W' \setminus W^*) + \mu^0_w(W' \cap W^*)\mu_1(w)(W^*) = \mu_1(w)(W' \setminus W^*) + (\mu_1(w)(W' \cap W^*)/\mu_1(w)(W^*))\mu_1(w)(W^*) = \mu_1(w)(W' \setminus W^*) + \mu_1(w)(W' \cap W^*) = \mu_1(w)(W')$. $\dashv$

**Лема 4.31** *За всеки две $W', W'' \in B_1$*

$$f(\mu_1(W', W'')) = \{w \in W_2 : \mu^0_{2,w}(f(W')) \leq \mu^0_{2,w}(f(W''))\}.$$

**Доказателство:** Следва от определението на $\mu^0_{2,w}$, $w \in W_2$. $\dashv$

Нека забележим, че $B_2^0$ може и да не е затворена относно образуването на множества от вида $\{w \in W_2 : \mu^0_{2,w}(W') \leq \mu^0_{2,w}(W'')\}$, когато $W', W'' \notin f(|B_1|)$. Затова построяваме растящата редица $B_2^k$, $k < \omega$, от булеви алгебри от подмножества на $W_2$, първата от които е вече въведената алгебра, и редицата от изображения $\mu^k_2 : W_2 \to (B_2^k \to [0,1])$ както следва: $\mu^0_2(w) = \mu^0_{2,w}$ за всяко $w \in W_2$. $B_2^{k+1}$ е булевата алгебра от подмножества на $W_2$, породена от елементите на $B_2^k$ и множествата от вида $\mu^k_2(w)(W', W''$, където $W', W'' \in B_2^k$. За всяко $w \in W_2$ $\mu^{k+1}_2(w)$ е вероятностна мярка на $B_2^{k+1}$, чието ограничение до $B_2^k$ съвпада с $\mu^k_2(w)$. Такава мярка съществува според лема 2.9. Нека $B_2 = \bigcup_{k<\omega} B_2^k$. Нека $\mu_2(w) = \bigcup_{k<\omega} \mu^k_2(w)$. Следната лема сега е очевидна.

**Лема 4.32** *$B_2$ е булева алгебра от подмножества на $W_2$. $\mu_2(w)$ е вероятностна мярка на $B_2$ за всяко $w \in W_2$. Ако $W', W'' \in B_2$, то $\mu_2(W', W'') \in B_2$.*

С това получихме, че $\langle W_2, B_2, \mu_2 \rangle$ е структура за $QP$. Нека $c_2$ и $r_2$ са частични изображения на $B_2 \times B_2$ в $B_2$, определени по следния начин: $c_2(f(W'), f(W'')) = f(c_1(W', W''))$ за онези $W', W'' \in B_1$, за които е определено $c_1(W', W'')$. За $W', W'' \notin f(|B_1|)$ $c_2$ е неопределено. $r_2(f(W'), f(W'')) = f(r_1(W', W''))$ за онези $W', W'' \in B_1$, $W'' \neq W^*$, за които е определено. Освен това $r_2(f(W'), f(W^*)) = f'(W')$ за всяко $W' \in B_1$.

**Лема 4.33** *$F_2 = \langle W_2, B_2, \mu_2, c_2, r_2 \rangle$ е частична структура за $EQP$ с крайна булева алгебра $B_2$. $c_2(f(W'), f(W''))$ и $r_2(f(W'), f(W''))$ са определени винаги, когато $c_1(W', W'')$ и, съответно, $r_1(W', W'')$ е определено. $r_2(f(W'), f(W^*))$ е определено за всяко $W' \in B_1$. $\{W' \in B_2 : r_2(W', W'')$ е определено$\}$ е подалгебра на $B_2$ за всяко $W'' \in B_2$. Освен това $\langle f, id_{W_1} \rangle$ е влагане на $F_1$ в $F_2$.*

**Доказателство:** Непосредствена проверка. $\dashv$

С лема 4.33 завършваме основната стъпка за доопределяне на $r$. Преминаваме към стъпката за доопределяне на $c$. Нека отново фиксираме частичната структура $F_1$ за $EQP$ с крайна $B_1$. Нека $W^0, W^* \in B_1$ са такива, че $c_1(W^0, W^*)$ да е неопределено. Можем да предполагаме, че $W^* \times \{0,1\} \cap W_1 = \emptyset$. Нека $W_2 = (W_1 \setminus W^*) \cup$

$W^* \times \{0,1\}$. Нека $B^* = \left\{ \bigcup_{i<k} (W'_i \cap W^*) \times C_i : W'_i \in B_1, C_i \subseteq \{0,1\}, i < k, k < \omega \right\}$. Нека $B_2^0 = \{(W' \setminus W^*) \cup W'' : W' \in B_1, W'' \in B^*\}$. Нека $f(W') = (W' \setminus W^*) \cup (W' \cap W^*) \times \{0,1\}$ за всяко $W' \in B_1$.

**Лема 4.34** *$B^*$ е булева алгебра от подмножества на $W^* \times \{0,1\}$. $B_2^0$ е булева алгебра от подмножества на $W_2$. $f$ е влагане на $B_1$ в $B_2^0$.*

**Доказателство:** Непосредствена проверка. $\dashv$

Нека за всяко $w \in W_1$ определим $\mu^0_{2,w} : B_2^0 \to [0,1]$ по следния начин. Всеки елемент на $B^*$ по единствен начин се представя във вида $\bigcup_{i<k} W'_i \times C_i$, където $W'_i \in B_1$, $i < k$, са две по две непресичащи се подмножества на $W^*$, а $C_i \subseteq \{0,1\}$. Полагаме $\mu^0_{2,w}\left((W' \setminus W^*) \cup \bigcup_{i<k} W'_i \times C_i\right) = \mu_1(w)(W' \setminus W^*) + \sum_{i<k} \mu_1(w)(W'_i) k_w(C_i)$. Тук $k_w(\emptyset) = 0$, $k_w(\{0\}) = 0$, ако $\mu_1(w)(W^*) = 0$, $k_w(\{0\}) = \min(\mu_1(w)(W^0), \mu_1(w)(W^*))/\mu_1(w)(W^*)$, ако $\mu_1(w)(W^*) \neq 0$, $k_w(\{1\}) = 1 - k_w(\{0\}$, а $k_w(\{0,1\}) = 1$. Нека $\mu^0_{2,\langle w,i\rangle} = \mu^0_{2,w}$ за всяко $w \in W^*$ и $i = 0,1$.

**Лема 4.35** *$\mu^0_{2,w}$ е вероятностна мярка на $B_2^0$ за всяко $w \in W_2$. $\mu^0_{2,w}(f(W')) = \mu_1(w)(W')$ за всяко $w \in W_1 \setminus W^*$ и $\mu^0_{2,\langle w,i\rangle}(f(W')) = \mu_1(w)(W')$ за всяко $w \in W^*$ и $i = 0,1$. Освен това $\{w \in W_2 : \mu^0_{2,w}(f(W')) \leq \mu^0_{2,w}(f(W''))\} = f(\mu_1(W', W''))$ за всеки две $W', W'' \in B_1$.*

**Доказателство:** Непосредствена проверка. $\dashv$

Точно както и в конструкцията за доопределяне на $r$, $B_2^0$ може да не е затворена относно образуването на множества от вида $\{w \in W_2 : \mu^0_{2,w}(W') \leq \mu^0_{2,w}(W'')\}$, където $W', W'' \in B_2^0$. Затова по същия начин строим редиците $B_2^i$ и $\mu_2^i$, $i < \omega$ и полагаме $B_2 = \bigcup_{i<\omega} B_2^i$ и $\mu_2(w) = \bigcup_{i<\omega} \mu_2^i(w)$ за всяко $w \in W_2$. За получената структура $\langle W_2, B_2, \mu_2\rangle$ отново е в сила лема 4.32, откъдето следва, че тя е структура за $QP$. Нека отново $c_2$ и $r_2$ са частични изображения на $B_2 \times B_2$ в $B_2$, определени с равенствата: $c_2(f(W'), f(W'')) = f(c_1(W', W''))$ и $r_2(f(W'), f(W'')) = f(r_1(W', W''))$ за онези $W', W'' \in B_1$, за които е определено $c_1(W', W'')$ и, съответно $r_1(W', W'')$. Нека освен това $c_2(f(W^0), f(W^*)) = W^* \times \{0\}$. Нека $c_2$ и $r_2$ са неопределени за всички други двойки $W', W'' \in B_2$. Нека $g : W_1 \to W_2$ е определено с равенствата $g(w) = w$ за $w \in W_1 \setminus W^*$ и $g(w) = \langle w, 0\rangle$ за $w \in W^*$. С непосредствена проверка се установява следното твърдение за $F_2 = \langle W_2, B_2, \mu_2, c_2, r_2\rangle$:

**Лема 4.36** *$F_2$ е частична структура за $EQP$ с крайна булева алгебра $B_2$. $c_2(f(W'), f(W''))$ и $r_2(f(W'), f(W''))$ са определени винаги, когато $c_1(W', W'')$ и, съответно $r_1(W', W'')$ е определено. Определено е и $c_2(f(W^0), f(W^*))$. $\{W' \in B_2 : r_2(W', W'')$ е определено$\}$ е подалгебра на $B_2$ за всяко $W'' \in B_2$. Освен това $\langle f, g\rangle$ е влагане на $F_1$ в $F_2$.*

С лема 4.36 основната стъпка за доопределяне на $c$. Сега може да бъде доказано основната теорема на този параграф.

**Теорема 4.37** *Нека $F_0 = \langle W_0, B_0, \mu_0, c_0, r_0\rangle$ е частична структура за $EQP$ с крайна булева алгебра $B_0$. Нека $\{W' \in B_0 : r_0(W', W'')$ е определено$\}$ е подалгебра на $B_0$ за всяко $W'' \in B_0$. Тогава съществува (тотална) структура $F = \langle W, B, \mu, c, r\rangle$ за $EQP$ и влагане $\langle f, g\rangle$ на $F_0$ в $F$.*

**Доказателство:** Нека $\mathbf{T}(B_0) = \{t_i : i < \omega\}$ е номерацията на термовете от $\mathbf{T}(B_0)$, описана в началото на параграфа. Строим редицата от крайни частични структури за $EQP$ $F_i = \langle W_i, B, \mu_i, c_i, r_i\rangle$, $i < \omega$, със същите свойства като $F_0$ и редицата $\langle f_i, g_i\rangle$, $i < \omega$, от влагания на $F_i$ в $F_{i+1}$, така, че във $F_i$ да имат стойност всички термове $t_j$, с номера $j < i$. Това става по следния начин: $F_0$ е дадената в теоремата частична структура за $EQP$. Нека $i < \omega$ и $F_i$ е построено. Ако $t_i$ не е от вида $c(t', t'')$, нито

от вида $r(t', t'')$, то $F_{i+1} = F_i$ и $\langle f_i, g_i \rangle$ е $\langle id_{B_i}, id_{W_i} \rangle$. Ако $t_i$ е $r(t', t^*)$, то $t'$ и $t^*$ имат стойности в $F_i$. Нека това са $W'$ и $W^*$ съответно. Тогава $F_{i+1}$ е разширението на $F_i$, в което $r$ е доопределено за двойки $W', W^*$, където $W' \in B_i$, а $\langle f_i, g_i \rangle$ е влагането на $F_i$ в $F_{i+1}$, дадено в описанието на конструкцията на това разширение. Очевидно $t_i$ има стойност в $F_{i+1}$. Ако $t_i$ е $c(t^0, t^*)$, то $t^0$ и $t^*$ имат стойности в $F_i$. Нека това са $W^0$ и $W^*$. Тогава $F_{i+1}$ е разширението на $F_i$, в което $c$ е доопределено за двойката $W^0, W^*$

Сега нека разгледаме редицата $F_i$, $i < \omega$, и влаганията $\langle f_i, g_i \rangle$ на $F_i$ в $F_{i+1}$ за $i < \omega$. Нека $F$ е границата на тази редица в смисъла на параграф 4.5.2. Тъй като първи член на редицата е $F_0$, съществува влагане $\langle f, g \rangle$ на $F_0$ в $F$. Лесно се установява, че операциите $c$ и $r$ са тотални $F$. $\dashv$

**Следствие 4.38** *$EQP$ е консервативно разширение на $QP$.*

**Доказателство:** Нека $\varphi \in \mathbf{L}_{\leq}(P)$ не е теорема на $QP$. Тогава, според теоремата за пълнота на $QP$ (теорема 1.4), съществува модел на $QP$ $M_0 = \langle W_0, B_0, \mu_0, v_0 \rangle$ за $\mathbf{L}_{\leq}(P)$ с крайно $W_0$ и $w \in W_0$ такова, че $M_0, w \not\models \varphi$. Нека $c_0$ е с празна дефиниционна област и нека $r_0(\emptyset, W') = \emptyset$, а $r_0(W, W') = W'$ за всяко $W' \in B$. Тогава $F_0 = \langle W_0, B_0, \mu_0, c_0, r_0 \rangle$ е частична структура за $EQP$, която изпълнява условията на теорема 4.37. Следователно съществува (тотална) структура $F_1 = \langle W_1, B_1, \mu_1, c_1, r_1 \rangle$ за $EQP$ и влагане $\langle f, g \rangle$ на $F_0$ в $F_1$. Нека $v_1(p) = f(v_0(p))$ за всяко $p \in P$. С индукция по строежа на $\varphi$ получаваме, че $\tilde{v_1}(\varphi) = f(\tilde{v_0}(\varphi))$. Оттук следва, че $\langle F_1, v_1 \rangle, g(w) \not\models \varphi$. Тогава $\varphi$ не може да бъде теорема на $EQP$. $\dashv$

# Част II

# Увод

Тази част е посветена на аксиоматизацията на множество разширения на интервалната темпорална логика ($ITL$) и смятането на продължителностите ($DC$). $ITL$ е въведена от Московски през 1985 [Mos85] като логика от първи ред, предназначена за формално описване и проверка на свойствата на инженерни системи, работещи в реално време.

Формализирането на описанията на такива системи с цел също така формалното проверяване на правилността на тяхното устройство е област на напрегнати изследвания в последните години. Строят се формални изчисления, опиращи се на подходящо избрани модели на времето и на поведението на описваните системи. В тези изчисления се дава семантика на езици за паралелно програмиране, за описване на хардуер и пр.

Темпоралните логики, използувани за такива цели, най-общо могат да бъдат разделени на две групи според използувания модел на времето. В едната група попадат логики, които разглеждат времето като наредено множество от моменти. Те съдържат модални оператори, дефинирани чрез релации на достижимост като $\tau_2$ *е след/преди* $\tau_1$, или *времето от* $\tau_1$ *до* $\tau_2$ *е най-много* $d$ (вж. напр. [GHR94, MR95]). Истинността на формулите в такива логики се дефинира за посочени моменти от време. Втората група образуват логики, в които времето се представя като множеството от интервалите в дадено наредено множество от моменти от време. $ITL$ е представител на тази група.

$ITL$ е система от първи ред с един двуместен модален оператор, $(.;.)$, известен в англоезичната литература като chop. Нека с $[\tau_1, \tau_2]$ означаваме интервали от време, а с $\varphi$, $\psi$ - формули от езика на $ITL$. Операторът $(.;.)$ има следната дефиниция:

$$[\tau_1, \tau_2] \models (\varphi; \psi) \text{ ако } [\tau_1, \tau] \models \varphi \text{ и } [\tau, \tau_2] \models \psi \text{ за някое } \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Съществено за $ITL$ е допускането на две категории константни, функционални и предикатни символи - т. нар. *статични* и *темпорални* символи. Статичните символи се интерпретират като константи, функции и предикати, които са едни и същи във всички интервали в даден модел, докато темпоралните могат да имат различна интерпретация в различните интервали.

Специална темпорална константа $\ell$ служи в $ITL$ за изразяване на *продължителността* на текущия интервал:

$$[\tau_1, \tau_2] \models \ell = c \text{ ако дължината на } [\tau_1, \tau_2] \text{ е } c.$$

Например, ако $\tau_1$ и $\tau_2$ са числа, стойността на $\ell$ може да се определи като $\tau_2 - \tau_1$.

Операторът $(.;.)$ е изучаван по-рано от Венема[Ven91a] и други автори заедно със сходните му оператори в рамките на по-общо изследване на съждителните модални логики, в чиято семантика възможните светове са елементи на декартови произведения (известни като *многомерни* модални логики[Ven91b]). Първоначално въведената за $ITL$ от първи ред семантика използува *дискретно време* - краищата на интервалите $[\tau_1, \tau_2]$ са естествени числа. През 1995 г. Дютертър доказва пълнотата на система за извод за $ITL$ по отношение на клас от структури, където интервалите се задават в линейно наредено множество, а продължителностите им образуват система, абстрактно характеризирана с минимално необходим набор от аксиоми [Dut95]. Системата от [Dut95] допуска добавянето на аксиоми за продължителностите с цел приближаване на класа на разглежданите структури до съществените за приложенията, без това да се отразява съществено на доказателството на пълнотата й.

$DC$ е разширение на $ITL$, въведено през 1991 от Дзоу, Хоар и Равн [ZHR91]. Те фиксират множеството на реалните числа като модел на времето и добавят към езика на $ITL$ т. нар. *променливи за състояния*, които се интерпретират като функции на времето, взимащи стойности 0 и 1. С тези променливи могат да се образуват

булеви изрази, които също задават двузначни функции на времето със стойности, образувани по съответен начин от стойностите на участвуващите променливи за всеки отделен момент от време. На интерпретациите на променливите за състояния, а оттук - и на образуваните от тях булеви изрази, се налага ограничението да менят стойността си не повече от краен брой пъти във всеки ограничен интервал от време. Ако $S$ е такъв израз, задаващ функцията на времето $s$, в $DC$ е допустимо образуването на терм $\int S$, чиято стойност в интервал $[\tau_1, \tau_2]$ е $\int_{\tau_1}^{\tau_2} s(\tau)d\tau$. Този интеграл, поради наложеното на $s$ ограничение, може да се представи като сбор от дължините на частите на $[\tau_1, \tau_2]$, в които $s$ има стойност 1.

$DC$ се оказва особено сполучливо разширение на $ITL$. Неслучайно с помощта на $DC$ са изучени множество конкретни системи в реално време [Dan98, HeZ94, XH95, YWZP94, ZHRR92, ZZ94]. В $DC$ е формализирана и семантиката на езика Verilog[SX98], който е един от най-широко използуваните езици за проектиране на хардуер[IEEE95]. Разработени са протитипни версии на програми, частично автоматизиращи търсенето на доказателства в $DC$ [SS94, Hu98, Hu99].

През 1992 г. Хансен и Дзоу представят система за извод за $DC$, която разширява системата от [Dut95] за $ITL$ с аксиоми и правила за термовете от вида $\int S$. Те доказват, че тази система е пълна относително множеството на формулите на $ITL$, валидни в структурата за $ITL$, построена на основата на реалнозначно време. Покъсно е получена разрешимостта и неразрешимостта на изпълнимостта за различни класове от формули в $DC$.

За нуждите на разнообразните приложения са въведени и използувани различни разширения на $DC$. През 1994 Пандиа и Данг въвеждат $DC$ с т. нар. *слабо монотонно време*($WDC$). Това разширение предвижда времето да се разглежда като състоящо се от последователни интервали от реално и дискретно време. Първите представят т. нар. *макро*-време, в което протичат, например, технологични процеси в описваните системи, а вторите представят т. нар. *микро*-време, в което протичат изчисления, необходими за управлението на тези процеси. При това се приема, че дължините на микро-интервалите са пренебрежимо малки в сравнение с дължините на макро-интервалите. В $WDC$ е въведен и оператор за образуване на най-малка неподвижна точка, спомагащ за представянето на рекурсивни програмни конструкции.

$WDC$ е и един ранен опит за съчетаване на дискретно и реално време в $DC$. През 1999 г. Хъ[He99] разширява $DC$, допускайки в качеството на интервали да се разглеждат и крайните множества от моменти от време. Хъ въвежда в $DC$ оператора $\backslash\backslash$, за чиято дефиниция новият вид интервали са от основно значение:

$$\begin{aligned}\sigma \models (\varphi \backslash\backslash \psi) \text{ ако } & \text{съществуват } n \text{ и } \tau_1, \ldots, \tau_n \in \sigma \text{ такива, че} \\ & \min\sigma = \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_n = \max\sigma, \\ & \sigma \cap [\tau_i, \tau_{i+1}] \models \varphi,\ i = 1, \ldots, n-1, \\ & \text{и } \{\tau_1, \ldots, \tau_n\} \models \psi.\end{aligned}$$

където $\sigma$ означава дискретен интервал, т.е. крайно множество от моменти от време, или обикновен интервал. Тъй като истинността на формули, образувани с $(.;.)$, в интервал $\sigma$ зависи от съществуването на момент от времето $\tau \in \sigma$, операторът $\backslash\backslash$ позволява *релативизирането* на $(.;.)$. Това улеснява изразяването на условия за синхронизация и дискретизация на времето в различни мащаби.

Друго разширение на $DC$, мотивирано от приложенията, е допускането на квантора $\exists$ да действува на променливи за състояния. Това се оказва удобен начин за описване на изучаваните системи с $DC$ формули така, че истинността на описанията да не зависи от състоянията на системите, считани за вътрешни, а да характеризира само свойствата им, съществени за взаимодействието с външния свят.

През 1992 г. Лиу, Равн, Сьоренсен и Дзоу въвеждат вероятностно разширение на $DC$[LRSZ92]. Семантиката на това разширение е построена на основата на под-

ходящо избран клас от времеви вероятностни автомати. Всяка редица от състояния на такъв автомат, със съответните продължителности на пребиваването в тях, се представя като модел на $DC$. Вероятностните закони, които определят поведението на автомата, се използуват за въвеждането на вероятност върху пространството от всички такива модели. Тази вероятност се използува за интерпретирането на оператор $p(\varphi)$, който се дефинира като вероятността на множеството от моделите от горния вид, изпълняващи дадена $DC$-формула $\varphi$. Отначало семантиката на вероятностното $DC$ ($PDC$) е въведена за дискретно време. По-късно Данг и Дзоу разглеждат и случая на реално време[DZ94].

Споменатите разширения на $DC$ често се съчетават в литературата. Въведени с оглед на нуждите на приложенията, те не са били задълбочено изучавани от авторите им от логическа гледна точка. В частност, не са предложени пълни системи за извод в тях.

През 1996 г. Дзоу въвежда логиката на околностите ($NL$), която има същите структури като $ITL$, но вместо $(.;.)$, съдържа два едноместни модални оператора $\Diamond_l$ и $\Diamond_r$ със следните дефиниции:

$$[\tau_1, \tau_2] \models \Diamond_l \varphi \text{ ако } [\tau, \tau_1] \models \varphi \text{ за някое } \tau \leq \tau_1.$$

$$[\tau_1, \tau_2] \models \Diamond_r \varphi \text{ ако } [\tau_2, \tau] \models \varphi \text{ за някое } \tau \geq \tau_2.$$

През 1997 г. Баруа и Дзоу доказват пълнотата на система за извод за $NL$[BZ97], представена по рано в [ZCC96, RZ97], и относителната пълнота на система за съответен вариант на $DC$. Формулите, образувани само с $(.;.)$, имат свойството истинността им да зависи само от интервала, в който се оценяват, и от негови подинтервали. Операторите на $NL$ $\Diamond_l$ и $\Diamond_r$ позволяват тази истинност да зависи и от интервали, които не са част от взетия. Затова те се наричат *разширяващи* оператори. $\Diamond_l$ и $\Diamond_r$ позволяват изразяването на $(.;.)$. Всъщност $(.;.)$ може да се въведе като съкращение в $NL$. В този смисъл $NL$ може да се разглежда като (консервативно) разширение на $ITL$.

Тук представяме решения на редица проблеми на аксиоматизацията на разширенията на $DC$.

Както споменахме по-горе, системата за извод за $DC$, предложена в [HZ92], е само *относително* пълна. В нея в качеството на аксиоми се приемат всички формули, валидни в структурата за $ITL$, построена на основата на реалнозначно време. Тези формули образуват множество, което не е полуразрешимо. Поради това на практика изводите в тази система се правят с помощта на тези от аксиомите, които авторът на извода "знае". Тук ние въвеждаме абстрактна семантика за $DC$ върху структури, подобни на известните за $ITL$, като по подходящ начин пренасяме в тази семантика интерпретацията на специфичните за $DC$ термове от вида $\int S$ и условието върху интерпретациите на променливите за състояния да изменят стойността си не повече от краен брой пъти в ограничени интервали. С помощта на подходящо $\omega$-правило най-напред аксиоматизираме това условие за подходящ, въведен тук, аналог на променливите за състояния и термовете, изразяващи продължителността им в $ITL$. Тази аксиоматизация използуваме като основа за получаването на $\omega$-пълна система за извод за $DC$ за новата абстрактна семантика. Аксиоматизацията на *крайнопроменливостта* е основен проблем и при аксиоматизацията на $WDC$, или по-общо на $ITL$ и $DC$ с макро- и микровреме. Полученото тук решение позволява да бъдат получени пълни системи за извод на тези логики, в които влизат подходящи форми на въведеното $\omega$-правило. Предложената абстрактна семантика за $DC$ включва най-важните за приложенията частни случаи на дискретно и реално време. Подобно на системата за извод, известна за $ITL$, доказателството на пълнотата на предложените системи не се влияе от добавянето на аксиоми, специфични за тези случаи. За тази семантика тук получаваме и пълнотата на система за извод за разширението на $DC$ с квантор по променливите за състояния.

По сходен начин получаваме и пълнотата на система за извод на разширение на $ITL$ с квантор по специален клас темпорални съждителни променливи и допускащо формули в качеството на аргументи на темпоралните символи. Резултат от въвеждането на това разширение е изразяването на оператора $\backslash\backslash$ с по-обикновени средства в $DC$. Езикът на $DC$ с $\backslash\backslash$ има запазващ общовалидността превод в предложеното разширение. Благодарение на това получаваме косвено решение и на въпроса за пълнотата в $DC$ с $\backslash\backslash$.

В литературата широко се използува разширението на $DC$ с оператор за най-малка неподвижна точка. Тук предлагаме аксиоми за най-съществения за приложенията частен случай на този оператор, който е известен като *итерация*. Добавянето им към известната система за извод за $DC$ води до получаването на пълна система за извод за фрагмент от разширението $DC^*$ на $DC$ с итерация.

Вероятностното $DC$, въведено с приложни цели, също остава неаксиоматизирано от авторите си. Тук използуваме идеите зад семантиката му, за да получим система със съответната изразителна способност като разширение на $NL$. Получената система има абстрактна семантика и може да се разглежда като обобщение на $PDC$ за дискретно и реално време. Имайки предвид възможността за постигане изразителната способност, която $DC$ дължи на променливите за състояния и термовете, изразяващи продължителността на състоянията, с подходящи техни аналози в $ITL$, може да се счита, че получената вероятностна $ITL$ ($PITL$) се намира в такова отношение към $PDC$, в каквото е $ITL$ към $DC$, въпреки че е въведена значително по-късно от него. Тук представяме система за извод за $PITL$, която се опира на системата за извод на $NL$, и доказваме пълнотата ѝ.

Ключов принос за краткостта на доказателството на пълнотата на $PITL$ играят получените тук специфични за интервалната семантика на $NL$ теореми за съвместна непротиворечивост и интерполация. Редом с тях получаваме и валидността на известните теореми на Робинсън и Крейг за $NL$. Както новите, така и известните по форма интерполационни теореми са в сила и за $ITL$ и $DC$.

# 5 Предварителни сведения за $ITL$, $DC$ и разширенията им

Тук са събрани известните дефиниции и резултати за $ITL$, $NL$, $DC$ и техните разширения, необходими за изложението в следващите глави. Подробни изложения на тези резултати могат да се намерят в [Dut95, BZ97, ZHR91, HZ92, He99]. Най-подходящи източници за навлизане в $DC$ са [HZ97, ZGZ99].

## 5.1 Интервална темпорална логика и логика на околностите

В този параграф въвеждаме езика и семантиката на $ITL$ и $NL$ и представяме известните пълни системи за извод за двете логики. Изложението е общо за $ITL$ и $NL$ поради голямото им сходство.

### 5.1.1 Езици

Езиците на $ITL$ и $NL$ се строят, започвайки от дадени множества от *константни символи* $c$, $d$, ..., *функционални символи* $f$, $g$, ..., и *предикатни символи* $R$, $S$, ..., и изброимо множество от *индивидни променливи* $x$, $y$, .... На функционалните и предикатните символи се присвоява *арност* - естествено число, показващо броя на аргументите, с които тези символи участвуват съответно в термове и формули. Символ с арност $n$ се нарича още *$n$-местен*. Символите от всеки вид се делят по начина си на интерпретиране на *статични* и *темпорални*. (Статичните символи се интерпретират еднакво във всички интервали на даден модел, докато интерпретацията на темпоралните символи зависи от интервала.) За темпоралните константи в литературата се използува и терминът *темпорални променливи*, а 0-местните предикатни символи понякога се наричат *темпорални съждителни променливи*. Освен тези символи и индивидните променливи, в езиците се използуват още съждителната константа $\bot$, съждителните връзки $\neg$ и $\wedge$, модалните оператори $(.;.)$, $\Diamond_l$ и $\Diamond_r$, квантораът $\exists$, запетая , и скоби ( и ). Във всеки език на $ITL$ и $NL$ участвуват статичната константа 0, двуместният статичен предикатен символ $=$ (равенство), двуместният статичен функционален символ $+$ (събиране) и темпоралната константа $\ell$. В езиците за $NL$ винаги участвува и двуместният предикатен символ $\leq$.

При дадени множества от горните символи, *термовете* на съответния език за $ITL$ или $NL$ се определят с Бекус-Науровата форма:

$t ::= c|x|f(t,\ldots,t)$

*Формулите* на съответния език за $ITL$ се определят с Бекус-Науровата форма:

$\varphi ::= \bot|R(t,\ldots,t)|\neg\varphi|(\varphi\wedge\varphi)|(\varphi;\varphi)|\exists x\varphi$

За $NL$ дефиницията е:

$\varphi ::= \bot|R(t,\ldots,t)|\neg\varphi|(\varphi\wedge\varphi)|\Diamond_l\varphi|\Diamond_r\varphi|\exists x\varphi$

В езиците за $ITL$ не се допускат операторите $\Diamond_l$ и $\Diamond_r$, а в езиците за $NL$ - операторът $(.;.)$. Този оператор, обаче, може да се въведе като съкращение с помощта на $\Diamond_l$ и $\Diamond_r$. Затова го използуваме както в във формули на $ITL$, така и във формули на $NL$. Формули и термове, които съдържат само статични символи, се наричат *статични*. Множеството от индивидни променливи, участвуващи свободно в даден терм $t$, съответно формула $\varphi$, означаваме с $FV(t)$, съответно $FV(\varphi)$.

### 5.1.2 Структури

**Дефиниция 5.1** *Времева област* е линейно наредено множество. Нека $\langle T,\leq\rangle$ е времева област и $T'\subseteq T$. С $\mathbf{I}(T')$ се означава множеството $\{[\tau_1,\tau_2] : \tau_1,\tau_2\in T', \tau_1\leq\tau_2\}$ от *интервалите* от $T$ с краища в $T'$. Ако $\sigma_1,\sigma_2\in\mathbf{I}(T')$ и $\max\sigma_1 = \min\sigma_2$, с $\sigma_1;\sigma_2$ означаваме $\sigma_1\cup\sigma_2$.

**Дефиниция 5.2** *Област от продължителности за $ITL$* се нарича система от тип $\langle D,+^{(2)},0^{(0)}\rangle$, която изпълнява аксиомите:

$(D1)$ $x + (y + z) = (x + y) + z$
$(D2)$ $x + 0 = 0 + x = x$
$(D3)$ $x + y = x + z \Rightarrow y = z,\ x + z = y + z \Rightarrow x = y$
$(D4)$ $x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0$
$(D5)$ $\exists z(x + z = y \vee y + z = x),\ \exists z(z + x = y \vee z + y = x)$

*Област от продължителности за* $NL$ се нарича система от тип $\langle D, +^{(2)}, \leq^{(2)}, 0^{(0)}\rangle$, която изпълнява аксиомите $D1$-$D3$ и аксиомите:

$(D4')$ $\exists z(x + z = y),\ \exists z(z + x = y)$
$(D5')$ $x \leq x$
$(D6')$ $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
$(D7')$ $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
$(D8')$ $x \leq y \Leftrightarrow \exists z(x + z = y \wedge 0 \leq z)$

Релацията $\leq$ се определя в области от продължителности за $ITL$ с условието $x \leq y \leftrightarrow \exists z(x + z = y)$. Двуместната операция $-$ (изваждане) се определя в области от продължителности за $NL$ с условието $x - y = z \leftrightarrow z + y = x$.

**Дефиниция 5.3** Нека $\langle T, \leq\rangle$ е времева област, а $\langle D, +, 0\rangle$ е област от продължителности за $ITL$. Функцията $m : \mathbf{I}(T) \to D$ се нарича *мярка* ако изпълнява аксиомите:

$(M1)$ $m(\sigma) = m(\sigma') \wedge \min\sigma = \min\sigma' \Rightarrow \max\sigma = \max\sigma'$
$(M2)$ $\max\sigma_1 = \min\sigma_2 \Rightarrow m(\sigma_1) + m(\sigma_2) = m(\sigma_1 \cup \sigma_2)$
$(M3)$ $m(\sigma) = x + y \Rightarrow \exists\sigma'(\min\sigma' = \min\sigma \wedge m(\sigma') = x)$.

Ако $\langle D, +, \leq, 0\rangle$ е област от продължителности за $NL$, $m : \mathbf{I}(T) \to D$ е мярка, ако изпълнява $M1$, $M2$ и

$(M3')$ $0 \leq x \wedge 0 \leq y \wedge m(\sigma) = x + y \Rightarrow \exists\sigma'(\min\sigma' = \min\sigma \wedge m(\sigma') = x)$.

**Дефиниция 5.4** *Структура за* $ITL$ се нарича тройка от вида $\langle\langle T, \leq\rangle, \langle D, +, 0\rangle, m\rangle$, където $\langle T, \leq\rangle$ е времева област, $\langle D, +, 0\rangle$ е област от продължителности за $ITL$ и $m : \mathbf{I}(T) \to D$ е мярка. *Структура за* $NL$ се нарича тройка от вида $\langle\langle T, \leq\rangle, \langle D, +, \leq, 0\rangle, m\rangle$, където $\langle T, \leq\rangle$ е отново времева област, $\langle D, +, \leq, 0\rangle$ е област от продължителности за $NL$ и $m : \mathbf{I}(T) \to D$ е отново мярка, този път със стойности в областта от продължителности за $NL$.

Времевата област и областта от продължителности на дадена структура $F$ за $ITL$ ($NL$) означаваме с $\langle T_F, \leq_F\rangle$ и $\langle D_F, +_F, 0_F\rangle$ ($\langle D_F, +_F, \leq_F, 0_F\rangle$), а мярката й - с $m_F$.

### 5.1.3 Модели и истинност

**Дефиниция 5.5** Нека $\mathbf{L}$ е език за $ITL$ ($NL$). *Модел за* $\mathbf{L}$ е наредена двойка $\langle F, I\rangle$, където $F$ е структура за $ITL$ ($NL$), а $I$ е *интерпретация* на символите и индивидните променливи от $\mathbf{L}$, която удовлетворява условията:

- $I(c) \in D_F$, $I(f) : D_F^n \to D_F$ и $I(R) : D_F^n \to \{0, 1\}$ за статични константни символи $c$ функционални символи $f$ и предикатни символи $R$ с арност $n$ съответно;
- $I(c) : \mathbf{I}(T_F) \to D_F$, $I(f) : \mathbf{I}(T_F) \times D_F^n \to D_F$ и $I(R) : \mathbf{I}(T_F) \times D_F^n \to \{0, 1\}$ за съответните видове темпорални символи;
- $I(x) \in D_F$ за индивидни променливи $x$;
- $I(=)$ е $=$, $I(\leq)$ е $\leq_F$ ($NL$), $I(0) = 0_F$, $I(+) = +_F$ и $I(\ell) = m_F$.

Структурата и интерпретацията на даден модел $M$ на $ITL$ ($NL$) означаваме съответно с $F_M$ и $I_M$. Времевата му област и областта му от продължителности означаваме с $\langle T_M, \leq_M\rangle$ и $\langle D_M, +_M, 0_M\rangle$ ($\langle D_M, +_M, \leq_M, 0_M\rangle$), а мярката му - с $m_M$.

**Дефиниция 5.6** Нека $\langle F, I\rangle$ е модел за езика $\mathbf{L}$ на $ITL$ ($NL$). Нека $\sigma \in \mathbf{I}(T_F)$. *Стойностите* $I_\sigma$ на термовете $t$ от $\mathbf{L}$ в $\langle F, I\rangle$ се определят с индукция по строежа на $t$, както следва:

| | |
|---|---|
| $I_\sigma(x) = I(x)$ | за индивидни променливи $x$; |
| $I_\sigma(c) = I(c)$ | за статични константи $c$; |
| $I_\sigma(c) = I(c)(\sigma)$ | за темпорални константи $c$; |
| $I_\sigma(f(t_1,\ldots,t_n)) = I(f)(I_\sigma(t_1),\ldots,I_\sigma(t_n))$ | за $n$-местни статични функционални символи $f$; |
| $I_\sigma(f(t_1,\ldots,t_n)) = I(f)(\sigma, I_\sigma(t_1),\ldots,I_\sigma(t_n))$ | за $n$-местни темпорални функционални символи $f$. |

Интерпретациите $I$ и $J$ на символите от даден език $\mathbf{L}$ се наричат *s-съгласувани*, ако съвпадат за всички символи, освен евентуално за $s$.

**Дефиниция 5.7** Нека $M = \langle F, I\rangle$ е модел за езика $\mathbf{L}$ на $ITL$ или $NL$. Релацията на истинност $\models$ се определя с индукция по строежа на формулите от $\mathbf{L}$, както следва:

| | | |
|---|---|---|
| $M,\sigma \not\models \bot$; | | |
| $M,\sigma \models R(t_1,\ldots,t_n)$ | ако $I(R)(I_\sigma(t_1),\ldots,I_\sigma(t_n)) = 1$ | за $n$-местни статични предикатни символи $R$; |
| $M,\sigma \models R(t_1,\ldots,t_n)$ | ако $I(R)(\sigma, I_\sigma(t_1),\ldots,I_\sigma(t_n)) = 1$ | за $n$-местни темпорални предикатни символи $R$; |
| $M,\sigma \models \neg\varphi$ | ако $M,\sigma \not\models \varphi$; | |
| $M,\sigma \models \varphi \wedge \psi$ | ако $M,\sigma \models \varphi$ и $M,\sigma \models \psi$; | |
| $M,\sigma \models (\varphi;\psi)$ | ако $M,\sigma_1 \models \varphi$ и $M,\sigma_2 \models \psi$ | за някои $\sigma_1,\sigma_2 \in \mathbf{I}(T_F)$ такива, че $\sigma_1;\sigma_2 = \sigma$; |
| $M,\sigma \models \Diamond_l\varphi$ | ако $M,\sigma' \models \varphi$ | за някое $\sigma'$ такова, че $\max\sigma' = \min\sigma$; |
| $M,\sigma \models \Diamond_r\varphi$ | ако $M,\sigma' \models \varphi$ | за някое $\sigma'$ такова, че $\min\sigma' = \max\sigma$; |
| $M,\sigma \models \exists x\varphi$ | ако $\langle F, J\rangle,\sigma \models \varphi$ | за някоя $x$-съгласувана с $I$ интерпретация $J$. |

Тук клаузите за $(.;.)$ важат само за случая на модел за език на $ITL$, а клаузите за $\Diamond_l$ и $\Diamond_r$ - само за случая на модел за език на $NL$.

*Изпълнимост*, *валидност* в модел и в клас от модели и *общовалидност* се определят в $ITL$ и $NL$ както обикновено.

### 5.1.4 Съкращения

Логическата константа $\top$, съждителните връзки $\vee$, $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$, предикатните символи $\neq$, $\geq$, $<$, $>$ и кванторът $\forall$ служат като съкращения в $ITL$ и $NL$ по обикновения начин. Съкращението $\forall\varphi$ означава $\forall x_1 \ldots \forall x_n\varphi$, където $\{x_1,\ldots,x_n\} = FV(\varphi)$. Употребяват се и следните съкращения: $\Diamond\varphi \rightleftharpoons (\top;(\varphi;\top))$, $\Box\varphi \rightleftharpoons \neg\Diamond\neg\varphi$, $\Diamond^c_d\varphi \rightleftharpoons \Diamond_d\Diamond_{\overline{d}}\varphi$, $\Box_d\varphi \rightleftharpoons \neg\Diamond_d\neg\varphi$, и $\Box^c_d\varphi \rightleftharpoons \neg\Diamond^c_d\neg\varphi$, където $d \in \{l,r\}$, $\overline{l} \rightleftharpoons r$ и $\overline{r} \rightleftharpoons l$, $\varphi^0 \rightleftharpoons \ell = 0$, $\varphi^{k+1} \rightleftharpoons (\varphi^k;\varphi)$ за $k < \omega$. Операторът $(.;.)$ се въвежда като съкращение в $NL$ по следния начин: $(\varphi;\psi) \rightleftharpoons \exists x\exists y(x + y = \ell \wedge \Diamond^c_l(\varphi \wedge \ell = x) \wedge \Diamond^c_r(\psi \wedge \ell = y))$, където $x, y \notin FV((\varphi;\psi))$.

Ако $n$ е естествено число, различно от 0, а $t$ е терм, в език с константа 1 с $n$ означаваме $\underbrace{1+\ldots+1}_{n \text{ пъти}}$, а с $n.t$ - $\underbrace{t+\ldots+t}_{n \text{ пъти}}$. Ако $n$ е 0, то и $n$, и $n.t$ са означения за 0. Тъй като в разглежданите случаи на езици на $ITL$, $NL$ и разширенията им с умножение . $(\underbrace{1+\ldots+1}_{n \text{ пъти}}).t$ и $\underbrace{t+\ldots+t}_{n \text{ пъти}}$ са равни термове, нееднозначността в употребата на $n$ като съкращение не води до объркване.

Ако $I$ е интерпретация от модел на $ITL$, $NL$ или някое от разширенията им, разгледани по-долу, а $\varphi$ е формула от езика на този модел, с $\tilde{I}(\varphi)$ означаваме множеството от интервалите от модела, в които е вярна $\varphi$.

### 5.1.5 Системи за извод

Пълнотата на следната система за извод за $ITL$ е известна от [Dut95]:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(ITL\text{-}A1_l)$ | $(\varphi;\psi)\wedge\neg(\chi;\psi)\Rightarrow(\varphi\wedge\neg\chi;\psi)$ | | |
| $(ITL\text{-}A1_r)$ | $(\varphi;\psi)\wedge\neg(\varphi;\chi)\Rightarrow(\varphi;\psi\wedge\neg\chi)$ | $(MP)$ | $\dfrac{\varphi\ \varphi\Rightarrow\psi}{\psi}$ |
| $(ITL\text{-}A2)$ | $((\varphi;\psi);\chi)\Leftrightarrow(\varphi;(\psi;\chi))$ | | |
| $(ITL\text{-}R_l)$ | $(\varphi;\psi)\Rightarrow\varphi$ ако $\varphi$ е статична | $(G)$ | $\dfrac{\varphi}{\forall x\varphi}$ |
| $(ITL\text{-}R_r)$ | $(\varphi;\psi)\Rightarrow\psi$ ако $\psi$ е статична | | |
| $(ITL\text{-}B_l)$ | $(\exists x\varphi;\psi)\Rightarrow\exists x(\varphi;\psi)$ ако $x\notin FV(\psi)$ | $(ITL\text{-}N_l)$ | $\dfrac{\varphi}{\neg(\neg\varphi;\psi)}$ |
| $(ITL\text{-}B_r)$ | $(\varphi;\exists x\psi)\Rightarrow\exists x(\varphi;\psi)$ ако $x\notin FV(\varphi)$ | | |
| $(ITL\text{-}L1_l)$ | $(\ell=x;\varphi)\Rightarrow\neg(\ell=x;\neg\varphi)$ | $(ITL\text{-}N_r)$ | $\dfrac{\varphi}{\neg(\psi;\neg\varphi)}$ |
| $(ITL\text{-}L1_r)$ | $(\varphi;\ell=x)\Rightarrow\neg(\neg\varphi;\ell=x)$ | | |
| $(ITL\text{-}L2)$ | $\ell=x+y\Leftrightarrow(\ell=x;\ell=y)$ | $(ITL\text{-}Mono_l)$ | $\dfrac{\varphi\Rightarrow\psi}{(\varphi;\chi)\Rightarrow(\psi;\chi)}$ |
| $(ITL\text{-}L3_l)$ | $\varphi\Rightarrow(\ell=0;\varphi)$ | | |
| $(ITL\text{-}L3_r)$ | $\varphi\Rightarrow(\varphi;\ell=0)$ | $(ITL\text{-}Mono_r)$ | $\dfrac{\varphi\Rightarrow\psi}{(\chi;\varphi)\Rightarrow(\chi;\psi)}$ |

Пълнотата на следната система за извод за $NL$ е известна от [BZ97]:

| | |
|---|---|
| $(NL\text{-}A1)$ | $\Diamond_d\varphi\Rightarrow\varphi$ ако $\varphi$ е статична. |
| $(NL\text{-}A2)$ | $0\le l$ |
| $(NL\text{-}A3)$ | $0\le x\Rightarrow\Diamond_d(\ell=x)$ |
| $(NL\text{-}A4)$ | $\Diamond_d(\varphi\vee\psi)\Rightarrow\Diamond_d\varphi\vee\Diamond_d\psi$ |
| $(NL\text{-}A4')$ | $\Diamond_d\exists x\varphi\Rightarrow\exists x\Diamond_d\varphi$ |
| $(NL\text{-}A5)$ | $\Diamond_d(\ell=x\wedge\varphi)\Rightarrow\Box_d(\ell=x\Rightarrow\varphi)$ |
| $(NL\text{-}A6)$ | $\Diamond_d^c\varphi\Rightarrow\Box_d\Diamond_{\overline{d}}\varphi$ |
| $(NL\text{-}A7)$ | $\ell=x\Rightarrow(\varphi\Leftrightarrow\Diamond_d^c(\ell=x\wedge\varphi))$ |
| $(NL\text{-}A8)$ | $0\le x\Rightarrow0\le y\Rightarrow\Diamond_d(\ell=x\wedge\Diamond_d(\ell=y\wedge\Diamond_d\varphi))\Rightarrow\Diamond_d(\ell=x+y\wedge\Diamond_d\varphi)$ |

$$(NL\text{-}Mono)\quad\frac{\varphi\Rightarrow\psi}{\Diamond_d\varphi\Rightarrow\Diamond_d\psi}\qquad(MP)\quad\frac{\varphi\ \varphi\Rightarrow\psi}{\psi}$$

$$(NL\text{-}Nec)\quad\frac{\varphi}{\Box_d\varphi}\qquad(G)\quad\frac{\varphi}{\forall x\varphi}$$

Тук, както и по-горе, $d\in\{l,r\}$, $\overline{l}\rightleftharpoons r$ и $\overline{r}\rightleftharpoons l$. Изводимостта в тези системи бележим съответно с $\vdash_{ITL}$ и $\vdash_{NL}$. Освен изброените по-горе аксиоми и правила, системите включват аксиоми за класическото предикатно смятане от първи ред, аксиоми за равенството и аксиомите за съответните видове области от продължителности. И в двете системи заместването на индивидна променлива с терм във формула е *коректно в изводите* само когато или термът е статичен, или формулата не съдържа модални оператори.

Конкретните формулировки на теоремите пълнота на системите са следните:

**Теорема 5.8 (Дютертър, 1995)** *Нека* $\Gamma$ *е множество от формули от език на* $ITL$. *Тогава* $\Gamma$ *е изпълнимо точно когато е непротиворечиво в горната система за извод за* $ITL$.

**Теорема 5.9 (Баруа, Дзоу, 1997)** *Нека* $\Gamma$ *е множество от формули от език на* $NL$. *Тогава* $\Gamma$ *е изпълнимо точно когато е непротиворечиво в горната система за извод за* $NL$.

Доказателствата на тези теореми показват, че изпълнимостта на изброими множества от формули е еквивалентна на изпълнимостта им в модели с изброими времеви области и области от продължителности, т.е. за $ITL$ и $NL$ е в сила теоремата на Льовенхайм-Скулем.

**Забележка:** Любопитно е да се забележи, че сред аксиомите за областите от продължителности за $ITL$ и $NL$ няма аксиома за комутативност на $+$. Добавянето на такава аксиома, разбира се, не се отразява на истинността на теоремите за пълнота на двете логики. Приложенията не водят до модели на тези логики, където комутативността на $+$ да е нарушена.

## 5.2 Смятане на продължителностите

Както се споменава в увода към тази част, $DC$ е разширение на $ITL$. Съществува и вариант на $DC$, получен по аналогичен начин като разширение на $NL$[BZ97], с който обаче тук не се занимаваме.

### 5.2.1 Език

Освен използуваните в езиците за $ITL$ и $NL$ видове символи и променливи, в построяването на език за $DC$ участвува и множество от *променливи за състояния* $P$, $Q$, ..., . Променливите от този вид образуват *изрази за състояния*, видът на които се определя със следната Бекус-Наурова форма:

$S ::= \mathbf{0}|P|\neg S|(S \wedge S)$

Тези изрази участвуват във формулите, образувайки специален вид термове. Дефиницията на термовете в $DC$ се разширява по следния начин:

$t ::= c|x|f(t,\ldots,t)|\int S$

Новите термове са от вида $\int S$ и, неформално, изразяват продължителността на частта от текущия интервал, в която е изпълнено $S$. Дефиницията на формулите в езиците за $DC$ е като тази за езиците на $ITL$.

### 5.2.2 Структури, модели и истинност

Модел за $DC$ се строи на основата на конкретна структура за $ITL$ $F_{\mathrm{R}} = \langle\langle \mathbf{R}, \leq \rangle, \langle \mathbf{R}_+, +, 0\rangle, m\rangle$, в която времевата област е реалната права, областта от продължителности е множеството от неотрицателните реални числа с операцията събиране и константата 0, а мярката $m$ се задава с равенството $m(\sigma) = \max\sigma - \min\sigma$.

**Дефиниция 5.10** Нека е даден език $\mathbf{L}$ за $DC$. *Модел за $DC$* наричаме двойка от вида $\langle F_{\mathrm{R}}, I\rangle$, където $F_{\mathrm{R}}$ е спомената по-горе структура, а $I$ е интерпретация на символите и променливите от $\mathbf{L}$, която изпълнява изискванията за интерпретация в модел за $ITL$ (дефиниция 5.5) и, освен това, съпоставя на всяка променлива за състояние $P$ от $\mathbf{L}$ функция $I(P)$ от $\mathbf{R}$ към $\{0,1\}$ със следното свойство:

> Всеки интервал $\sigma \in \mathbf{I}(\mathbf{R})$ може да се представи във вида $\sigma_0;\ldots;\sigma_n$ така, че $I(P)$ да постоянна във вътрешността на $\sigma_i$, $i \leq n$.

Условието интерпретациите на променливите за състояния да бъдат на части постоянни функции на времето е от основно значение за по-нататъшното изложение. Тъй като структурата $F_{\mathrm{R}}$ е фиксирана в моделите за $DC$, до въвеждането на абстрактната семантика за $DC$ често отъждествяваме моделите за $DC$ със съответните интерпретации. В частност, изрази като $\langle F_{\mathrm{R}}, I\rangle \models \ldots$ се съкращават до $I \models \ldots$.

Дефиницията на стойност на терм в $DC$ се отличава от известната за $ITL$ само за термовете от специалния вид $\int S$, за оценяването на които е необходимо задаването на стойности и на изразите за състояния $S$:

**Дефиниция 5.11** Нека $I$ е интерпретация на символите и променливите от езика $\mathbf{L}$ за $DC$. *Стойността* $I_\tau(S)$ на израз за състояние $S$ от $\mathbf{L}$ за $\tau \in \mathbf{R}$ се определя с индукция по строежа на $S$, както следва:

$I_\tau(\mathbf{0}) = 0$

$I_\tau(P) = I(P)(\tau)$ за променливи за състояния $P$

$I_\tau(\neg S) = 1 - I_\tau(S)$

$I_\tau(S_1 \wedge S_2) = \min(I_\tau(S_1), I_\tau(S_2))$

*Стойността* $I_\sigma(\int S)$ на терм от посочения вид се задава с равенството

$$I_\sigma(\textstyle\int S) = \int\limits_{\min\sigma}^{\max\sigma} I_\tau(S)d\tau.$$

От ограничението $I(P)$ да е на части постоянна функция лесно се получава, че за всеки израз $S$ $\lambda\tau.I_\tau(S)$ също е на части постоянна функция. Това осигурява съществуването на интеграла в определението на $I_\sigma(S)$. Дефиницията на истинността на формулите в модели на $DC$ във всяко друго отношение е като тази за $ITL$. Освен събирането, в $DC$ широко се използуват известните аритметични действия с реални числа.

### 5.2.3 Съкращения

Освен съкращенията, употребявани в $ITL$, в $DC$ се употребяват и следните съкращения, свързани с термовете от вида $\int S$: $\mathbf{1} \rightleftharpoons \neg\mathbf{0}$, $\lceil S \rceil \rightleftharpoons \int S = \ell \wedge \ell \neq 0$. Темпоралната константа $\ell$ може да се въведе в $DC$ като съкращение за израза $\int \mathbf{1}$.

### 5.2.4 Система за извод

В [HZ92] е предложена система за извод за $DC$, която включва дадената по-горе система за извод за $ITL$ и следните аксиоми и правила:

($DC$-$A1$) $\int \mathbf{0} = 0$
($DC$-$A2$) $\int \mathbf{1} = \ell$
($DC$-$A3$) $\int S \geq 0$
($DC$-$A4$) $\int S_1 + \int S_2 = \int (S_1 \vee S_2) + \int (S_1 \wedge S_2)$
($DC$-$A5$) $(\int S = x; \int S = y) \Rightarrow \int S = x + y$
($DC$-$A6$) $\int S_1 = \int S_2$ ако $S_1 \Leftrightarrow S_2$ е класическа съждителна тавтология.

$$(IR_1) \quad \frac{[\ell = 0/A]\varphi \;\; \varphi \Rightarrow [A \vee (A; \lceil S \rceil) \vee (A; \lceil \neg S \rceil)/A]\varphi}{[\top/A]\varphi}$$

$$(IR_2) \quad \frac{[\ell = 0/A]\varphi \;\; \varphi \Rightarrow [A \vee (\lceil S \rceil; A) \vee (\lceil \neg S \rceil; A)/A]\varphi}{[\top/A]\varphi}$$

Изразите от вида $[\psi/A]\varphi$ в правилата $IR_1$ и $IR_2$ означават резултата от заместването на (темпоралната) съждителна променлива $A$ във $\varphi$ с формулата $\psi$. Изводимостта в горната система означаваме с $\vdash_{DC}$.

За да формулираме теоремата за относителна пълнота на горната система, представена в [HZ92], нека фиксираме език $\mathbf{L}$ за $DC$. Нека приемем, че $\mathbf{L}$ е и език на $ITL$, в който термовете от вида $\int S$ са темпорални константи, и означим множеството от формулите на $ITL$ от $\mathbf{L}$, които са валидни в структурата $F_{\mathrm{R}}$ за $ITL$ с $ITL_{\mathrm{R}}$. Теоремата е следната:

**Теорема 5.12 (Хансен, Дзоу, 1992)** *Нека $\varphi$ е формула от $\mathbf{L}$. Тогава $\varphi$ е вярна при всички интерпретации на $DC$ точно когато $ITL_{\mathrm{R}} \vdash_{DC} \varphi$.*

Както се вижда, изводимостта на общовалидните формули в тази система се опира на семантично зададеното множество $ITL_{\mathrm{R}}$. Тук отстраняваме този недостатък, въвеждайки абстрактна семантика за $DC$ и пълна по отношение на тази семантика система за извод.

## 5.3 Смятане на продължителностите с $\mu$-оператор

Разширяването на $DC$ с оператор за образуване на най-малка неподвижна точка е продиктувано от потребността за изразяване на семантиката на рекурсивни програми с формули от езика на $DC$. Този оператор се въвежда по следния начин:

Както и в предикатното смятане от първи ред, участието на подформула $\psi$ във формула $\varphi$ се нарича *положително*, ако то е в обсега на четен брой отрицания $\neg$. Нека $I$ е интерпретация на езика $\mathbf{L}$ на $DC$. Нека $\varphi$ е формула от $\mathbf{L}$, а $P$ е темпорална съждителна променлива. Нека $X = \tilde{I}(P)$ пробягва подмножествата на $\mathbf{I}(\mathbf{R})$, а стойностите на $I$ за всички други символи и променливи бъдат фиксирани. Тогава

$\tilde{I}(\varphi)$ е функция на $X$. Нека я означим с $F^I_{P,\varphi}$. Известно е, че ако $P$ няма отрицателни участия във $\varphi$, $F^I_{P,\varphi}$ има най-малка неподвижна точка. Това прави коректна следната дефиниция на оператора за образуване на най-малка неподвижна точка в $DC$.

**Дефиниция 5.13** Нека $\varphi$ е формула от езика **L** на $DC$. Нека темпоралната съждителна променлива $P$ участвува само положително във $\varphi$. Тогава може да бъде образувана формулата $\mu P.\varphi$. При това, ако $I$ е интерпретация за **L**,

$I, \sigma \models \mu P.\varphi$ ако $\sigma$ е от най-малката неподвижна точка на $F^I_{P,\varphi}$.

Най-важният за приложенията случай на употреба на оператора $\mu$ е *итерацията*. Итерацията $\varphi^*$ на формула $\varphi$ се въвежда с дефиницията

$$\varphi^* \rightleftharpoons \mu P.\ell = 0 \vee (\varphi; P),$$

където $P$ е темпорална съждителна променлива, която не участвува във $\varphi$. Разширението на $DC$ само с итерация има многобройни приложения и се бележи с $DC^*$. Един забележителен фрагмент от езика на $DC^*$ се задава със следната Бекус-Наурова форма:

$\varphi ::= \lceil S \rceil | \ell \leq c | c \leq \ell | (\varphi \wedge \varphi) | (\varphi \vee \varphi) | \varphi^*$

Формулите от горния вид се наричат *прости* $DC^*$ формули. Следното твърдение е получено в [ZHS93]:

**Теорема 5.14 (Дзоу, Хансен, Сестофт, 1993)** *Проблемът за изпълнимостта на прости $DC^*$ формули е разрешим.*

Доказателството на това твърдение се опира на съпоставяне на всяка проста формула на подходящ регулярен език, който е непразен точно когато формулата е изпълнима.

## 5.4 Смятане на продължителностите със слабо монотонно време

Тази система е въведена в [PD97] по следните съображения: Системите, работещи в реално време, често се състоят от компоненти с несравними по големина бързодействия. Типичен пример е компютърното управление на технологични процеси, които протичат несравнимо по-бавно от изчисленията, извършвани при управлението. Това, от една страна, мотивира приемането, че изчислителните фази от процеса не отнемат време. От друга страна, стъпките в изчисленията са последователни и тяхната наредба във времето трябва да бъде отразена.

Затова в смятането на продължителностите със слабо монотонно време ($WDC$) е възприет следният подход: Времето се разглежда като редица от интервали, всеки от които се състои или от реални числа, или от естествени числа. Приема се, че прилежащите краища на съседните интервали от различен вид представят един и същ момент във времето. Естествените числа, обаче, не се считат за реални. Произволно взет интервал от време може да включва части, състоящи се от реални числа, и части, състоящи се от естествени числа. При това всичките реални числа, влизащи в интервала, образуват интервал върху реалната права. Подобно условие изпълняват и влизащите в произволен интервал от време естествени числа.

Реалните части на интервала от време определят неговата *макро*продължителност, а целочислените - неговата *микро*продължителност. Макро-частите от времевата област представят интервалите, в които протича "бавният" процес. Изборът те да са реални се определя от това, че обикновено се описва технологичен процес, който наистина протича в реално време. Микрочастите служат за моделиране на дискретните изчислителни стъпки на "бързия" процес. При измерването на макропродължителността на интервал от време, микрочастите му се пренебрегват, като

краищата им и всички моменти от време в тях се отъждествяват. Това е причината този модел на времето да се нарича *слабо монотонно време*.

Слабо монотонното време е удобно да се изобразява в равнинна координатна система с реална абсцисна ос и целочислена ординатна ос по следния начин. Фиксира се момент във времето $\tau_0$, обикновено началният момент на работа на моделираната система. Моментът $\tau_0$ се изобразява като точка в началото на координатната система. Всеки друг момент от времето $\tau_1$ се изобразява като точка в системата, чиито координати са съответно макро- и микродължината на интервала $[\tau_0, \tau_1]$. Ако $\tau_1$ предхожда $\tau_0$, координатите се определят по интервала $[\tau_1, \tau_0]$ и имат отрицателен знак. Това представяне подсказва задаването на времевите области в $WDC$ като максимални подмножества на $\mathbf{R} \times \mathbf{N}$, линейно наредени от релацията $\langle x_1, y_1\rangle \leq \langle x_2, y_2\rangle \leftrightarrow x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$.

В $WDC$ вместо $\ell$ се използуват две темпорални константи $\ell$ и $\eta$, определящи съответно микро- и макропродължителността на дадения интервал $\sigma = [\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle]$:

$I_\sigma(\ell) = x_2 - x_1$,

$I_\sigma(\eta) = y_2 - y_1$.

Лесно е да се забележи, че един интервал е еднозначно определен, ако са известни един от краищата му и сборът $\ell + \eta$. Това дава основание да считаме, че освен $\ell$ и $\eta$, всеки интервал има "обща" дължина, която се изразява с този сбор.

$WDC$ не е разширение на $DC$ в точния смисъл на думата. Неоднородността на времевите области в $WDC$ води, например, до нарушаване на аксиомата $M3$ за дължините на интервалите. Изразителната способност на $WDC$ обаче може да бъде възпроизведена в подходящо разширение на $DC$, което представяме и аксиоматизираме по-долу. Основна стъпка в аксиоматизацията е характеризирането на свойството, че всеки интервал от време се състои от *краен* брой макро- и микрочасти.

## 5.5 Смятане на продължителностите с оператор $\backslash\backslash$.

Това разширение на $DC$ се получава чрез добавянето към интервалите $\mathbf{I}(\mathbf{R})$ на крайните множества от реални числа $\mathbf{P}_{fin}(\mathbf{R})$, които се разглеждат като дискретни интервали. Достъпът до такива интервали се получава при оценяването на формули, образувани със специфичния за това разширение оператор $\backslash\backslash$, чийто втори аргумент винаги се подлага на оценяване в дискретен интервал:

$$I, \sigma \models (\varphi \backslash\backslash \psi) \text{ ако } \begin{array}{l} \text{за някое } n < \omega \ \sigma \text{ има вида } \sigma_0; \ldots; \sigma_n, \\ \text{където } I, \sigma_i \models \varphi,\ i = 0, \ldots, n, \\ \text{и } \{\min \sigma_0, \ldots, \min \sigma_n, \max \sigma_n\} \models \psi. \end{array}$$

Истинността на атомарните формули и формулите, образувани със съждителна връзка, квантор или $(.;.)$, се определя в $DC$ с $\backslash\backslash$ по известния начин, като в качеството на $\mathbf{I}(\mathbf{R})$ се взема $\mathbf{I}_{\backslash\backslash}(\mathbf{R}) = \mathbf{I}(\mathbf{R}) \cup \mathbf{P}_{fin}(\mathbf{R})$.

Дискретните интервали могат да бъдат отличавани от реалните с помощта на специфичната за разширението темпорална константа $\#$, чиято стойност е броят на *изолираните точки* на текущия интервал. Нетривиалните реални интервали изпълняват $\# = 0$, а всички други интервали - $\# > 0$.

Означаваме разширението на $DC$ с дискретни интервали, $\backslash\backslash$ и $\#$ с $DC_{\backslash\backslash}$.

Както и $WDC$, $DC_{\backslash\backslash}$ не е разширение на $DC$ в точния смисъл на думата. Системата за извод за $DC$ не е коректна в $DC_{\backslash\backslash}$. В частност, дискретните интервали не изпълняват следствието $\ell = x + y \Rightarrow (\ell = x; \ell = y)$ на аксиомата $L2$, поради ограничения избор на делящи точки в тях.

Употребата на оператора $\backslash\backslash$ позволява краткото изразяване на сложни практически интересни условия в $DC$, свързани с дискретизацията на времето в различни мащаби. В [He99] е предложена система от аксиоми и правила в алгебричен дух за $\backslash\backslash$, която показва отчасти взаимодействието му с $(.;.)$, някои съждителни връзки и квантора $\exists$. Проверката на коректността на тези аксиоми убеждава, че $\backslash\backslash$ разтоварва

някои спецификации посредством $DC$ от значителна по обем практическа сложност. В присъствието на $\backslash\backslash$, например, итерацията може да се определи като съкращение: $\varphi^* \rightleftharpoons \ell = 0 \vee (\top \backslash\backslash \varphi)$. За съжаление е трудно да се съди за достатъчността на системата от аксиоми от [He99], както и за възможността тя да бъде допълнена. Затова предложеното тук решение на въпроса за общовалидността в $DC_{\backslash\backslash}$ е косвено.

## 5.6 Смятане на продължителностите с квантор по променливите за състояния

Това разширение на $DC$ е въведено заради следното удобство, което то дава при формалното описване на системи, работещи в реално време. Нека $\varphi_1$ и $\varphi_2$ са две описания на една такава система в езика на $DC$, или нека $\varphi_1$ е описание на функционирането на системата, а $\varphi_2$ е описание на изисквания към него. Тогава импликацията

$\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$

изразява, че описанието $\varphi_1$ е по-точно от описанието $\varphi_2$, или, във втория случай, че работейки според $\varphi_1$, системата изпълнява изискванията, изразени с $\varphi_2$. Възможността да бъде формализирано твърдението, че едно описание е уточнение на друго, е от основно значение при проектирането и верификацията на системи, работещи в реално време, и при програмирането от спецификации изобщо.

Често описанията $\varphi_1$ и $\varphi_2$, освен важните за наблюдаемото поведение на описваната система променливи за състояния, използуват и други, отговарящи за състояния, които са "вътрешни" за системата и които не се споменават в изискванията, на които тя трябва да отговаря. Системи с различни състояния от този вид могат да изпълняват еднакви изисквания и различни описания на една система могат да споменават различни нейни вътрешни състояния. За да бъде изпълнена горната импликация, е необходимо стойностите на променливите, представящи тези състояния, да не влияят на истинността на $\varphi_1$ и $\varphi_2$. Прекият начин да се постигне това, е те да бъдат свързани с квантор и така да бъдат "скрити". При това отношението на уточняване се записва във вида

$\exists P_1 \ldots \exists P_n \varphi_1 \Rightarrow \exists Q_1 \ldots \exists Q_m \varphi_2$,

където $P_1, \ldots, P_n$ и $Q_1, \ldots, Q_m$ представят скриваните състояния. Нека $\langle F, I\rangle$ е модел за $DC$. Релацията $\models$ се определя за формули от вида $\exists P\varphi$ по следния начин:

$\langle F, I\rangle, \sigma \models \exists P\varphi$ ако $\langle F, J\rangle, \sigma \models \varphi$ за някоя $J$, $P$-съгласувана с $I$.

Съответствието между $DC$ с квантор по променливите за състояния и програмните конструкции е изложено пълно в [ZGZ99].

# 6 Смятане на продължителностите с абстрактна семантика

В тази глава представяме едно решение на проблема за пълнотата на $DC$. Както споменахме в увода към тази част, известната система за извод за $DC$ е само относително пълна, а множеството от формулите от $ITL$, които се привличат в изводите в нея, не е полуразрешимо. Подходът към нашето решение е следният:

Въвеждаме абстрактна семантика за $DC$, подобна на известната за $ITL$, която обаче отразява специфичното ограничение, наложено на оценките на променливите за състояния, а именно - да бъдат на части постоянни функции на времето. Както лесно може да се установи от съображения за компактност, това ограничение не може да се характеризира в система, съдържаща само правила с краен брой предпоставки. Затова въвеждаме $\omega$-правило, което е подходящо обобщение на правилата $IR_1$ и $IR_2$ и което характеризира ограничението. Новото правило въвеждаме най-напред в разширение на познатата система за извод за $ITL$ и показваме, че то характеризира аналог на интересуващото ни ограничение за произволно избран клас от формули, за които се допуска прилагането му. След това показваме, че ако този клас бъде избран да се състои от подходящо образувани с променливите за състояния формули, се получава търсената от нас характеризация на ограничението оценките на тези променливи да са на части постоянни функции на времето. С това получаваме решение на въпроса за пълнотата на $DC$.

Избраният ред на работа позволява общият вид на правилото да бъде използуван и в други случаи, при които се срещат подобни ограничения. Такива случаи представят $WDC$, двумерната $ITL$ и двумерното $DC$, чието разширение е $WDC$, и системата, в която превеждаме $DC_{\backslash\backslash}$. Благодарение на това в тази глава решаваме (косвено) и въпросите за общовалидността в тези системи.

Освен това въвеждането на аналог на променливите за състояния в $ITL$ позволява да покажем, че връзката между този вид променливи и термовете, задаващи техните продължителности, които са по същество темпорални константи, може изцяло, при това с малко и прости аксиоми, да се характеризира в рамката на $ITL$. При това се избягва дублирането на съждителната съставка, което е налице в $DC$ за формули и за изрази за състояния.

## 6.1 Свойството на крайните покрития в интервалната темпорална логика

В този параграф въвеждаме свойството на *крайните покрития* за формули от езика на $ITL$. Това свойство е аналог на ограничението за променливите за състояния в $DC$ да бъдат на части постоянни функции на времето. Свойството на крайните покрития се характеризира чрез $\omega$-правило, с което разширяваме известната система за извод за $ITL$. В края на параграфа доказваме съответната теорема за пълнота.

**Дефиниция 6.1** Нека $M$ е модел за езика $\mathbf{L}$ на $ITL$, а $\gamma$ е формула от $\mathbf{L}$. Казваме, че $\gamma$ има *свойството на крайните покрития* в $M$, ако за всеки интервал $\sigma \in \mathbf{I}(T_M)$, $M, \sigma \models \gamma \Rightarrow \Box\gamma$ и съществува такова $n < \omega$, че $\sigma$ може да се представи във вида $\sigma_0; \ldots; \sigma_n$, където $M, \sigma_i \models \gamma$ за $i \leq n$. $\gamma$ има свойството на крайните покрития в клас $\mathbf{K}$ от модели за $\mathbf{L}$, ако $\gamma$ има това свойство във всеки модел от $\mathbf{K}$.

Разширението на $ITL$, определено от класа от модели за даден език на $ITL$, в който фиксирано множество $\Omega$ от формули имат свойството на крайните покрития, означаваме с $ITL_{fin}(\Omega)$. Очевидно всяка теорема на $ITL$ има свойството на крайните покрития в класа от всички модели за съответния език на $ITL$. Взимайки в качеството на $\Omega$ множеството от теоремите на $ITL$ в избрания език, получаваме $ITL_{fin}(\Omega) = ITL$. Този макар и тривиален пример показва, че съществуват случаи,

в които $ITL_{fin}(\Omega)$ има модели и е непротиворечива. Както става ясно в параграф 6.3, основен пример за горното свойство се получава с помощта на формулите от вида $\lceil S \rceil \vee \lceil \neg S \rceil \vee \ell = 0$ и моделите на $DC$.

До края на параграфа считаме, че $\mathbf{L}$ е фиксиран език за $ITL$, $\Omega$ е множество от формули от $\mathbf{L}$ и $\mathbf{K}$ е класът от онези модели за $\mathbf{L}$, в които формулите от $\Omega$ имат свойството на крайните покрития.

**Твърдение 6.2** *Нека $\gamma \in \Omega$, $M \in \mathbf{K}$. Тогава за всяко $\sigma \in \mathbf{I}(T_M)$ съществува $k_0$ такова, че $\sigma \models \Box(\gamma^k)$ за всички $k \geq k_0$.*

**Доказателство:** Можем да изберем за $k_0$ онова $k$, за което е изпълнено условието от дефиницията на свойството на крайните покрития за $\gamma$. Тъй като от тази дефиниция следва, че $\gamma$ е вярна в интервалите със съвпадащи краища и в подинтервалите на интервали, които изпълняват $\gamma$, получаваме твърдението. $\dashv$

**Следствие 6.3** *Нека $\gamma \in \Omega$, $M \in \mathbf{K}$ и $\sigma \in \mathbf{I}(T_M)$. Тогава съществува $k$ такова, че $M, \sigma \models \Box(\gamma^k \Leftrightarrow \top)$.*

**Забележка 6.4** Както е известно, заместванията $[t/x]\varphi$ на индивидна променлива $x$ с терм $t$ във формула $\varphi$ са коректни в изводите само когато никое участие на $x$ във $\varphi$ не се намира в обсега на квантор, свързващ променлива, участвуваща в $t$. По подобна причина заместване от вида $[\alpha/P]\varphi$ на темпорална съждителна променлива $P$ с формула $\alpha$ е коректно в изводите само в случай, че $P$ няма участия във $\varphi$ в обсега на квантор, свързващ някоя свободна променлива на $\alpha$. Тук и по-нататък предполагаме, че означените заместявания на темпорални съждителни променливи са коректни в изводите.

Следната лема се доказва с проста индукция по строежа на формулите:

**Лема 6.5** *Нека $P$ е темпорална съждителна променлива, а $\alpha$, $\beta$ и $\varphi$ са формули от $\mathbf{L}$. Нека $M$ е модел за $\mathbf{L}$ и $\sigma \in \mathbf{I}(T_M)$. Тогава, ако $M, \sigma \models \Box(\alpha \Leftrightarrow \beta)$, то $M, \sigma \models \Box([\alpha/P]\varphi \Leftrightarrow [\beta/P]\varphi)$. Освен това, ако $\Gamma \vdash_{ITL} \Box(\alpha \Leftrightarrow \beta)$, то $\Gamma \vdash_{ITL} \Box([\alpha/P]\varphi \Leftrightarrow [\beta/P]\varphi)$.*

Сега нека отново $P$ е темпорална съждителна променлива, $\varphi$ е формула от $\mathbf{L}$, която, евентуално, съдържа $P$, и $\gamma \in \Omega$. Да разгледаме правилото с безброй много предпоставки:

$$\frac{\forall k < \omega \ [\gamma^k/P]\varphi}{[\top/P]\varphi} \ (\omega^\gamma)$$

**Твърдение 6.6** *Правилото $\omega^\gamma$ е коректно в класа $\mathbf{K}$.*

**Доказателство:** Нека $M \in \mathbf{K}$ и $\sigma \in \mathbf{I}(T_M)$. Според следствие 6.3 съществува $k$ такова, че $M, \sigma \models \Box(\gamma^k \Leftrightarrow \top)$. Оттук, по лема 6.5, $M, \sigma \models \Box([\gamma^k/P]\varphi \Leftrightarrow [\top/P]\varphi)$. Следователно, ако $M, \sigma \models [\gamma^k/P]\varphi$ за всички естествени $k$, то $M, \sigma \models [\top/P]\varphi$. $\dashv$

Останалата част от този параграф е посветена на доказателството на пълнотата на разширението на известната система за извод за $ITL$ с правилото $\omega^\gamma$ и аксиомите $\gamma \Rightarrow \Box\gamma$, $\gamma \in \Omega$, за класа $\mathbf{K}$, т.е. за логиката $ITL_{fin}(\Omega)$. Изводимостта в това разширение означаваме с $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)}$. Доказуемите в него формули наричаме *теореми на* $ITL_{fin}(\Omega)$.

Доказателството следва пътя на това от [Dut95], което се опира на канонична конструкция. Част от техническите твърдения са изменени съответно на въздействието, което новото правило оказва върху системата за извод. Основното усложнение, произтичащо от въвеждането на $\omega$-правило в системата, е загубата на компактността на релацията $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)}$. Затова новите елементи в доказателството са най-вече там, където в [Dut95] се използува тази компактност.

Тъй като каноничната конструкция се опира на Хенкинови пълни теории, най-напред изучаваме свойствата на този вид теории в системата за извод за $ITL_{fin}(\Omega)$.

### 6.1.1 Непротиворечиви спрямо $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)}$ теории

Нека припомним някои понятия, които се определят по сходен начин в логическите системи от първи ред.

**Дефиниция 6.7** Едно множество $\Gamma$ от формули от $\mathbf{L}$ наричаме *теория* в $\mathbf{L}$, ако $\Gamma$ съдържа всички формули $\varphi$ от $\mathbf{L}$ такива, че $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \varphi$, и е затворено относно правилата $MP$ и $\omega^\gamma$, $\gamma \in \Omega$. Една теория $\Gamma$ е *непротиворечива*, ако $\bot \notin \Gamma$. Едно множество $\Gamma$ от формули от $\mathbf{L}$ е *непротиворечиво*, ако е подмножество на някоя непротиворечива теория. Една теория е *максимална*, ако е непротиворечива и не е собствено подмножество на никоя друга непротиворечива теория. Една теория е *пълна*, ако съдържа точно една от формулите $\varphi$ и $\neg\varphi$ за всяка формула $\varphi$ от $\mathbf{L}$. Нека $C$ е множество от статични константни символи. Една теория $\Gamma$ е *Хенкинова със свидетели в* $C$, ако за всяка формула $\varphi$ от $\mathbf{L}$ от $\exists x\varphi \in \Gamma$ следва, че $[c/x]\varphi \in \Gamma$ за някое $c \in C$.

Тъй като $ITL$ е разширение на предикатното смятане от първи ред, следните свойства на теориите се пренасят оттам без изменения:

**Твърдение 6.8** *Нека $\Gamma$ е теория. Тогава $\Gamma$ е максимална, точно когато $\Gamma$ е пълна. Освен това за всички формули $\varphi, \psi$ от $\mathbf{L}$:*

- $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ *точно тогава, когато* $\varphi, \psi \in \Gamma$;
- $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ *точно тогава, когато* $\varphi \in \Gamma$ *или* $\psi \in \Gamma$.

Тъй като сечението на произволно множество от теории е теория, за всяко множество $\Gamma$ от формули от $\mathbf{L}$ съществува най-малка теория, която съдържа $\Gamma$.

**Дефиниция 6.9** Нека $\Gamma$ е множество от формули от $\mathbf{L}$. С $Cn(\Gamma)$ означаваме най-малката теория, съдържаща $\Gamma$. Нека $\varphi$ е формула от $\mathbf{L}$. С $\Gamma + \varphi$ означаваме множеството $\{\psi : \varphi \Rightarrow \psi \in \Gamma\}$.

Очевидно $Cn(\Gamma)$ е множеството от следствията на формулите от $\Gamma$ и теоремите на $ITL$, които могат да бъдат получени по правилата $MP$ и $\omega^\gamma$.

**Лема 6.10** *Нека $\Gamma$ е теория. Тогава $\Gamma + \varphi = Cn(\Gamma \cup \{\varphi\})$.*

**Доказателство:** Доказателството е като на това на лема 2.14 от част 1. $\dashv$

**Лема 6.11** *Нека $\Gamma$ е непротиворечиво множество и $\exists x\varphi \in Cn(\Gamma)$. Нека $c$ е статична константа, която не участвува във формулите от $\Gamma$. Тогава $\Gamma \cup \{[c/x]\varphi\}$ също е непротиворечиво.*

**Доказателство:** Допускаме противното. Тогава съществува извод на $\neg[c/x]\varphi$, в който евентуално се използуват формули от $\Gamma$. Заместването навсякъде в този извод на $c$ с нова индивидна променлива $y$ е извод на $\neg[y/x]\varphi$. С индукция по строежа на този извод получаваме от него извод на $\forall y\neg[y/x]\varphi$.

Нека имаме извод на $[y/c]\psi$ от $\Gamma$ по правилата $MP$ и $\omega^\gamma$, получен чрез заместване на $c$ с новата променлива $y$ по гореописания начин. Доказваме с индукция по строежа на извода, че съществува подобен извод и на $\forall y[y/c]\psi$. Основата на индуктивното доказателство се състои от случая, когато $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \psi$, и случая, когато $\psi \in \Gamma$. В първия случай прилагаме правилото $G$. Във втория $[y/c]\psi$ съвпада с $\psi$, тъй като $c$ не участвува във формулите от $\Gamma$. Но за такива $\psi$ формулата $\psi \Leftrightarrow \forall y[y/c]\psi$ е теорема на $ITL_{fin}(\Omega)$ (и дори на предикатното смятане). Ако $\psi$ е получена по $MP$ от $[y/c]\chi$ и $[y/c](\chi \Rightarrow \psi)$, от индукционното допускане получаваме изводи на $\forall y[y/c]\chi$ и $\forall y[y/c](\chi \Rightarrow \psi)$. Тъй като $\forall y[y/c](\chi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\forall y[y/c]\chi \Rightarrow \forall y[y/c]\psi)$ е теорема на $ITL_{fin}(\Omega)$, имаме извод и на $\forall y[y/c]\chi \Rightarrow \forall y[y/c]\psi$. Прилагаме $MP$ към тази формула и $\forall y[y/c]\chi$. Ако $[y/c]\psi$ има вида $[\top/P][y/c]\chi$ и е получена от $[\gamma^k/P][y/c]\chi$, $k < \omega$, по

правилото $\omega^\gamma$, по индукционното допускане имаме изводи на $\forall y[\gamma^k/P][y/c]\chi$, $k < \omega$, откъдето, отново по $\omega^\gamma$, получаваме $\forall y[y/c]\psi$.

Следователно, вземайки $\neg[c/x]\varphi$ в качеството на $\psi$, получаваме, че $\forall y[y/x]\varphi \in Cn(\Gamma)$. Това противоречи на $\exists x\varphi \in Cn(\Gamma)$, защото $\forall x\varphi \Leftrightarrow \forall y[y/x]\varphi$ е теорема на $ITL_{fin}(\Omega)$. $\dashv$

Следващото твърдение, известно като лема на Линденбаум, е основно при каноничните конструкции. Нека $C$ е изброимо множество от статични константи, които не се срещат в $\mathbf{L}$. С $\mathbf{L}(C)$ означаваме езика за $ITL$, който се получава като добавим константите от $C$ към символите на $\mathbf{L}$. Лемата на Линденбаум твърди, че произволно непротиворечиво множество от формули от $\mathbf{L}$ може да се разшири до пълна Хенкинова теория със свидетели в $C$. Особеност на доказателството в разглежданото разширение $ITL_{fin}(\Omega)$ е присъствието на $\omega$-правилото. Неформално това правило е еквивалентно на $(\forall\gamma \in \Omega)(\neg[\top/P]\varphi \Rightarrow (\exists k < \omega)\neg[\gamma^k/P]\varphi)$. Поставените в скоби кванторни представки не са елемент на езика на $ITL$. Независимо от това, доказателството на лемата се опира на посочване на "свидетели" за формулите от вида $\neg[\top/P]\varphi$, попадащи в строеното разширение на $\Gamma$. Тези "свидетели" са формули от вида $\neg[\gamma^k/P]\varphi$ за всички $\gamma \in \Omega$ и за подходящи $k$.

**Теорема 6.12 (лема на Линденбаум)** *Нека $\Gamma$ е непротиворечиво множество от формули от $\mathbf{L}$. Тогава съществува пълна Хенкинова теория $\Gamma'$ в $\mathbf{L}(C)$ със свидетели в $C$ и такава, че $\Gamma \subset \Gamma'$.*

**Доказателство:** Нека $\{\varphi_i : i < \omega\}$ е множеството от всички формули от $\mathbf{L}(C)$, а $\{\gamma_i : i < \omega\} = \Omega$. Нека $\pi_1, \pi_2 : \omega \to \omega$ са такива, че за всяка двойка $k_1, k_2 < \omega$ съществува $i$, за което $\pi_1(i) = k_1$ и $\pi_2(i) = k_2$. Строим редица от непротиворечиви теории $\Gamma_i$, $i < \omega$. $\Gamma_0$ е $Cn(\Gamma)$. $\Gamma_i$ е от вида $Cn(\Gamma \cup \Phi)$, където $\Phi_i$ е крайно подмножество на $\mathbf{L}(C)$. Нека $\Gamma_i$ е построена, $k_1 = \pi_1(i)$ и $k_2 = \pi_2(i)$. Определяме $\Gamma_{i+1}$ в зависимост от следните случаи:

1: $\Gamma_i + \varphi_{k_1}$ е противоречива. Тогава $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$.

2: $\Gamma_i + \varphi_{k_1}$ е непротиворечива. Разглеждаме следните подслучаи:

2а: $\varphi_{k_1}$ не е от вида $\exists x\psi$, нито е отрицание, съдържащо $\top$. Тогава $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i + \varphi_{k_1}$. По лема 6.10 $\Gamma_{i+1} = Cn(\Gamma_i \cup \{\varphi_{k_1}\}) = Cn(\Gamma \cup \Phi_i \cup \{\varphi_{k_1}\})$. Следователно $\Gamma_{i+1}$ има определения вид за $\Phi_{i+1} = \Phi_i \cup \{\varphi_{k_1}\}$.

2б: $\varphi_{k_1}$ е $\exists x\psi$. Нека $c \in C$ и $c$ не се среща в $\Phi_i$. Тогава, по лема 6.10, като се има предвид, че $\Gamma_i = Cn(\Gamma \cup \Phi_i)$, $\Gamma_i + \varphi_{k_1} + [c/x]\psi$ е непротиворечива. Полагаме $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i + \varphi_{k_1} + [c/x]\psi$, $\Phi_{i+1} = \Phi_i \cup \{\varphi_{k_1}, [c/x]\psi\}$.

2в: $\varphi_{k_1}$ е отрицание и съдържа $\top$. Нека $m$ е броят на участията на $\top$ във $\varphi_{k_1}$. Тогава съществуват $p = 2^m - 1$ различни формули $\psi$, съдържащи някоя нова темпорална съждителна променлива $P$, със свойството $\varphi_{k_1} \doteq \neg[\top/P]\psi$. Нека това са $\psi_1, \ldots, \psi_p$. Тогава за всяко $j = 1, \ldots, p$ съществуват $n_1, \ldots, n_j < \omega$ такива, че $\Gamma_i + \varphi_{k_1} + \neg[\gamma_{k_2}^{n_1}/P]\psi_1 + \ldots + \neg[\gamma_{k_2}^{n_j}/P]\psi_j$ е непротиворечива. Доказваме това с индукция по $j$. Основата на индукцията е допускането, че $\Gamma_i + \varphi_{k_1}$ е непротиворечива, което важи за разглеждания случай. Нека $\Delta_j = \Gamma_i + \varphi_{k_1} + \neg[\gamma_{k_2}^{n_1}/P]\psi_1 + \ldots + \neg[\gamma_{k_2}^{n_j}/P]\psi_j$ е непротиворечива, а $\Delta + \neg[\gamma_{k_2}^{n_{j+1}}/P]\psi_{j+1}$ е противоречива за всички $n_{j+1} < \omega$. Оттук следва, че $[\gamma_{k_2}^{n_{j+1}}/P]\psi_{j+1} \in \Delta$ за всички $n_{j+1} < \omega$ и, по правилото $\omega^{\gamma_{k_2}}$, $[\top/P]\psi \in \Delta$, което е противоречие. От доказаното за $j = p$ получаваме набор от естествени числа $n_1, \ldots, n_p$ такива, че $\Gamma_i + \varphi_{k_1} + \neg[\gamma_{k_2}^{n_1}/P]\psi_1 + \ldots + \neg[\gamma_{k_2}^{n_p}/P]\psi_p$ е непротиворечива. Определяме тази теория да бъде $\Gamma_{i+1}$ и полагаме $\Phi_{i+1} = \Phi_i \cup \{\varphi_{k_1}, \neg[\gamma_{k_2}^{n_1}/P]\psi_1, \ldots, \neg[\gamma_{k_2}^{n_p}/P]\psi_p\}$.

Ще докажем, че $\Gamma' = \bigcup_{i<\omega} \Gamma_i$ е пълна теория в $\mathbf{L}(C)$. Наистина, за всяка формула $\varphi$ от определението на $\Gamma_i$ за $i$ такива, че $\varphi \doteq \varphi_{\pi_1(i)}$, имаме или $\varphi \in \Gamma_{i+1}$, или $\Gamma_i + \varphi$ е противоречива, откъдето следва, че $\neg\varphi \in \Gamma_i$. $\Gamma'$ не съдържа $\bot$, защото никоя от теориите $\Gamma_i$ не съдържа $\bot$. $\Gamma'$ съдържа всички теореми на $ITL$, защото $\Gamma_0$ ги съдържа. Освен това тя е затворена относно $MP$, защото всяка от теориите $\Gamma_i$ е затворена

относно $MP$, а $\Gamma_{i+1} \supseteq \Gamma_i$ за всяко $i < \omega$. От случай 2б в построението на $\Gamma'$ следва, че $\Gamma'$ е Хенкинова със свидетели в $C$.

Остава да докажем, че $\Gamma'$ е затворена относно $\omega^\gamma$ за всяко $\gamma \in \Omega$. Нека $[\top/P]\varphi \notin \Gamma'$ и $\gamma \in \Omega$. Съществува $i$ такова, че $\neg[\top/P]\varphi = \varphi_{\pi_1(i)}$ и $\gamma = \gamma_{\pi_2(i)}$. Както вече установихме, $\neg[\top/P]\varphi \in \Gamma'$, откъдето следва, че $\Gamma_i + \neg[\top/P]\varphi$ е непротиворечива. Според определението на $\Gamma_{i+1}$, случай 2в, $\Gamma_{i+1}$ съдържа отрицанието на поне една формула от вида $[\gamma^n/P]\varphi$. Следователно $\Gamma'$ не съдържа всичките предпоставки, необходими за извеждането на $[\top/P]\varphi$ по $\omega^\gamma$. $\dashv$

Следващите твърдения посочват начина, по който се избягва използването на компактността на $\vdash_{ITL}$, с която не разполагаме поради безброй многото предпоставки на $\omega^\gamma$.

**Твърдение 6.13** *Нека $\Gamma$ е пълна теория в $\mathbf{L}(C)$. Тогава за всяко $\gamma \in \Omega$, съществува $k < \omega$ такова, че $\gamma^k \in \Gamma$.*

**Доказателство:** Допускаме противното. Тогава $\neg\gamma^k \in \Gamma$ за всяко $k < \omega$, откъдето, по правилото $\omega^\gamma$ за $\varphi \doteq \neg P$ получаваме $\neg\top \in \Gamma$. Това е противоречие. $\dashv$

**Твърдение 6.14** *Нека $\Gamma$ е множество от формули от $\mathbf{L}(C)$, което съдържа теоремите на $ITL_{fin}(\Omega)$ и формулата $\gamma^k$ от $\mathbf{L}(C)$, и е затворено относно $MP$. Тогава $\Gamma$ е затворено относно $\omega^\gamma$ точно когато е затворено относно крайното правило*

$$\frac{\forall i \leq k\ [\gamma^i/P]\varphi}{[\top/P]\varphi}\ (\omega_k^\gamma)$$

**Доказателство:** Очевидно, ако $\Gamma$ е затворено относно $\omega_k^\gamma$, то е затворено и относно $\omega^\gamma$. Ще докажем обратното. Нека $\psi \rightleftharpoons \left(\bigwedge_{i\leq k}[\gamma^i/P]\varphi\right) \Rightarrow \varphi$. Тогава за $i \leq k$ $[\gamma^i/P]\psi$ е съждителна тавтология. От друга страна, тъй като $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \gamma^k \Rightarrow \Box(\gamma^{k'} \Leftrightarrow \gamma^k) \in \Gamma$ за $k' \geq k$ и $\gamma^k \in \Gamma$, по лема 6.5 $\Box([\gamma^k/P]\psi \Leftrightarrow [\gamma^{k'}/P]\psi) \in \Gamma$ за $k' \geq k$. Оттук получаваме, че $[\gamma^i/P]\psi \in \Gamma$ за всички $i < \omega$, откъдето $[\top/P]\psi \in \Gamma$ по $\omega^\gamma$. Тъй като $[\top/P]\psi$ е импликацията $\left(\bigwedge_{i\leq k}[\gamma^i/P]\varphi\right) \Rightarrow [\top/P]\varphi$, оттук следва, че $\Gamma$ е затворено относно $\omega_k^\gamma$. $\dashv$

**Следствие 6.15** *Нека $\Gamma$ е противоречиво множество от формули от $\mathbf{L}(C)$ и за всяко $\gamma \in \Omega$ съществува $k < \omega$ такова, че $\gamma^k \in \Gamma$. Тогава $\Gamma$ съдържа крайно противоречиво подмножество.*

**Доказателство:** Според твърдение 6.14, можем да заместим прилаганията на правилата $\omega_k^\gamma$ в извода на $\bot$ от $\Gamma$ с прилагания на крайните правила $\omega_k^\gamma$. Извършваме това с индукция по строежа на такъв извод и получаваме крайно доказателство на $\bot$ в $\Gamma$. Предпоставките от $\Gamma$ в това доказателство, заедно със степените $\gamma^k$ на онези $\gamma \in \Omega$, за които в доказателството се използува правилото $\omega_k^\gamma$, образуват търсеното крайно противоречиво подмножество на $\Gamma$. $\dashv$

В следващите твърдения често използуваме следствие 6.15 в комбинация с твърдение 6.13 за да свеждаме противоречивостта на множества от формули до противоречивостта на техни крайни подмножества. Нека за произволни множества $\Gamma$, $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ от формули от $\mathbf{L}(C)$ с $\Gamma^\wedge$ означаваме множеството $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n : n < \omega, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma\}$, а с $\Gamma_1;\Gamma_2$ означаваме множеството $\{(\varphi;\psi) : \varphi \in \Gamma_1, \psi \in \Gamma_2\}$. Според твърдение 6.13, ако $\Gamma$ е пълна теория, за всяко $\gamma \in \Omega$ съществува $k_\gamma$ такова, че $\gamma^{k_\gamma} \in \Gamma$. Означаваме множеството $\{\gamma^{k_\gamma} : \gamma \in \Omega\}$ с $\Omega^\Gamma$.

Преминаваме към установяването на свойствата на пълните теории в $\mathbf{L}(C)$, които позволяват чрез тях да бъдат представени интервалите в канонична структура за $ITL_{fin}(\Omega)$.

**Лема 6.16** *Нека* $\Gamma$ *е пълна теория в* $\mathbf{L}(C)$. *Нека* $\Gamma_1, \Gamma_2 \neq \emptyset$ *и* $\Gamma_1^\wedge; \Gamma_2^\wedge \subset \Gamma$. *Тогава* $\Gamma_1$ *и* $\Gamma_2$ *са непротиворечиви и* $Cn(\Gamma_1); Cn(\Gamma_2) \subset \Gamma$.

**Доказателство:** Да докажем, че множеството $\Gamma_1 \cup \Omega^\Gamma$ е непротиворечиво. Допускаме противното. Тогава според следствие 6.15 $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \gamma'_1 \wedge \ldots \wedge \gamma'_m)$ за някои $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma_1$ и някои $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_m \in \Omega^\Gamma$. Следователно, по $N_l$, за всяко $\psi \in \Gamma_2^\wedge$ $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \gamma'_1 \wedge \ldots \wedge \gamma'_m; \psi)$. От друга страна, тъй като $\neg(\neg\gamma'_i; \top) \in \Gamma$, откъдето по $Mono_l$ следва, че $\neg(\neg\gamma'_i; \psi) \in \Gamma$ за $i = 1, \ldots, m$, прилагайки $m$ пъти $A1_l$, получаваме $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n; \psi) \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \gamma'_1 \wedge \ldots \wedge \gamma'_m; \psi) \in \Gamma$. Оттук следва, че $\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n; \psi) \in \Gamma$. Това противоречи на $\Gamma_1^\wedge; \Gamma_2^\wedge \subset \Gamma$. С това установихме непротиворечивостта на $\Gamma_1$. Доказателството за $\Gamma_2$ е подобно.

Сега нека $\varphi \in Cn(\Gamma_1)$, $\psi \in Cn(\Gamma_2)$. Тогава $\varphi \in Cn(\Gamma_1 \cup \Omega^\Gamma)$ и $\psi \in Cn(\Gamma_2 \cup \Omega^\Gamma)$. Отново по следствие 6.15, $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \gamma'_1 \wedge \ldots \wedge \gamma'_m \Rightarrow \varphi$ и $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_p \wedge \gamma'_1 \wedge \ldots \wedge \gamma'_m \Rightarrow \psi$ за някои $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma_1$, $\psi_1, \ldots, \psi_p \in \Gamma_2$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \Omega$. Оттук, по $Mono_l$ и $Mono_r$, получаваме $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \gamma'_1 \wedge \ldots \wedge \gamma'_m; \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_p \wedge \gamma'_1 \wedge \ldots \wedge \gamma'_m) \Rightarrow (\varphi; \psi)$. Отново, използувайки, че $\neg(\neg\gamma'_i; \top), \neg(\top; \neg\gamma'_i) \in \Gamma$ за $i = 1, \ldots, m$ и прилагайки $A1_l$ и $A1_r$ $2m$ пъти, получаваме $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n; \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_p) \Rightarrow (\varphi; \psi) \in \Gamma$. Тъй като $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n; \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_p) \in \Gamma$, оттук следва, че $(\varphi; \psi) \in \Gamma$. $\dashv$

Следвайки [Dut95], определяме функциите $\delta_1$ и $\delta_2$ за двойки от множества от формули от $\mathbf{L}(C)$ с равенствата:

$$\delta_1(\Gamma, \Delta) = \{\psi : \neg(\varphi; \neg\psi) \in \Gamma, \varphi \in \Delta\}, \qquad \delta_2(\Gamma, \Delta) = \{\varphi : \neg(\neg\varphi; \psi) \in \Gamma, \psi \in \Delta\}.$$

**Лема 6.17** *Нека* $\Delta'$ *и* $\Delta''$ *са множества от формули от* $\mathbf{L}(C)$. *Нека* $\Gamma$ *е пълна теория в* $\mathbf{L}(C)$. *Тогава, ако* $\delta_1(\Gamma, \Delta') \cup \Delta''$ *е противоречиво, то има крайно противоречиво подмножество.*

**Доказателство:** От $\neg(\top; \neg\gamma') \in \Gamma$ с помощта на $Mono_l$ получаваме, че $\neg(\varphi; \neg\gamma') \in \Gamma$ за всяка формула $\varphi$ от $\mathbf{L}(C)$ и всяко $\gamma' \in \Omega^\Gamma$. Следователно $\Omega^\Gamma \subset \delta_1(\Gamma, \Delta')$. Оттук получаваме лемата по следствие 6.15. $\dashv$

**Лема 6.18** *Нека* $\Gamma$ *е пълна теория в* $\mathbf{L}(C)$ *и* $\Gamma_1, \Gamma_2$ *са такива, че* $\Gamma_1^\wedge; \Gamma_2^\wedge \subset \Gamma$. *Нека* $\Gamma'_1 = \Gamma_1 \cup \delta_2(\Gamma, \Gamma_2)$ *и* $\Gamma'_2 = \Gamma_2 \cup \delta_1(\Gamma, \Gamma_1)$. *Тогава* $(\Gamma'_1)^\wedge; \Gamma_2, \Gamma_1^\wedge; (\Gamma'_2)^\wedge \subset \Gamma$.

**Доказателство:** Нека $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma'_1$, $\psi_1, \ldots, \psi_l \in \Gamma_2$. Ако $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma_1$, няма какво да се доказва. Нека $m \leq n$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \delta_2(\Gamma, \Gamma_2)$. Тогава съществуват $\chi_1, \ldots, \chi_m \in \Gamma_2$ такива, че $\neg(\neg\varphi_i; \chi_i) \in \Gamma$ за $i = 1, \ldots, m$. Нека $\psi \rightleftharpoons \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_l \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_m$. Тъй като $\psi \Rightarrow \chi_i$ е съждителна тавтология и, по $Mono_r$, $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \neg(\neg\varphi_i; \chi_i) \Rightarrow \neg(\neg\varphi_i; \psi)$, получаваме, че $\neg(\neg\varphi_i; \psi) \in \Gamma$ за $i = 1, \ldots, m$. Ако $m < n$, нека $\varphi \rightleftharpoons \varphi_{m+1} \wedge \ldots \wedge \varphi_n$, а иначе нека $\varphi$ е произволна формула от $\Gamma_1$. Тогава $(\varphi; \psi) \in \Gamma$, защото $\varphi \in \Gamma_1^\wedge$ и $\psi \in \Gamma_2^\wedge$. Прилагайки $m$ пъти $A1_l$, получаваме $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} (\varphi; \psi) \wedge \neg(\neg\varphi_1; \psi) \wedge \ldots \wedge \neg(\neg\varphi_m; \psi) \Rightarrow (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m \wedge \varphi; \psi)$, откъдето следва, че $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n; \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_l) \in \Gamma$.

Доказателството на $\Gamma_1^\wedge; (\Gamma'_2)^\wedge \subset \Gamma$ е аналогично. $\dashv$

**Следствие 6.19** *Ако* $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ *и* $\Gamma$ *изпълняват условията на лема 6.18,*

$$Cn(\Gamma_1 \cup \delta_2(\Gamma, \Gamma_2)); Cn(\Gamma_2), Cn(\Gamma_1); Cn(\Gamma_2 \cup \delta_1(\Gamma, \Gamma_1)) \subset \Gamma.$$

**Доказателство:** Получава се от леми 6.18 и 6.16. $\dashv$

**Теорема 6.20** *Нека* $\Gamma$ *е пълна теория в* $\mathbf{L}(C)$, *а* $\Gamma_1$ *и* $\Gamma_2$ *са такива, че* $\Gamma_1^\wedge; \Gamma_2^\wedge \subset \Gamma$. *Тогава съществуват пълни теории* $\Gamma_i^* \supseteq \Gamma_i$, $i = 1, 2$, *такива, че* $\Gamma_1^*; \Gamma_2^* \subset \Gamma$.

**Доказателство:** Определяме редиците $\Gamma_1^n$ и $\Gamma_2^n$, $n < \omega$ с равенствата: $\Gamma_1^0 = Cn(\Gamma_1)$, $\Gamma_2^0 = Cn(\Gamma_2)$, $\Gamma_2^{2k+2} = \Gamma_2^{2k+1} = Cn(\Gamma_2^{2k} \cup \delta_1(\Gamma, \Gamma_1^{2k}))$, $\Gamma_1^{2k+1} = \Gamma_1^{2k}$, $\Gamma_1^{2k+2} = Cn(\Gamma_1^{2k+1} \cup \delta_2(\Gamma, \Gamma_2^{2k+1}))$. Полагаме $\Gamma_i^\omega = \bigcup\limits_{n<\omega} \Gamma_i^n$, $i = 1, 2$.

От лема 6.16 следва, че $\Gamma_1^0;\Gamma_2^0 \subset \Gamma$. С индукция по $n$ и с помощта на лема 6.18 получаваме $\Gamma_1^n;\Gamma_2^n \subset \Gamma$ за всяко $n < \omega$. Оттук следва, че $(\Gamma_1^\omega)^\wedge;(\Gamma_2^\omega)^\wedge \subset \Gamma$, което, според лема 6.16, показва, че $\Gamma_1^\omega$ и $\Gamma_2^\omega$ са непротиворечиви.

Според теорема 6.12 съществува пълна теория $\Gamma_1^*$ в $\mathbf{L}$, която съдържа $\Gamma_1^\omega$. Нека $\psi \in \Gamma_2^\omega$, а $\varphi$ е такава формула, че $\neg(\neg\neg\varphi;\psi) \in \Gamma$. Тогава съществува $n < \omega$ такова, че $\psi \in \Gamma_2^n$ и, следователно, $\neg\varphi \in \delta_2(\Gamma,\Gamma_2^n)$, откъдето $\neg\varphi \in \Gamma_1^\omega \subset \Gamma_1^*$. Следователно, ако $\varphi \in \Gamma_1^*$, то $\neg(\neg\neg\varphi;\psi) \notin \Gamma$. Тъй като $\Gamma$ е пълна теория, оттук следва, че $(\varphi;\psi) \in \Gamma$. Тъй като $\psi$ бе произволно избрано от $\Gamma_2^\omega$, това доказва, че $\Gamma_1^*;\Gamma_2^\omega \subset \Gamma$.

Тъй като $\Gamma_1^*$ и $\Gamma_2^\omega$ са теории, $(\Gamma_1^*)^\wedge = \Gamma_1^*$ и $(\Gamma_2^\omega)^\wedge = \Gamma_2^\omega$. Следователно, $(\Gamma_1^*)^\wedge;(\Gamma_2^\omega)^\wedge \subset \Gamma$. Оттук, ако $\Gamma_2' = \Gamma_2^\omega \cup \delta_1(\Gamma,\Gamma_1^*)$, $\Gamma_1^*;\Gamma_2' \subset \Gamma$ според лема 6.18. Това, според лема 6.16, показва, че $\Gamma_2'$ е непротиворечиво. Нека $\Gamma_2^*$ е пълна теория в $\mathbf{L}(C)$, съдържаща $\Gamma_2'$, каквато съществува според теорема 6.12. Ако $\varphi \in \Gamma_1^*$, а $\psi$ е такава, че $\neg(\varphi,\neg\neg\psi) \in \Gamma$, то $\neg\psi \in \delta_1(\Gamma;\Gamma_1^*) \subset \Gamma_2' \subseteq \Gamma_2^*$. Следователно, ако $\psi \in \Gamma_2^*$, то $\neg(\varphi;\neg\neg\psi) \notin \Gamma$, откъдето $(\varphi,\psi) \in \Gamma$, защото $\Gamma$ е пълна теория. Това показва, че $\Gamma_1^*;\Gamma_2^* \subset \Gamma$. $\dashv$

**Лема 6.21** *Нека $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ и $\Gamma$ са пълни теории в $\mathbf{L}(C)$. Нека $\ell = c_i \in \Gamma_i$ за някои $c_i \in C$, $i = 1,2$. Нека $\Gamma_1;\Gamma_2 \subset \Gamma$. Тогава, ако $\varphi$ е статична формула, то $\varphi \in \Gamma$ е равносилно на $\varphi \in \Gamma_1$ и на $\varphi \in \Gamma_2$.*

**Доказателство:** Нека $\varphi \in \Gamma$ и $\varphi \notin \Gamma_1$. Тогава $\neg\varphi \in \Gamma_1$, защото $\Gamma_1$ е пълна. Използувайки, че $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} (\neg\varphi;\ell = c_2) \Rightarrow \neg\varphi$ по $R_l$, и $(\neg\varphi;\ell = c_2) \in \Gamma$, получаваме противоречие. Същите разсъждения, проведени за $\neg\varphi$, вместо за $\varphi$, показват, че от $\varphi \notin \Gamma$ следва $\varphi \notin \Gamma_1$. Доказателството за $\Gamma_2$ е аналогично. $\dashv$

**Лема 6.22** *Нека $\Gamma$ е пълна теория в $\mathbf{L}(C)$ и $(\ell = c;\top) \in \Gamma$ за някое $c \in C$. Тогава $\Delta_2 = \{\varphi : (\ell = c;\varphi) \in \Gamma\}$ е пълна теория в $\mathbf{L}(C)$. Аналогично, ако $(\top;\ell = c) \in \Gamma$, то $\Delta_1 = \{\varphi : (\varphi;\ell = c) \in \Gamma\}$ е пълна теория в $\mathbf{L}(C)$.*

**Доказателство:** Следният извод показва, че $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} (\ell = c;\alpha) \wedge (\ell = c;\beta) \Rightarrow (\ell = c;\alpha \wedge \beta)$:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(\ell = c;\beta) \Rightarrow \neg(\ell = c;\neg\beta)$ | $L1_l$ |
| 2 | $(\ell = c;\alpha) \wedge \neg(\ell = c;\neg\beta) \Rightarrow (\ell = c;\alpha \wedge \neg\neg\beta)$ | $A1_r$ |
| 3 | $(\ell = c;\alpha \wedge \neg\neg\beta) \Rightarrow (\ell = c;\alpha \wedge \beta)$ | $PC$, $Mono_r$ |
| 4 | $(\ell = c;\alpha) \wedge (\ell = c;\beta) \Rightarrow (\ell = c;\alpha \wedge \beta)$ | 1, 2, 3, $PC$ |

Следователно, ако $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in \Delta_1$, откъдето $(\ell = c;\varphi_1),\ldots,(\ell = c;\varphi_n) \in \Gamma$, то $(\ell = c;\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \in \Gamma$. Оттук, $\{\ell = c\};\Delta_1^\wedge \subset \Gamma$, което, според лема 6.16, показва, че $\Delta_1$ е непротиворечиво. Сега е достатъчно да докажем, че за всяка формула $\varphi$ или $\varphi \in \Delta_1$, или $\neg\varphi \in \Delta_1$. Това следва от $(\ell = c;\top) \in \Gamma$ и $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} (\ell = c;\top) \Rightarrow (\ell = c;\varphi) \vee (\ell = c;\neg\varphi)$, което се получава с извода:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(\ell = c;\top) \wedge \neg(\ell = c;\varphi) \Rightarrow (\ell = c;\top \wedge \neg\varphi)$ | $A1_r$ |
| 2 | $(\ell = c;\top \wedge \neg\varphi) \Rightarrow (\ell = c;\neg\varphi)$ | $Mono_r$ |
| 3 | $(\ell = c;\top) \Rightarrow (\ell = c;\varphi) \vee (\ell = c;\neg\varphi)$ | 1, 2, $PC$ |

Доказателството за $\Delta_2$ е подобно. $\dashv$

**Следствие 6.23** *Нека $\Delta'$, $\Delta''$ и $\Gamma$ са пълни теории в $\mathbf{L}(C)$. Тогава, ако $\{\ell = c\};\Delta',\{\ell = c\};\Delta'' \subset \Gamma$, то $\Delta' = \Delta''$. Същото следва и от $\{\ell = c\}\Delta';\{\ell = c\}$ и $\Delta'';\{\ell = c\} \subset \Gamma$.*

### 6.1.2 Каноничен модел за $ITL_{fin}(\Omega)$

След като установихме някои полезни свойства на теориите във фиксирания по-горе език $\mathbf{L}(C)$ на $ITL$, довършваме доказателството на пълнотата на предложената система за извод с построяването на каноничен модел, изпълняващ произволно отнапред зададено множество от формули от $\mathbf{L}$. Построяването на модела е подобно на представеното в [Dut95]. Излагаме го подробно заради разликите в доказателствата, произтичащи от особеностите на разширената система за извод, с която работим, и за пълнота.

Както споменахме по-горе, всеки интервал в този модел се представя чрез подходяща пълна теория в $\mathbf{L}(C)$. Цялата времева област на модела е ограничена, т.е. представлява най-големия измежду интервалите в него. На нея съпоставяме пълна Хенкинова теория в $\mathbf{L}(C)$ със свидетели в $C$, която съдържа отнапред зададеното непротиворечиво множество и каквато съществува според теорема 6.12. Оттук нататък означаваме тази теория с $\Gamma_0$. Самата времева област се състои от наредени двойки $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$ от пълни теории в $\mathbf{L}(C)$, имащи свойството $\Delta_1; \Delta_2 \subset \Gamma$. Това свойство позволява с всяка такава двойка да бъде представен "момент от време", разделящ времевата област на два интервала, изпълняващи съответно $\Delta_1$ и $\Delta_2$. Както и в каноничните структури за предикатното смятане, областта от продължителности се състои от класовете на еквивалентност на константите от $C$ по отношение на релацията $t_1 \equiv t_2$, определена с условието $t_1 = t_2 \in \Gamma_0$ между термовете от $\mathbf{L}(C)$.

И така, нека $\Sigma$ е множеството от статичните формули в $\Gamma_0$, $W = \{\Gamma : \Sigma \subset \Gamma$ и $\Gamma$ е пълна Хенкинова теория в $\mathbf{L}(C)$ със свидетели в $C\}$, $T = \{\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle : \Delta_1, \Delta_2 \in W, \Delta_1; \Delta_2 \subset \Gamma\}$ и $D = \{[c]_{\equiv} : c \in C\}$, където $\equiv$ е определена както по-горе. Следващите твърдения показват как да бъдат зададени времева област и област от продължителности с носители съответно $T$ и $D$, как да бъде зададена мярка на $\mathbf{I}(T)$ със стойности в $D$ и как да бъде определена интерпретация на символите от $\mathbf{L}(C)$ в така получената канонична структура така, че полученият модел да изпълнява $\Gamma_0$.

**Лема 6.24** *Нека $\Delta, \Delta_1, \Delta_2 \in W$. Нека $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ са пълни теории в $\mathbf{L}(C)$. Тогава, ако $\delta_1(\Delta, \Delta_1) \subset \Gamma_2$, то $\Gamma_2 \in W$ и $\Delta_1; \Gamma_2 \subset \Delta$. Аналогично, ако $\delta_2(\Delta, \Delta_2) \subset \Gamma_1$, то $\Gamma_1 \in W$ и $\Gamma_1; \Delta_2 \subset \Delta$.*

**Доказателство:** Нека $\delta_1(\Delta, \Delta_1) \subset \Gamma_2$. Нека $\varphi \in \Delta_1$, $\psi \in \Gamma_2$. Според определението на $\delta_1$, ако $\neg(\varphi; \psi) \in \Delta$, то $\neg\varphi \in \Gamma_2$. Следователно $(\varphi; \psi) \in \Delta$, защото $\Gamma_2$ е непротиворечива, а $\Delta$ е пълна. С това доказахме, че $\Delta_1; \Gamma_2 \subset \Delta$. Оттук, по лема 6.21, $\Sigma \subset \Gamma_2$. Следователно $\Gamma_2 \in W$. Доказателството за $\Gamma_1$ е подобно. $\dashv$

**Твърдение 6.25** *Нека $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \in W$. Ако съществува $\Delta' \in W$ такова, че $\Delta_1; \Delta_2 \subset \Delta'$ и $\Delta'; \Delta_3 \subset \Delta$, то съществува $\Delta'' \in W$ такова, че $\Delta_1; \Delta'' \subset \Delta$ и $\Delta_2; \Delta_3 \subset \Delta''$. Обратното също е вярно.*

**Доказателство:** Нека $\Delta' \in W$, $\Delta_1; \Delta_2 \subset \Delta'$ и $\Delta'; \Delta_3 \subset \Delta$. Съществуват $c_i \in C$, $\ell = c_i \in \Delta_i$, $i = 1, 2, 3$. Нека $A = \{(\ell = c_2; \ell = c_3)\} \cup \delta_1(\Delta, \Delta_1)$. Ако $A$ е непротиворечиво, според теорема 6.12 съществува пълна теория $\Delta''$ в $\mathbf{L}(C)$, съдържаща $A$. Според лема 6.24 $\Delta'' \in W$ и $\Delta_1; \Delta'' \subset \Delta$. По-нататък, ако $\chi_2 \in \Delta_2$ и $\chi_3 \in \Delta_3$, то $(\ell = c_1; \chi_2) \in \Delta'$ и $((\ell = c_1; \chi_2); \chi_3) \in \Delta$. Оттук с помощта на $A2$ получаваме $(\ell = c_1; (\chi_2; \chi_3)) \in \Delta$, откъдето $\neg(\ell = c_1; \neg(\chi_2; \chi_3))$ вследствие на $L2_l$. Това показва, че $\neg\neg(\chi_2; \chi_3) \in \delta_1(\Delta, \Delta_1)$, откъдето следва, че $(\chi_2; \chi_3) \in \Delta''$. С това доказахме, че $\Delta_2; \Delta_3 \subset \Delta''$.

Сега нека докажем непротиворечивостта на $A$. Според следствие 6.3 е достатъчно да докажем непротиворечивостта на крайните подмножества на $A \cup \Omega^{\Delta}$. Нека $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \delta_1(\Delta, \Delta_1)$, $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_m \in \Omega^{\Delta}$. Тогава съществуват $\psi_i \in \Delta$ такива, че $\neg(\psi_i; \varphi_i) \in \Delta$ за $i = 1, \ldots, n$. Нека $\psi \rightleftharpoons \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$. Тогава $\psi \in \Delta_1$ и $\neg(\psi; \neg\varphi_i) \in \Delta$ за $i = 1, \ldots, n$. Тъй като $\Delta_1; \Delta_2 \subset \Delta'$ и $\Delta'; \Delta_3 \subset \Delta$, $(\psi; \ell = c_2) \in \Delta'$ и $((\psi; \ell = c_2); \ell = c_3) \in \Delta$. Оттук с помощта на $A2$ получаваме $(\psi; (\ell = c_2; \ell = c_3)) \in \Delta$. Прилагайки $n$ пъти $A1_r$, оттук получаваме, че $(\psi; (\ell = c_2; \ell = c_3) \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \in \Delta$. Използувайки, че $\neg(\top; \neg\gamma'_i) \in \Delta$, откъдето по $Mono_r$ $\neg(\psi; \neg\gamma'_i) \in \Delta$ за $i = 1, \ldots, m$, отново с помощта на $A1_r$ получаваме, че $(\psi; (\ell = c_2; \ell = c_3) \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \gamma'_1 \wedge \ldots \wedge \gamma'_m) \in \Delta$. Следователно $\not\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \neg((\ell = c_2; \ell = c_3) \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \gamma'_1 \wedge \ldots \wedge \gamma'_m)$, а това показва, че крайните подмножества на $A \cup \Omega^{\Delta}$ са непротиворечиви.

Другата част на еквивалентността се доказва по подобен начин. $\dashv$

**Твърдение 6.26** *Нека $\Delta \in W$. Тогава съществуват $\Delta_1, \Delta_2 \in W$ такива, че $\ell = 0 \in \Delta_1, \Delta_2$ и $\Delta_1; \Delta, \Delta; \Delta_2 \subset \Delta$.*

**Доказателство:** Доказателството е сходно с това на предходното твърдение. Доказваме само съществуването на $\Delta_1$. Нека $A = \{\ell = 0\} \cup \delta_2(\Delta, \Delta)$. Да докажем, че $A$ е непротиворечиво. Както и по-горе, достатъчно е да докажем, че крайните подмножества на $A \cup \Omega^{\Delta}$ са непротиворечиви. Нека отново $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \delta_2(\Delta, \Delta)$, $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_m \in \Omega^{\Delta}$. Съществуват $\psi_i \in \Delta$ такива, че $\neg(\neg\varphi_i; \psi_i) \in \Delta$ за $i = 1, \ldots, n$. Нека $\psi \rightleftharpoons \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$. Тогава $\psi \in \Delta$ и $\neg(\neg\varphi_i; \psi) \in \Delta$ за $i = 1, \ldots, n$. Тъй като $(\ell = 0; \psi) \in \Delta$ по $L3_l$, и, както по-горе, $\neg(\neg\gamma'_i; \psi) \in \Delta$ за $i = 1, \ldots, m$, $(\ell = 0 \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \gamma'_1 \wedge \ldots \wedge \gamma'_m; \psi) \in \Delta$. Оттук следва $\neg \vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \neg(\ell = 0 \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \gamma'_1 \wedge \ldots \wedge \gamma'_m)$. С това непротиворечивостта на $A$ е доказана. Нека $\Delta_1$ е пълна теория в $\mathbf{L}(C)$, съдържаща $A$, каквато съществува според теорема 6.12. Тъй като $\ell = 0 \in \Delta_1$ и $\delta_2(\Delta, \Delta) \subset \Delta_1$, според лема 6.24 $\Delta_1 \in W$ и $\Delta_1; \Delta \subset \Delta$. $\dashv$

Нека $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle \leq \langle \Delta'_1, \Delta'_2 \rangle$, ако съществуват $c_1, c_2 \in C$ такива, че $\ell = c_1 \in \Delta_1$ и $\ell = c_1 + c_2 \in \Delta'_1$. Следното твърдение е непосредствено следствие на аксиомите $D1$-$D5$:

**Твърдение 6.27** *Релацията $\leq$ в $T$ е линейна наредба.*

Следващото твърдение показва, че всеки два "момента от време" $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$ и $\langle \Delta'_1, \Delta'_2 \rangle$ еднозначно определят пълна теория за ограничения от тях "интервал".

**Твърдение 6.28** *Нека $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle, \langle \Delta'_1, \Delta'_2 \rangle \in T$ и $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle \leq \langle \Delta'_1, \Delta'_2 \rangle$. Тогава съществува единствена $\Delta \in W$ такава, че $\Delta_1; \Delta \subset \Delta'_1$ и $\Delta; \Delta'_2 \subset \Delta_2$.*

**Доказателство:** Нека $c_1, c_2, c'_1, c'_2 \in C$ са такива, че $\ell = c_1 \in \Delta_1$, $\ell = c_2 \in \Delta_2$, $\ell = c'_1 \in \Delta'_1$, $\ell = c'_2 \in \Delta'_2$ От $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle \leq \langle \Delta'_1, \Delta'_2 \rangle$ следва, че съществува $c \in C$ такова, че $c_1 + c = c_2 \in \Sigma \subset \Delta'_1$ Нека $A = \{\ell = c\} \cup \delta_1(\Delta'_1, \Delta_1) \cup \delta_2(\Delta_2, \Delta'_2)$. Доказваме, че $A$ е непротиворечиво. Както и по-горе, непротиворечивостта на $A$ би следвала от непротиворечивостта на крайните подмножества на $A \cup \Omega^{\Gamma_0}$. Избираме произволни $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \delta_1(\Delta'_1, \Delta_1)$, $\psi_1, \ldots, \psi_m \in \delta_2(\Delta_2, \Delta'_2)$ и $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_p \in \Omega^{\Gamma_0}$. Съществуват $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n \in \Delta_1$ и $\psi'_1, \ldots, \psi'_m \in \Delta'_2$ такива, че $\neg(\varphi'_i, \neg\varphi_i) \in \Delta'_1$ за $i = 1, \ldots, n$ и $\neg(\neg\psi_i; \psi'_i) \in \Delta_2$ за $j = 1, \ldots, m$. Означаваме $\varphi'_1 \wedge \ldots \wedge \varphi'_n$ и $\psi'_1 \wedge \ldots \wedge \psi'_m$ съответно с $\varphi$ и $\psi$. Тъй като $\Delta_1$ и $\Delta'_2$ са теории, $\varphi \wedge \ell = c_1 \in \Delta_1$ и $\psi \wedge \ell = c'_2 \in \Delta'_2$. Освен това, $\neg(\varphi \wedge \ell = c_1; \neg\varphi_i) \in \Delta'_1$ за $i = 1, \ldots, n$ и $\neg(\neg\psi_i; \psi \wedge \ell = c'_2) \in \Delta_2$ за $i = 1, \ldots, m$. Тъй като $\Delta_1; \Delta_2, \Delta'_1; \Delta'_2 \subset \Gamma_0$, оттук получаваме $(\varphi \wedge \ell = c_1; \neg(\neg\psi_1; \psi \wedge \ell = c'_2) \wedge \ldots \wedge \neg(\neg\psi_m; \psi \wedge \ell = c'_2)) \in \Gamma_0$ и $(\neg(\varphi \wedge \ell = c_1; \neg\varphi_1) \wedge \ldots \wedge \neg(\varphi \wedge \ell = c_n; \neg\varphi_n); \psi \wedge \ell = c'_2) \in \Gamma_0$.

Като използуваме, че $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \ell = c'_1 \wedge c_1 + c = c'_1 \Rightarrow \ell = c_1 + c$ и $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \ell = c_1 + c \Rightarrow (\ell = c_1; \ell = c)$, получаваме $(\ell = c_1; \ell = c) \in \Delta'_1$, а оттук и $((\ell = c_1; \ell = c); \psi \wedge \ell = c'_2), (\ell = c_1; (\ell = c; \psi \wedge \ell = c'_2)) \in \Gamma_0$ с помощта на $A2$. От друга страна, също както в предходните твърдения, $\neg(\varphi; \neg\gamma'_i) \in \Delta'_1$ и $\neg(\neg\gamma'_i; \psi) \in \Delta_2$ за $i = 1, \ldots, p$. Оттук с помощта на $L1_l$ и многократно прилагане на $A1_l$ и $A1_r$ получаваме $((\varphi \wedge \ell = c_1; \ell = c \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m \wedge \gamma'_1 \wedge \ldots \wedge \gamma'_p); \psi \wedge \ell = c'_2) \in \Gamma_0$. Това показва, че $\not\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \neg(\ell = c \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_m \wedge \gamma'_1 \wedge \ldots \wedge \gamma'_p)$, с което непротиворечивостта на $A$ е установена. Прилагайки теорема 6.12, намираме пълна теория $\Delta$, съдържаща $A$. От лема 6.24 и $\delta_1(\Delta'_1, \Delta_1), \delta_2(\Delta_2, \Delta'_2) \subset \Delta$ получаваме, че $\Delta \in W$, $\Delta_1; \Delta \subset \Delta'_1$ и $\Delta; \Delta'_2 \subset \Delta_2$. Прилагайки два пъти следствие 6.23, получаваме единствеността на $\Delta$. $\dashv$

Нека $\sigma = [\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle, \langle \Delta'_1, \Delta'_2 \rangle]$, $\sigma \in \mathbf{I}(T)$. Нека означим теорията $\Delta$, чието съществуване и единственост са получени в твърдение 6.28, с $\mu(\sigma)$.

**Твърдение 6.29** *Нека $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{I}(T)$ и $\max \sigma_1 = \min \sigma_2$. Тогава $\mu(\sigma_1); \mu(\sigma_2) \subset \mu(\sigma_1; \sigma_2)$.*

**Доказателство:** Нека $\min \sigma_1 = \langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$, $\max \sigma_1 = \min \sigma_2 = \langle \Delta'_1, \Delta'_2 \rangle$ и $\max \sigma_2 = \langle \Delta''_1, \Delta''_2 \rangle$. От определението на $\mu$ следва, че
$\Delta_1; \mu(\sigma_1) \subset \Delta'_1$, $\Delta'_1; \mu(\sigma_2) \subset \Delta''_1$ и $\Delta_1; \mu(\sigma_1; \sigma_2) \subset \Delta''_1$. Нека $\varphi \in \mu(\sigma_1)$, $\psi \in \mu(\sigma_2)$. Нека $c \in C$ е такава, че $\ell = c \in \Delta_1$. Тогава $(\ell = c; \varphi) \in \Delta'_1$ и $((\ell = c; \varphi); \psi) \in \Delta''_1$, откъдето,

по $A2$, $(\ell = c; (\varphi; \psi)) \in \Delta_1''$. Оттук с помощта на $L1_l$ получаваме $\neg(\ell = c; \neg(\varphi; \psi)) \in \Delta_1''$. Тъй като $\ell = c \in \Delta_1$ и $\Delta_1; \mu(\sigma_1; \sigma_2) \subset \Delta_1''$, $(\varphi; \psi) \in \mu(\sigma_1; \sigma_2)$. Следователно $\mu(\sigma_1); \mu(\sigma_2) \subset \mu(\sigma_1; \sigma_2)$. $\dashv$

**Твърдение 6.30** *Нека $\sigma \in \mathbf{I}(T)$, $\Gamma_1, \Gamma_2 \in W$ и $\Gamma_1; \Gamma_2 \subset \mu(\sigma)$. Тогава съществува $\tau \in \sigma$ такова, че $\Gamma_1 = \mu([\min\sigma, \tau])$, $\Gamma_2 = \mu([\tau, \max\sigma])$.*

**Доказателство:** Нека $\min\sigma = \langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$, $\max\sigma = \langle \Delta_1'', \Delta_2'' \rangle$. По определение $\Delta_1; \Delta_2, \Delta_1'; \Delta_2' \subset \Gamma_0$, $\Delta_1; \mu(\sigma) \subset \Delta_1''$ и $\mu(\sigma); \Delta_2'' \subset \Delta_2$. Според твърдение 6.25 съществуват $\Delta_1', \Delta_2' \in W$ такива, че $\Delta_1; \Gamma_1 \subset \Delta_1'$, $\Delta_1'; \Gamma_2 \subset \Delta_1''$, $\Gamma_1; \Delta_2' \subset \Delta_2$ и $\Gamma_2; \Delta_2'' \subset \Delta_2'$. Да докажем, че $\tau = \langle \Delta_1', \Delta_2' \rangle$ има желаните свойства.

Съществуват $c_1, c_2'', d_1, d_2 \in C$ такива, че $\ell = c_1 \in \Delta_1$, $\ell = c_2'' \in \Delta_2''$, $\ell = d_1 \in \Gamma_1$, $\ell = d_2 \in \Gamma_2$. Нека $\varphi \in \Delta_1$, $\psi \in \Delta_2$. Тогава $(\varphi; \ell = d_2) \in \Delta_1''$, $((\varphi; \ell = d_2); \ell = c_2'') \in \Gamma_0$, $(\ell = d_1; \psi) \in \Delta_2$, $(\ell = c_1; (\ell = d_1; \psi)) \in \Gamma_0$. Освен това, $(\ell = d_1; \ell = d_2) \in \mu(\sigma)$, $(\ell = c_1; (\ell = d_1; \ell = d_2)) \in \Delta_1''$ и $((\ell = c_1; (\ell = d_1; \ell = d_2)); \ell = c_2'') \in \Gamma_0$. Използувайки $A2$ и $L2$, оттук получаваме $(\varphi; \ell = d_2 + c_2'')$, $(\ell = c_1 + d_1; \psi)$, $(\ell = c_1 + d_1; \ell = d_2 + c_2'') \in \Gamma_0$. Оттук с помощта на $L1_l$, $L1_r$, $A1_l$ и $A1_r$ получаваме $(\varphi \wedge \ell = c_1 + d_1; \psi \wedge \ell = d_2 + c_2'') \in \Gamma_0$, откъдето и $(\varphi; \psi) \in \Gamma_0$. Това показва, че $\Delta_1'; \Delta_2' \subset \Gamma_0$, откъдето следва, че $\tau \in T$. Неравенствата $\min\sigma \leq \tau \leq \max\sigma$ следват от $\ell = c_1 + d_1 \in \Delta_1'$ и $\ell = c_1 + d_1 + d_2 \in \Delta_2''$. От тях следва $\tau \in \sigma$. $\dashv$

Нека $m : \mathbf{I}(T) \to D$ бъде определена с равенството $m(\sigma) = [c]_{\equiv}$ за $c \in C$ такова, че $\ell = c \in \mu(\sigma)$. Нека $0_D = [0]_{\equiv}$ и $+_D$ бъде определена с равенството $[c_1]_{\equiv} +_D [c_2]_{\equiv} = [c_1 + c_2]_{\equiv}$.

**Теорема 6.31** *$F = \langle \langle T, \leq \rangle, \langle D, 0_D, +_D \rangle, m \rangle$ е структура за $ITL$.*

**Доказателство:** $\langle T, \leq \rangle$ е времева област според твърдение 6.27. Тъй като всички частни случаи на $D1$-$D5$ са в $\Sigma$, $D$ е област от продължителности. Да докажем, че $m$ изпълнява $M1$, $M2$ и $M3$.

Нека $\sigma, \sigma' \in \mathbf{I}(T)$, $\min\sigma = \min\sigma' = \langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$, $\max\sigma = \langle \Delta_1', \Delta_2' \rangle$ и $\max\sigma' = \langle \Delta_1'', \Delta_2'' \rangle$. Нека $m(\sigma) = m(\sigma') = [c]_{\equiv}$ и $\ell = d \in \Delta_1$ за някои $c, d \in C$. Тогава $\ell = c \in \mu(\sigma), \mu(\sigma')$, $\ell = d + c \in \Delta_1', \Delta_1''$. Тъй като $\Gamma_0$ е Хенкинова, съществува $e \in C$ такова, че $e = d + c$. Оттук $\ell = e \in \Delta_1', \Delta_1''$ и, следователно, $\{\ell = e\}; \Delta_2', \{\ell = e\}; \Delta_2'' \subset \Gamma_0$. Според следствие 6.23, това показва, че $\Delta_2' = \Delta_2''$. По подобен начин оттук получаваме, че $\Delta_1' = \Delta_1''$. Оттук следва $\max\sigma = \max\sigma'$, т.е. изпълнена е $M1$.

За да получим $M2$, нека забележим, че от $\max\sigma_1 = \min\sigma_2$, $\ell = c_1 \in \mu(\sigma_1)$ и $\ell = c_2 \in \mu(\sigma_2)$ следва $(\ell = c_1; \ell = c_2) \in \mu(\sigma_1; \sigma_2)$, защото $\mu(\sigma_1); \mu(\sigma_2) \subset \mu(\sigma_1; \sigma_2)$ според твърдение 6.29. С помощта на $L2$ оттук получаваме $\ell = c_1 + c_2 \in \mu(\sigma_1; \sigma_2)$. Съществува $c \in C$ такова, че $c = c_1 + c_2 \in \Sigma$. Тогава очевидно $\mu(\sigma_1; \sigma_2) = [c]_{\equiv} = [c_1]_{\equiv} +_D [c_2]_{\equiv}$, откъдето следва $M2$.

За да докажем $M3$, нека $c_1, c_2 \in C$ са такива, че $m(\sigma) = [c_1]_{\equiv} +_D [c_2]_{\equiv}$. Тогава $\ell = c_1 + c_2 \in \mu(\sigma)$, откъдето по $L2$ $(\ell = c_1; \ell = c_2) \in \mu(\sigma)$. По теорема 6.20 съществуват пълни теории $\Gamma_i$ в $\mathbf{L}(C)$ такива, че $\ell = c_i \in \Gamma_i$, $i = 1, 2$ и $\Gamma_1; \Gamma_2 \subset \mu(\sigma)$. От лема 6.21 следва, че $\Sigma \subset \Gamma_1, \Gamma_2$, откъдето $\Gamma_1, \Gamma_2 \in W$. Според твърдение 6.30 съществува $\tau \in \sigma$ такова, че $\Gamma_1 = \mu([\min\sigma, \tau])$. Очевидно $m([\min\sigma, \tau]) = [c_1]_{\equiv}$. $\dashv$

За да определим модел за $\mathbf{L}(C)$ на основата на структурата $F$ за $ITL$, остава да зададем интерпретация $I$ на символите и променливите от $\mathbf{L}(C)$ в $F$. Задаваме $I$ по следния начин:

$I(x) = [c]_{\equiv}$, ако $x = c \in \Sigma$, за всяка индивидна променлива $x$;

$I(d) = [c]_{\equiv}$, ако $d = c \in \Sigma$, за всяка статична константа $d$ от $\mathbf{L}(C)$;

$I(d)(\sigma) = [c]_{\equiv}$, ако $d = c \in \mu(\sigma)$, за всяка темпорална константа $d$;

$I(f)([c_1]_{\equiv}, \ldots, [c_n]_{\equiv}) = [c_{n+1}]_{\equiv}$, ако $f(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1} \in \Sigma$, за всеки статичен $n$-местен функционален символ $f$;

$I(f)(\sigma, [c_1]_{\equiv}, \ldots, [c_n]_{\equiv}) = [c_{n+1}]_{\equiv}$, ако $f(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1} \in \mu(\sigma)$, за всеки темпорален $n$-местен функционален символ $f$;

$I(R)([c_1]_{\equiv},\ldots,[c_n]_{\equiv}) = 1$, ако $R(c_1,\ldots,c_n) \in \Sigma$, за всеки статичен $n$-местен предикатен символ $R$;

$I(R)(\sigma,[c_1]_{\equiv},\ldots,[c_n]_{\equiv}) = 1$, ако $R(c_1,\ldots,c_n) \in \mu(\sigma)$, за всеки темпорален $n$-местен предикатен символ $R$.

Лесно се установява, че $I$ е определена навсякъде. Коректността на определението следва от начина, по който е зададена $\equiv$. С непосредствена проверка се установява, че $I(\ell) = m$, $I(0) = [0]_{\equiv}$, $I(+) = +_D$ и $I(=)$ е равенството в $D$. От това следва, че $M = \langle F, I\rangle$ е модел за езика $\mathbf{L}(C)$ на $ITL$. Остава да докажем, че в $M$ изпълнява $\Gamma_0$ и $M \in K$.

**Лема 6.32** *Нека $t$ е терм от $\mathbf{L}(C)$ и $\sigma \in \mathbf{I}(T)$. Тогава $I_\sigma(t) = [c]_{\equiv}$ е равносилно на $t = c \in \mu(\sigma)$.*

**Доказателство:** Индукция по строежа на $t$. $\dashv$

**Лема 6.33 (за истинност)** *Нека $\varphi$ е формула от $\mathbf{L}(C)$ и $\sigma \in \mathbf{I}(T)$. Тогава $M,\sigma \models \varphi$ е равносилно на $\varphi \in \mu(\sigma)$.*

**Доказателство:** Индукция по строежа на $\varphi$. За $\varphi$ от вида $R(t_1,\ldots,t_n)$, където $R$ е статичен или темпорален предикатен символ, следва от определението на $I$ лема 6.32. $\bot \notin \mu(\sigma)$ за всички $\sigma \in \mathbf{I}(T)$. За $\varphi$ от вида $\neg\psi$ или $\psi \wedge \chi$ твърдението следва от пълнотата и дедуктивната затвореност на $\mu(\sigma)$. За $\varphi$ от вида $\exists x\psi$ твърдението следва от това, че $\mu(\sigma)$ е Хенкинова.

Нека $\varphi$ е $(\psi;\chi)$. От $\varphi \in \mu(\sigma)$ следва, че и $\exists x\exists y(\psi \wedge \ell = x; \chi \wedge \ell = y) \in \mu(\sigma)$. Тъй като $\mu(\sigma)$ е Хенкинова, съществуват $c_1, c_2 \in C$ такива, че $(\psi \wedge \ell = c_1; \chi \wedge \ell = c_2) \in \mu(\sigma)$. Според теорема 6.20 съществуват пълни теории $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ в $\mathbf{L}(C)$ такива, че $\psi, \ell = c_1 \in \Gamma_1$, $\chi, \ell = c_2 \in \Gamma_2$ и $\Gamma_1;\Gamma_2 \subset \mu(\sigma)$. Според твърдение 6.30 съществува $\tau \in T$ такова, че $\Gamma_1 = \mu([\min\sigma,\tau])$, $\Gamma_2 = \mu([\tau,\max\sigma])$. Според индукционното предположение $M,[\min\sigma,\tau] \models \psi$ и $M,[\tau,\max\sigma] \models \chi$, откъдето $M,\sigma \models \varphi$.

Обратно, ако $M,\sigma \models \varphi$, то съществуват $\sigma_1,\sigma_2 \in \mathbf{I}(T)$ такива, че $\sigma = \sigma_1;\sigma_2$ и $M,\sigma_1 \models \psi$ и $M,\sigma_2 \models \chi$, откъдето по индукционното предположение $\psi \in \mu(\sigma_1)$ и $\chi \in \mu(\sigma_2)$. Тъй като според твърдение 6.29 $\mu(\sigma_1);\mu(\sigma_2) \subset \mu(\sigma)$, оттук получаваме $\varphi \in \mu(\sigma)$. $\dashv$

**Твърдение 6.34** *$M$ принадлежи на класа $\mathbf{K}$ от моделите за $\mathbf{L}$, в които формулите $\gamma \in \Omega$ имат свойството на крайните покрития.*

**Доказателство:** Нека $\sigma \in \mathbf{I}(T)$ и $\gamma \in \Omega$. Тогава $\gamma^k \in \Gamma_0$ за някое $k < \omega$ и, тъй като $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \gamma^k \Rightarrow \Box(\gamma^k)$, $M,\sigma \models \gamma^k$. Оттук следва, че $\sigma$ може да се представи във вида $\sigma_1;\ldots;\sigma_k$, където $M,\sigma_i \models \gamma$, $i = 1,\ldots,k$. Това показва, че $\gamma$ има свойството на крайните покрития в $M$. $\dashv$

**Лема 6.35** *$\mathbf{I}(T)$ съдържа интервал, изпълняващ $\Gamma_0$.*

**Доказателство:** Очевидно $\Gamma_0 \in W$. Нека $\Delta_1, \Delta_2' \in W$ са такива, че $\ell = 0 \in \Delta_1, \Delta_2'$ и $\Delta_1;\Gamma_0, \Gamma_0;\Delta_2' \subset \Gamma_0$. Такива теории съществуват според твърдение 6.26. Нека $\tau_1 = \langle\Delta_1,\Gamma_0\rangle$, а $\tau_2 = \langle\Gamma_0,\Delta_2'\rangle$. Очевидно $\tau_1,\tau_2 \in T$, нещо повече, $\tau_1 = \min T$, а $\tau_2 = \max T$. Очевидно $\mu([\tau_1,\tau_2]) = \Gamma_0$, откъдето желаното следва по лемата за истинност. $\dashv$

Тъй като $\Gamma_0$ е пълна Хенкинова теория в $\mathbf{L}(C)$, получена като разширение на произволно отнапред зададено непротиворечиво множество от формули в $\mathbf{L}$, $\omega$-пълнотата на представената система за извод за $ITL_{fin}(\Omega)$ е очевидно следствие на твърдение 6.34 и лема 6.35:

**Теорема 6.36 ($\omega$-пълнота на $ITL_{fin}(\Omega)$)** *Нека $\Gamma$ е множество от формули в $\mathbf{L}$. Тогава $\Gamma$ е непротиворечиво в представената система за извод за $ITL_{fin}(\Omega)$ точно когато $\Gamma$ е изпълнимо в модел за $\mathbf{L}$, в който формулите от $\Omega$ имат свойството на крайните покрития.*

За да получим модела за $\mathbf{L}$, който се споменава в теоремата, е достатъчно да изключим от $I$ интерпретациите на константите от $C$. $\omega$-пълнотата на въведената в началото на тази глава система е доказана.

**Забележки**

Нека обърнем внимание на възможността доказаната по-горе теорема за пълнота да бъде получена и при по-специален вид на правилото $\omega^\gamma$, например с правилото

$$\frac{\forall k < \omega\ \gamma^k \Rightarrow \varphi}{\varphi}.$$

Изборът на $\omega^\gamma$, направен тук, е продиктуван от това, че това правило може да с разглежда като пряко обобщение на правилата $IR_1$ и $IR_2$, когато $\gamma$ е $\lceil S\rceil \vee \lceil\neg S\rceil \vee \ell = 0$. Нека предположим, че имаме изводи за предпоставките на $IR_1$ $[\ell = 0/P]\varphi$ и $\varphi \Rightarrow [(\lceil S\rceil \vee \lceil\neg S\rceil; P) \vee P/P]\varphi$. От втората предпоставка, с $k$ последователни заместявания на $P$ с $(\lceil S\rceil \vee \lceil\neg S\rceil \vee \ell = 0; P) \vee P$ и едно последно заместване на $P$ с $\ell = 0$, получаваме $[(\lceil S\rceil \vee \lceil\neg S\rceil \vee \ell = 0)^i/P]\varphi \Rightarrow [(\lceil S\rceil \vee \lceil\neg S\rceil \vee \ell = 0)^{i+1}/P]\varphi$ за $i = 1, \ldots, k$. Прилагайки $MP$ към тези формули и към първата предпоставка, получаваме $[(\lceil S\rceil \vee \lceil\neg S\rceil \vee \ell = 0)^{k+1}/P]\varphi$. Това показва, че предпоставките на правилото $IR_1$ задават схема, по която могат да бъдат изведени безброй многото предпоставки на $\omega^\gamma$. Същото се отнася и за $IR_2$. Заключенията на $IR_1$ и $IR_2$ и $\omega^\gamma$ при това съвпадат.

Разликата в изразителната сила на двете крайни правила и на $\omega^\gamma$ в практически план е, че крайните правила подсказват *само една от възможните схеми* за такъв извод, а в общ план - че изискването за доказуемост на предпоставките им без ограничения на вида на формулите, които могат да заемат мястото на темпоралната съждителна променлива $P$, е по-силно от изискването за доказуемост на редицата от предпоставки на $\omega^\gamma$. Фактът, че изводимостта с помощта на $IR_1$ и $IR_2$ така лесно води до изводимост с помощта на $\omega^\gamma$, показва, че това правило не е по-голям проблем за интуицията от $IR_1$ и $IR_2$, въпреки че има безброй много предпоставки. От друга страна то характеризира точно свойството на крайните покрития и, както е показано в следващите параграфи, позволява построяването на система за извод за $DC$, която е не само относително пълна.

Както е естествено да се очаква, горните разсъждения показват и че аналозите на $IR_1$ и $IR_2$

$$\frac{[\ell = 0/P]\varphi\ \varphi \Rightarrow [P \vee (P;\gamma)/P]\varphi}{[\top/P]\varphi} \quad \text{и} \quad \frac{[\ell = 0/P]\varphi\ \varphi \Rightarrow [(\gamma; P) \vee P/P]\varphi}{[\top/P]\varphi}$$

са допустими в представената тук система за $ITL$ със свойството на крайните покрития. Несъмнено те могат да бъдат полезни, например при автоматичното търсене на изводи в това разширение на $ITL$.

## 6.2 Продължителност и крайнопроменливост в интервалната темпорална логика

Преди да преминем към главното приложение на полученото в предишния параграф, а именно построяването на $\omega$-пълна система за извод за $DC$ с абстрактна семантика, нека представим аналог на основите черти на $DC$ в рамките на $ITL$. Това са възможността за представяне на състояния чрез специфичния за $DC$ вид изрази за състояния и възможността за образуване на термовете от вида $\int S$, с които се изразява продължителността на такива състояния. За тази цел въвеждаме подходящ вид формули и свързани с тях темпорални константни символи, които изпълняват ролята на изразите $S$ и термовете $\int S$ съответно. Както се вижда по-долу, този подход има поне три технически предимства: Отпада дублирането на съждителната част от смятането, която в $DC$ е налице и за формули и за изрази за състояния. Отпада ограничението състоянията да се описват в съждителен език. Аксиомите, за специалните формули и темпоралните константи, свързани с тях, са по-малко и по-прости от аксиомите за $\int$ на $DC$. Отпадането на ограничението само "съждителни" изрази

да представят състояния има далечни следствия - както показваме по-нататък, то по същество създава възможността за свеждане на практически важното разширение на $DC$ с квантор по променливите за състояния до подходяща система от първи ред и аксиоматизирането на това разширение.

### 6.2.1 Формули, представящи състояния, и темпорални променливи, представящи продължителности

Нека отново фиксираме $\mathbf{L}$ език за $ITL$, множество от формули $\Omega$ в $\mathbf{L}$ и нека работим в клас $\mathbf{K}$ от модели за $\mathbf{L}$, в който формулите от $\Omega$ имат свойството на крайните покрития.

**Дефиниция 6.37** Казваме, че формулата $\varphi$ от $\mathbf{L}$ *представя състояние в* $\mathbf{K}$, ако $\varphi \vee \Box\neg\varphi$ има свойството на крайните покрития в $\mathbf{K}$ и формулите
$(S1)$ $\quad \varphi \Rightarrow \ell \neq 0$
$(S2)$ $\quad \varphi \Rightarrow \Box(\varphi \vee \ell = 0)$
са валидни в $\mathbf{K}$.

Формулите, представящи състояния, имат следното свойство в моделите от съответния клас: Всеки интервал от време може да бъде разделен на краен брой подинтервали от два вида. Едните подинтервали изпълняват формулата във всички свои подинтервали с несъвпадащи краища. Другите изпълняват отрицанието на формулата във всички свои подинтервали.

Както и в предишния параграф, тривиален пример за формули, представящи състояния в класа от всички модели за избрания език на $ITL$, са теоремите на $ITL$ и техните отрицания. Важен за нас пример за такива формули са формулите от вида $\lceil S \rceil$ и моделите на $DC$, както става ясно в параграф 6.3.

От пълнотата на системата за извод за $ITL_{fin}(\Omega)$, получена в параграф 6.1, следва, че за формули $\varphi$, представящи състояния в $\mathbf{K}$, е в сила $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \varphi \Rightarrow \ell \neq 0, \varphi \Rightarrow \Box(\varphi \vee \ell = 0), (\varphi \vee \Box\neg\varphi) \Rightarrow \Box(\varphi \vee \Box\neg\varphi)$ и че правилото $\omega^{\varphi \vee \Box\neg\varphi}$ е допустимо в тази система за извод.

Класът на формулите, представящи състояния в $\mathbf{K}$, е затворен относно отрицание и конюнкция в следния смисъл:

**Твърдение 6.38** *Ако $\varphi$ представя състояние в $\mathbf{K}$, то $\ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi$ също представя състояние в $\mathbf{K}$. Ако $\varphi$ и $\psi$ представят състояния в $\mathbf{K}$, то $\varphi \wedge \psi$ и $\varphi \wedge \Box\neg\psi$ също представят състояния в $\mathbf{K}$.*

**Доказателство:** Нека $M \in \mathbf{K}$, $\sigma \in \mathbf{I}(T_M)$. Нека $n < \omega$ и $\sigma_1, \ldots \sigma_n \in \mathbf{I}(T_M)$ са такива, че $\sigma = \sigma_1; \ldots; \sigma_n$ и $M, \sigma_i \models \varphi \vee \Box\neg\varphi$, $i = 1, \ldots, n$. По условие $M \models \varphi \Rightarrow \Box(\varphi \vee \ell \neq 0)$. Тогава очевидно $M, \sigma_i \models (\ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi) \vee \Box\neg(\ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi)$. Следователно последната формула има свойството на крайните покрития в $M$. Тъй като $\vdash_{ITL} \ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi \Rightarrow \ell \neq 0$, в $M$ за $\ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi$ е в сила $S1$. По условие $M \models \varphi \Rightarrow \ell \neq 0$. При заместването на $\varphi$ с $\ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi$ в $S2$ се получава теорема на $ITL$. С това е доказано, че ако $\varphi$ представя състояние в $M$, то $\ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi$ също представя състояние в $M$.

Да разгледаме конюнкцията $\varphi \wedge \psi$. Нека $m, n < \omega$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_n \in \mathbf{I}(T_M)$ са такива, че $\sigma = \sigma_1; \ldots; \sigma_n = \sigma'_1; \ldots; \sigma'_m$ и $M, \sigma_i \models \varphi \vee \Box\neg\varphi$, $i = 1, \ldots, n$, $M, \sigma'_i \models \psi \vee \Box\neg\psi$, $i = 1, \ldots, n$. Нека $k < \omega$ и $\tau_1, \ldots, \tau_k \in T_M$ са такива, че $\tau_0 \leq \ldots \leq \tau_k$ и $\{\tau_1, \ldots, \tau_k\} = \{\min\sigma_1, \ldots, \min\sigma_n, \max\sigma_n, \min\sigma'_1, \ldots, \min\sigma'_m, \max\sigma'_m\}$. По условие $M \models \varphi \vee \Box\neg\varphi \Rightarrow \Box(\varphi \vee \Box\neg\varphi), \psi \vee \Box\neg\psi \Rightarrow \Box(\psi \vee \Box\neg\psi)$. Оттук следва, че $M, [\tau_{i-1}, \tau_i] \models (\varphi \wedge \psi) \vee \Box\neg(\varphi \wedge \psi)$, $i = 1, \ldots, k$. Освен това, оттук следва и че $M \models (\varphi \wedge \psi) \vee \Box\neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box((\varphi \wedge \psi) \vee \Box\neg(\varphi \wedge \psi))$. Това показва, че $\varphi \wedge \psi$ има свойството на крайните покрития в $M$. Очевидно, $M \models \varphi \wedge \psi \Rightarrow \ell \neq 0$ следва от $M \models \varphi \Rightarrow \ell \neq 0$, а $M \models \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Box((\varphi \wedge \psi) \vee \ell = 0)$ следва от $M \models \varphi \Rightarrow \Box(\varphi \vee \ell = 0), \psi \Rightarrow \Box(\psi \vee \ell = 0)$. Това показва, че $S1$ и $S2$ са валидни за $\varphi \wedge \psi$ в $M$, с което е доказано, че $\varphi \wedge \psi$ представя състояние в $M$.

Що се отнася, до $\varphi \wedge \Box\neg\psi$, полученото дотук е достатъчно, за да заключим, че $\varphi \wedge (\ell \neq 0 \wedge \Box\neg\psi)$ представя състояние в $M$. Но, тъй като $M \models \varphi \Rightarrow \ell \neq 0$, тази формула е еквивалентна в $M$ на $\varphi \wedge \Box\neg\psi$. Следователно последната формула също представя състояние в $M$. $\dashv$

**Дефиниция 6.39** Нека $\varphi$ представя състояние в $\mathbf{K}$. Казваме, че темпоралната константа $\ell^\varphi$ *представя продължителността на* $\varphi$ *в* $\mathbf{K}$, ако в $\mathbf{K}$ са валидни универсалните затваряния на формулите:

$(I1)$ $\ell = 0 \Rightarrow \ell^\varphi = 0$

$(I2)$ $(\ell^\varphi = x; \Box\neg\varphi) \Rightarrow \ell^\varphi = x$

$(I3)$ $(\ell^\varphi = x; \varphi \wedge \ell = y) \Rightarrow \ell^\varphi = x + y$

Тривиален пример за темпорална константа, представяща продължителност, е $\ell$ за $\top$ в качеството на $\varphi$.

Както и в случая на формула, представяща състояние, ако $\ell^\varphi$ представя продължителността на $\varphi$ в $\mathbf{K}$, $I1$, $I2$ и $I3$ са теореми на $ITL_{fin}(\Omega)$.

Изборът на езика $\mathbf{L}$ не осигурява, че за всички формули $\varphi$, които представят състояния в $\mathbf{K}$, са налице представящи продължителността им темпорални константи, нито че тези константи са единствени. В следващите твърдения предполагаме, че такива константи съществуват, и използуваме означението от дефиницията като стандартно за тях.

Следната теорема показва, че с помощта на $I1$-$I3$ можем да докажем аналози на всички аксиоми за $\int$ от $DC$.

**Теорема 6.40** *Нека* $\varphi, \psi$ *представят състояния в* $\mathbf{K}$. *Тогава*

$\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \ell^\bot = 0$

$\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \ell^{\ell\neq 0} = \ell$

$\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow \ell^\varphi = \ell^\psi$

$\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \varphi \Rightarrow \ell^\psi = \ell^{\varphi\wedge\psi}$

$\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \ell^\varphi + \ell^{\ell\neq 0\wedge\Box\neg\varphi} = \ell$

$\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} (\ell^\varphi = x; \ell^\varphi = y) \Rightarrow \ell^\varphi = x + y$

$\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi} = \ell^\varphi$

**Доказателство:** Доказателството се състои от изводи на горните теореми. В тези изводи ще отбелязваме с '$ITL$' частите, в които не използуваме $S1$, $S2$, $I1$, $I2$, $I3$, нито безкрайното правило. С цел краткост няма да привеждаме тези части подробно, позовавайки се на лесно установимата общовалидност на формулите, изведени в тях, и на пълнотата на известната система за $ITL$. Частите от изводите, в които се използуват само $MP$ и съждителни тавтологии, означаваме с $PC$.

За първата теорема имаме следния извод:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(\ell = 0; \Box\neg\bot)$ | $ITL$ |
| 2 | $\ell = 0 \Rightarrow \ell^\bot = 0$ | $I1$ |
| 3 | $(\ell = 0; \Box\neg\bot) \Rightarrow (\ell^\bot = 0; \Box\neg\bot)$ | $Mono_l$ |
| 4 | $(\ell^\bot = 0; \Box\neg\bot) \Rightarrow \ell^\bot = 0$ | $I2$ |
| 5 | $\ell^\bot = 0$ | 1, 3, 4, $PC$ |

За втората теорема имаме извода:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\ell = x \wedge \ell \neq 0 \Rightarrow (\ell = 0; \ell \neq 0 \wedge \ell = x)$ | $ITL$ |
| 2 | $\ell = 0 \Rightarrow \ell^{\ell\neq 0} = 0$ | $I1$ |
| 3 | $(\ell = 0; \ell \neq 0 \wedge \ell = x) \Rightarrow (\ell^{\ell\neq 0} = 0; \ell \neq 0 \wedge \ell = x)$ | 2, $Mono_l$ |
| 4 | $\ell = x \wedge \ell = 0 \Rightarrow \ell^{\ell\neq 0} = x$ | 2, $ITL$ |
| 5 | $(\ell^{\ell\neq 0} = 0; \ell \neq 0 \wedge \ell = x) \Rightarrow \ell^{\ell\neq 0} = x$ | $I3$ |
| 6 | $\ell = 0 \vee \ell \neq 0$ | $ITL$ |
| 7 | $\ell^{\ell\neq 0} = \ell$ | 1, 3-6, $ITL$ |

За доказателството на третата теорема означаваме $\varphi \vee \Box\neg\varphi$ с $\gamma^\varphi$ и използуваме правилото $\omega^{\gamma^\varphi}$[2]. Доказваме предпоставките на правилото с индукция по номерата им. Имаме следния извод:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\ell = 0 \Rightarrow \ell^\varphi = 0$ | $I1$ |
| 2 | $\ell = 0 \Rightarrow \ell^\psi = 0$ | $I1$ |
| 3 | $(\gamma^\varphi)^0 \Rightarrow \ell^\varphi = \ell^\psi$ | 1, 2, $ITL$ |
| 4 | $(\gamma^\varphi)^k \Rightarrow (\Box(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow \ell^\varphi = \ell^\psi)$ | индукционно предположение |
| 5 | $(\gamma^\varphi)^{k+1} \wedge \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow$ $((\gamma^\varphi)^k \wedge \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi); \varphi \wedge \psi) \vee$ $\vee((\gamma^\varphi)^k \wedge \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi); \Box\neg\varphi \wedge \Box\neg\psi) \vee$ $\vee(\gamma^\varphi)^k \wedge \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi))$ | $ITL$ |
| 6 | $((\gamma^\varphi)^k \wedge \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi); \varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\ell^\varphi = \ell^\psi; \varphi \wedge \psi)$ | 4, $Mono_r$ |
| 7 | $((\gamma^\varphi)^k \wedge \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi); \neg\varphi \wedge \neg\psi) \Rightarrow (\ell^\varphi = \ell^\psi; \neg\varphi \wedge \neg\psi)$ | 4, $Mono_r$ |
| 8 | $(\ell^\varphi = \ell^\psi \wedge \ell^\varphi = x; \varphi \wedge \psi \wedge \ell = y) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\ell^\varphi = x; \varphi \wedge \ell = x) \wedge (\ell^\psi = x; \psi \wedge \ell = y)$ | $ITL$ |
| 9 | $(\ell^\varphi = x; \varphi \wedge \ell = x) \Rightarrow \ell^\varphi = x + y$ | $I2$ |
| 10 | $(\ell^\psi = x; \psi \wedge \ell = x) \Rightarrow \ell^\psi = x + y$ | $I2$ |
| 11 | $(\ell^\varphi = \ell^\psi \wedge \ell^\varphi = x; \varphi \wedge \psi \wedge \ell = y) \Rightarrow \ell^\varphi = \ell^\psi$ | 8, 9, 10, $ITL$ |
| 12 | $(\ell^\varphi = \ell^\psi \wedge \ell^\varphi = x; \Box\neg\varphi \wedge \Box\neg\psi) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\ell^\varphi = x; \Box\neg\varphi) \wedge (\ell^\psi = x; \Box\neg\psi)$ | $ITL$ |
| 13 | $(\ell^\varphi = x; \Box\neg\varphi) \Rightarrow \ell^\varphi = x$ | $I3$ |
| 14 | $(\ell^\psi = x; \Box\neg\psi) \Rightarrow \ell^\psi = x$ | $I3$ |
| 15 | $(\ell^\varphi = \ell^\psi \wedge \ell^\varphi = x; \Box\neg\varphi \wedge \Box\neg\psi) \Rightarrow \ell^\varphi = \ell^\psi$ | 12, 13, 14, $ITL$ |
| 16 | $(\gamma^\varphi)^{k+1} \wedge \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow \ell^\varphi = \ell^\psi$ | 4, 5, 11, 15, $ITL$ |

Този извод показва, че за всяко $k < \omega \vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} (\gamma^\varphi)^k \Rightarrow (\Box(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow \ell^\varphi = \ell^\psi)$. Оттук по правилото $\omega^{\gamma^\varphi}$ получаваме $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow \ell^\varphi = \ell^\psi$. Доказателството на четвъртата теорема лесно се получава с помощта на третата:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\varphi \Rightarrow \Box(\varphi \vee \ell = 0)$ | $S2$ |
| 2 | $\Box(\psi \Rightarrow \Box(\psi \vee \ell = 0))$ | $S2$, $N_l$, $N_r$ |
| 3 | $\varphi \Rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi)$ | 1, 2, $ITL$ |
| 4 | $\Box(\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow \ell^{\varphi\wedge\psi} = \ell^\psi$ | т. 3 |
| 5 | $\varphi \Rightarrow \ell^{\varphi\wedge\psi} = \ell^\psi$ | 3, 4, $PC$ |

Петата теорема се извежда отново с помощта на $\omega^{\gamma^\varphi}$. Имаме извода:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\ell = 0 \Rightarrow \ell^\varphi = 0$ | $I1$ |
| 2 | $\ell = 0 \Rightarrow \ell^{\ell\neq 0\wedge\Box\neg\varphi} = 0$ | $I1$ |
| 3 | $(\gamma^\varphi)^0 \Rightarrow \ell^\varphi + \ell^{\ell\neq 0\wedge\Box\neg\varphi} = \ell$ | 1, 2, $ITL$ |
| 4 | $(\gamma^\varphi)^k \Rightarrow \ell^\varphi + \ell^{\ell\neq 0\wedge\Box\neg\varphi} = \ell$ | индукционно предположение |
| 5 | $(\gamma^\varphi)^{k+1} \Rightarrow ((\gamma^\varphi)^k \vee ((\gamma^\varphi)^k; \varphi \wedge \Box\neg(\ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi)) \vee$ $\vee((\gamma^\varphi)^k; \ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi))$ | $ITL$ |
| 6 | $((\gamma^\varphi)^k; \varphi \wedge \Box\neg(\ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi)) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\ell^\varphi + \ell^{\ell\neq 0\wedge\Box\neg\varphi} = \ell; \varphi \wedge \Box\neg(\ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi))$ | 4, $Mono_r$ |
| 7 | $((\gamma^\varphi)^k; \ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi) \Rightarrow (\ell^\varphi + \ell^{\ell\neq 0\wedge\Box\neg\varphi} = \ell; \ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi)$ | 4, $Mono_r$ |
| 8 | $(\ell^\varphi + \ell^{\ell\neq 0\wedge\Box\neg\varphi} = \ell \wedge \ell^\varphi = x \wedge \ell^{\ell\neq 0\wedge\Box\neg\varphi} = y;$ $\varphi \wedge \Box\neg(\ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi) \wedge \ell = z) \Rightarrow$ $\Rightarrow \ell = x + y + z \wedge \ell^\varphi = x + z \wedge \ell^{\ell\neq 0\wedge\Box\neg\varphi} = y$ | $I2$, $I3$, $ITL$ |
| 9 | $(\ell^\varphi + \ell^{\ell\neq 0\wedge\Box\neg\varphi} = \ell \wedge \ell^\varphi = x \wedge \ell^{\ell\neq 0\wedge\Box\neg\varphi} = y;$ $\ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi \wedge \ell = z) \Rightarrow$ $\Rightarrow \ell = x + y + z \wedge \ell^\varphi = x \wedge \ell^{\ell\neq 0\wedge\Box\neg\varphi} = x + y$ | $I2$, $I3$, $ITL$ |
| 10 | $(\gamma^\varphi)^{k+1} \Rightarrow \ell^\varphi + \ell^{\ell\neq 0\wedge\Box\neg\varphi} = \ell$ | 4-9, $ITL$ |

[2]Всъщност тук и по-нататък в доказателството е достатъчно производното правило, дадено в Забележките към предишния параграф.

Този извод показва, че $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} (\gamma^{\varphi})^k \Rightarrow \ell^{\varphi} + \ell^{\ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi} = \ell$ за всяко $k < \omega$. Оттук по $\omega^{\gamma^{\varphi}}$ получаваме $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} \ell^{\varphi} + \ell^{\ell \neq 0 \wedge \Box\neg\varphi} = \ell$. За следващата теорема отново имаме доказателство с употребата на $\omega^{\gamma^{\varphi}}$. Имаме извода:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(\ell^{\varphi} = x; \ell = 0 \wedge \ell^{\varphi} = y) \Rightarrow (\ell^{\varphi} = x; \Box\neg\varphi) \wedge y = 0$ | $ITL$ |
| 2 | $(\ell^{\varphi} = x; \Box\neg\varphi) \Rightarrow \ell^{\varphi} = x$ | $I3$ |
| 3 | $(\ell^{\varphi} = x; (\gamma^{\varphi})^0 \wedge \ell^{\varphi} = y) \Rightarrow \ell^{\varphi} = x + y$ | 1, 2, $ITL$ |
| 4 | $(\ell^{\varphi} = x; (\gamma^{\varphi})^k \wedge \ell^{\varphi} = y) \Rightarrow \ell^{\varphi} = x + y$ | индукционно предположение |
| 5 | $(\ell^{\varphi} = x; (\gamma^{\varphi})^{k+1} \wedge \ell^{\varphi} = y) \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists z \exists t((\ell^{\varphi} = x; \ell^{\varphi} = y \wedge ((\gamma^{\varphi})^k \wedge \ell^{\varphi} = z; \varphi \wedge \ell = t)) \vee$ $\vee(\ell^{\varphi} = x; (\ell^{\varphi} = y \wedge (\gamma^{\varphi})^k \wedge \ell^{\varphi} = z; \Box\neg\varphi \wedge \ell = t)))$ | $ITL$ |
| 6 | $(\ell^{\varphi} = x; \ell^{\varphi} = y \wedge ((\gamma^{\varphi})^k \wedge \ell^{\varphi} = z; \varphi \wedge \ell = t)) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\ell^{\varphi} = x; \ell^{\varphi} = y \wedge \ell^{\varphi} = z + t)$ | $I2$, $ITL$ |
| 7 | $\ell^{\varphi} = y \wedge \ell^{\varphi} = z + t \Rightarrow y = z + t$ | $ITL$ |
| 8 | $((\ell^{\varphi} = x; ((\gamma^{\varphi})^k \wedge \ell^{\varphi} = z; \varphi \wedge \ell = t)) \Rightarrow$ $\Rightarrow ((\ell^{\varphi} = x; (\gamma^{\varphi})^k \wedge \ell^{\varphi} = z); \varphi \wedge \ell = t)$ | $ITL$ |
| 9 | $((\ell^{\varphi} = x; (\gamma^{\varphi})^k \wedge \ell^{\varphi} = z); \varphi \wedge \ell = t) \Rightarrow (\ell^{\varphi} = x + z; \varphi \wedge \ell = t)$ | 4, $Mono_l$ |
| 10 | $(\ell^{\varphi} = x + z; \varphi \wedge \ell = t) \Rightarrow \ell^{\varphi} = x + z + t$ | $I2$ |
| 11 | $(\ell^{\varphi} = x; \ell^{\varphi} = y \wedge ((\gamma^{\varphi})^k \wedge \ell^{\varphi} = z; \varphi \wedge \ell = t)) \Rightarrow \ell^{\varphi} = x + y$ | 6-10, $ITL$ |
| 12 | $(\ell^{\varphi} = x; (\ell^{\varphi} = y \wedge (\gamma^{\varphi})^k \wedge \ell^{\varphi} = z; \Box\neg\varphi \wedge \ell = t)) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\ell^{\varphi} = x; \ell^{\varphi} = y \wedge \ell^{\varphi} = z)$ | $I3$,$ITL$ |
| 13 | $\ell^{\varphi} = y \wedge \ell^{\varphi} = z \Rightarrow y = z$ | $ITL$ |
| 14 | $(\ell^{\varphi} = x; (\ell^{\varphi} = y \wedge (\gamma^{\varphi})^k \wedge \ell^{\varphi} = z; \Box\neg\varphi \wedge \ell = t)) \Rightarrow$ $\Rightarrow ((\ell^{\varphi} = x; \ell^{\varphi} = y \wedge (\gamma^{\varphi})^k \wedge \ell^{\varphi} = z); \Box\neg\varphi \wedge \ell = t)$ | $ITL$ |
| 15 | $((\ell^{\varphi} = x; \ell^{\varphi} = y \wedge (\gamma^{\varphi})^k \wedge \ell^{\varphi} = z); \Box\neg\varphi \wedge \ell = t) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\ell^{\varphi} = x + z; \Box\neg\varphi \wedge \ell = t)$ | 4, $Mono_l$ |
| 16 | $(\ell^{\varphi} = x + z; \Box\neg\varphi \wedge \ell = t) \Rightarrow \ell^{\varphi} = x + z$ | $I3$ |
| 17 | $(\ell^{\varphi} = x; (\ell^{\varphi} = y \wedge (\gamma^{\varphi})^k \wedge \ell^{\varphi} = z; \Box\neg\varphi \wedge \ell = t)) \Rightarrow \ell^{\varphi} = x + y$ | 12-16, $ITL$ |
| 18 | $(\ell^{\varphi} = x; (\gamma^{\varphi})^{k+1} \wedge \ell^{\varphi} = y) \Rightarrow \ell^{\varphi} = x + y$ | 5, 12, 18, $ITL$ |

Горният извод показва, че за всяко $k < \omega \vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} (\ell^{\varphi} = x; (\gamma^{\varphi})^k \wedge \ell^{\varphi} = y) \Rightarrow \ell^{\varphi} = x+y$. Оттук, по $\omega^{\gamma^{\varphi}}$, получаваме $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} (\ell^{\varphi} = x; \top \wedge \ell^{\varphi} = y) \Rightarrow \ell^{\varphi} = x+y$, откъдето лесно следва теоремата. Изводът на последната теорема използува $\omega^{\gamma^{\psi}}$ и предходните теореми. Изводът на необходимите за $\omega^{\gamma^{\psi}}$ предпоставки е:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\psi \Rightarrow \ell^{\varphi\wedge\psi} = \ell^{\varphi}$ | т. 4 |
| 2 | $\psi \Rightarrow \Box(\varphi \wedge \Box\neg\psi \Leftrightarrow \bot)$ | $S1$, $ITL$ |
| 3 | $\Box(\varphi \wedge \Box\neg\psi \Leftrightarrow \bot) \Rightarrow \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi} = \ell^{\bot}$ | т. 3 |
| 4 | $\ell^{\bot} = 0$ | т. 1 |
| 5 | $\psi \Rightarrow \ell^{\varphi} = \ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi}$ | 1-4, $ITL$ |
| 6 | $\Box\neg\psi \Rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \bot)$ | $ITL$ |
| 7 | $\Box(\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \bot) \Rightarrow \ell^{\varphi\wedge\psi} = \ell^{\bot}$ | т. 3 |
| 8 | $\Box\neg\psi \Rightarrow \ell^{\varphi} = \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi}$ | т. 4 |
| 9 | $\Box\neg\psi \Rightarrow \ell^{\varphi} = \ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi}$ | 4, 7, 8, 9, $ITL$ |
| 10 | $\ell = 0 \Rightarrow \ell^{\varphi} = 0 \wedge \ell^{\varphi\wedge\psi} = 0 \wedge \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi} = 0$ | $I1$ |
| 11 | $(\gamma^{\psi})^0 \Rightarrow \ell^{\varphi} = \wedge\ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi}$ | 11, $ITL$ |
| 12 | $(\gamma^{\psi})^k \Rightarrow \ell^{\varphi} = \wedge\ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi}$ | индукционно предположение |
| 13 | $(\gamma^{\psi})^{k+1} \Rightarrow (((\gamma^{\psi})^k;\psi) \vee ((\gamma^{\psi})^k;\Box\neg\psi) \vee (\gamma^{\psi})^k$ | $ITL$ |
| 14 | $((\gamma^{\psi})^k;\psi) \Rightarrow (\ell^{\varphi} = \wedge\ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi};\ell^{\varphi} = \wedge\ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi})$ | 12, 5, $Mono_l$, $Mono_r$ |
| 15 | $((\gamma^{\psi})^k;\Box\neg\psi) \Rightarrow (\ell^{\varphi} = \wedge\ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi};\ell^{\varphi} = \ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi})$ | 12, 9, $Mono_l$, $Mono_r$ |
| 16 | $(\gamma^{\psi})^{k+1} \Rightarrow (\ell^{\varphi} = \wedge\ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi};\ell^{\varphi} = \wedge\ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi})$ | 12-15, $ITL$ |
| 17 | $(\ell^{\varphi} = \wedge\ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi} \wedge \ell^{\varphi} = x \wedge \ell^{\varphi\wedge\psi} = y \wedge \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi} = z;$ $\ell^{\varphi} = \wedge\ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi} \wedge \ell^{\varphi} = x' \wedge \ell^{\varphi\wedge\psi} = y' \wedge \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi} = z') \Rightarrow$ $\Rightarrow \ell^{\varphi} = x + x' \wedge \ell^{\varphi\wedge\psi} = y + y' \wedge$ $\wedge\ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi} = z + z' \wedge x = y + z \wedge x' = y' + z'$ | т. 6, $ITL$ |
| 18 | $(\ell^{\varphi} = \wedge\ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi};\ell^{\varphi} = \wedge\ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi}) \Rightarrow$ $\Rightarrow \ell^{\varphi} = \ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi}$ | 17, $ITL$ |
| 19 | $(\gamma^{\psi})^{k+1} \Rightarrow \ell^{\varphi} = \wedge\ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi}$ | 16, 19, $ITL$ |

Както и в предходните случаи, този извод показва, че за всяко $k < \omega$ $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)} (\gamma^{\psi})^{k+1} \Rightarrow \ell^{\varphi} = \ell^{\varphi\wedge\psi} + \ell^{\varphi\wedge\Box\neg\psi}$. Оттук теоремата следва по $\omega^{\gamma^{\psi}}$. $\dashv$

**Забележки**

Нека забележим, че простотата на аксиомите $S1$, $S2$ и $I1$-$I3$ в сравнение с известните $DC$-$A1$–$DC$-$A6$ се дължи на тяхната по-добра съгласуваност с начина на употреба на правилото $\omega^{\gamma}$, а дори и на правилата $IR_1$ и $IR_2$. Завършваме аналогията между формулите, представящи състояния, и темпоралните променливи представящи техните продължителности в $ITL$ и изразите за състояния и термовете, образувани с $\int$ в $DC$, със следното твърдение, което се доказва с непосредствена проверка:

**Твърдение 6.41** *Нека $\varphi$ представя състояние в* $\mathbf{K}$. *Тогава формулата $\ell = \ell^{\varphi} \wedge \ell \neq 0$ също представя състояние в* $\mathbf{K}$.

Лесно е да се забележи, че $\varphi$ и $\ell = \ell^{\varphi} \wedge \ell \neq 0$ представят "едно и също" състояние в $\mathbf{K}$. Еквивалентността $(\ell = \ell^{\varphi} \wedge \ell \neq 0) \Leftrightarrow \varphi$ обаче не е в сила, защото в общия случай нямаме $(\varphi;\varphi) \Rightarrow \varphi$, което е в сила за формулата отляво на тази еквивалентност.

В духа на аксиомите $I1$-$I3$ могат да се запишат и аксиоми, характеризиращи интегрирането по времето на "обобщени" изрази за състояния, които представят реалнозначни функции на времето, каквито също се срещат в някои приложно насочени разширения на $DC$[ZRH92]. Тук предлагаме следната форма на такива аксиоми, отново в рамките на $ITL$: Въпреки, че темпоралните константи са ориентирани към представянето на функции от интервали, те с лекота могат да послужат и за представяне на функции на времето. Нека $f$ е темпорална константа, за която е валидна аксиомата $f = x \Rightarrow \neg(\top;\neg f = x)$. Тогава очевидно стойността на $f$ във всеки интервал съвпада със стойността ѝ в десния му край. Да разгледаме втора такава темпорална константа $g$, свързана с $f$ чрез аксиомите:

($\overline{\int}$) $(g = x;\Box(f \geq y) \wedge \ell = d) \Rightarrow g \geq x + d.y$

($\underline{\int}$) $(g = x;\Box(f \leq y) \wedge \ell = d) \Rightarrow g \leq x + d.y$

Следното твърдение, което привеждаме без подробно доказателство и не използуваме в по-нататъшното изложение, показва смисъла на двете аксиоми:

**Твърдение 6.42** *Нека $M$ е модел за език на $ITL$, съдържащ $f$, $g$ и . (умножение), освен +. Нека $D_M = \mathbf{R}$ и функционалните символи + и . имат стандартната интерпретация в $M$. Тогава, ако в $M$ са валидни аксиомите $\underline{\int}$ и $\overline{\int}$, $I_{M\,\tau_2}^{\tau_2}(g) - I_{M\,\tau_1}^{\tau_1}(g)$ се намира между точната горна граница на малките суми и точната долна граница на големите суми на Дарбу за римановия интеграл $\int_{\tau_1}^{\tau_2} I_\tau^\tau(f)d\tau$.*

От това твърдение следва, че горните аксиоми изразяват, че $g$ представя един неопределен интеграл на функцията, представена от $f$, ако тя има такъв. Твърдението лесно се получава, като се използуват аксиомите в интервалите, образуващи разбиванията, съответни на произволни малка и голяма сума на Дарбу. Сходството във формата на $\underline{\int}$ и $\overline{\int}$ и $I2$ и $I3$ е очевидно.

## 6.3 Абстрактна семантика на смятането на продължителностите и съответната пълна система за извод

Сега сме готови да направим основното приложение на полученото в рамките на $ITL$ в предходните параграфи на тази глава. Това е построяването на пълна система за извод за $DC$ по отношение на подходяща абстрактна семантика за него, подобна на известната ни за $ITL$. Тук използуваме съкращението $DC$ за смятането на продължителностите с новата семантика, макар че формално става въпрос за нова система. В този параграф под структура за $DC$ разбираме произволна, не задължително построена на основата на $\mathbf{R}$, структура за $ITL$.

**Дефиниция 6.43** Нека $\mathbf{L}$ е език за $DC$. Модел за $\mathbf{L}$ наричаме двойка от вида $\langle F, I\rangle$, където $F$ е структура за $ITL$, а $I$ е интерпретация на символите от $\mathbf{L}$, изпълняваща изискванията за интерпретация за език на $ITL$ и съпоставяща на всяка променлива за състояние $P$ функция $I(P)$, определена в $T_F$ и със стойности в $\{0,1\}$, и такава, че всеки интервал $\sigma \in \mathbf{I}(T_F)$ може да се представи във вида $\sigma_0;\ldots;\sigma_n$ така, че $I(P)$ да е постоянна в $\sigma_i \setminus \{\max\sigma_i\}$, $i \leq n$.

Изборът да се работи с полузатворени отляво интервали, разбира се, е произволен. Използуването на отворени интервали, което би изключило зависимостта на стойността на $\int$ от стойностите на интерпретацията на $S$ в краен брой "изолирани точки", е възпрепятствувано от допустимостта на дискретни времеви области за $DC$, които имат нетривиални интервали с празна вътрешност. За краткост по-нататък означаваме полузатворен интервал от вида $\sigma \setminus \{\max\sigma\}$ със $\sigma^{[)}$.

Стандартното разширение на $I$ за произволни изрази за състояния $S$ се определя както и в оригиналната дефиниция за $DC$. Единствено необходимо е да формулираме отново интерпретацията на термовете от вида $\int S$:

**Дефиниция 6.44** Нека $M$ е модел за езика $\mathbf{L}$ на $DC$ и $S$ е израз за състояние в $M$. Нека $\sigma \in \mathbf{I}(T_M)$, $\sigma = \sigma_0;\ldots;\sigma_n$ и $I_{M\tau}(S)$ е постоянна в интервалите $\sigma_i^{[)}$ $i \leq n$. Тогава

$$I_{M\,\sigma}(\int S) = \sum_{\substack{i\in\{0,\ldots,n\}\\ I_{M\min\sigma_i}(S)=1}} m_M(\sigma_i).$$

Лесно се вижда, че горната дефиниция не зависи от избора на разбиването $\sigma_0;\ldots;\sigma_n$ на интервала $\sigma$.

Нека фиксираме език $\mathbf{L}$ на $DC$. Както е отбелязано и в Предварителните сведения, $\mathbf{L}$ може да се счита и за език на $ITL$, в който изразите от вида $\int S$ са темпорални

константи. Моделите за $\mathbf{L}$ на $DC$ също могат да се разглеждат и като модели за $\mathbf{L}$ на $ITL$, където $I(\int S)$ се определя като $\lambda\sigma.I_\sigma(\int S)$.

Нека означим множеството $\{\lceil S\rceil \vee \lceil\neg S\rceil \vee \ell = 0 : S$ е израз за състояние в $\mathbf{L}\}$ с $\Omega_{DC}$. С непосредствена проверка се установява, че правилото $\omega^\gamma$ е коректно в класа на моделите за $\mathbf{L}$ за $\gamma \in \Omega_{DC}$. Следното твърдение също се доказва с непосредствена проверка:

**Твърдение 6.45** *Нека $M$ е модел за $\mathbf{L}$. Тогава в $M$ са валидни формулите:*

- $(DC0)$ $\quad \ell = 0 \Rightarrow \int S = 0$
- $(DC1)$ $\quad \int \mathbf{0} = 0$
- $(DC2)$ $\quad \lceil\mathbf{1}\rceil \vee \ell = 0$
- $(DC3)$ $\quad (\int S = x; \lceil S\rceil \wedge \ell = y) \Rightarrow \int S = x + y$
- $(DC4)$ $\quad (\int S = x; \lceil\neg S\rceil) \Rightarrow \int S = x$
- $(DC5)$ $\quad \lceil S_1\rceil \wedge \lceil S_2\rceil \Leftrightarrow \lceil S_1 \wedge S_2\rceil$
- $(DC6)$ $\quad \lceil S_1\rceil \Leftrightarrow \lceil S_2\rceil$, *ако* $S_1 \Leftrightarrow S_2$ *е свждителна тавтология*
- $(DC7)$ $\quad \lceil S\rceil \Rightarrow \Box(\lceil S\rceil \vee \ell = 0)$

Формулите $DC0$-$DC7$ приемаме в качеството на аксиоми за $DC$ с абстрактна семантика. Разширяваме с тези аксиоми въведената в параграф 6.1 система за извод за $ITL_{fin}(\Omega_{DC})$. Означаваме изводимостта в така получената система за извод за $DC$ с $\vdash_{DC}$. За нея е в сила следната теорема:

**Теорема 6.46 ($\omega$-пълнота на $DC$ с абстрактна семантика)** *Нека $\Gamma_0$ е изброимо множество от формули от $\mathbf{L}$. Тогава $\Gamma_0$ е непротиворечиво спрямо $\vdash_{DC}$ точно когато $\Gamma_0$ е изпълнимо в модел за $\mathbf{L}$.*

**Доказателство:** Съгласно теорема 6.36, разглеждайки термовете от вида $\int S$ като темпорални константи в $\mathbf{L}$, можем да получим модел $M$ на $ITL$ за $\mathbf{L}$, който изпълнява $\Gamma_0 \cup \{\Box\alpha : \alpha$ е частен случай на $DC0 - DC7\}$ и в който формулите $(\int S = \ell \wedge \ell \neq 0) \vee (\int(\neg S) = \ell \wedge \ell \neq 0) \vee \ell = 0$ имат свойството на крайните покрития. При това времевата област на $M$ може да бъде избрана да съвпада с интервала $\sigma$, който изпълнява горното множество. Нека разширим $I_M$ така, че тя да съпоставя на части постоянни функции на времето със стойности в $\{0,1\}$ на променливите за състояния от $\mathbf{L}$. Нека $P$ е променлива за състояние. Тогава съществуват $n < \omega$ и $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$ такива, че $\sigma = \sigma_0; \ldots; \sigma_n$ и или $M, \sigma_i \models \lceil P\rceil$, или $M, \sigma_i \models \lceil\neg P\rceil$ за $i \leq n$. Полагаме

$$I_M(P)(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{ако } \tau \in \sigma_i^{[)} \text{ за } i \text{ такова, че } M, \sigma_i \models \lceil P\rceil, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Полагаме $I_M(P)(\max\sigma) = 0$. Лесно е да се установи, че това определение на $I(P)$ не зависи от конкретния избор на разбиването $\sigma_i$, $i \leq n$.

Нека $\sigma' \in \mathbf{I}(T_M)$. Доказваме, че $M, \sigma' \models \int S = c$ е равносилно на $I_{M\,\sigma'}(\int S) = I_M(c)$ за всяка статична константа $c$ от езика $\mathbf{L}(C)$, където получаваме Хенкиново разширение на даденото непротиворечиво множество. Доказателството е с индукция по строежа на $S$. Ако $S$ е променлива за състояние, твърдението следва от определението на $I_M(S)$. Нека $S$ има вида $\neg S'$ или $S' \wedge S''$. В случая на тривиален $\sigma'$ получаваме твърдението, използувайки, че $M, [\tau_1, \tau_2] \models \ell = 0 \Rightarrow \int S = 0$, което е частен случай на $DC0$. Нека $\min\sigma' \neq \max\sigma'$. С проста индукция по строежа на $S$ се получава, че съществуват $n < \omega$ и $\sigma_i$, $i \leq n$, такива, че $\sigma' = \sigma_0; \ldots; \sigma_n$ и за всеки собствен подизраз $R$ на $S$ е изпълнено или $M, \sigma_i \models \lceil R\rceil$ или $M, \sigma_i \models \lceil\neg R\rceil$, и $I_M(R)$ е постоянна в интервала $\sigma_i^{[)}$, за $i \leq n$. Нека $M, \sigma_i \models \ell = c_i$ за $i \leq n$. Нека $e_i$ е $c_i$, ако $M, \sigma_i \models \lceil S' \wedge S''\rceil$ и 0 в противен случай, а $d_i$ е $c_i$, ако $M, \sigma_i \models \lceil\neg S'\rceil$ и 0 в противен случай, за $i \leq n$. Използувайки многократно, че $M, \sigma_i; \ldots; \sigma_j \models (\int S = c'; \lceil S\rceil \wedge \ell = c'') \Rightarrow \int S = c' + c''$, $(\int S = c'; \lceil\neg S\rceil) \Rightarrow \int S = c'$, $(\int \neg S' = c'; \lceil\neg\neg S'\rceil) \Rightarrow \int \neg S' = c'$, $\Box(\lceil S' \wedge S''\rceil \Leftrightarrow \lceil S'\rceil \wedge \lceil S''\rceil)$, $\Box(\lceil\neg\neg S'\rceil \Leftrightarrow \lceil S'\rceil)$, които са частни случаи на $DC3$-$DC6$, за $0 \leq i < j \leq n$ и $c', c'' \in C$, получаваме, че $M, \sigma' \models \int(S' \wedge S'') = e_1 + \ldots + e_n$ и $M, \sigma' \models \int \neg S' = d_1 + \ldots + d_n$.

Това показва, че $I_{M_{\sigma'}}(\int S)$ отговаря на определението за стойност на $\int S$ в смисъла на $DC$ за всички изрази за състояния $S$. $\dashv$

Нека приложим полученото в теорема 6.40 за аналозите на променливите за състояния и термовете за продължителности в $ITL$, за да докажем, че аксиомите $DC$-$A1$ - $DC$-$A6$ са доказуеми в новата система за $DC$.

**Теорема 6.47**

$\vdash_{DC} \int \mathbf{0} = 0$
$\vdash_{DC} \int \mathbf{1} = \ell$
$\vdash_{DC} \int S \geq 0$
$\vdash_{DC} \int S_1 + \int S_2 = \int(S_1 \vee S_2) + \int(S_1 \wedge S_2)$
$\vdash_{DC} (\int S = x; \int S = y) \Rightarrow \int S = x + y$
$\vdash_{DC} \int S_1 = \int S_2$, *ако* $S_1 \Leftrightarrow S_2$ *е свждителна тавтология*

**Доказателство:** Нека забележим, че формулите от вида $\lceil S \rceil$ изпълняват аксиомите $S1$ и $S2$. Освен това $DC0$, $DC3$ и $DC4$ са аналози на $I1$-$I3$ за формулите от този вид. От $DC5$ имаме $\vdash_{DC} \Box(\lceil S_1 \wedge S_2 \rceil \Leftrightarrow \lceil S_1 \rceil \wedge \lceil S_2 \rceil)$, а $\vdash_{DC} \lceil S \rceil \Leftrightarrow \Box\neg\lceil\neg S\rceil \wedge \ell \neq 0$ се получава от следния извод:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\lceil S \wedge \neg S \rceil \Leftrightarrow \lceil S \rceil \wedge \lceil \neg S \rceil$ | $DC5$ |
| 2 | $\lceil S \wedge \neg S \rceil \Leftrightarrow \lceil \mathbf{0} \rceil$ | $DC6$ |
| 3 | $\neg\lceil \mathbf{0} \rceil$ | $DC1$, $ITL$ |
| 4 | $\Box(\neg\lceil S \rceil \wedge \lceil \neg S \rceil)$ | 1, 2, 3, $ITL$ |
| 5 | $\Box(\lceil S \rceil \vee \ell = 0) \wedge \Diamond\lceil \neg S \rceil \Rightarrow \Diamond(\lceil S \rceil \wedge \lceil \neg S \rceil)$ | $ITL$ |
| 6 | $\lceil S \rceil \Rightarrow \Box(\lceil S \rceil \vee \ell = 0)$ | $DC7$ |
| 7 | $\lceil S \rceil \Rightarrow \Box\neg\lceil\neg S\rceil \wedge \ell \neq 0$ | 4, 5, 6, $ITL$ |

Подобен извод показва и $\vdash_{DC} \lceil \neg S \rceil \Leftrightarrow \Box\neg\lceil\neg\neg S\rceil \wedge \ell \neq 0$, откъдето по $DC6$ получаваме $\vdash_{DC} \lceil \neg S \rceil \Leftrightarrow \Box\neg\lceil S\rceil \wedge \ell \neq 0$. Оттук с индукция по строежа на $S$ и третата формула от теорема 6.40 се получава, че $\vdash_{DC} \ell^{\lceil S \rceil} = \ell^{\mathsf{t}(S)}$, където преводът $\mathsf{t}$ е определен с клаузите: $\mathsf{t}(\mathbf{0}) = \bot$; $\mathsf{t}(P) \rightleftharpoons \lceil P \rceil$ за променливи за състояния $P$; $\mathsf{t}(S_1 \wedge S_2) \rightleftharpoons \mathsf{t}(S_1) \wedge \mathsf{t}(S_2)$ и $\mathsf{t}(\neg S) \leftrightarrow \Box\neg\mathsf{t}(S) \wedge \ell \neq 0$. Нека докажем, че $\vdash_{DC} \ell^{\lceil S \rceil} = \int S$. В извода използуваме правилото $\omega^\gamma$ за $\gamma \rightleftharpoons \lceil S \rceil \vee \lceil \neg S \rceil \vee \ell = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\ell = 0 \Rightarrow \ell^{\lceil S \rceil} = 0$ | $I1$ |
| 2 | $\ell = 0 \Rightarrow \int S = 0$ | $DC0$ |
| 3 | $\gamma^0 \Rightarrow \ell^{\lceil S \rceil} = \int S$ | 1, 2, $ITL$ |
| 4 | $\gamma^k \Rightarrow \ell^{\lceil S \rceil} = \int S$ | индукционно допускане |
| 5 | $(\gamma^k \Rightarrow \ell^{\lceil S \rceil}; \lceil S \rceil) \Rightarrow (\ell^{\lceil S \rceil} = \int S; \lceil S \rceil)$ | 4, $Mono_l$ |
| 6 | $(\ell^{\lceil S \rceil} = \int S \wedge \int S = x; \lceil S \rceil \wedge \ell = y) \Rightarrow$ $\Rightarrow \ell^{\lceil S \rceil} = x + y \wedge \int S = x + y$ | $I2$, $DC3$, $ITL$ |
| 7 | $(\gamma^k \Rightarrow \ell^{\lceil S \rceil}; \lceil S \rceil) \Rightarrow \ell^{\lceil S \rceil} = \int S$ | 5, 6, $ITL$ |
| 8 | $(\gamma^k \Rightarrow \ell^{\lceil S \rceil}; \Box\neg\lceil S \rceil) \Rightarrow (\ell^{\lceil S \rceil} = \int S; \Box\neg\lceil S \rceil)$ | 4, $Mono_l$ |
| 9 | $(\ell^{\lceil S \rceil} = \int S \wedge \int S = x; \Box\neg\lceil S \rceil) \Rightarrow \int S = x \wedge \ell^{\lceil S \rceil} = x$ | $I3$, $DC4$, $ITL$ |
| 10 | $(\gamma^k \Rightarrow \ell^{\lceil S \rceil}; \Box\neg\lceil S \rceil) \Rightarrow \ell^{\lceil S \rceil} = \int S$ | 8, 9, $ITL$ |
| 11 | $\gamma^{k+1} \Rightarrow (\gamma^k; \lceil S \rceil) \vee (\gamma^k; \lceil \neg S \rceil) \vee \gamma^k$ | $ITL$ |
| 12 | $\lceil \neg S \rceil \Rightarrow \Box\neg\lceil S \rceil$ | вж. извода по-горе |
| 13 | $(\gamma^k; \lceil \neg S \rceil) \Rightarrow (\gamma^k; \Box\neg\lceil S \rceil)$ | 12, $Mono_l$ |
| 14 | $\gamma^{k+1} \Rightarrow \ell^{\lceil S \rceil} = \int S$ | 7, 10-13, $ITL$ |

Този извод показва, че $\vdash_{DC} \gamma^k \Rightarrow \ell^{\lceil S \rceil} = \int S$ за всяко $k < \omega$, откъдето $\vdash_{DC} \ell^{\lceil S \rceil} = \int S$. Използувайки това заедно с $\vdash_{DC} \ell^{\lceil S \rceil} = \ell^{\mathsf{t}(S)}$, теоремите лесно се получават от аналозите им от теорема 6.40. $\dashv$

## 6.4 Двумерни разширения на интервалната темпорална логика и смятането на продължителностите

Тук представяме двумерната интервална темпорална логика и двумерното смятане на продължителностите, които възникват като обобщения на смятането на продължителностите със слабо монотонно време (вж. Предварителните сведения), когато се приеме, че макро- и микро-интервалите имат продължителности в една и съща област, и показваме как изборът на $\Omega$ в системата за извод за $ITL_{fin}(\Omega)$ може да бъде направен така, че да се получат пълни системи за извод за тези две разширения. Накрая показваме как тази система може да се специализира за аксиоматизирането на разширение на двумерното смятане на продължителностите, в което подходящи темпорални съждителни константи позволяват отразяването на дискретния характер на микро-времето в $WDC$.

### 6.4.1 Езици

Езиците на двумерната интервална темпорална логика ($ITL^2$) се отличават от езиците на $ITL$ по това, че освен $\ell$ съдържат още две темпорални константи $\ell^-$ и $\ell^|$, предназначени да изразяват съответно макро- и микро-дължините на интервалите. Езиците на двумерното смятане на продължителностите ($DC^2$) се отличават от езиците на $DC$ по това, че освен $\int$ съдържат още два оператора за продължителности $\int^-$ и $\int^|$, предназначени да изразяват отново съответно макро- и микро продължителности на състояния.

Индексите $^-$ и $^|$ в означенията на новите символи са избрани да напомнят начина на изобразяване на макро- и микро-интервалите в $WDC$ в равнинна координатна система, описан в Предварителните сведения към тази част. Названието *двумерни* за тези системи идва също от това представяне. По-точен термин, който обаче не е добил разпространение, е интервална темпорална логика (съответно смятане на продължителности) *върху траектории*.

### 6.4.2 Структури, модели и истинност

Структурите на $ITL^2$ и $DC^2$ също се определят чрез непосредствено разширяване на структурите за $ITL$ и $DC$ съответно:

**Дефиниция 6.48** Нека $\langle T, \leq \rangle$ е времева област, а $\langle D, +, 0 \rangle$ е област от продължителности за $ITL$. Функцията $m : \mathbf{I}(T) \to D$ се нарича *слаба мярка*, ако изпълнява аксиомите за мярка $M2$ и $M3$, но не непременно $M1$.

**Дефиниция 6.49** *Структура за* $ITL^2$ се нарича система от вида $\langle \langle T, \leq \rangle, \langle D, +, 0 \rangle, m, m^-, m^| \rangle$ такава, че $\langle \langle T, \leq \rangle, \langle D, +, 0 \rangle, m \rangle$ е структура за $ITL$, а $m^-$ и $m^|$ са слаби мерки на $\mathbf{I}(T)$ в $D$ със следното свойство:

> Всеки интервал $\sigma \in \mathbf{I}(T)$ може да се представи във вида $\sigma_0; \ldots; \sigma_n$ така, че или $m(\sigma_i) = m^-(\sigma_i)$ и $m^|(\sigma_i) = 0$, или $m(\sigma_i) = m^|(\sigma_i)$ и $m^-(\sigma_i) = 0$ за $i \leq n$.

Връзката между $m^-$ и $m^|$, които представят съответно макро- и микро-продължителностите на интервалите в структурите за $ITL^2$, и "сбора" им $m$ отразява естественото изискване във всеки интервал от време да има само краен брой части, отговарящи на "бързите" (типично изчислителни) фази в работата на моделираните системи. Очевидно следствие на тази връзка е тъждеството $m(\sigma) = m^-(\sigma) + m^|(\sigma)$.

**Дефиниция 6.50** Нека $\mathbf{L}$ е език за $ITL^2$. *Модел за* $\mathbf{L}$ се нарича двойка от вида $\langle F, I \rangle$, където $F = \langle \langle T, \leq \rangle, \langle D, +, 0 \rangle, m, m^-, m^| \rangle$ е структура за $ITL^2$, а $\langle \langle T, \leq \rangle, \langle D, +, 0 \rangle, m, I \rangle$ е модел за езика $\mathbf{L}$, взет като език на $ITL$, в който $I(\ell^-) = m^-$ и $I(\ell^|) = m^|$.

Структурите за $DC^2$ са като тези за $ITL^2$. Затова при определянето на истинността в модели за езици на $DC^2$ е достатъчно да се определят интерпретациите на новите оператори $\int^-$ и $\int^|$.

**Дефиниция 6.51** Нека $\mathbf{L}$ е език за $DC^2$. Модел за $\mathbf{L}$ наричаме двойка от вида $\langle F, I\rangle$, където $F = \langle\langle T, \leq\rangle, \langle D, +, 0\rangle, m, m^-, m^|\rangle$ е структура за $ITL^2$, а $I$ изпълнява условията за интерпретация в модел за $DC$. При това $I_\sigma$ за $\sigma \in \mathbf{I}(T)$ и термове от вида $\int S$ се определя чрез $m$ както в $DC$, а за термове от вида $\int^* S$, $\int^*$, $* \in \{-, |\}$ се определя по следния начин: Ако $\sigma \in \mathbf{I}(T)$, $\sigma = \sigma_0; \ldots; \sigma_n$ и $I_\tau(S)$ е постоянна в $\sigma_i[\,]$, $i \leq n$, то $I_\sigma(\int^* S) = \sum\limits_{\substack{i\in\{0,\ldots,n\}\\ I_{\min\sigma_i}(S)=1}} m^*(\sigma_i)$.

Във всяко друго отношение стандартните разширения на интерпретациите и релацията $\models$ се определят в моделите на $ITL^2$ и $DC^2$ както в моделите на $ITL$ и $DC$ съответно.

### 6.4.3 Системи за извод и теореми за пълнота

Системите за извод, които представяме тук, се получават като случаи на системата за $ITL_{fin}(\Omega)$ за подходящи $\Omega$, разширени с някои специфични аксиоми. Няма да даваме подробни доказателства за пълнотата на тези системи, тъй като в тези доказателства няма нищо ново в сравнение с даденото за $ITL_{fin}(\Omega)$ и $DC$. Нека, както и по-горе, $*$ означава $-$ или $|$. Нека към системата за извод за $ITL$ добавим следните аксиоми и $\omega$-правило:

$(L2^*)$ $\quad \ell^* = x + y \Leftrightarrow (\ell^* = x; \ell^* = y)$

$(L+)$ $\quad \ell = \ell^- + \ell^|$

$(L\Box)$ $\quad (\ell = l^- \vee \ell = \ell^|) \Rightarrow \Box(\ell = \ell^- \vee \ell = \ell^|)$

$(\omega_{ITL^2})$ $\quad \dfrac{\forall k < \omega\ [(\ell = \ell^- \vee \ell = \ell^|)^k/P]\varphi}{[\top/P]\varphi}$

**Теорема 6.52 ($\omega$-пълнота на $ITL^2$)** *Нека* $\mathbf{L}$ *е език за* $ITL^2$. *Тогава едно множество от формули от* $\mathbf{L}$ *е изпълнимо в модел за* $\mathbf{L}$ *точно когато е непротиворечиво в горната система за извод.*

Доказателството на горната теорема се състои в получаването на модел $M$ за $\mathbf{L}$, взет като език за $ITL$, за даденото непротиворечиво множество, в който модел формулата $\ell = \ell^- \vee \ell = \ell^|$ има свойството на крайните покрития, и разширяването му до модел за $ITL^2$ с очевидните дефиниции $m^* = I_M(\ell^*)$, $* \in \{-, |\}$. Необходимите свойства на $m^-$ и $m^|$ при това следват от свойството на крайните покрития за $\ell = \ell^- \vee \ell = \ell^|$ в $M$.

Нека, както в $DC$, въведем съкращението $\lceil S\rceil^* \rightleftharpoons \ell^* \neq 0 \wedge \int^* S = \ell^*$, $* \in \{-, |\}$. Нека разширим системата за извод за $ITL^2$ със следните аксиоми и правило:

$(DC0^*)$ $\quad \ell^* = 0 \Rightarrow \int^* S = 0$

$(DC1^*)$ $\quad \int^* \mathbf{0} = 0$

$(DC2^*)$ $\quad \lceil\mathbf{1}\rceil^* \vee \ell^* = 0$

$(DC3^*)$ $\quad (\int^* S = x; \lceil S\rceil^* \wedge \ell^* = y) \Rightarrow \int^* S = x + y$

$(DC4^*)$ $\quad (\int^* S = x; \lceil\neg S\rceil^*) \Rightarrow \int^* S = x$

$(DC5^*)$ $\quad \lceil S_1\rceil^* \wedge \lceil S_2\rceil^* \Leftrightarrow \lceil S_1 \wedge S_2\rceil^*$

$(DC6^*)$ $\quad \lceil S_1\rceil^* \Leftrightarrow \lceil S_2\rceil^*$ ако $S_1 \Leftrightarrow S_2$ е съждителна тавтология

$(DC7^*)$ $\quad \lceil S\rceil^* \Rightarrow \Box(\lceil S\rceil^* \vee \ell^* = 0)$

$(DC+)$ $\quad \int S = \int^- S + \int^| S$

$(\omega_{DC^2})$ $\quad \dfrac{\forall k < \omega\ [(\lceil S\rceil^* \vee \lceil\neg S\rceil^* \vee \ell^* = 0)^k/P]\varphi}{[\top/P]\varphi}$

**Теорема 6.53 ($\omega$-пълнота на $DC^2$)** *Нека* **L** *е език за* $DC^2$. *Тогава едно множество от формули от* **L** *е изпълнимо в модел за* **L** *точно когато е непротиворечиво в горната система за извод.*

Тази теорема се получава с помощта на теоремата за пълнота на $ITL^2$ по начин, подобен на този, по който се получава пълнотата на системата за $DC$ с абстрактна семантика (теорема 6.46).

### 6.4.4 Смятане на продължителностите със слабо монотонно време

Разликата между $WDC$ и $DC^2$ се изразява в избора микро-интервалите в $WDC$ да имат целочислени продължителности. Тук предлагаме начин за въвеждане на микро-интервали с целочислени дължини в $DC^2$, който позволява изразяването на дискретността на изчислителните стъпки в моделираните системи. За целта въвеждаме три темпорални съждителни константи: $subunit$, $Unit$ и $Discrete$, и аксиоми за тях, достатъчни да изразят следните свойства:

- $Unit$ е изпълнена в незастъпващи се интервали от микро-време с продължителност 1.
- Всеки максимален интервал от микро-време изпълнява $Unit^k$ за някое $k > 0$.
- $Discrete$ е вярна в интервалите, изпълняващи $Unit^k$ за някое $k > 0$, които могат и да не бъдат максимални.
- $subunit$ е вярна в подинтервалите на интервалите, изпълняващи $Unit$.

Аксиомите за $subunit$, $Unit$ и $Discrete$ са следните:

($U0$) $subunit \Rightarrow \Box subunit$

($U1$) $subunit \Rightarrow \ell^- = 0 \wedge \ell^| \leq 1$

($U2$) $Unit \Leftrightarrow (subunit \wedge \ell^| = 1)$

($U3$) $(\ell^- = \ell \wedge \ell^- \neq 0; (\ell^| = \ell \wedge \ell^| \neq 0; \ell^- = \ell \wedge \ell^- \neq 0)) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\ell^- = \ell \wedge \ell^- \neq 0; ((Unit; \top) \wedge (\top; Unit); \ell^- = \ell \wedge \ell^- \neq 0))$

($U4$) $(Unit; \ell^| = \ell \wedge \ell^| \geq 1) \Rightarrow (Unit; (Unit; \top))$

($U5$) $(Unit; \ell^| \neq 0) \wedge (\top; Unit) \Rightarrow \ell^| \geq 2$

($U6$) $Discrete \Leftrightarrow \ell^- = 0 \wedge (Unit; \top) \wedge (\top; Unit)$

Освен това се изисква $subunit \vee \ell = \ell^-$ да има свойството на крайните покрития, т. е. добавяме правилото:

$$(\omega_U) \qquad \frac{\forall k < \omega \ [(subunit \vee \ell = \ell^-)^k / P]\varphi}{[\top / P]\varphi}$$

Правилото $\omega_U$ и аксиомата $U0$ гарантират, че всеки микро-интервал (с възможно не целочислена дължина) изпълнява $subunit^k$ за някое $k < \omega$. Аксиомите $U1$-$U6$ имат следният смисъл: $U1$ изразява, че $subunit$ се изпълнява само в интервали от микро-време с дължина не по-голяма от 1. $U2$ определя $Unit$ да бъде изпълнена в тези от интервалите, изпълняващи $subunit$, които имат максималната дължина 1. $U3$ изразява, че всеки максимален интервал от микро-време започва и завършва с подинтервал, изпълняващ $Unit$. $U4$ изразява, че интервалите от микро-време, изпълняващи $Unit$, са разположени последователно, без празноти помежду им, а $U5$ изразява, че те не се застъпват. Най-накрая, $U6$ определя $Discrete$ по начина, описан по-горе. Формалното доказателство на свойствата на $U0$-$U6$ и $\omega_U$ не съдържа нищо нетривиално и затова го пропускаме.

## 6.5 Смятане на продължителностите с квантор по променливите за състояния

В този параграф представяме пълна система за извод за разширението на $DC$, в което се допуска кванторът $\exists$ да свързва променливи за състояния. Пълнотата на

системата получаваме, показвайки, че съществува просто съответствие между изводите в нея и изводите в подходяща теория в специален случай на двусортен вариант на $ITL_{fin}(\Omega)$, съответен на двусортно смятане на продължителностите, в което променливите за състояния вземат параметри от добавения втори сорт.

Възможността да се аксиоматизират подобни системи изтъква разликата между подходите към пълнотата на $DC$ от [HZ92] и възприетия тук. Доказателството на относителната пълнота на системата от [HZ92] съществено използува, че истинността на всяка формула в $DC$ зависи от крайния брой функции на времето, с които се интерпретират променливите за състояния, участвуващи в нея. При въвеждането на квантор по тези променливи на подобно условие повече не може да се разчита.

### 6.5.1 Двусортна интервална темпорална логика и двусортно смятане на продължителностите

Нека разгледаме език за $ITL$, построен от *два сорта* индивидни променливи, изброимо много от статични константни символи, изброимо много $n$-местни темпорални предикатни символи с аргументи от втория сорт за всяко $n < \omega$ и произволен набор символи от първия сорт, освен задължителните. Структурите и моделите за двусортна $ITL$ с така избрания език определяме по следния начин:

**Дефиниция 6.54** *Система от вида $\langle\langle T, \leq\rangle, \langle D, +, 0\rangle, U, m\rangle$, където $\langle\langle T, \leq\rangle, \langle D, +, 0\rangle, m\rangle$ е структура за $ITL$, а $U$ е непразно множество, наричаме двусортна структура за $ITL$. Двусортен модел за език* $\mathbf{L}$ *от описания по-горе вид наричаме двойка от вида $\langle F, I\rangle$, където $F = \langle\langle T, \leq\rangle, \langle D, +, 0\rangle, U, m\rangle$ е двусортна структура за $ITL$, а $I$ изпълнява условията за интерпретация на символите от първия (познатия) сорт в структурата $\langle\langle T, \leq\rangle, \langle D, +, 0\rangle, m\rangle$, $I(c), I(u) \in U$ за всяка статична константа $c$ и всяка индивидна променлива $u$ от втория сорт, и $I(R) : \mathbf{I}(T) \times U^n \to \{0, 1\}$ за всеки $n$-местен темпорален предикатен символ от втория сорт.*

Релацията $\models$ се дефинира за модели на така избрания вид двусортни езици за $ITL$ и формули от тези езици по стандартния начин. Нека фиксираме такъв език $\mathbf{L}$. Нека $\Omega$ се състои от всички атомарни формули от $\mathbf{L}$, образувани с темпоралните предикатни символи от втория сорт. Нека $\mathbf{K}$ е класът от двусортните модели за $\mathbf{L}$, където формулите от $\Omega$ имат свойството на крайните покрития, т.е. нека $\mathbf{K}$ е класът на моделите на $ITL_{fin}(\Omega)$. Следната теорема е в сила за $\mathbf{K}$:

**Теорема 6.55 ($\omega$-пълнота на двусортна $ITL_{fin}(\Omega)$)** *Нека $\Gamma$ е множество от формули от $\mathbf{L}$. Тогава $\Gamma$ е изпълнимо в модел от $\mathbf{K}$ точно когато $\Gamma$ е непротиворечиво спрямо $\vdash_{ITL_{fin}(\Omega)}$.*

Доказателството на тази теорема е като доказателството на теорема 6.36. Разликите, свързани с включването на построението на $U$ в каноничната структура, са незначителни. Затова пропускаме това доказателство. Следващата ни стъпка е по подобен начин да въведем двусортно смятане на продължителностите, където променливите за състояния се заместват от едноместни предикати за състояния, вземащи параметър от втория сорт.

За да определим език на двусортното $DC$, нека предположим, че разполагаме с множества от видовете символи, използувани при построяването на езиците на $DC$. Нека отнесем тези символи към познатия ни сорт на продължителностите. Нека освен това имаме и изброимо множество от индивидни променливи от втори сорт, изброимо множество от статични константи от втори сорт и множество от *едноместни предикатни символи $P$, $Q$, ..., за състояния.* В определяния език за двусортно $DC$ задаваме изразите за състояния със следната Бекус-Наурова форма:

$S ::= \mathbf{0} | P(t) | \neg S | (S \wedge S)$

Тук $t$ означава терм от втори сорт, който, поради липсата на функционални символи от втори сорт, може да бъде само статична константа или индивидна променлива.

Променливи за състояния без параметри не са необходими, защото вместо такива могат да бъдат употребени изрази от вида $P(c)$, където $c$ е константа. (Всъщност за техническите ни цели е достатъчен единствен предикатен символ за състояния.) Определенията на термове и формули в език за двусортно $DC$ са като в (едносортното) $DC$. Преминаваме към определението на модели за този вид езици.

**Дефиниция 6.56** Нека $\mathbf{L}$ е език за двусортното $DC$. *Модел за* $\mathbf{L}$ се нарича двойка от вида $\langle F, I\rangle$, където $F = \langle\langle T, \leq\rangle, \langle D, +, 0\rangle, U, m\rangle$ е структура за двусортната интервална темпорална логика, $I$ изпълнява условията за интерпретация за символите от сорта $D$ и освен това $I(u), I(c) \in U$ за всяка индивидна променлива $u$ и всяка статична константа $c$ от втория сорт и $I(P) : T \times U \to \{0, 1\}$ за всеки едноместен предикатен символ за състояние $P$. При това за всяко $u \in U$ всеки интервал $\sigma \in \mathbf{I}(T)$ може да се представи във вида $\sigma_0; \ldots; \sigma_n$ така, че функцията $\lambda\tau.I(P)(\tau, u)$ да е постоянна в $\sigma_i^{[)}$, $i \leq n$.

При определянето на стойности на изразите за състояния двусортното $DC$ се различава от (едносортното) $DC$ само по определението на стандартното разширение на $I$ за изрази за състояния от вида $P(t)$, където $t$ е статична константа или индивидна променлива от сорта $U$. Новата клауза е:

$I_\tau(S(t)) = I(S)(\tau, I(t))$

Интерпретацията на $\int$, термовете от сорта $D$ и релацията $\models$ се определят както в едносортната система.

Въпреки че предикатните символи за състояния са едноместни, могат да бъдат образувани изрази за състояния, зависещи от произволен брой променливи от втория сорт. Затова формулите от вида $\lceil S\rceil$ в тази система задават предикати на произволен брой променливи. Лесно е да се забележи, че за всеки израз за състояние $S$ формулата $\lceil S\rceil \vee \lceil\neg S\rceil \vee \ell = 0$ има свойството на крайните покрития в класа на моделите на двусортното $DC$. Това позволява изводът в тази система да се разглежда като извод в двусортната $ITL_{fin}(\Omega)$, която разгледахме по-горе, и въпросът за пълнотата на система за извод за двусортно $DC$ да се сведе до същия въпрос за двусортната $ITL_{fin}(\Omega)$. Следната теорема се доказва подобно на теорема 6.46:

**Теорема 6.57** *Нека* $\mathbf{L}$ *е език за двусортното* $DC$. *Тогава едно множество* $\Gamma$ *от формули от* $\mathbf{L}$ *е изпълнимо в модел за* $\mathbf{L}$ *точно когато е непротиворечиво в представената система за извод за* $DC$ *с абстрактна семантика.*

Казвайки "представената система", разбира се, приемаме, че аксиомите и правилата от нея, свързани с променливите и кванторите, действуват и за променливите и кванторите от новия сорт.

### 6.5.2 Пълна система за извод за смятането на продължителностите с квантор по променливите за състояния

Тук предлагаме система за извод за $DC$ с квантор по променливите за състояния и доказваме нейната пълнота чрез подходящ превод, установяващ просто съответствие между изводите в тази система и изводите в системата за двусортно $DC$, спомената в теорема 6.57. Системата се състои от аксиомите и правилата за $DC$ с абстрактна семантика и следните аксиоми и правило, свързани с новия квантор:

| | | |
|---|---|---|
| $(\exists^S)$ | $[S/P]\varphi \Rightarrow \exists P\varphi$, | където $S$ е израз за състояние |
| $(B_l^S)$ | $(\exists P\varphi; \psi) \Rightarrow \exists P(\varphi; \psi)$ | ако $P$ не е свободна в $\psi$ |
| $(B_r^S)$ | $(\varphi; \exists P\psi) \Rightarrow \exists P(\varphi; \psi)$ | ако $P$ не е свободна в $\varphi$ |
| $(;)$ | $x = 0 \vee \ell \leq x \vee \exists P(\lceil S_1 \Leftrightarrow P\rceil \wedge \ell = x; \lceil S_2 \Leftrightarrow P\rceil)$ | |
| $(G^S)$ | $\dfrac{\varphi}{\forall P\varphi}$ | |

Лесно е да се забележи, че измежду горните аксиоми и правило само $(;)$ няма аналог за индивидни променливи. Коректността на новата система се установява с

непосредствена проверка. По-долу определяме превод, който на всяка формула от език на $DC$ с новия квантор съпоставя формула от съответен език на двусортното $DC$, което описахме по-горе. След това посочваме подходяща теория в двусортното $DC$ и показваме, че при този превод от извод в горната система за $DC$ с новия квантор се получава извод в тази теория в двусортно $DC$. По-нататък доказваме, че за произволно множество от формули $\Gamma$ в език за $DC$ с новия квантор от непротиворечивостта на множеството от преводите на формулите от $\Gamma$ в споменатата теория в съответен език на двусортното $DC$ следва изпълнимостта на $\Gamma$. Тъй като тази непротиворечивост е равносилна на непротиворечивост на самото $\Gamma$ в представената по-горе система, от това получаваме пълнотата на горната система.

Нека фиксираме език $\mathbf{L}$ на $DC$ с квантор по променливите за състояния. Нека с $\mathbf{L}'$ означим езика за двусортното $DC$, в който индивидните променливи от втория сорт образуват множеството $\{u_P : P$ е променлива за състояние в $\mathbf{L}\}$, а $S$ е единственият едноместен предикатен символ за състояние. Нека $\mathsf{t}$ е превод на формулите от $\mathbf{L}$ във формули от $\mathbf{L}'$, който за всяка променлива за състояние $P$ от $\mathbf{L}$ замества кванторната представка $\exists P$ с $\exists u_P$, а самата променлива $P$ - със $S(u_P)$. Този превод очевидно е обратим. Нека $\mathsf{s}$ е преводът на формулите от $\mathbf{L}'$ във формули от $\mathbf{L}$, който се определя с обратното преобразуване. Тъй като $=$ е определено само за термове от първия сорт, променливите от втория сорт не се срещат във формули от $\mathbf{L}'$ другаде, освен във формули, образувани с $S$. Следователно $\mathsf{s}(\varphi)$ е определен за всяка формула $\varphi$ от $\mathbf{L}$. Нека за множества $\Gamma$ от формули от $\mathbf{L}$ с $\mathsf{t}(\Gamma)$ означаваме $\{\mathsf{t}(\varphi) : \varphi \in \Gamma\}$.

Да разгледаме теорията $T^S$ в $\mathbf{L}'$, която има следните аксиоми:

$(E\mathbf{0})$ $\quad \Box\exists u \int S(u) = 0$

$(E\mathbf{1})$ $\quad \Box\exists u \int S(u) = \ell$

$(E\neg)$ $\quad \Box\forall u'\exists u\Box(\lceil S(u)\rceil \Leftrightarrow \lceil\neg S(u')\rceil)$

$(E\wedge)$ $\quad \Box\forall u'\forall u''\exists u\Box(\lceil S(u)\rceil \Leftrightarrow \lceil S(u') \wedge S(u'')\rceil)$

$(E;)$ $\quad \Box\forall u'\forall u''\forall x(x = 0 \vee \ell \leq x \vee \exists u(\lceil S(u') \Leftrightarrow S(u)\rceil \wedge \ell = x; \lceil S(u'') \Leftrightarrow S(u)\rceil))$

Следното твърдение установява връзката между $T^S$ и системата, представена по-горе:

**Лема 6.58** *Нека $\Gamma$ е множество от формули в $\mathbf{L}$. Тогава $\Gamma$ е непротиворечиво в горната система точно когато $\mathsf{t}(\Gamma) \cup \{E\mathbf{0}, E\mathbf{1}, E\neg, E\wedge, E;\}$ е непротиворечиво спрямо $\vdash_{DC}$.*

**Доказателство:** Нека имаме извод на $\bot$ от $\Gamma$ в системата за $DC$ с квантор по променливите за състояния. Заместването на всяка формула от такъв извод с $\mathsf{t}$-превода й дава извод на $\bot$ в $T^S$, в който се използват $\mathsf{t}$-преводите на частните случаи на аксиомата $\exists^S$. Всички други частни случаи на аксиоми и правила от новата система имат за $\mathsf{t}$-преводи частни случаи на аксиоми и правила или на двусортното $DC$, или на $T^S$. $\mathsf{t}$-преводите на частните случаи на $\exists^S$ са изводими с помощта на $E\mathbf{0}$, $E\neg$ и $E\wedge$. Това се получава с проста индукция по строежа на израза за състояние $S$ от $\exists^S$, опираща се на теоремите $\exists u S(u) = 0 \Rightarrow ([\mathbf{0}/P]\varphi \Rightarrow \exists u[S(u)/P]\varphi)$, $\forall u'\exists u\Box(\lceil S(u)\rceil \Leftrightarrow \lceil\neg S(u')\rceil) \Rightarrow ([\neg S(u')/P]\varphi \Rightarrow \exists u[S(u)/P]\varphi)$ и $\forall u'\forall u''\exists u\Box\lceil S(u)\rceil \Leftrightarrow \lceil S(u') \wedge S(u'')\rceil \Rightarrow ([S(u') \wedge S(u'')/P]\varphi \Rightarrow \exists u[S(u)/P]\varphi)$ на двусортното $DC$. Доказуемостта на тези теореми следва от пълнотата на двусортното $DC$ с абстрактна семантика.

Обратно, ако подложим на $\mathsf{s}$ извод на $\bot$ от $\mathsf{t}(\Gamma)$ в $T^S$, получаваме извод в представената по-горе система, в който евентуално се срещат формули от вида $\exists P \int P = 0$ и $\exists P \int P = \ell$, които не са сред аксиомите й. Тези формули обаче лесно се извеждат в нея с помощта на аксиомата за заместване $\exists^S_r$ от теоремите $\int \mathbf{0} = 0$ и $\int(\neg\mathbf{0}) = \ell$. От казаното следва, че непротиворечивостта на $\Gamma$ е равносилна на тази на $\mathsf{t}(\Gamma) \cup \{E\mathbf{0}, E\mathbf{1}, E\neg, E\wedge, E;\}$. $\dashv$

**Теорема 6.59 ($\omega$-пълнота на $DC$ с квантор по променливите за състояния)** *Нека $\Gamma$ е множество от формули в $\mathbf{L}$. Тогава $\Gamma$ е непротиворечиво в горната система точно когато $\Gamma$ е изпълнимо в модел за $\mathbf{L}$.*

**Доказателство:** В едната посока теоремата следва от коректността на системата ни за извод. Нека $\Gamma$ е непротиворечиво. Тогава, според лема 6.58,
$\mathsf{t}(\Gamma) \cup \{E\mathbf{0}, E\mathbf{1}, E\neg, E\wedge, E;\}$ е непротиворечиво спрямо $\vdash_{DC}$. Оттук следва изпълнимостта на Хенкиново разширение на това множество със свидетели в някое множество от статични константи $C$ в модел за $\mathbf{L}'(C)$. Ще използуваме това, за да покажем, че съществува модел, който изпълнява $\Gamma$.

Нека $M = \langle F, I\rangle$ е каноничен модел за горното Хенкиново разширение. Нека $F = \langle\langle T, \leq\rangle, \langle D, +, 0\rangle, U, m\rangle$ е съответната структура. Да разгледаме модела $M' = \langle F', I'\rangle$ за $\mathbf{L}$, където $F' = \langle\langle T, \leq\rangle, \langle D, +, 0\rangle, m\rangle$, а $I'$ съвпада с $I$ за символите от $\mathbf{L}$, освен променливите за състояния, а за всяка променлива за състояние $P$ от $\mathbf{L}$ $I'(P) = \lambda\tau.I(S)(\tau, I(u_P))$.

С индукция по строежа на $\varphi \in \Gamma$ доказваме, че $M', \sigma \models \varphi$ точно когато $M, \sigma \models \mathsf{t}(\varphi)$. Равенството $I'_\tau(P) = I_\tau(S(u_P))$ е очевидно следствие на определението на $I'$. Индуктивното доказателство на равенството $I'_\sigma(t) = I_\sigma(\mathsf{t}(t))$ е тривиално, тъй като $I$ и $I'$ съвпадат за всички други символи от двата езика. Индуктивната стъпка за доказване на горната еквивалентност е тривиална и за всички видове формули освен тези от вида $\exists P\varphi$. Разглеждаме само този случай.

Ако $M, \sigma \models \exists u_P \mathsf{t}(\varphi)$, то $\langle F, J\rangle, \sigma \models \mathsf{t}(\varphi)$ за някоя интерпретация $J$, която е $u_P$-съгласувана с $I$. Тогава, определяйки $J'$ чрез $J$ по начина, по който определихме $I'$ чрез $I$, получаваме, че $J'$ е $P$-съгласувана с $I'$ и, според индукционното допускане, $\langle F', J'\rangle, \sigma \models \varphi$.

Нека сега $M', \sigma \models \exists P\varphi$. Тогава съществува $P$-съгласувана с $I'$ интерпретация $J'$ такава, че $\langle F', J'\rangle, \sigma \models \varphi$. Използуваме това, за да докажем, че $\exists u_P \mathsf{t}(\varphi)$ принадлежи на споменатото по-горе Хенкиново разширение на $\mathsf{t}(\Gamma) \cup \{E\mathbf{0}, E\mathbf{1}, E\neg, E\wedge, E;\}$. Според построението на $M$ (което в подробности е дадено за общия случай на $ITL_{fin}(\Omega)$), за всеки интервал $\sigma' \in \mathbf{I}(T)$ съществува $c \in C$ такава, че $M, \sigma' \models \ell = c$. Нека $\sigma$ има вида $\sigma_0; \ldots; \sigma_n$ където $\sigma_i$ са такива, че $J'(P)$ е постоянна в $\sigma_i^{[)}$, $i \leq n$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $\sigma_i$ са нетривиални. Нека $c_i \in C$ са такива, че $M, \sigma_i \models \ell = c_i$ за $i \leq n$. Нека забележим, че $M, \sigma_i \models \exists u \int S(u) = 0, \exists u \int S(u) = \ell$, и вземем първата или втората от формулите в зависимост от това, дали $J'(P)(\min \sigma_i)$ е 0 или 1. Тъй като работим каноничен модел на Хенкинова теория, съществуват статични константи $d_i \in C$ от сорт $U$ такива, че $M, \sigma_i \models \int S(d_i) = 0$ в първия случай и $M, \sigma_i \models \int S(d_i) = \ell$ във втория. Ясно е, че $I_\tau(S(d_i))$ съвпада с $J'_\tau(P)$ за $\tau \in \sigma_i^{[)}$. С индукция по $i$ ще покажем, че за всяко $i \leq n$ съществува $e_i \in C$ такава, че $I_\tau(S(e_i)) = J'_\tau(P)$ за $\tau \in \sigma_0; \ldots; \sigma_i^{[)}$. Вземаме $d_0$ в качеството на $e_0$. Нека разполагаме с $e_i$. Нека забележим, че

$$M, \sigma_0; \ldots; \sigma_{i+1} \models \exists u(\lceil S(e_i) \Leftrightarrow S(u)\rceil \wedge \ell = c_1 + \ldots + c_i; \lceil S(d_{i+1}) \Leftrightarrow S(u)\rceil \wedge \ell = c_{i+1}),$$

което следва от $E;$, защото, според избора на $\sigma_i$, $I(c_i) \neq 0$. Оттук, тъй като работим с каноничен модел на Хенкинова теория,

$$M, \sigma_0; \ldots; \sigma_{i+1} \models (\lceil S(e_i) \Leftrightarrow S(e_{i+1})\rceil \wedge \ell = c_1 + \ldots + c_i; \lceil S(d_{i+1}) \Leftrightarrow S(e_{i+1})\rceil \wedge \ell = c_{i+1})$$

за някое $e_{i+1} \in C$. Но оттук следва, че $I_\tau(S(e_{i+1})) = J'_\tau(P)$ за $\tau \in \sigma_0; \ldots; \sigma_{i+1}^{[)}$. В крайна сметка, $I_\tau(S(e_n)) = J'_\tau(P)$ за всяко $\tau \in \sigma^{[)}$. Сега нека $J$ е $u_P$-съгласувана с $I$ и $J(u_P) = I(e_{n-1})$. Ясно е, че $J$ и $J'$ се намират в съответствието, в което са $I$ и $I'$. Според индукционното допускане $\langle F, J\rangle, \sigma \models \mathsf{t}(\varphi)$. $\dashv$

***

Аксиомата $(;)$ от представената система за извод за $DC$ с квантор по променливите за състояния може лесно да бъде получена като следствие на аксиомата

$\exists P([P/P']\varphi; [P/P'']\psi) \Leftrightarrow (\exists P'\varphi; \exists P''\psi)$,

която е известна в литературата и която изглежда доста по-естествено.[3] В следствие на пълнотата на представената система, горната аксиома също може да бъде изведена с помощта на $(;)$. Явният извод се опира на доказателство на теоремите от вида $\lceil S \Leftrightarrow P \rceil \Rightarrow ([S/P]\varphi \Leftrightarrow \varphi)$, което се провежда с индукция по строежа на $\varphi$. Изборът в полза на $(;)$ е заради непосредственото съответствие на нейната формата на начина, по който тя се употребява в доказателството на теорема 6.59. Системата с горната аксиома вместо $(;)$, разбира се, също е пълна.

## 6.6 Смятане на продължителностите с оператора $\backslash\backslash$

В този параграф даваме косвено решение на въпроса за общовалидността в разширение $ITL_{\backslash\backslash}$ на $ITL$, съответно на разширението на $DC$ с оператора $\backslash\backslash$ на Хъ, представено в Предварителните сведения към тази част. Преходът от $ITL_{\backslash\backslash}$ към $DC_{\backslash\backslash}$ е подобен на този от $ITL$ към $DC$. Затова не се спираме на него. Ограничаваме се със забележката, че този преход позволява употребата на предложеното решение и за $DC_{\backslash\backslash}$. Освен това не разглеждаме специфичната за $DC_{\backslash\backslash}$ темпорална константа $\#$. За издържаното въвеждане на $\#$ в абстрактна ситуация би било необходимо добавянето на множеството от естествените числа като област за стойностите на $\#$. За излагането на полученото тук това усложнение би било безполезно.

Нашето решение се състои в получаването на $\omega$-пълна система за извод за специално разширение на $ITL_{fin}(\Omega)$ и на запазващ валидността превод на езика на $ITL_{\backslash\backslash}$ в съответния му език на разширението. В това разширение кванторът $\exists$ свързва и темпорални съждителни променливи, интерпретиращи се като предикати, истинни само в краен брой тривиални подинтервали на всеки интервал в моделите на разширението. Интерпретациите на тези съждителни променливи играят ролята на дискретните интервали от $DC_{\backslash\backslash}$. Освен това, темпоралните предикатни и функционални символи в разширението могат да взимат и аргументи - формули. Тази възможност се използува за изразяване на зависимостта на интерпретациите на темпоралните символи в $ITL_{\backslash\backslash}$ от интервалите, в които се оценяват, за случая, когато тези интервали са дискретни. Формулите, които се оказват аргументи на тези символи при превода на $ITL_{\backslash\backslash}$ във въпросното разширение, са темпорални съждителни променливи от специалния вид, изпълняващи ролята на дискретните интервали, или $\top$, за обикновените интервали.

### 6.6.1 $ITL_{\backslash\backslash}$

Езиците за $ITL_{\backslash\backslash}$ се строят от същите видове символи, като тези за $ITL$. Бекус-Науровата форма, определяща формулите в език на $ITL_{\backslash\backslash}$, се разширява, за да допусне и формулите, образувани с $\backslash\backslash$:

$\varphi ::= \bot | R(t, \ldots, t) | \neg\varphi | \varphi \wedge \varphi | (\varphi;\varphi) | (\varphi \backslash\backslash \varphi) | \exists x \varphi$

Структурите за $ITL_{\backslash\backslash}$ са като тези за $ITL$. За разлика от $ITL$, в $ITL_{\backslash\backslash}$ ролята на множеството от интервали $\mathbf{I}(T_F)$ в дадена структура $F$ се играе от множеството $\mathbf{I}_{\backslash\backslash}(T_F) = \mathbf{I}(T_F) \cup \mathbf{P}_{fin}(T_F)$, където с $\mathbf{P}_{fin}(T_F)$ означаваме множеството от крайните подмножества на $T_F$. Елементите на $\mathbf{P}_{fin}(T_F)$ се наричат *дискретни интервали*. Мярката $m_F$ се разширява върху $\mathbf{P}_{fin}(T_F)$ с равенството $m_F(\sigma) = m_F([\min\sigma, \max\sigma])$.

Както и в $ITL$, моделите на $ITL_{\backslash\backslash}$ се състоят от структура $F$ и интерпретация $I$. Интерпретацията в такъв модел се определя по същия начин като в $ITL$, освен в случая на темпоралните символи. Техните интерпретации вземат аргументи от $\mathbf{I}_{\backslash\backslash}(T_F)$ вместо от $\mathbf{I}(T)$.

Стойностите на термовете се определят в $ITL_{\backslash\backslash}$ както в $ITL$. Дефиницията на $\models$ се разширява с цел да обхване и оператора $\backslash\backslash$:

[3] Това бе забелязано най-напред от проф. Дзоу по време на работата на автора над тази глава.

$M, \sigma \models (\varphi \backslash\backslash \psi)$ ако за някое $n < \omega$ $\sigma$ има вида $\sigma_0; \ldots; \sigma_n$,
където $M, \sigma_i \models \varphi,\ i \leq n$,
и $M, \{\min \sigma_0, \ldots, \min \sigma_n, \max \sigma_n\} \models \psi$.

### 6.6.2 $ITL$ с дискретни предикати

В този подпараграф изучаваме разширение на $ITL$, което играе техническа роля като тази на двусортното $DC$ в установяването на $\omega$-пълнотата на $DC$ с квантор по променливите за състояния, но за установяването на пълнотата на разширението на $ITL$ с квантор по дискретни темпорални съждителни променливи, което въвеждаме по-нататък. Наричаме това междинно разширение $ITL$ *с дискретни предикати*.

В езиците на $ITL$ с дискретни предикати се допускат видовете символи допустими в езиците на $ITL$. Освен тях се допускат и темпорални символи, които освен термове, вземат и по един аргумент-формула. Това по съответен начин се регистрира в арността им. Термовете и формулите в език на $ITL$ с дискретни предикати се определят с Бекус-Науровите форми:

$t ::= x|c|f(t, \ldots, t)|f(\varphi, t, \ldots, t)$

$\varphi ::= \bot|R(t, \ldots, t)|R(\varphi, t, \ldots, t)|\varphi \Rightarrow \varphi|(\varphi; \varphi)|\exists x \varphi$

Приемаме, че $FV(s(\varphi, t_1, \ldots, t_n)) = FV(\varphi) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} FV(t_i)$ за функционални и релационни символи $s$ от новия вид.

Структурите $F$ на $ITL$ с дискретни предикати са като тези на $ITL$. Интерпретациите $I$ в моделите $M = \langle F, I \rangle$ на тази логика се отличават от тези в $ITL$ само за темпоралните символи, които вземат аргумент-формула. Интерпретацията $I(s)$ на такъв символ $s$ е функция с дефиниционна област $\mathbf{I}(T_F) \times 2^{\mathrm{I}(T_F)} \times D_F^n$, където $n$ е броят на аргументите-термове на $s$.

Стойностите $I_\sigma$ на термовете $t$ от $\mathbf{L}$ за $\sigma \in \mathbf{I}(T_F)$ и релацията $\models$ в $M$ за формули $\varphi$ от $\mathbf{L}$ се определят с едновременна индукция по строежа на $t$ и $\varphi$ с равенствата и клаузите, известни за $ITL$, и следните равенства и клаузи, специфични за символите с аргумент-формула:

$I_\sigma(f(\varphi, t_1, \ldots, t_n)) = I(f)(\sigma, \tilde{I}(\varphi) \cap \mathbf{I}(\sigma), I_\sigma(t_1), \ldots, I_\sigma(t_n))$

$\langle F, I \rangle, \sigma \models R(\varphi, t_1, \ldots, t_n)$ ако $I(R)(\sigma, \tilde{I}(\varphi) \cap \mathbf{I}(\sigma), I_\sigma(t_1), \ldots, I_\sigma(t_n)) = 1$.

Нека $\mathbf{L}$ е език на $ITL$ с дискретни предикати.

**Дефиниция 6.60** Формула $\delta$ от $\mathbf{L}$ наричаме *дискретна* в модела $M$ за $\mathbf{L}$, ако за всеки интервал $\sigma \in \mathbf{I}(T_M)$ множеството $\tilde{I_M}(\delta) \cap \mathbf{I}(\sigma)$ се състои от краен брой тривиални интервали.

Нека $\Delta$ е множество от формули от $\mathbf{L}$. С $ITL_d(\Delta)$ означаваме логиката, определена от класа от моделите за $\mathbf{L}$, в които формулите от $\Delta$ са дискретни.

### 6.6.3 $\omega$-пълна система за извод за $ITL$ с дискретни предикати

Нека $\mathbf{L}$ е език на $ITL$ с дискретни предикати и $\varphi$ е формула от $\mathbf{L}$. Нека с $\Diamond_i \varphi$ съкращаваме формулата $((\ell \neq 0; \varphi); \ell \neq 0)$. Нека $\Box_i \varphi \rightleftharpoons \neg \Diamond_i \neg \varphi$. Нека $\mathbf{K}$ е клас от модели за $\mathbf{L}$.

**Твърдение 6.61** *Една формула $\delta$ от $\mathbf{L}$ е дискретна в $\mathbf{K}$ точно когато $\Box(\delta \Rightarrow \ell = 0)$ е валидна в $\mathbf{K}$ и $\Box_i \neg \delta$ има свойството на крайните покрития в $\mathbf{K}$.*

**Доказателство:** Непосредствена проверка. $\dashv$

Нека $\Delta$ е множество от формули от $\mathbf{L}$. От горното твърдение и от известното за $ITL_{fin}(\Omega)$ следва, че представената система за извод за $ITL_{fin}(\{\Box_i \neg \delta : \delta \in \Delta\})$ е коректна за класа на моделите на $ITL_d(\Delta)$. Нека разгледаме разширението на тази система с аксиомите:

$(D_0)$ $\quad \Box(\delta \Rightarrow \ell = 0)$, $\delta \in \Delta$;
$(D_=)$ $\quad \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow f(\varphi, t_1, \ldots, t_n) = f(\psi, t_1, \ldots, t_n)$
$(D_\Leftrightarrow)$ $\quad \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow (R(\varphi, t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow R(\psi, t_1, \ldots, t_n))$

Приемаме, че в това разширение заместването $[t/x]s(\varphi, t_1, \ldots, t_n)$ е коректно в изводите само в случай, че $t$ е статичен или $x \notin FV(\varphi)$. С непосредствена проверка се установява, че това разширение е коректна система за извод за $ITL_d(\Delta)$. Означаваме изводимостта в нея с $\vdash_{ITL_d(\Delta)}$.

**Теорема 6.62 ($\omega$-пълнота на $ITL_d(\Delta)$)** *Нека* $\Gamma$ *е множество от формули от* $\mathbf{L}$. *Тогава* $\Gamma$ *е изпълнимо в модел от* $\mathbf{K}$ *точно когато* $\Gamma$ *е непротиворечиво спрямо* $\vdash_{ITL_d(\Delta)}$.

**Доказателство:** Доказателството следва плана на това на теорема 6.36 за $\omega$-пълнотата на системата за извод за $ITL_{fin}(\Omega)$. Строи се каноничен модел $M$ на разширение на $\mathbf{L}$ с изброимо множество $C$ от нови статични константи. Нека при това построение $\mu$ и $\equiv$ са както в помощните твърдения, водещи към теорема 6.36. В този модел интерпретациите $I(s)(\sigma, X, d_1, \ldots, d_n)$ на новия вид темпорални символи $s$ за $\sigma \in \mathbf{I}(T_M)$ и множества $X$ от вида $\{\sigma \in \mathbf{I}(T_M) : \varphi \in \mu(\sigma)\}$, където $d_1, \ldots, d_n \in D_M$, се определят с условията $s(\varphi, c_1, \ldots, c_n) = c \in \mu(\sigma)$, ако $s$ е функционален, и $s(\varphi, c_0, \ldots, c_n) \in \mu(\sigma)$, ако $s$ е релационен, където $[c_i]_\equiv = d_i$, $i \leq n$. За $X$, които не са от този вид, интерпретациите на символите $s$ са без значение. Коректността на тези определения следва от аксиомите $D_=$ и $D_\Leftrightarrow$. От затвореността на теориите на интервалите в $M$ относно правилото $\omega^\gamma$, валидността на аксиомите $\gamma \Rightarrow \Box\gamma$ за $\gamma \in \{\Box_i \neg\delta : \delta \in \Delta\}$ и валидността на аксиомите $D_0$ за $\delta \in \Delta$ следва, че формулите от $\Delta$ са дискретни в $M$. $\dashv$

Завършваме изложението за $ITL_d(\Delta)$ със забележката, че $\omega$-пълнотата на дадената по-горе система за $ITL_d(\Delta)$ е в сила и в случай на работа с двусортен език и съответен вид двуосновни структури, както в случая с двусортната $ITL$, съответна на двусортното $DC$, използувано за доказването на пълнотата на системата за извод за $DC$ с квантор по променливите за състояния.

### 6.6.4 $ITL$ с квантор по дискретни съждителни променливи

В този параграф означаваме тази система с $ITL^D$. Език за $ITL^D$ се строи с видовете символи, използувани в езиците за $ITL$ с дискретни предикати и изброимо множество от 0-местни темпорални съждителни променливи $p$, $q$, ..., които наричаме *дискретни съждителни променливи*. Бекус-Науровата форма, определяща формулите $\varphi$ в такъв език, разширява тази за $ITL$ с дискретни предикати, позволявайки $\exists$ да свързва дискретни съждителни променливи:

$\varphi ::= \bot | R(t, \ldots, t) | R(\varphi, t, \ldots, t) | \varphi \Rightarrow \varphi | (\varphi; \varphi) | \exists x\varphi | \exists p\varphi$

Формата за термове е като в $ITL$ с дискретни предикати.

Структурите за $ITL^D$ са като тези за $ITL$.

Нека фиксираме език $\mathbf{L}$ на $ITL^D$ с множество от дискретни съждителни променливи $D$. $M$ е модел за $\mathbf{L}$, ако всички $p$ от $D$ са дискретни в $M$.

Стойностите на термовете и релацията $\models$ в модел $\langle F, I\rangle$ за $\mathbf{L}$ се определят както в $ITL$ с дискретни предикати, като за новите за $ITL^D$ формули от вида $\exists p\varphi$ това определение се разширява по обикновения начин:

$\langle F, I\rangle, \sigma \models \exists p\varphi$ ако $\langle F, J\rangle, \sigma \models \varphi$ за някоя $J$, $p$-съгласувана с $I$.

Нека разширим известната система за извод за $ITL_d(\Delta)$ в случая на $\Delta = D$ с аксиомите и правилата:

$(B_l^D)$ $(\exists p\varphi;\psi) \Rightarrow \exists p(\varphi;\psi)$ ако $p \notin FV(\psi)$
$(B_r^D)$ $(\varphi;\exists p\psi) \Rightarrow \exists p(\varphi;\psi)$ ако $p \notin FV(\varphi)$
$(\exists^D)$ $[q/p]\varphi \Rightarrow \exists p\varphi,\ q \in D$
$(G^D)$ $\dfrac{[q/p]\varphi}{\forall p\varphi}\ ,\ q \in D$
$(S_0)$ $\exists p\Box\neg p$
$(S_1)$ $x \leq \ell \Rightarrow \exists p\forall y((\ell = y;(p;\top)) \Leftrightarrow y = x)$
$(\vee)$ $\exists r\Box(r \Leftrightarrow (p \vee q))$

Коректността на получената система за извод за $ITL^D$ се установява с непосредствена проверка. Означаваме изводимостта в нея с $\vdash_{ITL^D}$. В останалата част от този подпараграф доказваме нейната пълнота.

Нека на фиксирания език $\mathbf{L}$ на $ITL^D$ определим съответен език $\mathbf{L}'$ на двусортна $ITL$ с дискретни предикати. Нека $\mathbf{L}'$ съдържа символите и променливите от $\mathbf{L}$ от известния в $ITL$ сорт, с изключение на променливите от $D$. Нека освен това $\mathbf{L}'$ съдържа единствен едноместен темпорален релационен символ $S$ с аргумент от втория сорт и изброимото множество от индивидни променливи от втория сорт $\{u_p : p \in D\}$. По-нататък разглеждаме и разширение на $\mathbf{L}'$ с нови статични константи, изброимо много от всеки от двата сорта.

Както и при изучаването на $DC$ с квантор по променливите за състояния, задаваме превод $\mathsf{t}$ на $\mathbf{L}$ в $\mathbf{L}'$, който замества кванторните представки от вида $\exists p$ със съответните им $\exists u_p$, а другите участия на дискретни съждителни променливи $p$ - със съответни атомарни формули $S(u_p)$. Този превод е обратим и обратният му е определен за всички термове и формули от $\mathbf{L}'$.

Нека разгледаме теорията $T^D$ в $\mathbf{L}'$, чиито аксиоми са
$(S0)$ $\Box\exists u\Box\neg S(u)$
$(S1)$ $\Box\forall x(x \leq \ell \Rightarrow \exists u\forall y((\ell = y;(S(u);\top)) \Leftrightarrow y = x))$
$(S\vee)$ $\Box\forall u'\forall u''\exists u\Box(S(u) \Leftrightarrow (S(u') \vee S(u'')))$

Следната лема също има съответна в параграфа за $DC$ с квантор по променливите за състояния:

**Лема 6.63** *Едно множество* $\Gamma$ *от формули от* $\mathbf{L}$ *е непротиворечиво спрямо* $\vdash_{ITL^D}$ *точно когато* $\mathsf{t}(\Gamma)\cup\{S0, S1, S\vee\}$ *е непротиворечиво спрямо* $\vdash_{ITL_d(\Delta)}$, *където* $\Delta = \{S(u_p) : p \in D\}$.

**Доказателство:** Очевидно $S0$, $S1$ и $S\vee$ са изводими с помощта на $\mathsf{t}$-преводите на $S_0$, $S_1$ и $(\vee)$. Обратното също е вярно. Преводите на останалите аксиоми и правила от системата за $ITL^D$ са съответно аксиоми и правила в двусортната система за $ITL_d(\Delta)$. Следователно $\mathsf{t}$ и обратният му преводи съпоставят на всеки извод в едната система извод в другата. Освен това $\mathsf{t}(\bot)$ е $\bot$. $\dashv$

Сега сме готови да докажем пълнотата на системата за извод за $ITL^D$.

**Теорема 6.64 ($\omega$-пълнота на $ITL^D$)** *Нека* $\Gamma$ *е множество от формули от* $\mathbf{L}$. *Тогава* $\Gamma$ *е изпълнимо в модел за* $\mathbf{L}$ *точно когато* $\Gamma$ *е непротиворечиво спрямо* $\vdash_{ITL^D}$.

**Доказателство:** Доказателството е подобно на това на теорема 6.59. В едната посока теоремата следва от коректността на $\vdash_{ITL^D}$. Нека $\Gamma$ е непротиворечиво спрямо $\vdash_{ITL^D}$. Тогава, според лема 6.63, множеството $\mathsf{t}(\Gamma) \cup \{S0, S1, S\vee\}$ от формули от $\mathbf{L}'$ е непротиворечиво спрямо $\vdash_{ITL_d(\{S(u_p):p\in D\})}$. Нека $M' = \langle F', I'\rangle$ е каноничният модел на някое пълно Хенкиново разширение на това множество в разширението $\mathbf{L}'(C)$ на $\mathbf{L}'$ със съдържащото изброимо много нови статични константи от двата сорта множество $C$. По построение $T_{F'} \in \mathbf{I}(T_{F'})$. Разглеждаме модела $M = \langle F', I\rangle$ за $\mathbf{L}$, построен със структурата на $M'$ и интерпретацията $I$, която съвпада с $I'$ за всички символи от $\mathbf{L}$, освен дискретните съждителни променливи от $D$. За тях $I$ се определя с равенството $I(p) = \lambda\sigma.I'(S)(\sigma, I(u_p))$.

С едновременна индукция по строежа на термовете $t$ и формулите $\varphi$ от $\mathbf{L}$ доказваме, че за всяко $\sigma \in \mathbf{I}(T_{F'})$ $I_\sigma(t) = I'_\sigma(\mathsf{t}(t))$ и $M, \sigma \models \varphi$ точно когато $M', \sigma \models \mathsf{t}(\varphi)$. Равенството $I_\tau(p) = I'_\tau(S(u_p))$ следва от определението на $I$. Тъй като $I$ и $I'$ съвпадат за останалите символи от двата езика, другите случаи от основата и стъпката на индукцията са тривиални. Изключение е случаят за формули от вида $\exists p\varphi$. Разглеждаме само него.

Ако $M', \sigma \models \exists u_p \mathsf{t}(\varphi)$, то $\langle F', J' \rangle, \sigma \models \mathsf{t}(\varphi)$ за някоя интерпретация $J'$, която е $u_p$-съгласувана с $I'$. Тогава, определяйки $J$ чрез $J'$ по начина, по който определихме $I$ чрез $I'$, получаваме, че $J$ е $p$-съгласувана с $I$ и, според индукционното допускане $\langle F', J \rangle, \sigma \models \varphi$.

Нека сега $M, \sigma \models \exists p\varphi$. Тогава съществува $p$-съгласувана с $I$ интерпретация $J$ такава, че $\langle F', J \rangle, \sigma \models \varphi$. Използуваме това, за да докажем, че $\exists u_p \mathsf{t}(\varphi)$ принадлежи на споменатото по-горе Хенкиново разширение на $\mathsf{t}(\Gamma) \cup \{S0, S1, S\vee\}$.

Нека $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ са тривиалните подинтервали на $T_{F'}$, за които $\langle F', J \rangle, \sigma_i \models p$, $i \leq n$. Нека $c_i \in C$ са такива, че $\langle M' \rangle, [\min T_{F'}, \max \sigma_i] \models \ell = c_i$, $i \leq n$. Такива константи съществуват, тъй като $M'$ е модел на Хенкинова теория. Определяме статичните константи $e_i \in C$ от втория сорт в $\mathbf{L}'(C)$ така, че $I'(S)(\sigma', I'(e_i)) = 1$ точно когато $\sigma' \in \{\sigma_1, \ldots, \sigma_i\}$, $i \leq n$, с индукция по $i$. За $i = 0$, използуваме, че $M', T_{F'} \models \exists u \Box\neg S(u)$, защото $S0$ е валидна в $M'$. Тъй като $M'$ е каноничен модел на Хенкинова теория със свидетели в $C$, оттук получаваме, че съществува $e_0 \in C$ такова, че $M', T_{F'} \models \Box\neg S(e_0)$. Следователно $S(e_0)$ не е изпълнена в никой интервал в $M'$. Нека е определена $e_i$. $M', T_{F'} \models \exists u \forall y((\ell = y; (S(u); \top)) \Leftrightarrow y = c_{i+1})$, защото в $M'$ е валидна $S1$. Следователно съществува $d \in C$ такава, че $M', T_{F'} \models \forall y((\ell = y; (S(d); \top)) \Leftrightarrow y = c_{i+1})$. По подобен начин, от валидността на $S\vee$ в $M'$ получаваме, че съществува $e_{i+1} \in C$ такава, че $M', T_{F'} \models \Box(S(e_{i+1}) \Leftrightarrow (S(e_i) \vee S(d)))$. С непосредствена проверка се установява, че $S(e_{i+1})$ е изпълнена само в интервалите $\sigma_1, \ldots, \sigma_{i+1}$ в $M'$. В крайна сметка, $I'_{\sigma'}(S(e_n)) = J_{\sigma'}(p)$ за всяко $\sigma' \in \mathbf{I}(T_{F'})$. Сега нека $J'$ е $u_p p$-съгласувана с $I$ и $J'(u_p) = I'(e_{n-1})$. Ясно е, че $J$ и $J'$ се намират в съответствието, в което са $I$ и $I'$. Според индукционното допускане $\langle F', J' \rangle, \sigma \models \mathsf{t}(\varphi)$. $\dashv$

### 6.6.5 Превод на $ITL_{\backslash\backslash}$ в $ITL^D$

Завършваме този параграф, представяйки запазващ валидността превод на произволен отнапред зададен език $\mathbf{L}$ на $ITL_{\backslash\backslash}$ в съответен нему език $\mathbf{L}'$ на $ITL^D$. Този превод позволява въпросът за общовалидността на формули от $\mathbf{L}$ в $ITL_{\backslash\backslash}$ да се сведе до съответния въпрос за формули от $ITL^D$, за която имаме $\omega$-пълна система за извод.

Нека $\mathbf{L}$ е език за $ITL_{\backslash\backslash}$. Съответният му език $\mathbf{L}'$ за $ITL^D$ се строи така: $\mathbf{L}'$ съдържа статичните символи от $\mathbf{L}$ и темпоралната константа $\ell$. За всяка друга темпорална константа $c$ от $\mathbf{L}$ в $\mathbf{L}'$ участвува темпорален функционален символ $c$ с един аргумент-формула. За всеки друг темпорален символ $s$ от $\mathbf{L}$ в $\mathbf{L}'$ участвува темпорален символ $s$, който е функционален или релационен, както в $\mathbf{L}$, и взема един аргумент-формула и същия брой аргументи-термове като в $\mathbf{L}$. Освен това $\mathbf{L}'$ съдържа и изброимо множество $D$ от дискретни съждителни променливи.

Нека $D = \{p_i : 1 \leq i < \omega\}$ и $p_0 \rightleftharpoons \ell = 0$. За всеки терм $t$ и формула $\varphi$ от $\mathbf{L}$ и всяко $i < \omega$ определяме преводите $t^{p_i}$ и $\varphi^{p_i}$ на $t$ и $\varphi$ в $\mathbf{L}'$ с индукция по строежа на $t$ и $\varphi$ така:

$$
\begin{array}{lcl}
c^{p_i} & \rightleftharpoons & c \text{ за статични константи } c \\
x^{p_i} & \rightleftharpoons & x \text{ за индивидни променливи } x \\
(s(t_1,\ldots,t_n))^{p_i} & \rightleftharpoons & s(t_1^{p_i},\ldots,t_n^{p_i}) \text{ за статични } n\text{-местни символи } s \\
\ell^{p_i} & \rightleftharpoons & \ell \\
c^{p_i} & \rightleftharpoons & c(p_i) \text{ за останалите темпорални константи } c \\
(s(t_1,\ldots,t_n))^{p_i} & \rightleftharpoons & s(p_i, t_1^{p_i},\ldots,t_n^{p_i}) \text{ за темпорални } n\text{-местни} \\
 & & \qquad \text{функционални и релационни символи } s \\
\bot^{p_i} & \rightleftharpoons & \bot \\
(\neg\varphi)^{p_i} & \rightleftharpoons & \neg\varphi^{p_i} \\
(\varphi\wedge\psi)^{p_i} & \rightleftharpoons & \varphi^{p_i}\wedge\psi^{p_i} \\
(\varphi;\psi)^{p_i} & \rightleftharpoons & ((\varphi;p_i);\psi) \\
(\varphi\backslash\backslash\psi)^{p_i} & \rightleftharpoons & \exists p_{i+1}(\Box(p_{i+1}\Rightarrow p_i)\wedge \\
 & & \qquad \wedge\Box(((p_{i+1};\ell\neq 0\wedge\Box_i\neg p_{i+1});p_{i+1})\Rightarrow\varphi^{p_i})\wedge \\
 & & \qquad \wedge((p_{i+1};\psi^{p_{i+1}});p_{i+1})) \\
(\exists x\varphi)^{p_i} & \rightleftharpoons & \exists x\varphi^{p_i}
\end{array}
$$

**Твърдение 6.65** *Нека* $\mathbf{L}$ *е език на* $ITL_{\backslash\backslash}$, $\mathbf{L}'$ *е съответният му език на* $ITL^D$, $F$ *е структура за* $ITL$ *(което означава и за* $ITL_{\backslash\backslash}$ *и* $ITL^D$*),* $M=\langle F,I\rangle$ *и* $M'=\langle F,I'\rangle$ *са модели съответно за* $\mathbf{L}$ *и* $\mathbf{L}'$*, чиито интерпретации съвпадат за статичните символи от двата езика, а за темпоралните символи* $s$*, различни от* $\ell$*, изпълняват тъждеството:* $I'(s)([\min\sigma,\max\sigma],\{[\tau,\tau]:\tau\in\sigma\},d_1,\ldots,d_n)=I(s)(\sigma,d_1,\ldots,d_n)$ *за* $\sigma\in\mathbf{I}_{\backslash\backslash}(T_F)$.

*Нека* $t$ *е терм, а* $\varphi$ *е формула от* $\mathbf{L}$.

*Нека* $\sigma\in\mathbf{I}(T_F)$. *Тогава* $I_\sigma(t)=I'_\sigma(t^{p_0})$ *и* $M,\sigma\models\varphi$ *е равносилно на* $M',\sigma\models\varphi^{p_0}$.

*Нека* $\sigma\in\mathbf{P}_{fin}(T_F)$. *Тогава, ако* $\{\tau\in[\min\sigma,\max\sigma]:I(p_1)([\tau,\tau])=1\}=\sigma$, *то* $I_\sigma(t)=I'_\sigma(t^{p_1})$ *и* $M,\sigma\models\varphi$ *е равносилно на* $M',[\min\sigma,\max\sigma]\models\varphi^{p_1}$.

**Доказателство:** Едновременна индукция по строежа на $t$ и $\varphi$. $\dashv$

Горното твърдение показва, че от изпълнимостта на зададения превод на произволна формула $\varphi$ от език на $ITL_{\backslash\backslash}$ следва изпълнимостта на $\varphi$. Оттук следва, че една формула $\varphi$ е общовалидна в $ITL_{\backslash\backslash}$ точно когато $\varphi^{p_0}$ и $\forall p_1(((p_1;\top);p_1)\Rightarrow\varphi^{p_1})$ са теореми на $ITL^D$.

### Забележки

Предложеното решение на въпроса за общовалидността в $ITL_{\backslash\backslash}$ е стъпка назад от гледна точка на мотивите за въвеждането и изучаването на оператори като $\backslash\backslash$. Такива оператори се изучават заради възможността с тях кратко да бъдат изразявани сложни, но често срещани в спецификациите твърдения. В този смисъл клаузата от превода за формулите от вида $(\varphi\backslash\backslash\psi)$ показва, че $\backslash\backslash$ поглъща иначе доста сложни конструкции.

Въпреки това, предложеното решение е полезно, защото с него не се лишаваме от удобството да използуваме $(.;.)$. Освен това, съдържащите се в [He99] аксиоми за $\backslash\backslash$ позволяват подлаганите на проверка формули от $ITL_{\backslash\backslash}$ преди превода да се упростяват благодарение на дистрибутивността на $\backslash\backslash$ спрямо $(.;.)$, $\vee$ и $\exists$ във втория му операнд, както и спрямо ограничената му дистрибутивност спрямо $\wedge$ и други негови свойства.

Дясната страна на клаузата от превода за формулите от вида $(\varphi\backslash\backslash\psi)$ подсказва, че на $(\varphi\backslash\backslash.)$ може да се гледа като на едноместен модален оператор, интерпретиран с релация за достъп между (дискретни) интервали, зададена с формулата $\Box(p_{i+1}\Rightarrow p_i)\wedge\Box(((p_{i+1};\ell\neq 0\wedge\Box_i\neg p_{i+1});p_{i+1})\Rightarrow\varphi^{p_i})\wedge((p_{i+1};\top);p_{i+1})$, където $p_i$ и $p_{i+1}$ представят влизащите в релацията интервали, а $\varphi$ е параметър. Това показва, че езикът на $ITL^D$ може да играе ролята на езика на предикатното смятане при определянето на семантиката на модалните езици, но за езика на $ITL_{\backslash\backslash}$. В този език могат да се определят и други оператори от рода на $\backslash\backslash$ и предложеното косвено решение

на въпроса за пълнотата на $ITL_{\backslash\backslash}$ автоматично би послужило и за разширенията на $ITL$ с такива оператори.

Както се споменава и в Предварителните сведения към тази част, посредством $\backslash\backslash$ се осъществява достъп от двата вида интервали в $ITL_{\backslash\backslash}$ до дискретните интервали. В [He99] не се предвижда средство за достъп до обикновените интервали от дискретните, въпреки че това би било полезно за приложенията. Търсенето на средства за достъп до възможни светове вън от обсега на избраната релация за достижимост, до световете, в които се интерпретират надформули на разглежданите и т.н., са предизвикали появата на различни допълнителни елементи в езиците на модалната логика като универсална модалност, указатели и хибридни езици, в които за възможните светове са предвидени индивидни променливи и квантори[GP92, Gor94, Gor96a, Gor96b, BT98]. За $ITL$ такъв елемент са разширяващите модалности, въведени в $NL$. Естествено е да се очаква появата на подобен елемент и в $ITL_{\backslash\backslash}$. Предварително може да се предполага, че по показания за $ITL_{\backslash\backslash}$ начин би могло да се получи косвено решение на редица въпроси и за евентуално разширение на $ITL_{\backslash\backslash}$ с такъв елемент.

## Заключение

Полученото в тази глава показва, че много от трудностите около аксиоматизацията на $DC$ и неговите разширения са съсредоточени около свойството на изразите за състояния да представят на части постоянни функции на времето и сродни с това други ограничения върху елементи на моделите на разширенията. Характеризацията на това свойство посредством технически по-удобния му аналог - свойството на крайните покрития, което въвеждаме за формули в $ITL$, позволява преодоляването на тези трудности и намирането на пълни системи за извод за тези разширения по естествен начин. Сред аксиоматизираните разширения е дори такова, което допуска квантор по променливите за състояния, което формално излиза от рамките на системите от първи ред. Полученото дава основание на $ITL$ със свойството на крайните покрития и на $DC$ с абстрактна семантика да се гледа като на обща рамка за всичките споменати важни за приложенията разширения на $ITL$ и $DC$.

# 7 Вероятностна интервална темпорална логика

В тази глава въвеждаме вероятностно разширение $PITL$ на логиката на околностите $NL$. Това разширение е обобщение на известното вероятностно смятане на продължителностите $PDC$. Може да се счита, че $PITL$ се намира в такова отношение към $PDC$, в каквото се намира $ITL$ към $DC$ и $NL$ към $NDC$ (вж. [RZ97]) , макар че $PITL$ възниква по-късно от $PDC$ (вж. [Gue98c]). Авторите на $PDC$ не са изучили въпроса за система на извод за $PDC$. Общовалидните формули, получени в [DZ94], нямат характера на система за извод. Пресмятанията, свързани с вероятности в $PDC$, се извършват отделно от формалните изводи, в стила, познат от университетските курсове по теория на вероятностите. Основна цел на въвеждането на $PITL$ е получаването на система за извод за нея, която да послужи за основа за система за извод и за $PDC$. Това позволява обединяването на разсъжденията от вероятностен и чисто темпорален характер в $PITL$.

В тази глава представяме пълна система за извод за $PITL$. С цел да избегнем неудобствата, свързани с аксиоматизацията на реалните числа, с които се изразяват вероятностите, ги заместваме с абстрактно дефиниран тип области в духа, възприет за продължителностите в класа от моделите на $NL$.[4] Пълнотата на системата, която представяме, не се влияе от приближаването на областите от избрания вид до структурата на реалните числа с помощта на допълнителни аксиоми за тях.

Семантиката на $PDC$ се гради на основата на вероятностното поведение на клас от крайни вероятностни времеви автомати. Въпреки че семантиката и изразителната способност на $PITL$ не се ограничават с описването на поведението на този вид автомати, ние ги използуваме в леко обобщен вид като уводен пример, за да поясним подхода при въвеждането на $PITL$.

## Крайните вероятностни времеви автомати и интервалната логиката на околностите

Крайните времеви автомати имат богата и ценна за приложенията теория (вж. напр. [AD94, ACM97, LDZ97]), на която тук не се спираме. В [DZ94] въвеждат вероятности върху един сравнително прост клас от такива автомати, въведен в [DW94], като по този начин получават модел за някои системи с вероятностно поведение, работещи в реално време. Тук леко обобщаваме дефиницията на този вид автомати, като заместваме положителния лъч на реалната ос със произволна област от продължителности и допускаме и вероятностни разпределения, които нямат плътност, да описват поведението на автоматите. Дефиницията е следната:

**Дефиниция 7.1** *Краен вероятностен времеви автомат* е система от вида $\mathbf{A} = \langle S, A, s_0, \langle D, +, \leq, 0\rangle, \langle q_a : a \in A\rangle, \langle P_a : a \in A\rangle\rangle$, където $S$ е крайно множество от *състояния*, $A \subseteq \{\langle s', s''\rangle : s', s'' \in S, s' \neq s''\}$ е множество от *преходи*, $s_0 \in S$ е *начално състояние*, $\langle D, +, \leq, 0\rangle$ е област от продължителности в смисъла на $NL$, $q_a \in [0,1]$ е *вероятността за избор на* $a$, а $P_a : D \to [0,1]$ е *разпределение на продължителностите на* $a$. Ако $a = \langle s', s''\rangle$, с $a^-$ и $a^+$ се означават съответно $s'$ и $s''$. Множеството $\{s' \in S : \langle s, s'\rangle \in A\}$ се означава с $A_s$ за всяко $s \in S$. Необходимо условие за $q_a$, $a \in A$, е $\sum\limits_{a \in A_s} q_a = 1$ за всяко $s \in S$, за което $A_s \neq 0$. Освен това $P_a$ трябва да е монотонна функция, взимаща произволно близки до 1 стойности.

Неформално, автомат от горния вид изпълнява редици от преходи $a_1 \ldots a_n \ldots$, в които $a_0^- = s_0$ и $a_i^+ = a_{i+1}^-$ за всяко $i < \omega$, преминавайки през редица от състояния $s_0 a_1^+ \ldots a_n^+ \ldots$. Всеки преход има продължителност. Вероятността автоматът да

[4] Фиксирането на области от стойности за вероятностите, различни от интервала $[0,1]$ в R, не е изключение. Напр. в [Hoe97] се изучава система с модални оператори, изразяващи само вероятности с рационални стойности с фиксиран знаменател.

избере преход $a$, когато се намира в състояние $a^-$, се задава с числото $q_a$. Вероятността избран преход $a$ да има продължителност, не по-голяма от $d$, се изразява от $P_a(d)$. Случаят, в който $D = \mathbf{R}$ със стандартната наредба и операции и $P_a(d)$ имат вида $\int_0^d p_a(t)dt$, е разгледан в [DZ94]. Случаят, в който $D = \omega$ и $P_a(d)$ имат вида $\sum_{i \leq d} p_a^i$, е представен в [LRSZ92], където се въвежда и $PDC$. Изпълненията на вероятностните крайни времеви автомати се описват по следния начин:

**Дефиниция 7.2** Нека $\mathbf{A} = \langle S, A, s_0, \langle D, +, \leq, 0\rangle, \langle q_a : a \in A\rangle, \langle P_a : a \in A\rangle\rangle$ е краен вероятностен времеви автомат. *Изпълнение* (*поведение на* $\mathbf{A}$) наричаме (крайна или безкрайна) редица от вида $\langle a_0, d_0\rangle \ldots \langle a_n, d_n\rangle \ldots$, където $a_i \in A$ $d_i \in D$, $a_0^- = s_0$ и $a_i^+ = a_{i+1}^-$ за всяко $i < \omega$.

Нека $\mathbf{A} = \langle S, A, s_0, D, \langle q_a : a \in A\rangle, \langle P_a : a \in A\rangle\rangle$ е краен вероятностен времеви автомат. Въвеждаме език $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ на $NL$ за $\mathbf{A}$ и описваме изпълненията на $\mathbf{A}$ в него. При това представяме изпълненията на $\mathbf{A}$ като модели за $\mathbf{L}(\mathbf{A})$. В $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ преходите $a$ на $\mathbf{A}$ са темпорални съждителни променливи, а $M, [\tau_1, \tau_2] \models a$ изразява, че $\mathbf{A}$ започва прехода $a$ в момента $\tau_1$ и го завършва в момента $\tau_2$.

**Дефиниция 7.3** (i) *Езикът на* $NL$ $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ *за вероятностния краен времеви автомат* $\mathbf{A}$ се образува с минимално необходимия набор от символи за език на $NL$, темпоралните съждителни променливи $a \in A$, където $A$ е множеството от преходите на $\mathbf{A}$, статичните константи $q_a$, $a \in A$, и статичните едноместни функционални символи $P_a$, $a \in A$.

(ii) Нека $M = \langle\langle D, \leq\rangle, \langle D, +, \leq, 0\rangle, m, I\rangle$ е модел за езика $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ за автомата $\mathbf{A}$, където $\langle D, +, \leq, 0\rangle$ е областта от продължителности на $\mathbf{A}$. $M$ е *модел за изпълнението* $\langle a_0, d_0\rangle \ldots \langle a_n, d_n\rangle \ldots$ *на* $\mathbf{A}$, ако $I(a)([\tau_1, \tau_2]) = 1$ е равносилно на $a = a_i$ за $i$ такова, че $\tau_1 = \sum_{j<i} d_j$ и $\tau_2 = \tau_1 + d_i$. Освен това се изисква да са налице равенствата $I(q_a) = q_a$ и $I(P_a)(d) = P_a(d)$ за $a \in A$ и всяко $d \in D$.

Нека фиксираме автомат $\mathbf{A}$ и означим компонентите му както по-горе. Според тази дефиниция, модел за изпълнението $\langle a_0, d_0\rangle \ldots \langle a_n, d_n\rangle \ldots$ на $\mathbf{A}$ изпълнява $(a_0 \wedge \ell = d_0; \ldots; a_n \wedge \ell = d_n)$ в интервала $\left[0, \sum_{i=0}^{n} d_i\right]$. Сега, например, със следните прости формули от $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ може да се изрази, че преходите на $\mathbf{A}$ не се застъпват:

$(a \wedge \ell = x; \top) \wedge (\ell = y; b) \Rightarrow x \leq y$ за $a \neq b$,

$(a \wedge \ell = x; \top) \wedge (\ell = y; a \wedge \ell = z) \Rightarrow x < y \vee (x = z \wedge y = 0)$.

Строгото неравенство $x < y$ във втората формула означава, че не са възможни еднакви поредни преходи, защото винаги $a^- \neq a^+$.

Казаното дотук не показва начин в $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ да бъдат изразени вероятностни страни на поведението на $\mathbf{A}$. Това е възможно при работа с език, интерпретиран върху (1) *множества от изпълнения*, т.е. върху множества от модели на $\mathbf{L}(\mathbf{A})$, и (2) *вероятностите на попадане на конкретно изпълнение в такива множества*, както те могат да се определят чрез величините $q_a$ и $P_a$, $a \in A$.

Вероятностните правила, по които работи $\mathbf{A}$, по същество определят вероятността дадено крайно изпълнение на $\mathbf{A}$ да бъде *продължено* по определен начин. Следният изказ на тези правила подчертава това:

- Ако едно изпълнение на $\mathbf{A}$ завършва на прехода $a$ и $a^+ = s$, вероятността изпълнението да *продължи* с прехода $b$, $b^- = s$, е $q_b$.
- Ако $\mathbf{A}$ е "избрал" да продължи изпълнението си с прехода $b$, вероятността това *продължение* да трае не повече от време $d$ е $P_b(d)$.

Това прави целесъобразно $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ и неговата интерпретация да бъдат разширени по следния начин: Нека разгледаме множеството от моделите за всички (безкрайни) изпълнения на $\mathbf{A}$. Тези модели се състоят от една и съща структура $F$ за $NL$ и евентуално различни интерпретации на символите от $\mathbf{L}(\mathbf{A})$. Означаваме множеството от

тези интерпретации с $\mathbf{M}$. Така за всяко $I \in \mathbf{M}$ моделът $\langle F, I\rangle$ на $NL$ задава конкретно изпълнение на $\mathbf{A}$. За произволно $\tau \in T_F$ и интерпретация $I \in \mathbf{M}$ с $\mathbf{M}_{I,\tau}$ означаваме множеството от тези интерпретации от $\mathbf{M}$, които представят продължения на изпълнението, представено от $I$ до момента $\tau$. Това са интерпретациите, които съвпадат с $I$ за интервали изцяло вляво от $\tau$. Можем да класифицираме тези продължения според формулите от $\mathbf{L}(\mathbf{A})$, които те изпълняват. Нека за всяка формула $\varphi$ от $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ и всеки интервал $\sigma \in \mathbf{I}(T_F)$ с $\mathbf{M}_{I,\sigma,\varphi}$ означим множеството от тези $I' \in \mathbf{M}_{I,\max\sigma}$, за които съществува $\tau' \geq_F \min\sigma$ такова, че $\langle F, I\rangle, [\min\sigma, \tau'] \models \varphi$. Нека означим вероятността конкретно продължение на изпълнението, представено от $I$ до момента $\tau$, да се окаже в дадено множество от продължения $\mathbf{N}$ от горния вид с $P_{I,\tau}(\mathbf{N})$ и нека приемем, че $P_{I,\tau}$ е определена за множества от продължения от вида $\mathbf{M}_{I,\sigma,\varphi}$ винаги, когато $\max\sigma = \tau$. Тогава, например, ако $I, [0,\tau] \models (a \wedge \ell = d_1)$, и $a^+ = b^-$, ще бъде в сила равенството $P_{I,\tau}(\mathbf{M}_{I,\tau,(a;b\wedge\ell\leq x)}) = q_b P_b(I(x))$.

Нека разширим $\mathbf{L}(\mathbf{A})$, като за всяка формула $\varphi$ въведем терм $p(\varphi)$. Нека определим стойностите на новия вид термове с равенството:

$I_\sigma(p(\varphi)) = P_{I,\max\sigma}(\mathbf{M}_{I,\sigma,\varphi})$.

Този вид термове е частен случай на това, което по-нататък наричаме $p$-термове. С помощта на $p$-терм горното равенство за $P_{I,\tau}$ може да бъде изразено например с формулата $a \Rightarrow p((a; b \wedge \ell \leq x) = q_a P_b(x)$.

Въвеждането на $p$-термове позволява изчерпателно да опишем и вероятностните страни на поведението на $\mathbf{A}$. Нека предположим, че езикът $\mathbf{L}(\mathbf{A})$ се интерпретира в структура, включваща и реални числа като стойности за $p$-термове и индивидни променливи. Тогава поведението на $\mathbf{A}$ се описва със следните аксиоми, чиито смисъл смятаме за очевиден:

| | |
|---|---|
| $0 \leq q_a$ | за всички $a \in A$; |
| $\sum_{a\in A_s} q_a = 1$ | за всички $s \in S$ за които $A_s \neq \emptyset$; |
| $0 \leq P_a(x), P_a(x) \leq 1$ | за всички $a \in A$; |
| $x < 1 \Rightarrow \exists y(P_a(y) > x)$ | за всички $a \in A$; |
| $a \Rightarrow p((a; b)) = q_b$ | за $a, b \in A$ такива, че $a^+ = b^-$; |
| $a \Rightarrow p((a; b)) = 0$ | за $a, b \in A$ такива, че $a^+ \neq b^-$; |
| $a \Rightarrow p((a; b \wedge \ell \leq x)) = q_b.P_b(x)$ | за $a, b \in A$ такива, че $a^+ = b^-$. |

Моделите на $PITL$ по същество са множества от интерпретации на нелогическите символи от език на $NL$ в една и съща структура, разширени така, че да оценяват $p$-термовете като вероятности по начина, по който направихме това за изпълненията на вероятностните крайни времеви автомати.

## 7.1 Език и семантика на вероятностната интервална темпорална логика

В този параграф определяме езиците, структурите, моделите и релацията $\models$ в $PITL$.

### 7.1.1 Езици

Език на $PITL$ се строи със същите видове символи като език за $ITL$ и $NL$, като към известния сорт на продължителностите добавяме символи от още един сорт - на *вероятностите*. При това, освен с броя на аргументите си, символите се характеризират и с техните сортове и, ако са константни или функционални - със сорта на термовете, които образуват.[5] Всеки език на $PITL$, освен задължителните за езиците на $NL$ символи от сорта на продължителностите, съдържа статичните константи 0 и 1, статичния двуместен функционален символ + и равенство от сорта на вероятностите. Съвпадението на означенията за 0, + и = от двата сорта на практика не води

[5] Терминологията, свързана с многосортни (или многоосновни) алгебри, може да се намери в развит вид например в [Щал89], §2.4.

до объркване. При дадени множества от всеки от тези видове символи термовете $t$ се определят с Бекус-Науровата форма:

$t ::= c|x|f(t,\ldots,t)|p(\varphi,t,\ldots,t)$

Определението за формулите остава както в $NL$ (вж. Предварителните сведения към тази част), но съвместно със специалното за $PITL$ определение за термовете.

Броят и сортовете на подтермовете $t_i$ във формули от вида $f(t_1,\ldots,t_n)$ се определят еднозначно от функционалния символ $f$. Броят на подтермовете $t$ за термове от вида $p(\varphi\ldots$ е равен на броя на свободните индивидни променливи във $\varphi$. В частност, за затворена $\varphi$ имаме терма $p(\varphi)$. Подтермовете $t$ в терм от вида $p(\varphi,t\ldots$ и свободните индивидни променливи на формулата $\varphi$ са в еднозначно съответствие: Ако даден подтерм е $i$-ти по ред в записа на $p(\varphi,t,\ldots$, той се съпоставя на индивидната променлива от $FV(\varphi)$, чието първо свободно участие е $i$-то по ред във $\varphi$ сред тези на всичките променливи от $FV(\varphi)$. Подтермовете $t$ са от сорта на съответните им индивидни променливи.

Термовете от вида $p(\varphi\ldots)$ в езиците на $PITL$ определяме като темпорални термове от сорта на вероятностите и наричаме *p-термове*. Символа $p$, с чието участие образуваме $p$-термове, отнасяме към логическите символи на езиците на $PITL$ заради специалната му роля в тази система. Затова, както и при разглеждането на другите системи, с израза "символите на езика..." означаваме нелогическите символи на съответния език, без $p$.

За $p$-термовете полагаме $FV(p(\varphi,t_1,\ldots,t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$.

Означението $\mathbf{L}(C)$, където $C$ е множество от нелогически символи, нови за $\mathbf{L}$, запазва обичайния си смисъл и за езици $\mathbf{L}$ на $PITL$.

### 7.1.2 Модели на вероятностната интервална темпорална логика и истинност в тях

Модел на $PITL$ се получава чрез задаването на вероятности в множеството-степен на дадено множество от интерпретации на език за $PITL$ в двуосновна структура за $NL$, която, наред с областта от продължителности, съдържа и област от вероятности.

**Дефиниция 7.4** Система от типа $\langle U,+^{(2)},0^{(0)},1^{(0)}\rangle$ наричаме *област от вероятности*, ако изпълнява следните аксиоми:

$(U1)$ $x+(y+x)=(x+y)+z$
$(U2)$ $x+0=x$
$(U3)$ $x+y=y+x$
$(U4)$ $x+y=x+z\Rightarrow y=z$
$(U5)$ $x+y=0\Rightarrow x=0$
$(U6)$ $\exists z(x+z=y\vee y+z=x)$
$(U7)$ $0\neq 1$

**Дефиниция 7.5** Четворка от вида $\langle\langle T,\leq\rangle,\langle D,+,\leq,0\rangle,\langle U,+,0,1\rangle,m\rangle$ наричаме *структура за $PITL$*, ако $\langle\langle T,\leq\rangle,\langle D,+,\leq,0\rangle,m\rangle$ е структура за $NL$, а $\langle U,+,0,1\rangle$ е област от вероятности.

Интерпретация на символите и променливите от език на $PITL$ в структура за $PITL$ се задава по същия начин, както за едносорни езици и едноосновни структури за $NL$. Единствена особеност на определението е, че типовете на предикатите и функциите, чрез които се интерпретират символите от езика, следва да отговарят на сортовете на аргументите и, евентуално, на сортовете на стойностите на тези символи. Освен това се изисква споменатите по-горе символи 0, 1, + и = от сорта на вероятностите да се интерпретират чрез съответните елементи на областта от вероятности на структурата.

Нека фиксираме структура $F$ и език $\mathbf{L}$ за $PITL$. Следната релация между интерпретации в $F$ е основна за устройството на моделите на $PITL$, построени на основата на $F$:

**Дефиниция 7.6** Нека $\tau \in T_F$. Казваме, че интерпретациите $I_1$ и $I_2$ на символите от $\mathbf{L}$ в $F$ са *$\tau$-съгласувани*, ако $I_1$ и $I_2$ съвпадат за статичните символи и индивидните променливи от $\mathbf{L}$, а за темпоралните символи съвпадат в интервалите $\sigma \in \mathbf{I}(T_F)$ с $\max \sigma \leq \tau$.

Нека фиксираме множество от интерпретации $\mathbf{M}$ на $\mathbf{L}$ в $F$.

**Дефиниция 7.7** Нека $I \in \mathbf{M}$ и $\tau \in T_F$. Означаваме множеството от всички $\tau$-съгласувани с $I$ интерпретации от $\mathbf{M}$ с $\mathbf{M}_{I,\tau}$.

**Дефиниция 7.8** Нека $I \in \mathbf{M}$ и $\tau \in T_F$. Частичната функция $P : 2^{\mathrm{M}_{I,\tau}} \to U_F$ наричаме *вероятност* на $2^{\mathrm{M}_{I,\tau}}$, ако $P(\mathbf{M}_{I,\tau}) = 1_F$, $P(\emptyset) = 0_F$ и $P(\mathbf{N}_1) + P(\mathbf{N}_2) = P(\mathbf{N}_1 \cup \mathbf{N}_2) + P(\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2)$ за всеки две $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \subseteq \mathbf{M}_{I,\tau}$, стига $P$ да е определена за тези подмножества.

Сега сме готови да дадем дефиниция на модел за език на $PITL$. За техническо удобство най-напред определяме по-широкото понятие *частичен* модел.

**Дефиниция 7.9** Нека $\mathbf{L}$ е език на $PITL$. Системата $\langle F, \mathbf{M}, P\rangle$ се нарича *частичен модел за* $\mathbf{L}$, ако $F$ е структура за $PITL$, $\mathbf{M}$ е множество от интерпретации на символите от езика $\mathbf{L}$ в $F$, а частичните функции от системата $P = \langle P_{I,\tau} | P_{I,\tau} : 2^{\mathrm{M}_{I,\tau}} \to U_F, I \in \mathbf{M}, \tau \in T_F\rangle$ са вероятности.

Стойностите на термовете и релацията $\models$ в частичните модели на $PITL$ са частично определени. Определението става с едновременна индукция за стойностите на термовете и за релацията $\models$. За задаването на стойностите на $p$-термове и на релацията $\models$ за формули, образувани с $\exists$, е удобно разглеждането на интерпретации и модели, в които стойностите на избрани индивидни променливи са указани явно:

**Дефиниция 7.10** Нека $I$ е интерпретация на символите на език $\mathbf{L}$ на $PITL$. Нека $s$ е символ от $\mathbf{L}$. Интерпретацията на символите от $\mathbf{L}$, която е $s$-съгласувана с $I$ и съпоставя на $s$ стойност $a$, означаваме с $I^a_s$. Нека $\mathbf{M}$ е множество от интерпретации на $\mathbf{L}$ в една и съща структура $F$ за $PITL$. Означаваме множеството $\{I^a_s : I \in \mathbf{M}\}$ с $\mathbf{M}^a_s$. Нека $M = \langle F, \mathbf{M}, P\rangle$ е частичен модел за $\mathbf{L}$. Тогава очевидно $\mathbf{M}^a_{s\,I^a_s,\tau} = \{{I'}^a_s : I' \in \mathbf{M}_{I,\tau}\}$ за всяко $\tau \in T_F$ и всяка $I \in \mathbf{M}$. За всяко $\tau \in T_F$ и всяка $I \in \mathbf{M}$ определяме частичната функция $P'_{I^a_s,\tau} : 2^{\mathrm{M}^a_{s\,I^a_s,\tau}} \to U_F$ с условното равенство $P'_{I^a_s,\tau}(\mathbf{N}^a_s) = P_{I,\tau}(\mathbf{N})$ за всяко $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}_{I,\tau}$. Очевидно $\langle F, \mathbf{M}^a_s, P'\rangle$, където $P' = \langle P'_{I^a_s,\tau} : 2^{\mathrm{M}^a_{s\,I^a_s,\tau}} \to U_F : I \in \mathbf{M}, \tau \in T_F\}$, е частичен модел за $\mathbf{L}$. Означаваме го с $M^a_s$.

Многократното прилагане $(\ldots I^{a_1}_{s_1} \ldots)^{a_n}_{s_n}$ на описаното по-горе преобразуване на интерпретации $(I)$ означаваме за краткост с $I^{a_1,\ldots,a_n}_{s_1,\ldots,s_n}$. Със същото съкратено означение си служим и за случая на частични модели.

**Дефиниция 7.11** Нека $\mathbf{L}$ е език за $PITL$. Нека $M = \langle F, \mathbf{M}, P\rangle$ е частичен модел за $\mathbf{L}$. Нека $I \in \mathbf{M}$ и $\sigma \in \mathbf{I}(T_F)$. Клаузите от индуктивната дефиниция на стойността $I_\sigma(t)$ на терма $t$ в интерпретацията $I$ и интервала $\sigma$ за познатите от $NL$ видове $t$ се отличават от тези от $NL$ само по допълнителното условие $I_\sigma$ да е определена за евентуално участвуващите в $t$ подтермове:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $I_\sigma(x)$ | $=$ | $I(x)$ | за индивидни променливи $x$; |
| $I_\sigma(c)$ | $=$ | $I(c)$ | за статични константи $c$; |
| $I_\sigma(c)$ | $=$ | $I(c)(\sigma)$ | за темпорални константи $c$; |
| $I_\sigma(f(t_1,\ldots,t_n))$ | $=$ | $I(f)(I_\sigma(t_1),\ldots,I_\sigma(t_n))$ | за $n$-местни статични функционални символи $f$, стига да са определени $I_\sigma(t_i)$, $i=1,\ldots,n$; |
| $I_\sigma(f(t_1,\ldots,t_n))$ | $=$ | $I(f)(\sigma,I_\sigma(t_1),\ldots,I_\sigma(t_n))$ | за $n$-местни темпорални функционални символи $f$, стига да са определени $I_\sigma(t_i)$, $i=1,\ldots,n$; |

В случай, че $I_\sigma$ не е определена за някой от споменатите подтермове, $I_\sigma(t)$ също не е определена. Нека $t$ е $p(\varphi,t_1,\ldots,t_n)$. Нека $x_1,\ldots,x_n$ са свободните променливи на $\varphi$, взети в реда на първите си свободни участия във $\varphi$. $I_\sigma(t)$ е определена само при условие, че са определени $I_\sigma(t_i)$, $i=1,\ldots,n$, и за всяко $I'\in\mathbf{M}_{I,\max\sigma}$ и всяко $\tau\geq\min\sigma$ релацията $\models$ между $M^{I_\sigma(t_1),\ldots,I_\sigma(t_n)}_{x_1,\ \ldots\ ,x_n}$, $(I')^{I_\sigma(t_1),\ldots,I_\sigma(t_n)}_{x_1,\ \ldots\ ,x_n}$, $[\min\sigma,\tau]$ и $\varphi$ е определена. Тогава $I_\sigma(t)$ е

$$P_{I,\max\sigma}(\{I'\in\mathbf{M}_{I,\max\sigma}:\exists\tau\geq\min\sigma\ M^{I_\sigma(t_1),\ldots,I_\sigma(t_n)}_{x_1,\ \ldots\ ,x_n},(I')^{I_\sigma(t_1),\ldots,I_\sigma(t_n)}_{x_1,\ \ldots\ ,x_n},[\min\sigma,\tau]\models\varphi\}),$$

стига $P_{I,\max\sigma}$ да има стойност за посоченото множество. В противен случай $I_\sigma(t)$ е неопределена. Релацията $\models$ се определя с индукция по строежа на формулите от $\mathbf{L}$ с клаузите:

$M,I,\sigma\not\models\bot$;

$M,I,\sigma\models R(t_1,\ldots,t_n)$ ако $I(R)(I_\sigma(t_1),\ldots,I_\sigma(t_n))=1$
за $n$-местни статични релационни $R$, ако са определени $I_\sigma(t_i)$, $i=1,\ldots,n$;

$M,I,\sigma\models R(t_1,\ldots,t_n)$ ако $I(R)(\sigma,I_\sigma(t_1),\ldots,I_\sigma(t_n))=1$
за $n$-местни темпорални релационни $R$, ако са определени $I_\sigma(t_i)$, $i=1,\ldots,n$;

$M,I,\sigma\models\neg\varphi$ ако $\models$ е определена между $M$, $I$, $\sigma$ и $\varphi$, и $M,I,\sigma\not\models\varphi$;

$M,I,\sigma\models\varphi\wedge\psi$ ако $M,I,\sigma\models\varphi$ и $M,I,\sigma\models\psi$;

$M,I,\sigma\models\Diamond_l\varphi$ ако $M,I,\sigma'\models\varphi$ за някое $\sigma'$ такова, че $\max\sigma'=\min\sigma$;

$M,I,\sigma\models\Diamond_r\varphi$ ако $M,I,\sigma'\models\varphi$ за някое $\sigma'$ такова, че $\min\sigma'=\max\sigma$;

$M,I,\sigma\models\exists x\varphi$ ако $M^a_x,I^a_x,\sigma\models\varphi$
за някое $a\in D_F$, ако $x$ е от сорта на продължителностите,
или $a\in U_F$, ако $x$ е от сорта на вероятностите.

Във всички случаи, освен споменатите, $\models$ е неопределена.

Частичната определеност на стойностите на термовете и на релацията на истинност $\models$ произтича от частичността на вероятностите $P_{I,\tau}$ в частичния модел. Причина за разглеждането на такава ситуация и за въвеждането на частични модели изобщо е трудността да бъдат посочени подмножествата на $\mathbf{M}_{I,\tau}$, за които в определението на стойностите $I_\sigma$ на $p$-термовете се прибягва до пресмятане на $P_{I,\max\sigma}$, преди определянето на $\models$ и без тромаво преизказване на горните правила от дефиницията на тази релация.

**Дефиниция 7.12** *Модел* за езика $\mathbf{L}$ на $PITL$ наричаме частичен модел за $\mathbf{L}$, в който стойностите на термовете и истинността на формулите са навсякъде определени.

Оттук нататък се занимаваме само с (тотални) модели на $PITL$.

Неформално, в моделите на $PITL$ множеството от интерпретации на символите от дадения език описва различните възможни поведения на моделираната система. Ако две интерпретации са $\tau$-съгласувани, те представят възможно различни продължения "в бъдещето" на поведението на системата, което описват по еднакъв начин до момента $\tau$. Функциите $P_{I,\tau}$ изразяват вероятността при поведение, описано чрез $I$ до момента $\tau$ системата да продължи поведението си от $\tau$ нататък с такова, което се

описва чрез попадаща в множеството-аргумент на $P_{I,\tau}$ интерпретация. Термовете от вида $p(\varphi, t_1, \ldots, t_n)$ изразяват тази вероятност за множества от интерпретации, определени с условието да са съгласувани с разглежданата $I$ до края на разглеждания интервал $\sigma$ и, при заместването на стойностите на свободните променливи на $\varphi$ в тях съответно със стойностите на $I$ за $t_1, \ldots, t_n$ в $\sigma$, да изпълняват дадената формула $\varphi$ интервал, който има общо начало със $\sigma$.

### 7.1.3 Съкращения

Съкращенията, известни за $ITL$ и $NL$, запазват употребата си в $PITL$. В частност, $(.;.)$ се употребява като съкращение в $PITL$. В случай, че $x_1, \ldots, x_n$ са свободните променливи на формулата $\varphi$ в реда на първите им свободни участия във $\varphi$, съкращаваме $p(\varphi, x_1, \ldots, x_n)$ до $p(\varphi)$.

## 7.2 Система за извод за вероятностната интервална темпорална логика

### 7.2.1 Системата

Системата за извод, която предлагаме за $PITL$, включва аксиомите и правилата от известната система за $NL$, аксиомите за областите от вероятности $U1$-$U7$ и следните аксиоми и правила:

$(P_\bot)$ $\quad p(\bot) = 0$

$(P_\top)$ $\quad p(\top) = 1$

$(P_+)$ $\quad p(\varphi) + p(\psi) = p(\varphi \vee \psi) + p((\varphi;\top) \wedge (\psi;\top))$

$(P_=)$ $\quad x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \Rightarrow p(\varphi, x_1, \ldots, x_n) = p(\varphi, y_1, \ldots, y_n)$

$(P_\Diamond)$ $\quad \dfrac{\varphi \Rightarrow \Diamond_l^c \psi \Rightarrow \Diamond_l^c \chi}{\varphi \Rightarrow p(\psi) \leq p(\chi)}$

$(P_;)$ $\quad \dfrac{\varphi \Rightarrow \neg(\varphi; \ell \neq 0)}{(\varphi; p(\psi) = x) \Rightarrow p((\varphi;\psi)) = x}$

$(\overline{P})$ $\quad \dfrac{\varphi \Rightarrow \neg(\varphi; \ell \neq 0)}{\ell = 0 \wedge p(\varphi \wedge \theta \Rightarrow p((\varphi;\psi)) \leq x) = 1 \Rightarrow p((\varphi \wedge \theta;\psi)) \leq x.p(\varphi \wedge \theta)}$

$(\underline{P})$ $\quad \dfrac{\varphi \Rightarrow \neg(\varphi; \ell \neq 0)}{\ell = 0 \wedge p(\varphi \wedge \theta \Rightarrow p((\varphi;\psi)) \geq x) = 1 \Rightarrow p((\varphi \wedge \theta;\psi)) \geq x.p(\varphi \wedge \theta)}$

В горния запис на аксиомите и правилата термове като $p(\varphi)$ следва да се четат като съкращения на $p(\varphi, x_1, \ldots, x_n)$, както те са определени в подпараграф 7.1.3. Това означава, че аксиомите и правилата допускат и частни случаи, в които участвуват формули със свободни променливи.

Правилото $P_\Diamond$ е допустимо само за формулите $\varphi$, които могат да бъдат зададени с Бекус-Науровата форма

$\varphi ::= \bot | R(t, \ldots, t) | \neg\varphi | (\varphi \wedge \varphi) | (\varphi;\varphi) | \Diamond_l \varphi | \exists x \varphi$

която предвижда появата на участия на $\Diamond_r$ в този вид формули единствено посредством употребата на съкращението $(.;.)$. Такива формули наричаме *ретроспективни*. Те се отличават със следното свойство:

**Твърдение 7.13** *Нека $F$ е структура за $NL$ и $\tau \in T_F$. Нека $I_1$ и $I_2$ са $\tau$-съгласувани интерпретации на символите на език $\mathbf{L}$ на $NL$ в $F$. Тогава, ако $\sigma \in \mathbf{I}(T_F)$ и $\max \sigma \leq \tau$, то $\langle F, I_1\rangle, \sigma \models \varphi$ е равносилно на $\langle F, I_2\rangle, \sigma \models \varphi$ за всяка ретроспективна формула $\varphi$ от $\mathbf{L}$.*

**Доказателство:** Индукция по строежа на $\varphi$. $\dashv$

На останалите формули в $P_\Diamond$ не се налагат ограничения.

$P_;$ и $P_\Diamond$ е коректно да се прилагат само към теореми на $PITL$. Теориите в $PITL$, както ги задаваме по-долу, не са затворени относно тези правила.

Условията за коректността на заместването на индивидни променливи в изводите за $NL$ се отнасят без изменение за $PITL$. Спрямо тези условия термовете от вида $p(\varphi \ldots)$ са подобни на термовете, получени с въвеждане на темпорален функционален символ: Заместването с тях е коректно в изводите само във формули, в които заместваната променлива няма свободни участия в обсега на модален оператор.

Правилата $\overline{P}$ и $\underline{P}$ съдържат допълнителния двуместен статичен функционален символ . (умножение) от сорта на вероятностите и са свързани само със свойството на Чапмън-Колмогоров, с което се занимаваме в параграф 7.4. Теоремата за пълнота на тази система не се позовава на тези правила.

Коректността на горната система се установява с непосредствена проверка на валидността на аксиомите и на запазването на истинността от страна на правилата. Смисълът на аксиомите $P_\bot$, $P_\top$, $P_+$, $P_=$ и правилото $P_;$ е очевиден. По-сложно е правилото $P_\Diamond$. Смисълът му е следният: Ако при всяка интерпретация всеки интервал, който изпълнява $\varphi$, има общо начало с интервал, изпълняващ $\chi$, стига да има общо начало с интервал, изпълняващ $\psi$, то вероятността дадена интерпретация да бъде продължена вдясно от интервал, изпълняващ $\varphi$, с такава, която изпълнява $\chi$, е не по-малка от вероятността тя да бъде продължена с изпълняваща $\psi$ интерпретация.

Изводимостта в представената система означаваме с $\vdash_{PITL}$.

Нека $\mathbf{L}$ е език на $PITL$. С $PITL_{\mathrm{L}}$ означаваме множеството $\{\varphi : \varphi$ е формула от $\mathbf{L}$ и $\vdash_{PITL} \varphi\}$.

### 7.2.2 Някои полезни теореми и производни правила

Представената по-горе система за извод за $PITL$ съдържа минимален набор от аксиоми и правила. В този подпараграф разширяваме този набор с някои теореми и производни правила, които използуваме при доказването на пълнотата на системата, и които изобщо я правят по-удобна за работа. Разбира се, за същинската употреба на $PITL$ е целесъобразно този набор да бъде разширен доста повече.

В изводите на теоремите пропускаме частите, които се опират само на аксиоми и правила от $NL$, като ги отбелязваме по съответен начин. Лесно проверимата общовалидност на доказаните с тези части формули и пълнотата на споменатата система за $NL$ правят тези части от изводите не твърде интересни.

**Теорема 7.14**

| | |
|---|---|
| $(P_{0\leq p(.)})$ | $\vdash_{PITL} 0 \leq p(\varphi)$ |
| $(P_{p(.)\leq 1})$ | $\vdash_{PITL} p(\varphi) \leq 1$ |
| $(P_0)$ | $\vdash_{PITL} p(\varphi \wedge \psi) = 0 \wedge p(\varphi \wedge \neg\psi) = 0 \Rightarrow p(\varphi) = 0$ |
| $(P_r)$ | $\vdash_{PITL} (\ell = x; p(\varphi) = y) \Rightarrow p((\ell = x; \varphi)) = y$ |
| $(P_{(.;\top)})$ | $\vdash_{PITL} p(\varphi) = p((\varphi; \top))$ |
| | $\vdash_{PITL} \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$ |
| $(P_{mon})$ | $\vdash_{PITL} \varphi \Rightarrow p(\psi) \leq p(\chi)$, *ако* $\varphi$ *е статична* |
| | $\vdash_{PITL} \varphi \Rightarrow (\psi \Leftrightarrow \chi)$ |
| $(P_\Leftrightarrow)$ | $\vdash_{PITL} \varphi \Rightarrow p(\psi) = p(\chi)$, *ако* $\varphi$ *е статична* |

**Доказателство:** $(P_{0\leq p(.)})$ и $(P_{p(.)\leq 1})$ се получават по $P_\Diamond$, като в качеството на $\psi$ и $\chi$ от правилото се вземат съответно $\bot$ и $\varphi$ и $\varphi$ и $\top$, а след това се използуват съответно $P_\bot$ и $P_\top$. $P_{mon}$ се получава с помощта на $P_\Diamond$ вследствие на това, че $\vdash_{NL} \varphi \Leftrightarrow \Box_l^c \varphi$ за статични $\varphi$ и от $\vdash_{NL} \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$ следва $\vdash_{NL} \Box_l^c \varphi \Rightarrow \Diamond_l^c \psi \Rightarrow \Diamond_l^c \chi$. $P_\Leftrightarrow$ се получава с двукратно прилагане на $P_{mon}$. $P_r$ се получава по $P_;$ от $\vdash_{NL} \ell = x \Rightarrow \neg(\ell = x; \ell \neq 0)$. $P_{(.;\top)}$ се получава с двукратно прилагане на $P_\Diamond$ от $\vdash_{NL} \Diamond_l^c \varphi \Leftrightarrow \Diamond_l^c (\varphi; \top)$. За $P_0$ имаме следния извод:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi) \Leftrightarrow \varphi$ | $NL$ |
| 2 | $p((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi)) = p(\varphi)$ | 1, $P_{\Leftrightarrow}$ |
| 3 | $p(\varphi \wedge \psi) + p(\varphi \wedge \neg\psi) =$ $= p(((\varphi \wedge \psi); \top) \wedge ((\varphi \wedge \neg\psi); \top)) + p((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi))$ | $P_+$ |
| 4 | $p(\varphi \wedge \psi) = 0 \wedge p(\varphi \wedge \neg\psi) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow p(((\varphi \wedge \psi); \top) \wedge ((\varphi \wedge \neg\psi); \top)) + p((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi)) = 0$ | 3, $NL$ |
| 5 | $p(((\varphi \wedge \psi); \top) \wedge ((\varphi \wedge \neg\psi); \top)) + p((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi)) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow p((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi)) = 0$ | $U5$ |
| 6 | $p(\varphi \wedge \psi) = 0 \wedge p(\varphi \wedge \neg\psi) = 0 \Rightarrow p(\varphi) = 0$ | 2, 4, 5, $NL$ |

$\dashv$

Следното твърдение е аналог в $PITL$ на известни твърдения за предикатното смятане от първи ред (без модални оператори):

**Теорема 7.15** *Нека $\varphi$ е формула, $t$, $t_1$ и $t_2$ са термове и $x$ е индивидна променлива от сорта на $t_1$ и $t_2$ в език на $PITL$. Тогава, ако означените замествания са коректни в изводите,*

$\vdash_{PITL} (t_1 = t_2) \Rightarrow [t_1/x]t = [t_2/x]t$

*и*

$\vdash_{PITL} (t_1 = t_2) \Rightarrow [t_1/x]\varphi \Leftrightarrow [t_2/x]\varphi$

**Доказателство:** Индукция по строежа на $t$ и $\varphi$. Индуктивната стъпка за случая на $p$-терм $t$ се получава с помощта на $P_=$. До индуктивна стъпка за случая на $\varphi$ от вида $\Diamond_d\psi$ се стига само ако $t_1$ и $t_2$ са статични или $x$ не участвува свободно в $\psi$. Вторият случай е тривиален, а за първия имаме извода:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $t_1 = t_2 \Rightarrow [t_1/x]\psi \Leftrightarrow [t_2/x]\psi$ | индукционно предположение |
| 2 | $\Box_d(t_1 = t_2) \Rightarrow \Box_d([t_1/x]\psi \Leftrightarrow [t_2/x]\psi)$ | 1, $PC$, $NL$-$Mono$ |
| 3 | $\Diamond_d(t_1 \neq t_2) \Rightarrow t_1 \neq t_2$ | $NL$-$A1$ |
| 4 | $t_1 = t_2 \Rightarrow \Box_d(t_1 = t_2)$ | 3, $PC$ |
| 5 | $\Diamond_d[t_1/x]\psi \Rightarrow$ $\Rightarrow \Diamond_d([t_1/x]\psi \wedge [t_2/x]\psi) \vee \Diamond_d([t_1/x]\psi \wedge \neg[t_2/x]\psi)$ | $PC$, $NL$-$Mono$, $NL$-$A4$ |
| 6 | $\Diamond_d[t_2/x]\psi \Rightarrow$ $\Rightarrow \Diamond_d([t_2/x]\psi \wedge [t_1/x]\psi) \vee \Diamond_d([t_2/x]\psi \wedge \neg[t_1/x]\psi)$ | $PC$, $NL$-$Mono$, $NL$-$A4$ |
| 7 | $\Diamond_d([t_1/x]\psi \wedge [t_2/x]\psi) \Rightarrow \Diamond_d[t_1/x]\psi \wedge \Diamond_d[t_2/x]\psi$ | $PC$, $NL$-$Mono$ |
| 8 | $\Box_d([t_1/x]\psi \Leftrightarrow [t_2/x]\psi) \Rightarrow$ $\Rightarrow \neg\Diamond_d([t_1/x]\psi \wedge \neg[t_2/x]\psi) \wedge \neg\Diamond_d([t_2/x]\psi \wedge \neg[t_1/x]\psi)$ | $PC$, $NL$-$Mono$ |
| 9 | $\Box_d([t_1/x]\psi \Leftrightarrow [t_2/x]\psi) \Rightarrow \Diamond_d[t_1/x]\psi \Leftrightarrow \Diamond_d[t_2/x]\psi$ | 5-8, $PC$ |
| 10 | $t_1 = t_2 \Rightarrow \Diamond_d[t_1/x]\psi \Leftrightarrow \Diamond_d[t_2/x]\psi$ | 2, 4, 9, $PC$ |

$\dashv$

Понятията непротиворечиво множество от формули в език на $PITL$, теория, и т.н. от дефиниция 6.7 се определят спрямо $\vdash_{PITL}$ дословно както в онази дефиниция, без условието за затвореност относно въведеното там правило $\omega^\gamma$. Спрямо $\vdash_{PITL}$ е изпълнена лема на Линденбаум във формата, известна за $NL$:

**Теорема 7.16** *Нека $\Gamma$ е непротиворечиво множество от формули в език $\mathbf{L}$ на $PITL$. Нека $C$ е изброимо множество от статични константи, нови за $\mathbf{L}$. Тогава съществува пълна Хенкинова теория в $\mathbf{L}(C)$ със свидетели в $C$, съдържаща $\Gamma$.*

Доказателството на тази теорема не съдържа новости в сравнение с известните доказателства на вариантите и за $ITL$ и $NL$ от [Dut95, BZ97]. Пропускаме това доказателство, тъй като то не съдържа нищо забележително.

## 7.3 Пълнота на системата за извод за вероятностната интервална темпорална логика

### 7.3.1 Език на $NL$, съответен на отнапред зададен език на $PITL$

В този подпараграф по даден език $\mathbf{L}$ на $PITL$, определяме съответен двусортен език на $NL$, в който специфичните за $PITL$ $p$-термове по подходящ начин са представени чрез темпорални константни и функционални символи. Преводът на $\mathbf{L}$ в $\mathbf{L}_{NL}$ позволява свеждането на въпроси относно изводимостта в $PITL$ до рамките на $NL$.

**Дефиниция 7.17** Нека е даден език $\mathbf{L}$ на $PITL$. Определяме *езика* $\mathbf{L}_{NL}$ *на* $NL$, *съответен на* $\mathbf{L}$. Езикът $\mathbf{L}_{NL}$ е двусортен, както $\mathbf{L}$. Езикът $\mathbf{L}_{NL}$ е обединението на редицата от езици $\mathbf{L}_k$, $k < \omega$, зададени по следния начин:

$\mathbf{L}_0$ е езикът на $NL$, образуван със символите от $\mathbf{L}$. Нека $\mathbf{L}_{k'}$ са определени за $k' \leq k$. За всяка формула $\varphi$ от $\mathbf{L}_k$, която, в случай, че $k > 0$, е вън от $\mathbf{L}_{k-1}$, със $\mathsf{p}_\varphi$ означаваме нов за $\mathbf{L}_k$ темпорален символ от сорта на вероятностите, който е темпорална константа, ако $\varphi$ е затворена, и функционален символ на $m$ аргумента от сорта на продължителностите и $n$ аргумента от сорта на вероятностите, ако свободните променливи във $\varphi$ от двата сорта са съответно $m$ и $n$ на брой. Сортовете на аргументите на $\mathsf{p}_\varphi$ се определят от сортовете на свободните променливи във $\varphi$ според реда на първите свободните участия във $\varphi$ на тези променливи, както и в $p$-термовете в $\mathbf{L}$. Нека $P_k = \{\mathsf{p}_\varphi : \varphi$ е формула от $\mathbf{L}_k$, вън от $\mathbf{L}_{k-1}\}$. Определяме $\mathbf{L}_{k+1}$ като разширението на $\mathbf{L}_k$ с темпоралните символи от $P_k$.

Означаваме множеството $\bigcup\limits_{k<\omega} P_k$ от символите, въведени с дефиницията на езика $\mathbf{L}_{NL}$, с $P$.

**Дефиниция 7.18** Нека $\mathbf{L}$ е език на $PITL$. Превода $\mathsf{t}$ на $\mathbf{L}$ в съответния му език $\mathbf{L}_{NL}$ на $NL$ определяме, полагайки, че

$\mathsf{t}([p(\psi_1, t_{1,1}, \ldots, t_{1,m_1})/x_1, \ldots, p(\psi_n, t_{n,1}, \ldots, t_{n,m_n})/x_n]A)$ е

$[\mathsf{p}_{\mathsf{t}(\psi_1)}(\mathsf{t}(t_{1,1}), \ldots, \mathsf{t}(t_{1,m_1}))/x_1, \ldots, \mathsf{p}_{\mathsf{t}(\psi_n)}(\mathsf{t}(t_{n,1}), \ldots, \mathsf{t}(t_{n,m_n}))/x_n]A$

за формули и термове $A$, които не съдържат $p$-термове, където променливите $x_1$, $\ldots$, $x_n$ имат единствени и свободни участия в $A$.

Нека забележим, че с горното коректно е определен превод на $\mathbf{L}$ в $\mathbf{L}_{NL}$, който има единствен обратен, определен за целия $\mathbf{L}_{NL}$.

**Доказателство:** Коректността на дефиницията следва от това, че всяка формула или терм от $\mathbf{L}$ се представя във вида

$[p(\psi_1, t_{1,1}, \ldots, t_{1,m_1})/x_1, \ldots, p(\psi_n, t_{n,1}, \ldots, t_{n,m_n})/x_n]A$

от дефиницията по единствен начин с точност до преименуване на $x_1,\ldots,x_n$.

Казаното за обратния на $\mathsf{t}$ доказваме с индукция по дължината на формулите от $\mathbf{L}_{NL}$. Всяка формула или терм от $\mathbf{L}_{NL}$ по също така единствен начин се представя във вида

$[\mathsf{p}_{\psi'_1}(t'_{1,1}, \ldots, t'_{1,m_1})/x_1, \ldots, \mathsf{p}_{\psi'_n}(t'_{n,1}, \ldots, t'_{n,m_n})/x_n]A$

където $x_1,\ldots,x_n$ имат единствени и свободни участия в $A$, а $A$ не съдържа символи от $P$. При това дължините на $\psi'_1,\ldots,\psi'_n$ и $t'_{1,1}, \ldots, t'_{1,m_1}, \ldots, t'_{n,1}, \ldots, t'_{n,m_n}$ са строго по-малки от тази на разглежданата формула или терм. Следователно съществуват единствени $\psi_i$, $t_{i,j}$ от $\mathbf{L}$ такива, че $\psi'_i \doteq \mathsf{t}(\psi_i)$ и $t'_{i,j} \doteq \mathsf{t}(t_{i,j})$, $j = 1, \ldots, m_i$, $i = 1, \ldots, n$. Това означава, че разглежданата формула е $\mathsf{t}$-превод единствено на формулата

$[p(\psi_1, t_{1,1}, \ldots, t_{1,m_1})/x_1, \ldots, p(\psi_n, t_{n,1}, \ldots, t_{n,m_n})/x_n]A$

$\dashv$

За $\mathsf{t}$-преводите на множества от формули от $\mathbf{L}$ в $\mathbf{L}_{NL}$ са в сила следните твърдения:

**Твърдение 7.19** *Нека* $\Gamma$ *е множество от формули от* $\mathbf{L}$. *Тогава* $\mathsf{t}(Cn_{PITL}(\Gamma)) = Cn_{NL}(\mathsf{t}(\Gamma \cup PITL_{\mathrm{L}}))$.

**Доказателство:** За всяка формула $\varphi \in Cn_{NL}(\mathsf{t}(\Gamma \cup PITL_{\mathrm{L}}))$ съществува извод на $\mathsf{t}^{-1}(\varphi)$ от $\Gamma$ в $PITL$. Индуктивните стъпки в доказателството на това с индукция по дължината на извода са тривиални, защото правилата в системата за извод за $NL$ са част от тези от системата за $PITL$ и техните частни случаи в $\mathbf{L}_{NL}$ имат за $\mathsf{t}^{-1}$-преводи съответни частни случаи на тези правила в $\mathbf{L}$. Същото се отнася и за частните случаи на аксиомите на двете системи. Изключение са аксиомите за равенство, свързани с отсъствуващите в $\mathbf{L}$ символи от вида $\mathsf{p}_\varphi$, но те са преводи на съответните им аксиоми $P_=$.

Обратно, ако $\varphi \in Cn_{PITL}(\Gamma)$, то $\mathsf{t}(\varphi)$ има извод от от $\mathsf{t}(\Gamma \cup PITL_{\mathrm{L}})$, защото аксиомите и правилата, специфични за системата за извод за $PITL$, които евентуално участвуват в извод на $\varphi$ от $\Gamma$, служат там само за получаване на теореми на $PITL$, чиито $\mathsf{t}$-преводи са на разположение за извода на $\mathsf{t}(\varphi)$, а това означава, че $\mathsf{t}$-преводът на извода на $\varphi$ без частите, водещи до тези теореми, е извод на $\mathsf{t}(\varphi)$ от $\mathsf{t}(\Gamma \cup PITL_{\mathrm{L}})$. $\dashv$

**Твърдение 7.20** *Нека $\Gamma$ е непротиворечиво спрямо $\vdash_{PITL}$ множество от формули от $\mathbf{L}$. Тогава $\mathsf{t}(\Gamma \cup PITL_{\mathrm{L}})$ е непротиворечиво спрямо $\vdash_{NL}$ множество от формули от $\mathbf{L}_{NL}$. Обратното също е вярно.*

**Доказателство:** Тъй като $\mathsf{t}(\bot)$ е $\bot$, $\bot \in Cn_{PITL}(\Gamma)$ е равносилно на $\bot \in \mathsf{t}(Cn_{PITL}(\Gamma))$. Според твърдение 7.19 $\mathsf{t}(Cn_{PITL}(\Gamma)) = Cn_{NL}(\mathsf{t}(\Gamma \cup PITL_{\mathrm{L}}))$, откъдето получаваме твърдението. $\dashv$

### 7.3.2 Диаграмен език за семантиката на $PITL$

За доказването на пълнотата на предложената система за извод за $PITL$ посредством съответна на описаната семантика на $PITL$ канонична конструкция се оказва удобно разглеждането на език на $PITL$, който позволява построяването на аналог на известната от предикатното смятане *елементарна диаграма* на участвуващия в този вид доказателства каноничен модел, описваща заедно **всичките интерпретации на символите от отнапред взетия език на *PITL***. В този подпараграф въвеждаме такъв език, който за отнапред взет език $\mathbf{L}$ на $PITL$ означаваме с $\mathbf{L}_\omega$. Езикът $\mathbf{L}_\omega$, освен статични константи за именуване на всички индивиди от строената структура за $PITL$, съдържа отделен екземпляр от набора от темпоралните символи от $\mathbf{L}$ без $\ell$ за всяка от интерпретациите в строения модел за $\mathbf{L}$.

Езикът $\mathbf{L}_\omega$ има за нелогически символи нелогическите символи на редиците от езици на $PITL$ $\mathbf{L}_k$ и $\mathbf{L}'_k$, $k < \omega$. Определяме тези езици за всяко $k$ заедно с две по две непресичащите се множества от статични константи $C^d_k$ от сорта на продължителностите и $C^p_k$ от сорта на вероятностите и множествата $S_k$, които служат за индексиране на темпоралните символи от различни екземпляри на набора на $\mathbf{L}$.

За всяко $k < \omega$, с $C_k$ означаваме $C^d_k \cup C^p_k$. С $C^d_{\leq k}$, $C^p_{\leq k}$, $C_{\leq k}$ и $S_{\leq k}$ означаваме съответно $\bigcup\limits_{k' \leq k} C^d_{k'}$, $\bigcup\limits_{k' \leq k} C^p_{k'}$, $\bigcup\limits_{k' \leq k} C_{k'}$ и $\bigcup\limits_{k' \leq k} S_{k'}$. За всеки темпорален символ $s$ от $\mathbf{L}$, с изключение на $\ell$, всяко $k < \omega$ и всяко $\nu \in S_k$ с $s^\nu$ означаваме нов темпорален символ със същия брой на аргументите и сортове на еднаквите по ред аргументи и, евентуално, със същия сорт на стойността като $s$.

$C^d_0$ и $C^p_0$ са изброими множества от нови за $\mathbf{L}$ статични константи. $S_0 = \{\emptyset\}$ (тук в ролята на $\emptyset$ е подходящ произволен конкретен "достатъчно различен" обект). $\mathbf{L}_0$ е езикът на $PITL$, получен от $\mathbf{L}$ чрез заместването на темпоралните символи $s \neq \ell$ от $\mathbf{L}$ със съответните им $s^\emptyset$, $\mathbf{L}'_0 = \mathbf{L}_0(C_0)$.

Нека $k$ е произволно естествено число. Нека са определени $C_{k'}$, $S_{k'}$ и $\mathbf{L}_{k'}$ за $k' \leq k$. Тогава $S_{k+1} = \{\langle \varphi, \psi, \nu, c_1, c_2, c_3 \rangle : \varphi, \psi,$ са затворени формули от $\mathbf{L}(C_{\leq k})$, а $c_1, c_2, c_3 \in C^d_{\leq k}, \nu \in S_{\leq k}\}$. $\mathbf{L}'_{k+1}$ е разширението на $\mathbf{L}_k$ с темпоралните символи $s^\nu$, където $s$ пробягва темпоралните символи на $\mathbf{L}$, без $\ell$, а $\nu \in S_{k+1} \setminus S_k$. $C^d_{k+1}$ и $C^p_{k+1}$

са множества от нови за $\mathbf{L}'_{k+1}$ статични константи, съответно от сортовете на продължителностите и на вероятностите, с мощността на множеството от формулите на $\mathbf{L}'_{k+1}$. $\mathbf{L}_{k+1} = \mathbf{L}_k(C^d_{k+1} \cup C^p_{k+1})$.

С $C_\omega$ означаваме множеството $\bigcup\limits_{k<\omega} C_k$. С $S_\omega$ означаваме множеството $\bigcup\limits_{k<\omega} S'_k \cup S''_k$. За всяка формула $\varphi$ от $\mathbf{L}(C_\omega)$ и всяко $\nu$ от $S_\omega$ с $\varphi^\nu$ означаваме резултата от заместването на темпоралните символи $s$ във $\varphi$ със съответните им $s^\nu$. Ако $\Gamma$ е множество от формули от $\mathbf{L}$, с $\Gamma^\nu$ означаваме $\{\varphi^\nu : \varphi \in \Gamma\}$.

Изборът на $C_k$, $k < \omega$, при построяването на $\mathbf{L}_\omega$ позволява прилагането на лемата на Линденбаум (теорема 7.16) към $\mathbf{L}'_k$ за получаването на пълни Хенкинови разширения в $\mathbf{L}_k$ на непротиворечиви множества от формули от $\mathbf{L}'_k$ със свидетели в $C_\omega$.

Използуването на диаграмите в езика $\mathbf{L}_\omega$ за построяването на модели става посредством отделянето на части от тях, съдържащи темпорални символи с фиксирани горни индекси $\nu \in S_\omega$. С $\mathbf{L}^\nu$, за $\nu \in S$, означаваме езика на $PITL$, чиито нелогически символи са статичните символи на $\mathbf{L}_\omega$, $\ell$ и темпоралните символи от $\mathbf{L}_\omega$ с горен индекс $\nu$.

### 7.3.3 Контекстът $\ell = c_0 \wedge \Diamond_r(\ell = c_1 \wedge \Diamond_r\Diamond_l(\ell = c_2 \wedge \Diamond_l(\ell = c_3 \wedge [])))$

В строежа на всяко $\nu \in S_\omega \setminus \{\emptyset\}$ участвува ("по-рано" построен) елемент $\nu' \in S_\omega$, двойка затворени формули и по три статични константи от сорта на продължителностите, означавани с $c_1$, $c_2$ и $c_3$. Това отразява употребата на $\nu$ за индексиране на темпоралните символи, чрез които се определя интерпретация в строения модел на $\mathbf{L}$, осигуряваща условия, свързани със стойностите на $p$-термове, съдържащи споменатите формули в интерпретацията, зададена чрез индексираните с $\nu'$ темпорални символи. Константите $c_1$, $c_2$ и $c_3$ при това имат ролята да зададат интервала в строената структура, в който се пресмятат тези $p$-термове. Това става посредством поставянето на подходяща формула в контекста

$\ell = c_0 \wedge \Diamond_r(\ell = c_1 \wedge \Diamond_r\Diamond_l(\ell = c_2 \wedge \Diamond_l(\ell = c_3 \wedge [])))$.

където $c_0$ е статична константа, чийто избор става в подпараграф 7.3.5. По-нататък представяме този контекст посредством формулата $\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \rightleftharpoons \ell = c_0 \wedge \Diamond_r(\ell = c_1 \wedge \Diamond_r\Diamond_l(\ell = c_2 \wedge \Diamond_l(\ell = c_3 \wedge R)))$, съдържаща чуждия за $\mathbf{L}$ 0-местен (темпорален) релационен символ $R$. Същественото свойство на този контекст е, че в модел на $NL$ (какъвто всяка отделна интерпретация от модел на $PITL$, заедно със структурата на модела на $PITL$ образува) и интервал, изпълняващ $\ell = c_0$, $[\varphi/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$ изразява истинността на $\varphi$ в интервал, който може да бъде избран произволно посредством подходящ избор на стойностите на $c_1$, $c_2$, $c_3$. При това винаги една от константите $c_1$ и $c_2$ може да бъде избрана да има стойност нулата на областта от продължителности.

В останалата част от тази глава си служим със следната лема за $\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$:

**Лема 7.21** *Нека $\varphi$ е произволна формула в език на $NL$ или $PITL$. Тогава в $NL$ ($PITL$):*

$\vdash \ell = c_0 \wedge 0 \le c_1 \wedge 0 \le c_2 \wedge 0 \le c_3 \Rightarrow (\neg[\varphi/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \Leftrightarrow [\neg\varphi/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3})$

$\vdash \ell = c_0 \wedge 0 \le c_1 \wedge 0 \le c_2 \wedge 0 \le c_3 \Rightarrow ([\varphi \Rightarrow \psi/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \Leftrightarrow ([\varphi/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \Rightarrow [\psi/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}))$

$\vdash \ell = c_0 \wedge 0 \le c_1 \wedge 0 \le c_2 \wedge 0 \le c_3 \Rightarrow (\varphi \Leftrightarrow [\varphi/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3})$ *за статични $\varphi$*

*Допустимо е правилото*

$$\frac{\vdash \varphi}{\ell = c_0 \wedge 0 \le c_1 \wedge 0 \le c_2 \wedge 0 \le c_3 \Rightarrow [\varphi/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}}$$

*и, в случай, че $c_0$, $c_1$, $c_2$ и $c_3$ не участвуват във $\varphi$, е допустимо правилото*

$$\frac{\vdash \ell = c_0 \wedge 0 \le c_1 \wedge 0 \le c_2 \wedge 0 \le c_3 \Rightarrow [\varphi/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}}{\varphi}$$

**Доказателство:** Горните формули са валидни, а правилата - коректни. Изводимостта на формулите и допустимостта на правилата следват от пълнотата на $\vdash_{NL}$ за $NL$, а за $PITL$ - от включването на системата за извод на $NL$ в тази за $PITL$. $\dashv$

### 7.3.4 Интерполация в логиката на околностите

В този подпараграф доказваме две теореми с интерполационен характер за $NL$. Първата теорема е подобна на известната теорема на Крейг за предикатното смятане от първи ред. Втората е по-тясно свързана със интервалната семантика на $NL$. Понататък я прилагаме при установяването на непротиворечивостта на някои теории, които използуваме при доказването на пълнотата на предложената система за извод за $PITL$.

Доказателствата следват примера на известното доказателство на теоремата на Крейг за предикатното смятане от [КЧ77].

**Теорема 7.22** *Нека $\varphi \Rightarrow \psi$ е общовалидна формула в $NL$. Тогава съществува формула $\chi$ такава, че $\varphi \Rightarrow \chi$ и $\chi \Rightarrow \psi$ са общовалидни в $NL$, и всеки символ, участвуващ в $\chi$, освен може би $0$, $+$, $\leq$ и $\ell$, участвува и във $\varphi$ и в $\psi$.*

**Доказателство:** Допускаме противното. Нека $\mathbf{L}_i$, $i = 0,1,2,3$ са езици на $NL$. Нека $\mathbf{L}_1$ е образуван от символите, участвуващи във $\varphi$, $\mathbf{L}_2$ - от символите, участвуващи в $\psi$, $\mathbf{L}_0$ - от символите, участвуващи и в $\mathbf{L}_1$ и в $\mathbf{L}_2$, а $\mathbf{L}_3$ - от символите, участвуващи в поне един от езиците. Нека $\mathbf{L}_i$, разбира се, включват задължителните за всички езици на $NL$ символи $0$, $+$, $\leq$ и $\ell$. Строим модел за $\mathbf{L}_3$, изпълняващ $\varphi \wedge \neg\psi$. Нека $C$ е изброимо множество от статични константи, нови за $\mathbf{L}_i$, $i = 0,1,2,3$. Една формула $\theta$ от $\mathbf{L}_0(C)$ *отделя* две теории $\Gamma$ и $\Delta$ от $\mathbf{L}_1(C)$ и $\mathbf{L}_2(C)$ съответно, ако $\theta \in \Gamma$ и $\neg\theta \in \Delta$. $\Gamma$ и $\Delta$ се наричат *неотделими*, ако не съществува формула $\theta$ с това свойство. Да докажем, че при направеното допускане $Cn_{NL}(\{\varphi\})$ и $Cn_{NL}(\{\neg\psi\})$ са неотделими. Ако $\theta$ отделя тези две теории, то $\vdash_{NL} \varphi \Rightarrow \theta$ и $\vdash_{NL} \theta \Rightarrow \psi$. Следователно, ако $\theta'$ е универсалното затваряне на резултата от заместването в $\theta$ на константите от $C$ с нови индивидни променливи, то $\vdash_{NL} \varphi \Rightarrow \theta'$ и $\vdash_{NL} \theta' \Rightarrow \psi$, което противоречи на допускането, защото $\theta'$ е формула от $\mathbf{L}_0$.

Езиците $\mathbf{L}_1(C)$ и $\mathbf{L}_2(C)$ очевидно са изброими. Нека формулите от тях образуват множествата $\{\varphi_i : i < \omega\}$ и $\{\psi_i : i < \omega\}$ съответно. Строим растящите редици от теории $\Gamma_i$ и $\Delta_i$, $i < \omega$, съответно в $\mathbf{L}_1(C)$ и $\mathbf{L}_2(C)$ със свойството $\Gamma_i$ и $\Delta_i$ да са неотделими за всяко $i < \omega$ по следния начин: Полагаме $\Gamma_0 = Cn_{NL}(\{\varphi\})$ и $\Delta_0 = Cn_{NL}(\{\neg\psi\})$. Ако $\Gamma_i + \varphi_i$ и $\Delta_i$ са отделими, полагаме $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$. Иначе разглеждаме случаите:

1. $\varphi_i$ има вида $\exists x\varphi'$. Нека $c \in C$ и $c$ не се среща във $\varphi_j$, $\psi_j$, $j \leq i$. Тогава, както се установява с разсъждения, подобни на водещите до неотделимостта на $\Gamma_0$ и $\Delta_0$, $\Gamma_i + \varphi_i + [c/x]\varphi'$ и $\Delta_i$ също са неотделими. Полагаме $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i + \varphi_i + [c/x]\varphi'$.

2. $\varphi_i$ не е от горния вид. Тогава полагаме $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i + \varphi_i$.

$\Delta_{i+1}$ се определя по аналогичен начин, в зависимост от отделимостта на $\Gamma_{i+1}$ и $\Delta_i + \psi_i$. Сега нека $\Gamma = \bigcup\limits_{i<\omega} \Gamma_i$ и $\Delta = \bigcup\limits_{i<\omega} \Delta_i$. Да докажем, че $\Gamma$ и $\Delta$ са пълни теории съответно в $\mathbf{L}_1(C)$ и $\mathbf{L}_2(C)$. Допускаме, че $\varphi, \neg\varphi \notin \Gamma$ за някоя формула $\varphi$ от $\mathbf{L}_1(C)$. Тогава съществуват формули $\theta$ и $\theta'$ от $\mathbf{L}_0(C)$ такива, че $\varphi \Rightarrow \theta, \neg\varphi \Rightarrow \theta' \in \Gamma_j$ и $\neg\theta, \neg\theta' \in \Delta_j$, стига $j$ да е по-голямо от номерата на $\varphi$ и $\neg\varphi$. Оттук следва, че $\theta \vee \theta' \in \Gamma_j$ и $\neg(\theta \vee \theta') \in \Delta_j$, което противоречи на неотделимостта на $\Gamma_j$ и $\Delta_j$. Следователно или $\varphi \in \Gamma$, или $\neg\varphi \in \Gamma$ за всяка формула $\varphi$ от $\mathbf{L}_1(C)$. Аналогично се установява и пълнотата на $\Delta$. Да докажем, че $\Gamma \cap \Delta$ е пълна теория в $\mathbf{L}_0(C)$. За произволна формула $\varphi$ от $\mathbf{L}_0(C)$ имаме или $\varphi \in \Gamma$, или $\neg\varphi \in \Gamma$. Аналогично, или $\varphi \in \Delta$, или $\neg\varphi \in \Delta$. Нека $j$ отново е по-голямо от номерата на $\varphi$ и $\neg\varphi$ в редиците $\varphi_i$ и $\psi_i$, $i < \omega$. Тогава от неотделимостта на $\Gamma_j$ и $\Delta_j$ следва, че или $\varphi \in \Gamma_j, \Delta_j$ или $\neg\varphi \in \Gamma, \Delta$. Оттук, или $\varphi \in \Gamma \cap \Delta$, или $\neg\varphi \in \Gamma \cap \Delta$.

$\Gamma$ и $\Delta$ очевидно са Хенкинови теории със свидетели в $C$. Нека $\langle F_1, I_1\rangle$ и $\langle F_2, I_2\rangle$ са каноничните им модели. Както знаем от построението на тези модели, техните области от продължителности се определят еднозначно от статичните формули, образувани само с помощта на статични константи, 0, + и $\leq$ съответно в теориите $\Gamma$ и $\Delta$, а времевите им области са изоморфни на областите им от продължителности. Този вид формули в $\Gamma$ и $\Delta$ са едни и същи, защото всички те попадат в $\mathbf{L}_0(C)$. Следователно $F_1 = F_2$ и обедняванията на интерпретациите $I_1$ и $I_2$ до символите от $\mathbf{L}_0(C)$ са една и съща интерпретация $I_0$ на тези символи. Оттук следва, че можем да определим интерпретация $I_3$ на символите от $\mathbf{L}_3$ в $F_3 = F_1 = F_2$, която да е разширение едновременно на $I_1$ и $I_2$ така, че в $\langle F, I_3\rangle$ да е изпълнима $\varphi \wedge \neg\psi$, което е противоречие. $\dashv$

Интерполационната теорема, доказана по-горе, представлява и самостоятелен интерес. Лесно е да се забележи, че в същата форма и със същото доказателство тя е в сила и за $ITL$, макар че тук не използуваме това. Успешното пренасяне на доказателството на тази теорема от предикатното смятане (без модални оператори) по същество се дължи на факта, че множеството от възможни светове-интервали, достъпни от даден възможен свят в даден модел на $NL$ ($ITL$), се "параметризира" с елементи на областта от продължителности на модела. Това позволява от съвпадането на статичните формули, образувани само с помощта на статични константи, 0, + и $\leq$ в две пълни Хенкинови теории със свидетели в едно и също множество от статични константи да получим, че каноничните им структури съвпадат.

От пълнотата на известната система за извод за $NL$ следва, че теорема 7.22 може да се формулира и така:

**Следствие 7.23** *Нека $\vdash_{NL} \varphi \Rightarrow \psi$. Тогава съществува формула $\chi$ такава, че $\vdash_{NL} \varphi \Rightarrow \chi$, $\vdash_{NL} \chi \Rightarrow \psi$ и всеки символ, участвуващ в $\chi$, освен може би 0, +, $\leq$ и $\ell$, участвува и във $\varphi$ и в $\psi$.*

Интерполационната теорема без изменения е в сила и за двусортни системи за $NL$, каквато в частност отговаря на структурите за $PITL$. Нека разгледаме следния случай на в езици на $PITL$. Нека $\mathbf{L}_{1,1}$, ..., $\mathbf{L}_{1,n}$ и $\mathbf{L}_2$ са изброими езици на $PITL$. Нека $\mathbf{L}_1$ е обединението на $\mathbf{L}_{1,1}$, ..., $\mathbf{L}_{1,n}$, $\mathbf{L}_3$ е обединението на $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$, а $\mathbf{L}_0$ е сечението на $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$. Нека $C$ е изброимо множество от статични константи, нови за $\mathbf{L}_3$. С $\vdash_{PITL^-,1}$ означаваме релацията на изводимост в $\mathbf{L}_3(C)$, в която са допустими само частните случаи на специфичните за $PITL$ аксиоми и правила, попадащи в някой от езиците $\mathbf{L}_{1,1}$, ..., $\mathbf{L}_{1,n}$. С $\vdash_{PITL^-,3}$ означаваме релацията на изводимост в $\mathbf{L}_3(C)$, в която са допустими само частните случаи на специфичните за $PITL$ аксиоми и правила, попадащи във някой от езиците $\mathbf{L}_{1,1}$, ..., $\mathbf{L}_{1,n}$ и $\mathbf{L}_2$.

С $PITL^-_{\mathrm{L}_i(C)}$ означаваме $\{\varphi : \varphi$ е формула от $\mathbf{L}_i(C), \vdash_{PITL^-} \varphi\}$, $i = 1, 3$. Нека преводът $\mathsf{t}$ е определен за $\mathbf{L}_3(C)$ по начина, описан в подпараграф 7.3.1. Тогава $\mathsf{t}(Cn_{PITL^-,i}(\Gamma)) = Cn_{NL}(\mathsf{t}(\Gamma \cup PITL^-_{\mathrm{L}_i(C)}))$. Доказателството на това равенство е като на твърдение 7.19. Това означава, че допускането за неотделимостта на $Cn_{PITL^-,1}(\{\varphi\})$ и $Cn_{PITL}(\{\neg\psi\})$, където $\varphi$ и $\psi$ са формули съответно от $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$, с формула от $\mathbf{L}_0$ е равносилно на допускането за неотделимостта на $Cn_{NL}(\mathsf{t}(\{\varphi\} \cup PITL^-_{\mathrm{L}_1(C)}))$ и $Cn_{NL}(\mathsf{t}(\{\neg\psi\} \cup PITL_{\mathrm{L}_2(C)}))$ с формула от $(\mathbf{L}_0)_{NL}$. Последното води до изпълнимостта в модел на $(\mathbf{L}_3)_{NL}$ на $\mathsf{t}(\varphi \wedge \neg\psi)$ едновременно с $\mathsf{t}(PITL^-_{\mathrm{L}_1(C)} \cup PITL_{\mathrm{L}_2(C)})$. Това означава, че допускането, че за всяка формула $\theta$ от $\mathbf{L}_0$ или $\nvdash_{PITL^-,1} \varphi \Rightarrow \theta$, или $\nvdash_{PITL} \theta \Rightarrow \psi$, опровергава допускането, че $\vdash_{PITL^-,3} \varphi \Rightarrow \psi$. В сила е следното твърдение:

**Твърдение 7.24** *Ако $\varphi$ и $\psi$ са формули съответно от $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ и $\vdash_{PITL^-,3} \varphi \Rightarrow \psi$, то съществува формула $\chi$ такава, че $\vdash_{PITL^-,1} \varphi \Rightarrow \chi$, $\vdash_{PITL} \chi \Rightarrow \psi$ и всеки символ, участвуващ в $\chi$, освен може би 0, 1, +, $\leq$ и $\ell$, участвува и във $\varphi$ и в $\psi$.*

Любопитно е да се забележи, че ако $\varphi$ и $\psi$ нямат общи темпорални символи, освен може би $\ell$, горното твърдение може да се усили. Тогава интерполантът може да

се избере да съдържа само статични символи и $\ell$. Следното твърдение показва, че такива формули са еквивалентни на формули от твърде специален вид.

**Твърдение 7.25** *Нека $\varphi$ е формула от езика $\mathbf{L}$ на $PITL$, съдържаща само статични символи и, евентуално, $\ell$. Тогава $\varphi$ е еквивалентна спрямо $\vdash_{PITL}$ на формула от вида $\exists x(\ell = x \wedge \psi)$, където $\psi$ е статична формула без модални оператори.*

**Доказателство:** Доказваме твърдението с индукция по броя на $p$-термовете и участията на $\Diamond_l$ и $\Diamond_r$ във $\varphi$, включително в $p$-термовете, участвуващи във $\varphi$. Ако $\varphi$ не съдържа тези оператори, нито $p$-термове, то $\varphi$ има вида $[\ell/x]\psi$, където $\psi$ е статична формула. Тогава очевидно $\varphi \Leftrightarrow \exists x(\ell = x \wedge \psi)$ е общовалидна формула. Иначе е налице един от следните случаи:

1. $\varphi$ съдържа подформула $\varphi'$ от вида $\Diamond_l\psi'$ или $\Diamond_r\psi'$, където $\psi'$ не съдържа модален оператор, нито $p$-термове, или $\varphi$ съдържа терм от вида $p(\alpha)$, където $\alpha$ съдържа подформула от вида на $\varphi'$. Тогава, както по-горе, $\psi'$ е еквивалентна на $\exists x(\ell = x \wedge [x/\ell]\psi')$, където $x$ е нова за $\psi'$ индивидна променлива. Сега е лесно да се забележи, че $\Diamond_d(\exists x(\ell = x \wedge [x/\ell]\psi')) \Leftrightarrow \exists x[x/\ell]\psi'$ е общовалидна в $NL$, $d \in \{l, r\}$. Заместваме $\varphi'$ с $\exists x[x/\ell]\psi'$ във $\varphi$, включително и в $p$-термовете във $\varphi$. Получаваме еквивалентна на $\varphi$ формула, но с по-малко участия на операторите $\Diamond_l$ и $\Diamond_r$. Еквивалентността в случая, когато имаме заместване в $p$-термове, следва от равенството на $p$-термовете на еквивалентни формули (вж. $P_{\Leftrightarrow}$).

2. $\varphi$ съдържа терм от вида $p(\psi')$, където $\psi'$ е както в предходния случай. Тогава изводът

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\Diamond_l^c\psi' \Leftrightarrow \Diamond_l^c\exists x([x/\ell]\psi' \wedge 0 \leq x)$ | $NL$ |
| 2 | $p(\psi') = p(\exists x([x/\ell]\psi' \wedge 0 \leq x))$ | 1, $P_{\Leftrightarrow}$ |
| 3 | $\exists x([x/\ell]\psi' \wedge 0 \leq x) \Rightarrow (\Diamond_l^c\top \Rightarrow \Diamond_l^c(\exists x([x/\ell]\psi' \wedge 0 \leq x)))$ | $NL$ |
| 4 | $\exists x([x/\ell]\psi' \wedge 0 \leq x) \Rightarrow p(\exists x([x/\ell]\psi' \wedge 0 \leq x)) = 1$ | 3, $P_\Diamond$, $P_\top$, $P_{p(.)\leq 1}$, $NL$ |
| 5 | $\neg\exists x([x/\ell]\psi' \wedge 0 \leq x) \Rightarrow (\Diamond_l^c(\exists x([x/\ell]\psi' \wedge 0 \leq x)) \Rightarrow \Diamond_l^c\bot)$ | $NL$ |
| 6 | $\neg\exists x([x/\ell]\psi' \wedge 0 \leq x) \Rightarrow p(\exists x([x/\ell]\psi' \wedge 0 \leq x)) = 0$ | 5, $P_\Diamond$, $P_\bot$, $P_{0\leq p(.)}$, $NL$ |
| 7 | $(\exists x([x/\ell]\psi' \wedge 0 \leq x) \wedge p(\psi') = 1)\vee$ $\vee(\neg\exists x([x/\ell]\psi' \wedge 0 \leq x) \wedge p(\psi') = 0)$ | 2, 4, 6, $NL$ |

показва, че за произволна атомарна формула $\gamma$ $[p(\psi')/x]\gamma$ е еквивалентна на

$$(\exists x([x/\ell]\psi' \wedge 0 \leq x) \wedge [1/x]\gamma) \vee (\neg\exists x([x/\ell]\psi' \wedge 0 \leq x) \wedge [0/x]\gamma).$$

Както в предходния случай, заместваме във $\varphi$ всички участия на атомарни формули от вида $[p(\psi')/x]\gamma$ с еквивалентните им, които не съдържат $p$. Отново получаваме еквивалентна на $\varphi$ формула, но с по-малко $p$-термове. $\dashv$

Следващата теорема се отнася до интерполация, при която интерполантът се избира не само от ограничен език, но и така, че да изразява свойства на интерпретацията в определена част от времевата област на разглежданите модели. Нека е даден език $\mathbf{L}$ на $NL$. Нека $\mathbf{L}'$ е език на $NL$, в който участвуват статичните символи от $\mathbf{L}$ и който за всеки темпорален символ $s$ освен $\ell$ съдържа нов символ $s'$ от същия вид и със същата арност като $s$. Нека за всяка формула $\varphi$ от $\mathbf{L}$ с $\varphi'$ означаваме резултата от заместването във $\varphi$ на участията на темпоралните символи със съответните им символи от $\mathbf{L}'$. Нека $\mathbf{L}'$ е езикът на $NL$, образуван със символите от $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$. Нека с $\mathbf{L}''$ означим езика на $NL$, чиито символи са символите на $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$. За да формулираме теоремата, ще е удобно да определим понятие за неотделимост между множества от формули от $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$.

**Дефиниция 7.26** Нека $\Gamma$ и $\Gamma'$ са множества от формули съответно в $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$. Нека $c_0$, $c_1$, $c_2$ и $c_3$ са статични константи в $\mathbf{L}$. $\Gamma$ и $\Gamma'$ са *$c_0, c_1, c_2, c_3$-неотделими отляво*, ако не съществува ретроспективна формула $\varphi$ от $\mathbf{L}$ такава, че множествата $\Gamma \cup \{[\varphi/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}\}$ и $\Gamma' \cup \{[\neg\varphi'/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}\}$ да са противоречиви.

Неотделимост отдясно, разбира се, може да се определи по аналогичен начин. За нашите приложения обаче е полезна неотделимостта отляво.

**Теорема 7.27** *Нека* $\Gamma$ *и* $\Gamma'$ *са* $c_0, c_1, c_2, c_3$*-неотделими отляво множества от формули съответно от* $\mathbf{L}$ *и* $\mathbf{L}'$*. Нека* $\Delta = \{[\Box_r^c \forall(\varphi \Leftrightarrow \varphi')/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} : \varphi$ *е ретроспективна формула от* $\mathbf{L}\}$*. Тогава множеството от формули* $\Gamma \cup \Gamma' \cup \Delta$ *от езика* $\mathbf{L}''$ *е непротиворечиво.*

**Доказателство:** Доказателството е аналогично на това на теорема 7.22. Допускаме противното. Строим модел за $\mathbf{L}''$, изпълняващ $\Gamma \cup \Gamma' \cup \Delta$. Нека $C$ е изброимо множество от статични константи, нови за $\mathbf{L}''$. Нека формулите от езиците $\mathbf{L}(C)$ и $\mathbf{L}'(C)$ образуват множествата $\{\varphi_i : i < \omega\}$ и $\{\psi_i : i < \omega\}$. Строим растящите редици от теории в $\Gamma_i$ и $\Gamma'_i$, $i < \omega$ съответно в $\mathbf{L}(C)$ и $\mathbf{L}'(C)$ със свойството $\Gamma_i$ и $\Gamma'_i$ да са $c_0, c_1, c_2, c_3$-неотделими отляво за всяко $i < \omega$ по следния начин. Полагаме $\Gamma_0 = Cn(\Gamma)$, $\Gamma'_0 = Cn(\Gamma')$. Ако $\Gamma_i + \varphi_i$ и $\Delta_i$ са $c_0, c_1, c_2, c_3$-отделими отляво, то $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$. Иначе разглеждаме случаите:

1. $\varphi_i$ има вида $\exists x\varphi'$. Нека $d \in C$ и $d$ не се среща във $\varphi_j$, $\psi_j$, $j \leq i$. Тогава $\Gamma_i + \varphi_i + [d/x]\varphi'$ и $\Gamma'_i$ също са неотделими. Полагаме $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i + \varphi_i + [d/x]\varphi'$.
2. $\varphi_i$ не е от горния вид. Тогава полагаме $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i + \varphi_i$.

$\Gamma'_{i+1}$ се определя по аналогичен начин, в зависимост от отделимостта на $\Gamma_{i+1}$ и $\Gamma'_i + \psi_i$. Сега нека $\Gamma_\omega = \bigcup\limits_{i<\omega} \Gamma_i$ и $\Gamma'_\omega = \bigcup\limits_{i<\omega} \Gamma'_i$. $\Gamma_\omega$ и $\Gamma'_\omega$ съдържат $\ell = c_0$. Иначе съществува $j < \omega$ такова, че $\Gamma_j \cup \{[\top/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}\}$ е противоречиво, защото $\vdash_{NL} [\top/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \Rightarrow \ell = c_0$, а $\Gamma'_j \cup \{[\neg\top/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}\}$ е противоречиво независимо от избора на $\Gamma'_j$. По подобни причини $0 \leq c_1, 0 \leq c_2, 0 \leq c_3 \in \Gamma_\omega, \Gamma'_\omega$. $\Gamma_\omega$ и $\Gamma'_\omega$ са пълни теории съответно в $\mathbf{L}(C)$ и $\mathbf{L}'(C)$. Допускаме, че $\varphi, \neg\varphi \notin \Gamma_\omega$ за някоя формула $\varphi$ от $\mathbf{L}(C)$. Тогава съществуват $j < \omega$ и ретроспективни формули $\chi_1$ и $\chi_2$ от $\mathbf{L}(C)$ такива, че $\ell = c_0 \in \Gamma_j, \Gamma'_j$, $\Gamma_j \cup \{\varphi, [\chi_1/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}\}$, $\Gamma_j \cup \{\neg\varphi, [\chi_2/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}\}$, $\Gamma'_j \cup \{[\neg\chi'_1/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}\}$ и $\Gamma_j \cup \{[\neg\chi'_2/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}\}$ са противоречиви. Тогава, тъй като $\ell = c_0 \in \Gamma_j, \Gamma'_j$, от лема 7.21 следва, че $[\chi'_1/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$, $[\chi'_2/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \in \Gamma'_j$. Оттук следва, че $[\neg\chi_1 \wedge \chi_2/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \in \Gamma_j$ и $[\chi'_1 \wedge \chi'_2/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \in \Gamma'_j$, което противоречи на $c_0, c_1, c_2, c_3$-неотделимостта отляво на $\Gamma_j$ и $\Gamma'_j$, защото $\chi_1 \wedge \chi_2$ също е ретроспективна формула и $(\chi_1 \wedge \chi_2)'$ е $\chi'_1 \wedge \chi'_2$. Следователно, или $\varphi \in \Gamma_\omega$, или $\neg\varphi \in \Gamma_\omega$ за всяка формула $\varphi$ от $\mathbf{L}(C)$. Аналогично се установява и пълнотата на $\Gamma'_\omega$.

$\Gamma_\omega$ и $\Gamma'_\omega$ очевидно са Хенкинови теории със свидетели в $C$. От компактността на $\vdash_{NL}$ като следствие на неотделимостта отляво на $\Gamma_i$ и $\Gamma'_i$ за $i < \omega$ получаваме, че $\Gamma_\omega$ и $\Gamma'_\omega$ също са $c_0, c_1, c_2, c_3$-неотделими отляво. Нека $\alpha$ е статична формула от $\mathbf{L}(C)$. Тогава $\alpha$ съвпада с $\alpha'$. Освен това, тъй като по лема 7.21 $\vdash_{NL} \ell = c_0 \wedge 0 \leq c_1 \wedge 0 \leq c_2 \wedge 0 \leq c_3 \Rightarrow (\alpha \Rightarrow [\alpha/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3})$, от неотделимостта на $\Gamma_\omega$ и $\Gamma'_\omega$ следва, че или $\alpha \in \Gamma_\omega, \Gamma'_\omega$, или $\neg\alpha \in \Gamma_\omega, \Gamma'_\omega$.

Нека $\langle F, I\rangle$ и $\langle F', I'\rangle$ са каноничните модели на $\Gamma_\omega$ и $\Gamma'_\omega$. Както знаем от построението на тези модели, техните области от продължителности се определят еднозначно от статичните формули, образувани само с помощта на статични константи от $C$, 0, $+$ и $\leq$ съответно в теориите $\Gamma$ и $\Gamma'$, а времевите им области са изоморфни на областите им от продължителности. Освен това интерпретациите на статичните символи се определят еднозначно от статичните формули в съответните теории. Както установихме по-горе, този вид формули в $\Gamma$ и $\Gamma'$ са едни и същи. Следователно $F$ и $F'$ съвпадат, и $I$ и $I'$ съвпадат за статичните символи. Оттук следва, че можем да определим интерпретация $I''$ на символите от $\mathbf{L}''$ в $F'' = F = F'$, която да е разширение едновременно на $I$ и $I'$, като при това съществува интервал $\sigma \in \mathbf{I}(T_{F''})$ такъв, че $\langle F'', I''\rangle, \sigma \models \Gamma_\omega \cup \Gamma'_\omega$.

Нека $\sigma' \in \mathbf{I}(T_{F''})$ е такъв, че за някое $\tau'' \in T_F$, $\tau'' \geq \max\sigma, \max\sigma'$, са изпълнени равенствата $I''(c_1) = m_F([\max\sigma, \tau''])$, $I''(c_2) = m_{F''}([\max\sigma', \tau''])$ и $I''(c_3) = m_{F''}(\sigma)$. Тези равенства определят $\sigma'$ еднозначно. Тогава за всяка формула $\varphi$ от $\mathbf{L}''$ $\langle F'', I''\rangle, \sigma' \models \varphi$ е равносилно на $\langle F'', I''\rangle, \sigma \models [\varphi/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$. Ако $\varphi$ от $\mathbf{L}$ е ретроспективна, за $\langle F'', I''\rangle, \sigma' \models \Box_r^c \forall(\varphi \Leftrightarrow \varphi')$ е достатъчно за всеки темпорален символ $s$ от $\varphi$ да съвпадат ограниченията на $I''(s)$ и $I''(s')$ в интервали с десен край вляво от $\max\sigma'$. Следователно, за да докажем, че за всяка ретроспективна $\varphi$ от $\mathbf{L}$ имаме $\langle F'', I''\rangle, \sigma \models$

$[\Box_r^c\forall(\varphi \Leftrightarrow \varphi')/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$, откъдето би следвала теоремата, е достатъчно да докажем, че ограниченията на $I''(s)$ и $I''(s')$ в интервали с десен край вляво от $\max\sigma'$ съвпадат за всеки темпорален символ $s$ от $\mathbf{L}$.

Нека $\sigma'' \in \mathbf{I}(T_{F''})$, $\max\sigma'' \leq \max\sigma'$, $s$ е $n$-местен темпорален релационен символ от $\mathbf{L}$, $a_1,\ldots,a_n \in D_{F''}$ и $d_1,\ldots,d_n,e_1,e_2 \in C$ са такива, че $I''(d_i) = a_i$, $i = 1,\ldots,n$, $I''(e_1) = m(\sigma'')$ и $I''(e_2) = m([\max\sigma'', \max\sigma'])$. Константи с тези стойности в $\langle F'', I''\rangle$ съществуват по построение. Нека $\alpha \rightleftharpoons (\top; \ell = 0 \wedge \Diamond_l(\ell = e_2 \wedge \Diamond_l(\ell = e_1 \wedge s(d_1,\ldots,d_n))))$. Тъй като $\alpha$ е ретроспективна, а $\Gamma_\omega$ и $\Gamma'_\omega$ са $c_1,c_2,c_3$-неотделими отляво, или $\Gamma_\omega \ni [\alpha/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$ и $\Gamma'_\omega \ni [\alpha'/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$, или $\Gamma_\omega \ni [\neg\alpha/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$ и $\Gamma'_\omega \ni [\neg\alpha'/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$. В първия случай общата стойност на $I''(s)(\sigma'', a_1,\ldots,a_n)$ и $I''(s)(\sigma'', a_1,\ldots,a_n)$ е 1, а във втория - 0. По подобен начин се получава съвпадането на интерпретациите и за функционални символи $s$. $\dashv$

Отношението на горната теорема към интерполацията може да се изрази по следния начин:

**Следствие 7.28** *Нека $\Phi$ е крайно множество от ретроспективни формули от $\mathbf{L}$. Нека $\psi$ и $\chi$ са формули, а $c_1$, $c_2$ и $c_3$ са статични константи от $\mathbf{L}$. Тогава, ако $\vdash_{NL} \bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi} [\Box_r^c\forall(\varphi \Leftrightarrow \varphi')/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi')$, то съществува ретроспективна формула $\theta$ от $\mathbf{L}$ такава, че $\vdash_{NL} \ell = c_0 \wedge 0 \leq c_1 \wedge 0 \leq c_2 \wedge 0 \leq c_3 \Rightarrow (\psi \Rightarrow [\theta/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3})$ и $\vdash_{NL} [\theta'/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \Rightarrow \chi'$.*

**Доказателство:** Ако допуснем противното, то от лема 7.21 следва, че $\{\psi\}$ и $\{\neg\chi'\}$ са $c_0,c_1,c_2,c_3$-неотделими отляво, откъдето по теорема 7.27 следва непротиворечивостта на $\{[\Box_r^c\forall(\varphi \Leftrightarrow \varphi')/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} : \varphi \in \Phi\} \cup \{\psi, \neg\chi'\}$. $\dashv$

Както и в случая на интерполационната теорема на Крейг, горната теорема може да се формулира и по отношение на изводимост с ограничения върху допустимостта на частните случаи на специфичните за $PITL$ аксиоми и правила. Нека имаме езици $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$ на $PITL$, в които темпоралните символи се намират в описаното по-горе съответствие. Нека освен това имаме езиците $\mathbf{L}_{1,1}$, ..., $\mathbf{L}_{1,n}$, които имат същите статични символи като $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$ и нямат общи темпорални символи с $\mathbf{L}'$ освен $\ell$. Нека, както и в твърдение 7.24, $\mathbf{L}_1$ е обединението на $\mathbf{L}_{1,1}$, ..., $\mathbf{L}_{1,n}$ и $\mathbf{L}$. Нека $\mathbf{L}'$ има ролята на $\mathbf{L}_2$. Нека $\mathbf{L}_3$ е обединението на $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}'$. Нека $\vdash_{PITL^-,1}$ е изводимостта в $\mathbf{L}_3$, при която се допускат само частните случаи на специфичните за $PITL$ аксиоми и правила, които съдържат формули или само от $\mathbf{L}_{1,i}$, $i = 1,\ldots,n$, или само от $\mathbf{L}$. Нека $\vdash_{PITL^-,3}$ е изводимостта в $\mathbf{L}_3$, при която се допускат само частните случаи на специфичните за $PITL$ аксиоми и правила, които съдържат формули или само от $\mathbf{L}_{1,i}$, $i = 1,\ldots,n$, или само от $\mathbf{L}$, или само от $\mathbf{L}'$.

**Твърдение 7.29** *Нека $\Gamma$ и $\Gamma'$ са множества от формули съответно от $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}'$. Нека $c_0$, $c_1$, $c_2$ и $c_3$ са статични константи от $\mathbf{L}_1$, което означава - и от $\mathbf{L}'$. Нека не съществува ретроспективна формула $\varphi$ от $\mathbf{L}$ такава, че $\Gamma \cup \{[\varphi/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}\}$ и $\Gamma' \cup \{[\neg\varphi/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}\}$ да са противоречиви съответно спрямо $\vdash_{PITL^-,1}$ и $\vdash_{PITL}$. Нека $\Delta = \{[\Box_r^c\forall(\varphi \Leftrightarrow \varphi')/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} : \varphi$ е ретроспективна формула от $\mathbf{L}\}$. Тогава множеството от формули $\Gamma \cup \Gamma' \cup \Delta$ е непротиворечиво спрямо $\vdash_{PITL^-,3}$.*

Доказателството на това твърдение се получава от това на теорема 7.27 по начина, посочен за получаването на твърдение 7.24.

**Следствие 7.30** *Нека $\Phi$ е крайно множество от ретроспективни формули от $\mathbf{L}$. Нека $\psi$ е формула от $\mathbf{L}_1$, $\chi$ е формула от $\mathbf{L}$, а $c_1$, $c_2$ и $c_3$ са статични константи от $\mathbf{L}$. Тогава, ако $\vdash_{PITL^-,3} \bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi} [\Box_r^c\forall(\varphi \Leftrightarrow \varphi')/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi')$, то съществува ретроспективна формула $\theta$ от $\mathbf{L}$ такава, че $\vdash_{PITL^-,1} \ell = c_0 \wedge 0 \leq c_1 \wedge 0 \leq c_2 \wedge 0 \leq c_3 \Rightarrow (\psi \Rightarrow [\theta/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3})$ и $\vdash_{PITL} [\theta'/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \Rightarrow \chi'$.*

Това следствие се получава както следствие 7.28.

**Забележки**

Свързаната с интервалната семантика на $NL$ нова интерполационна теорема, както и известната теорема на Крейг, могат да се формулират и за $DC$ с абстрактна семантика. За доказването им е достатъчно най-напред да бъдат получени за $ITL_{fin}(\Omega)$, а след това да се премине към $DC$ по начина, показан в глава 6. При това в построяването на пълните неотделими теории в доказателствата на тези теореми трябва да се отчете присъствието на $\omega$-правилото, както това е направено в доказателството на теорема 6.12. Ролята на контекста $\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$ следва да се поеме от контекст, образуван само с $(.;.)$, а условието в теоремите някои формули да са ретроспективни се обезсмисля и отпада.

### 7.3.5 Модел на произволно отнапред зададено непротиворечиво множество от формули в $PITL$ в диаграмния език

В този подпараграф се връщаме към построения в подпараграф 7.3.2 по произволно зададен език $\mathbf{L}$ съответен нему език $\mathbf{L}_\omega$ и използуваме означенията, въведени при това построение. Най-напред доказваме, че за произволно отнапред зададено непротиворечиво спрямо $\vdash_{PITL}$ множество от формули $\Gamma$ от $\mathbf{L}$ на $PITL$ съществува пълно Хенкиново разширение $\Gamma_\omega$ на $\Gamma^\emptyset$ в $\mathbf{L}_\omega$ със свидетели в $C_\omega$ и със следното допълнително свойство: Нека $F$ е (двусортната) канонична структура на $\mathsf{t}(\Gamma_\omega)$ за езика $(\mathbf{L}_\omega)_{NL}$ на $NL$, съответен на $\mathbf{L}_\omega$. Нека за всяко $\nu \in S_\omega$ с помощта на подходящи затворени формули от вида $\varphi^\nu$ от $\Gamma_\omega$, $\varphi \in \mathbf{L}(C_\omega)$, съдържащи статичните символи $s$ от $\mathbf{L}(C_\omega)$ и темпорални символи $s^\nu$ с индекс $\nu$, канонично е определена интерпретация $I^\nu$ на съответните статични и темпорални символи $s$ от $\mathbf{L}(C_\omega)$. Видът на $\Gamma_\omega$ позволява множеството от тези интерпретации да послужат за образуването на модел за $\mathbf{L}$, изпълняващ $\Gamma$ при интерпретацията, съответна на $\emptyset \in S_\omega$ и в подходящо избран интервал. След построяването на $\Gamma_\omega$ построяваме този модел. Завършваме подпараграфа с теорема за пълнотата на $\vdash_{PITL}$, която възможността на тези построения доказва.

$\Gamma_\omega$ се получава като обединение на изброима редица от приближения $\Gamma_k$, $k < \omega$, като за всяко $k < \omega$ $\Gamma_k$ е пълна Хенкинова теория в $\mathbf{L}_k$ с допълнителни свойства, достатъчни за получаването на набелязаното по-горе за $\Gamma_\omega$.

Теорията $\Gamma_\omega$ и приближенията ѝ $\Gamma_k$, $k < \omega$ разглеждаме относно изводимостта $\vdash_{PITL^-}$, която се получава от $\vdash_{PITL}$ с допускането само на тези частни случаи на специфичните за $PITL$ аксиоми и правила, които съдържат само темпорални символи с един и същ горен индекс $\nu$, т.е. изцяло попадат в някой от езиците $\mathbf{L}^\nu$, $\nu \in S_\omega$.

Определяме $\Gamma_0$ като произволно пълно в $\mathbf{L}_0$ Хенкиново разширение на $\Gamma^\emptyset$ със свидетели в $C_0$. Такова съществува вследствие на теорема 7.16. Нека $c_0 \in C_0$ е такава, че $\ell = c_0 \in \Gamma_0$.

Нека е определена $\Gamma_k$. Определяме $\Gamma'_{k+1}$ като разширението на $\Gamma_k$ в $\mathbf{L}'_{k+1}$, породено с добавянето на формулите, избрани по следния начин:

Нека $\nu' = \langle \varphi, \psi, \nu, c_1, c_2, c_3 \rangle \in S_{k+1}$. Нека $c_1 \doteq 0$ или $c_2 \doteq 0$. Нека $\Gamma_k \ni [(p(\psi) < p(\varphi))^\nu / R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$. Тогава $\Gamma'_{k+1} \ni [\Box_r^c \forall(\chi^\nu \Leftrightarrow \chi^{\nu'})/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$ за всяка ретроспективна формула $\chi \in \mathbf{L}$ и $\Gamma'_{k+1} \ni [\Diamond_l^c \varphi^{\nu'} \wedge \neg\Diamond_l^c \psi^{\nu'}/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$.

**Лема 7.31** *Теорията $\Gamma'_{k+1}$ е непротиворечива.*

**Доказателство:** Допускаме противното. Нека $\Xi$ е крайно противоречиво подмножество на $\Gamma'_{k+1}$. Броят на онези $\nu' \in S_{k+1} \setminus S_k$, за които $\Xi$ съдържа формула, в която участвува темпорален символ с индекс $\nu'$, е краен. Доказваме, че този брой може да бъде сведен до 0 с подходящ избор на $\Xi$, установявайки, че допускането за участието на всеки индекс $\nu' \in S_{k+1}$ във формулите от $\Xi$ може да бъде заменено с допускането, че $\Xi$ съдържа подходящо избрани формули от $\Gamma_k$, като при това предполагаемата

противоречивост на $\Xi$ се запазва. Това позволява от допускането за противоречивостта на $\Gamma'_{k+1}$ да получим, че е противоречива $\Gamma_k$, което е противоречие.

При доказателството използуваме следствие 7.30 така: Нека в $\Xi$ участвуват темпорални символи с индекси $\nu', \nu_1, \ldots, \nu_n \in S_{k+1}$, $\nu \in S_k$, като $\nu'$ има вида $\nu' = \langle \varphi, \psi, \nu, c_1, c_2, c_3 \rangle$. Тогава формулите от $\Xi$ попадат в обединението на езиците $\mathbf{L}^{\nu}$, $\mathbf{L}^{\nu_1}$, $\ldots$, $\mathbf{L}^{\nu_n}$ и $\mathbf{L}^{\nu'}$. Тези езици взимаме в качеството на $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}_{1,1}$, $\ldots$, $\mathbf{L}_{1,n}$ и $\mathbf{L}'$ от следствие 7.30. Обединението на тези езици вземаме в качеството на $\mathbf{L}_3$. При това за формули от $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_3$ изводимостта $\vdash_{PITL^-}$ съвпада съответно с $\vdash_{PITL^-,1}$ и $\vdash_{PITL^-,3}$. Съответствието между $\mathbf{L}^{\nu}$ и $\mathbf{L}^{\nu'}$ от условието на следствие 7.30 се получава при заместването на горните индекси $\nu$ на символите от $\mathbf{L}^{\nu}$ с $\nu'$.

Нека $\nu'$ е индекс на темпорален символ, участвуващ във формула от $\Xi$. Нека $\nu' = \langle \varphi, \psi, \nu, c_1, c_2, c_3 \rangle$ и $\varphi$, $\psi$, $\nu$ и $c_1$, $c_2$ и $c_3$ изпълняват условието $\Gamma_k \ni [p(\varphi^{\nu}) > p(\psi^{\nu})/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$ за включването в $\Gamma'_{k+1}$ на всички формули от вида $[\Box_r^c \forall(\chi^{\nu} \Leftrightarrow \chi^{\nu'})/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$, където $\chi$ е ретроспективна формула от $\mathbf{L}$, и на формулата $[\Diamond_l^c \varphi^{\nu'} \wedge \neg \Diamond_l^c \psi^{\nu'}/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$.

Допускаме, че $\Xi$ съдържа последната от тези формули, $\ell = c_0$, $0 \leq c_1$, $0 \leq c_2$, $0 \leq c_3$, $[p(\varphi^{\nu}) > p(\psi^{\nu})/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$, формулите $[\Box_r^c \forall(\chi_i^{\nu} \Leftrightarrow \chi_i^{\nu'})/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$ за $i = 1, \ldots, r$ и не съдържа други формули с участие на темпорални символи с индекс $\nu'$. Нека $\alpha$ е конюнкция на формулите от $\Xi$, в които не участвуват темпорални символи с индекс $\nu'$.

Тогава с помощта на лема 7.21 се получава

$$\vdash_{PITL^-} \bigwedge_{i=1}^{r} [\Box_r^c \forall(\chi_i^{\nu} \Leftrightarrow \chi_i^{\nu'})/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \Rightarrow (\alpha \Rightarrow [\Diamond_l^c \varphi^{\nu'} \Rightarrow \Diamond_l^c \psi^{\nu'}/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}).$$

В $\alpha$ не участвуват символи с индекс $\nu'$. Според следствие 7.30, оттук следва, че съществува ретроспективна формула $\theta$ от $\mathbf{L}(C_{\leq k})$ такава, че

$$\vdash_{PITL^-} \alpha \Rightarrow [\theta^{\nu}/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$$

и

$$\vdash_{PITL} [\theta^{\nu'}/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \Rightarrow ([\Diamond_l^c \varphi^{\nu'}/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \Rightarrow [\Diamond_l^c \psi^{\nu'}/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}).$$

Замествайки в последната формула всички участия на индекс $\nu'$ на темпорални символи със $\nu$, получаваме, че

$$\vdash_{PITL} [\theta^{\nu}/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \Rightarrow ([\Diamond_l^c \varphi^{\nu}/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \Rightarrow [\Diamond_l^c \psi^{\nu}/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}).$$

По лема 7.21 оттук следва

$$\vdash_{PITL} \theta^{\nu} \Rightarrow \Diamond_l^c \varphi^{\nu} \Rightarrow \Diamond_l^c \psi^{\nu}.$$

По правилото $P_{\Diamond}$ от последното получаваме $\vdash_{PITL} \theta^{\nu} \Rightarrow \neg(p(\varphi^{\nu}) > p(\psi^{\nu}))$, откъдето, отново по лема 7.21,

$$\vdash_{PITL^-} \alpha \Rightarrow \neg[p(\varphi^{\nu}) > p(\psi^{\nu})/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}.$$

Но $[p(\varphi^{\nu}) > p(\psi^{\nu})/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$ по условие участвува в конюнкцията $\alpha$. Следователно, резултатът от изваждането от $\Xi$ на формулите, в които участвуват темпорални символи с индекс $\nu'$, също е противоречиво множество от формули. $\dashv$

Определяме $\Gamma_{k+1}$ като пълно в $\mathbf{L}_{k+1}$ Хенкиново със свидетели в $C_{k+1}$ разширение на $\Gamma'_{k+1}$.

Очевидно $\Gamma_{k+1} \supseteq \Gamma_k$ за всяко $k < \omega$. Всяко крайно множество от формули от $\mathbf{L}_{\omega}$ и в частност - множеството от предпоставките на всеки извод в $\mathbf{L}_{\omega}$, изцяло се съдържа в $\mathbf{L}_k$ за някое $k$, и теорията $\Gamma_k$ е пълна и Хенкинова в $\mathbf{L}_k$. Затова $\Gamma_{\omega}$, която определяме като обединението $\bigcup_{k<\omega} \Gamma_k$, е пълна в $\mathbf{L}_{\omega}$ теория и има свидетели в $C_{\omega}$.

Пристъпваме към построяването на модел за $\mathbf{L}$ по $\Gamma_\omega$.

С непосредствена проверка с помощта на твърдение 7.20 се установява, че $\mathsf{t}(\Gamma_\omega)$, е пълна в $(\mathbf{L}_\omega)_{NL}$ теория и има свидетели в $C_\omega$. Нека, съответно на набелязаното, $F = \langle\langle T, \leq\rangle, \langle D, +, 0, \leq\rangle, \langle U, +, 0, 1\rangle, m\rangle$ е (двусортната) канонична структура $\mathsf{t}(\Gamma_\omega)$ за $(\mathbf{L}_\omega)_{NL}$. Нека $I_{NL}$ е съответната канонична интерпретация. Нека $\sigma_0 \in \mathbf{I}(T)$ е такъв, че $\langle F, I_{NL}\rangle, \sigma_0 \models \mathsf{t}(\Gamma_\omega)$. Пример за построяването на $F$ и $I_{NL}$ за случая на $ITL$ дава глава 6.

Определяме интерпретациите $I^\nu$, $\nu \in S_\omega$, на символите $s$ от $\mathbf{L}$ в $F$, полагайки $I^\nu(s) = I_{NL}(s)$ и $I^\nu(x) = I_{NL}(x)$ за статични $s$, за $s \doteq \ell$ и за индивидни променливи $x$, и $I^\nu(s) = I_{NL}(s^\nu)$ за останалите темпорални $s$. Полагаме $\mathbf{M} = \{I^s : s \in S_\omega\}$.

За всяка интерпретация $I = I^\nu$ от $\mathbf{M}$, затворена формула $\varphi$ от $\mathbf{L}(C_\omega)$ и интервал $\sigma \in \mathbf{I}(T)$ с $\mathbf{M}_{I,\sigma,\varphi}$ означаваме множеството $\{I^{\nu'} \in \mathbf{M}_{I,\max\sigma} : \exists\tau \geq \min\sigma \langle F, I_{NL}\rangle, [\min\sigma, \tau] \models \mathsf{t}(\varphi^{\nu'})\}$.

Определяме системата $P$ от частичните функции $P_{I,\tau} : 2^{\mathbf{M}_{I,\tau}} \to U$ за $I \in \mathbf{M}$, $\tau \in T$, полагайки, при същите означения, $P_{I^\nu,\tau}(\mathbf{M}_{I^\nu,[\tau',\tau],\varphi}) = (I_{NL})_{[\tau',\tau]}(\mathsf{p}_{\mathsf{t}(\varphi^\nu)})$, където $\tau' \in T_F$ е произволно със свойството $\tau' \leq \tau$. В следващите леми установяваме, че това определение е коректно и частичните функции от $P$ имат набелязания вид.

**Лема 7.32** *Нека, при горните означения,* $(I_{NL})_{[\tau',\tau]}(\mathsf{p}_{\mathsf{t}(\varphi^\nu)}) > (I_{NL})_{[\tau',\tau]}(\mathsf{p}_{\mathsf{t}(\psi^\nu)})$. *Тогава съществува* $\nu' \in S$ *такова, че* $I^{\nu'} \in \mathbf{M}_{I^\nu,[\tau,\tau'],\varphi} \setminus \mathbf{M}_{I^\nu,[\tau,\tau'],\psi}$.

**Доказателство:** Нека $c_1, c_2, c_3 \in C^d_{\leq k}$ за някое $k < \omega$ и са такива, че: $c_1$ е 0 и $I_{NL}(c_2) = m([\tau, \max\sigma_0])$, ако $\tau \leq \max\sigma_0$; $c_2$ е 0 и $I_{NL}(c_1) = m([\max\sigma_0, \tau])$ в противен случай; $I_{NL}(c_3) = m([\tau', \tau])$. Тогава $\langle F, I_{NL}\rangle, \sigma_0 \models [\mathsf{t}(p(\varphi^\nu) > p(\psi^\nu))/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$. Оттук с непосредствена проверка, опираща се на $[\Diamond^c_r\forall(\chi^\nu \Leftrightarrow \chi^{\nu'})/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \in \Gamma_\omega$, където $\nu' = \langle\varphi, \psi, \nu, c_1, c_2, c_3\rangle$, за атомарни затворени $\chi$ се установява, че $I^{\nu'}$ е $\tau$-съгласувана с $I^\nu$, а от $[\Diamond^c_l\varphi^{\nu'} \wedge \neg\Diamond^c_l\psi^{\nu'}/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3} \in \Gamma_\omega$, се получава, че $\exists\tau'' \geq \tau' \langle F, I_{NL}\rangle, [\tau', \tau''] \models \mathsf{t}(\varphi^{\nu'})$ и $\forall\tau'' \geq \tau' \langle F, I_{NL}\rangle, [\tau', \tau''] \not\models \mathsf{t}(\psi^{\nu'})$. $\dashv$

**Лема 7.33** *Нека* $\tau', \tau'', \tau \in T$, $\tau', \tau'' \leq \tau$. *Нека* $\nu \in S_\omega$ *и* $\varphi$ *и* $\psi$ *са както по-горе. Нека* $\mathbf{M}_{I^\nu,[\tau',\tau],\varphi} = \mathbf{M}_{I^\nu,[\tau'',\tau],\psi}$. *Тогава* $(I_{NL})_{[\tau',\tau]}(\mathsf{p}_{\mathsf{t}(\varphi^\nu)}) = (I_{NL})_{[\tau'',\tau]}(\mathsf{p}_{\mathsf{t}(\psi^\nu)})$.

**Доказателство:** За определеност приемаме, че $\tau' \leq \tau''$. Съществува статична константа $c$ от $C_\omega$ такава, че $I_{NL}(c) = m([\tau', \tau''])$. Тогава $\mathbf{M}_{I^\nu,[\tau'',\tau],\psi} = \mathbf{M}_{I^\nu,[\tau',\tau],(\ell=c;\psi)}$. От лема 7.32 следва, че $(I_{NL})_{[\tau',\tau]}(\mathsf{p}_{\mathsf{t}(\varphi^\nu)}) = (I_{NL})_{[\tau',\tau]}(\mathsf{p}_{\mathsf{t}((\ell=c;\psi^\nu))})$. Нека константите $c_1$, $c_2$ и $c_3$ са избрани както в доказателството на лема 7.32. Тогава $\Gamma_\omega \ni [p(\varphi^\nu) = p((\ell = c; \psi^\nu))/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$. Нека $d$ е такава статична константа от $C_\omega$, че $\Gamma_\omega \ni [(\ell = c; p(\psi^\nu) = d)/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$. Тогава, тъй като $\Gamma_\omega \ni [(\ell = c; p(\psi) = d) \Rightarrow p((\ell = c; \psi^\nu)) = d/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$, защото последната заместваща $R$ формула е частен случай на $P_r$, имаме $(I_{NL})_{[\tau',\tau]}(\mathsf{p}_{\mathsf{t}((\ell=c;\psi^\nu))}) = I_{NL}(d) = (I_{NL})_{[\tau'',\tau]}(\mathsf{p}_{\mathsf{t}(\psi^\nu)})$, с което получаваме лемата. $\dashv$

**Лема 7.34** *Нека* $\nu \in S^\omega$, $\tau \in T$. *Тогава* $P_{I^\nu,\tau}$ *е вероятност.*

**Доказателство:** Равенствата $P_{I^\nu,\tau}(\mathbf{M}_{I^\nu,\tau}) = 1$ и $P_{I^\nu,\tau}(\emptyset) = 0$ следват от $\Gamma_\omega \ni [(p(\top) = 1)/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,0}, [(p(\bot) = 0)/R]\eta_{c_0,c_1,c_2,0}$ за $c_1$ и $c_2$ избрани както в доказателството на лема 7.32, защото $\mathbf{M}_{I^\nu,\tau} = \mathbf{M}_{I^\nu,[\tau,\tau],\top}$ и $\emptyset = \mathbf{M}_{I^\nu,[\tau,\tau],\top}$. $\Gamma_\omega$ съдържа горните формули по лема 7.21, вследствие на $P_\top$ и $P_\bot$.

Нека $\nu \in S_\omega$ е такова, че $I = I^\nu$, а $\mathbf{N}_1 = \mathbf{M}_{I,[\tau',\tau],\varphi}$ и $\mathbf{N}_2 = \mathbf{M}_{I,[\tau'',\tau],\psi}$, където $\varphi$ и $\psi$ са затворени формули от $\mathbf{L}(C_\omega)$ и, за определеност, $\tau' \leq \tau''$. Нека, както в доказателството на лема 7.33, $c \in C^\omega$ е такава, че $I_{NL}(c) = m([\tau', \tau''])$. Тогава $\mathbf{N}_2 = \mathbf{M}_{I,[\tau',\tau],(\ell=c;\psi)}$. Нека $\psi'$ е $(\ell = c; \psi)$. Тогава, тъй като $\vdash_{PITL} (\Diamond^c_l(\varphi \vee \psi') \Leftrightarrow \Diamond^c_l\varphi \vee \Diamond^c_l\psi')^\nu$ и $\vdash_{PITL} (\Diamond^c_l\varphi \wedge \Diamond^c_l\psi' \Leftrightarrow \Diamond^c_l((\varphi; \top) \wedge (\psi'; \top)))^\nu$, $\mathbf{N}_1 \cup \mathbf{N}_2 = \mathbf{M}_{I,[\tau',\tau],\varphi\vee\psi'}$ и $\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2 = \mathbf{M}_{I,[\tau',\tau],(\varphi;\top)\wedge(\psi';\top)}$. Нека $c_1$, $c_2$ и $c_3$ са избрани както в доказателството на лема 7.32. Тъй като $\Gamma_\omega$ съдържа резултата от заместването на $R$ в $\eta_{c_0,c_1,c_2,c_3}$ на частния случай на $P_+$ за $\varphi$ и $\psi'$, оттук следва, че $P_{I,\tau}(\mathbf{N}_1) + P_{I,\tau}(\mathbf{N}_2) = P_{I,\tau}(\mathbf{N}_1 \cup \mathbf{N}_2) + P_{I,\tau}(\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2)$. $\dashv$

Полученото дотук показва, че тройката $M = \langle F, \mathbf{M}, P\rangle$ е модел за $\mathbf{L}(C_\omega)$. Това, че $M, I^\emptyset, \sigma_0 \models \{\varphi : \varphi^\emptyset \in \Gamma_\omega\}$, е непосредствено следствие на $\langle F, I_{NL}\rangle, \sigma_0 \models \mathsf{t}(\Gamma_\omega)$ и на следното твърдение:

**Твърдение 7.35** *Нека $\sigma \in \mathbf{I}(T)$, $\nu \in S_\omega$, $t$ и $\varphi$ са съответно терм и формула от $\mathbf{L}(C_\omega)$. Тогава $(I^\nu)_\sigma(t) = (I_{NL})_\sigma(t^\nu)$ и $M, I^\nu, \sigma \models \varphi$ е равносилно на $\langle F, I_{NL}\rangle, \sigma \models \mathsf{t}(\varphi^\nu)$.*

**Доказателство:** Доказваме твърдението за всяка двойка модели $\langle F, \mathbf{M}, P\rangle$ и $\langle F, I_{NL}\rangle$ съответно за $\mathbf{L}(C_\omega)$ и $(\mathbf{L}_\omega)_{NL}$, свързани с горните дефиниращи интерпретациите от $\mathbf{M}$ и вероятностите от $P$ равенства и такива, че всички индивиди в $F$ да са стойности на статични константи от $C_\omega$, а в $\langle F, I_{NL}\rangle$ са валидни всички $\mathsf{t}$-преводи на формули от вида $\varphi^\nu$, където $\nu \in S_\omega$ и $\vdash_{PITL} \varphi$, и всички интервали $\sigma \in \mathbf{I}(T)$. Конкретната изходна двойка модели $\langle F, \mathbf{M}, P\rangle$ и $\langle F, I_{NL}\rangle$ изпълняват тези изисквания по построение. Доказателството е с едновременна индукция по дължината на $t$ и $\varphi$.

Случаите, в които $t$ е индивидна променлива или константа, или е образуван с въвеждането на функционален символ, са тривиални, за което ги пропускаме. Нека $t$ е $p(\varphi, t_1, \ldots, t_n)$. Нека $x_1, \ldots, x_n$ са свободните променливи на $\varphi$, взети в реда на първите им свободни участия във $\varphi$, без повторения. Нека $d_1, \ldots, d_n, d_{n+1} \in C_\omega$ са такива, че $\langle F, I_{NL}\rangle, \sigma \models t_i^\nu = d_i$, $i = 1, \ldots, n$ и $\langle F, I_{NL}\rangle, \sigma \models p(\varphi^\nu, d_1, \ldots, d_n) = d_{n+1}$. От теорема 7.15 получаваме, че

$$\vdash_{PITL} \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = d_i \Rightarrow (\varphi \Leftrightarrow [d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n]\varphi).$$

Оттук, по $P_\Leftrightarrow$,

$$\vdash_{PITL} \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = d_i \Rightarrow (p(\varphi, x_1, \ldots, x_n) = p([d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n]\varphi)).$$

Оттук, с помощта на $P_=$, получаваме

$$\vdash_{PITL} \bigwedge_{i=1}^{n} t_i = d_i \Rightarrow (p(\varphi, t_1, \ldots, t_n) = p([d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n]\varphi).$$

Според индукционното допускане $(I^\nu)_\sigma(t_i) = (I_{NL})_\sigma(\mathsf{t}(t_i^\nu)) = I_{NL}(d_i) = I^\nu(d_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Следователно, $(I^\nu)_\sigma(p(\varphi, t_1, \ldots, t_n)) = (I^\nu)_\sigma(p([d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n]\varphi))$. По същия начин се получава и

$$\vdash_{PITL} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} t_i = d_i \Rightarrow (p(\varphi, t_1, \ldots, t_n) = p([d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n]\varphi))\right)^\nu,$$

откъдето $\langle F, I_{NL}\rangle, \sigma \models \mathsf{t}((p(\varphi, t_1, \ldots, t_n) = p([d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n]\varphi))^\nu)$. Оттук получаваме, че $(I_{NL})_\sigma(\mathsf{t}(p(\varphi^\nu, t_1^\nu, \ldots, t_n^\nu))) = (I_{NL})_\sigma(\mathsf{p}_{\mathsf{t}([d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n]\varphi^\nu)})$. Остава да се докаже равенството $(I_{NL})_\sigma(\mathsf{p}_{\mathsf{t}([d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n]\varphi^\nu)}) = (I^\nu)_\sigma(p([d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n]\varphi))$. Тъй като $[d_1/x_1, \ldots, d_n/x_n]\varphi$ е затворена, това равенство е непосредствено следствие на дефиницията на $P_{I^\nu, \max\sigma}$.

Основата и всички случаи в индуктивната стъпка за равносилността на истинността на формули са тривиални, освен случая, когато $\varphi$ има вида $\exists x\psi$, за което ги пропускаме. За такава $\varphi$ $\langle F, I_{NL}\rangle, \sigma \models \mathsf{t}(\varphi^\nu)$ точно когато $\langle F, (I_{NL})_x^a\rangle, \sigma \models \mathsf{t}(\psi^\nu)$ за някой индивид $a$ от сорта на $x$ в $F$. Моделът $\langle F, (I_{NL})_x^a\rangle$ се намира в описаната в началото на доказателството връзка с модела $\langle F, \mathbf{M}, P\rangle_x^a$ за $\mathbf{L}(C_\omega)$ (вж. определението на това означение в параграф 7.1.2). Това се проверява непосредствено. Освен това, в този модел са валидни $\mathsf{t}$-преводите на всички формули от вида $\varphi^\nu$, където $\vdash_{PITL} \varphi$, защото $\vdash_{PITL} \varphi$ и $\vdash_{PITL} \forall\varphi$ са равносилни, а $\langle F, (I_{NL})_x^a\rangle$ и $\langle F, I_{NL}\rangle$ изпълняват едни и същи затворени формули в едни и същи интервали. Следователно, по индукционното допускане, съществуването на $a$ такова, че $\langle F, \mathbf{M}, P\rangle_x^a, (I^\nu)_x^a, \sigma \models \psi$, е равносилно на $\langle F, I_{NL}\rangle, \sigma \models \mathsf{t}(\varphi^\nu)$. Но това е равносилно и на $\langle F, \mathbf{M}, P\rangle, I^\nu, \sigma \models \varphi$. $\dashv$

## 7.4 Равенството на Чапмън-Колмогоров за оператора $(.;.)$

В този параграф изследваме изразителната способност на правилата $\underline{P}$ и $\overline{P}$, които не бяха използувани при установяването на пълнотата на системата за извод за $PITL$. Тези правила се отнасят за вероятностите на формули от вида $(\varphi;\psi)$. Този вид формули са средството на $ITL$ за описване на процеси, протичащи във времето на последователни етапи. Равенството на Чапмън-Колмогоров позволява пресмятането на вероятността в моделирана система да протече процес, състоящ се от два етапа, по вероятностите за протичане на всеки от етапите.

Нека $M = \langle F, \mathbf{M}, P\rangle$ е модел за процеса. Нека двата етапа на такъв процес са описани съответно с формулите $\varphi$ и $\psi$. Нека $M, I, \sigma \models \varphi$ изразява, че изучаваният процес навлиза в етап, описан чрез $\varphi$ в момент $\min\sigma$ и завършва етапа в момент $\max\sigma$. Естествено е на $\varphi$ да се наложи ограничението за всяка $I \in \mathbf{M}$ и всяко $\tau$ да има най-много едно $\tau' \geq \tau$ такова, че $M, I, [\tau, \tau'] \models \varphi$. Това ограничение е равносилно на валидността на формулата $\varphi \Rightarrow \neg(\varphi; \ell \neq 0)$ в $M$. То означава, че при фиксирано $\tau$ $\tau'$ с горното свойство е (частична) функция на $I$. Нека $I_0 \in \mathbf{M}$ и $\sigma$ е тривиален интервал от $\mathbf{I}(T_F)$. Нека $\tau = \min\sigma = \max\sigma$. Нека $f = \lambda I.P_{I,\tau'}(\mathbf{M}_{I',[\tau,\tau'],(\varphi;\psi)})$, където $\tau'$ е определено еднозначно от $I$ и $\tau$ по горния начин. Тогава за вероятността $p((\varphi;\psi))$ процесът, състоящ се от етапите $\varphi$ и $\psi$, да протече в някоя $\tau$-съгласувана с $I_0$ интерпретация от $\mathbf{M}$ в интервал с начало $\tau$ според равенството на Чапмън-Колмогоров за случая $U_F = \mathbf{R}_+$ е:

$$P_{I_0,\tau}(\mathbf{M}_{I_0,\sigma,(\varphi;\psi)}) = \int\limits_{I \in \mathrm{M}_{I_0,\sigma,\varphi}} f(I) dP_{I_0,\tau}.$$

Интегралът в горното равенство, както в случая на $DQP$ от глава 3, може да бъде определен като точната горна граница на сборовете от вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \inf\limits_{I \in A_i} f(I) P_{I_0,\tau}(A_i)$, ако тя съвпада с точната долна граница на сборовете от вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \sup\limits_{I \in A_i} f(I) P_{I_0,\tau}(A_i)$, където $\{A_1, \ldots, A_n\}$ пробягва крайните разбивания на $\mathbf{M}_{I_0,\sigma,\varphi}$, за които $P_{I_0,\tau}(A_i)$, $i = 1, \ldots, n$ има стойност. Тъй като работим с тотален модел $M$ на $PITL$, за да е определено $P_{I_0,\tau}(A_i)$, е достатъчно $A_i$ да има вида $\mathbf{M}_{I_0,\sigma,\gamma_i}$ за някои формули $\gamma_i$ от езика на $M$.

В моделите $M$ на $PITL$ $U_M$ е област, зададена с аксиоми от езика на предикатното смятане от първи ред. За да имат смисъл горните сборове, можем да разширим $U_M$ с двуместна операция . (умножение), чиято комутативност, асоциативност, неутрален елемент 1 и дистрибутивност спрямо събирането в $U_M$ могат да бъдат описани със същия вид аксиоми. Така въведената операция може да послужи и за интерпретирането на съответния двуместен статичен функционален символ, който се среща в $\underline{P}$ и $\overline{P}$. Съществуването на точните граници, както при $U_F = \mathbf{R}_+$, необходими за определянето на $\int$, обаче не може да бъде осигурено без напускането на тази рамка.

Без да специализираме семантиката на $PITL$ по отношение на пълнотата на наредбата в областта от вероятности в структурите за $PITL$, разширяваме тази област до система от тип $\langle U, +^{(2)}, .^{(2)}, 0^{(0)}, 1^{(0)}\rangle$, изпълняваща аксиомите $U1$-$U7$ и следните аксиоми за умножението:

($U8$) $x.1 = x$
($U9$) $x.(y.z) = (x.y).z$
($U10$) $x.y = y.x$
($U11$) $x.(y + z) = z.y + x.z$
($U12$) $x.y = x.z \wedge x \neq 0 \Rightarrow y = z$
($U13$) $x \neq 0 \Rightarrow \exists y(x.y = z)$

С непосредствена проверка се установява, че $\overline{P}$ и $\underline{P}$ са коректни в моделите на $PITL$, изпълняващи равенството на Чапмън и Колмогоров за $(.;.)$ в този контекст,

стига споменатите по-горе точни граници в областта от продължителности да съществуват в тези модели.

В останалата част на този параграф получаваме следното приближение на равенството на Чапмън-Колмогоров в така разширени модели $M = \langle F, \mathbf{M}, P\rangle$ на $PITL$, където са в сила правилата $\underline{P}$ и $\overline{P}$:

*За произволно $n < \omega$, $I_0 \in \mathbf{M}$ и $\sigma \in \mathbf{I}(T_F)$, $\min\sigma = \max\sigma = \tau$, съществува разбиване $\{A_0, \ldots, A_n\}$ на $\mathbf{M}_{I_0,\sigma,\varphi}$ такова, че $(i-1) < n.f(I) \leq i$ за $I \in A_i$, $i = 0, \ldots, n$, и освен това* $\sum\limits_{i=1}^{n}(i-1).P_{I_0,\tau}(A_i) \leq n.P_{I_0,\tau}(\mathbf{M}_{I_0,\sigma,(\varphi;\psi)}) \leq \sum\limits_{i=0}^{n} i.P_{I_0,\tau}(A_i)$.

Тъй като $\sum\limits_{i=0}^{n} i.P_{I_0,\tau}(A_i) - \sum\limits_{i=1}^{n}(i-1).P_{I_0,\tau}(A_i) = P_{I_0,\tau}(\mathbf{M}_{I_0,\sigma,\varphi}) \leq 1$, оттук в случая $U_M = \mathbf{R}_+$ следва равенството на Чапмън-Колмогоров.

**Доказателство:** Валидността в $M$ на предпоставката $\varphi \Rightarrow \neg(\varphi; \ell \neq 0)$ на правилата $\underline{P}$ и $\overline{P}$ е равносилна на условието за всяка $I \in \mathbf{M}$ и $\tau \in T_F$ да съществува не повече от едно $\tau'$ такова, че $M, I, [\tau, \tau'] \models \varphi$, което обсъдихме по-горе. Използуваме тази формула, предполагайки, че тя е теорема на $PITL$ за избраната формула $\varphi$, за да можем да прилагаме правилата $\underline{P}$ и $\overline{P}$. Освен нея, като предположение използуваме и $\ell = 0$, защото твърдението се отнася за тривиален интервал.

Нека $\gamma_0 \rightleftharpoons p((\varphi;\psi)) = 0$ и $\gamma_i \rightleftharpoons n.p((\varphi;\psi)) \leq i \wedge n.p((\varphi;\psi)) > i-1$ за $i = 1, \ldots, n$. Нека $A_i = \mathbf{M}_{I_0,\sigma,\gamma_i\wedge\varphi}$, $i = 1, \ldots, n$. Очевидно $\vdash_{PITL} \bigvee\limits_{i=0}^{n} \gamma_i$. Оттук следва, че $\bigcup\limits_{i=0}^{n} A_i = \mathbf{M}_{I_0,\sigma,\varphi}$. Следният извод показва, че $A_i \cap A_j = \emptyset$, ако $0 \leq i < j \leq n$:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(\gamma_i \wedge \varphi; \top) \wedge (\gamma_j \wedge \varphi; \top) \Rightarrow$<br>$\Rightarrow (\gamma_i \wedge \gamma_j \wedge \varphi; \top) \vee$<br>$\vee(\gamma_i \wedge \varphi \wedge (\gamma_j \wedge \varphi; \ell \neq 0); \top) \vee$<br>$\vee(\gamma_j \wedge \varphi \wedge (\gamma_i \wedge \varphi; \ell \neq 0); \top)$ | $ITL$ |
| 2 | $\neg(\gamma_i \wedge \gamma_j \wedge \varphi)$ | $ITL$ |
| 3 | $\neg(\gamma_i \wedge \gamma_j \wedge \varphi; \top)$ | 2, $N_l$ |
| 4 | $(\gamma_i \wedge \varphi \wedge (\gamma_j \wedge \varphi; \ell \neq 0); \top) \Rightarrow (\varphi \wedge (\varphi; \ell \neq 0); \top)$ | $ITL$ |
| 5 | $(\gamma_j \wedge \varphi \wedge (\gamma_i \wedge \varphi; \ell \neq 0); \top) \Rightarrow (\varphi \wedge (\varphi; \ell \neq 0); \top)$ | $ITL$ |
| 6 | $\varphi \Rightarrow \neg(\varphi; \ell \neq 0)$ | предпоставка |
| 7 | $\neg((\gamma_i \wedge \varphi; \top) \wedge (\gamma_j \wedge \varphi; \top))$ | 1, 3-7, $ITL$ |

С това е доказано, че $\{A_0, \ldots, A_n\}$ е разбиване на $\mathbf{M}_{I_0,\sigma,\varphi}$. Неравенството $i - 1 < n.f(I) \leq i$ за $I \in A_i$ следва от избора на $\gamma_i$.

Нека за краткост $\Gamma_m \rightleftharpoons \varphi \wedge \bigvee\limits_{i=m}^{n} \gamma_i$. Извод, подобен на горния, показва, че $\vdash_{PITL}$ $\neg((\varphi \wedge \gamma_i; \top) \wedge (\Gamma_{i+1}; \top))$. Затова изводът

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $((\varphi \wedge \gamma_i; \psi); \top) \wedge ((\Gamma_{i+1}; \psi); \top) \Rightarrow$<br>$\Rightarrow (\varphi \wedge \gamma_i; \top) \wedge (\Gamma_{i+1}; \top)$ | $ITL$ |
| 2 | $\neg((\varphi \wedge \gamma_i; \top) \wedge (\Gamma_{i+1}; \top))$ | теорема |
| 3 | $((\varphi \wedge \gamma_i; \psi); \top) \wedge ((\Gamma_{i+1}; \psi); \top) \Leftrightarrow \bot$ | 1, 2, $ITL$ |
| 4 | $p(((\varphi \wedge \gamma_i; \psi); \top) \wedge ((\Gamma_{i+1}; \psi); \top)) = 0$ | 3, $P_\Leftrightarrow$, $P_\bot$, $ITL$ |
| 5 | $(\Gamma_i; \psi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \gamma_i; \psi) \vee (\Gamma_{i+1}; \psi)$ | $ITL$ |
| 6 | $p((\Gamma_i; \psi)) = p((\varphi \wedge \gamma_i; \psi) \vee (\Gamma_{i+1}; \psi))$ | 5, $P_\Leftrightarrow$ |
| 7 | $p((\varphi \wedge \gamma_i; \psi) \vee (\Gamma_{i+1}; \psi)) +$<br>$+p(((\varphi \wedge \gamma_i; \psi); \top) \wedge ((\Gamma_{i+1}; \psi); \top)) =$<br>$= p((\varphi \wedge \gamma_i; \psi)) + p((\Gamma_{i+1}; \psi))$ | $P_+$ |
| 8 | $p((\Gamma_i; \psi)) = p((\varphi \wedge \gamma_i; \psi)) + p((\Gamma_{i+1}; \psi))$ | 4, 6, 7, $ITL$ |

показва, че $\vdash_{PITL} p((\Gamma_0; \psi)) = \sum\limits_{i=0}^{n} p((\varphi \wedge \gamma_i; \psi))$. Тъй като $\vdash_{PITL} \Gamma_0 \Leftrightarrow \varphi$, оттук получаваме $\vdash_{PITL} p((\varphi;\psi)) = \sum\limits_{i=0}^{n} p((\varphi \wedge \gamma_i; \psi))$.

По правилата $\underline{P}$ и $\overline{P}$ получаваме $\vdash_{PITL} p(\varphi \wedge \gamma_i \Rightarrow n.p((\varphi;\psi)) \leq i) = 1 \Rightarrow n.p((\varphi \wedge$

$\gamma_i;\psi)) \leq i.p(\varphi \wedge \gamma_i)$ и $\vdash_{PITL} p(\varphi \wedge \gamma_i \Rightarrow n.p((\varphi;\psi)) > i-1) = 1 \Rightarrow n.p((\varphi \wedge \gamma_i;\psi)) > (i-1).p(\varphi \wedge \gamma_i)$. Следният кратък извод, който привеждаме само за първата формула, показва това:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $n.x = i \Rightarrow$ | |
| | $\Rightarrow ((\varphi \wedge \gamma_i \Rightarrow n.p((\varphi;\psi)) \leq i) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \gamma_i \Rightarrow p((\varphi;\psi)) \leq x))$ | $U1$-$U13$, $PC$ |
| 2 | $n.x = i \Rightarrow$ | |
| | $\Rightarrow p(\varphi \wedge \gamma_i \Rightarrow n.p((\varphi;\psi)) \leq i) = p((\varphi \wedge \gamma_i \Rightarrow p((\varphi;\psi)) \leq x)$ | 1, $P_{mon}$ |
| 3 | $p(\varphi \wedge \gamma_i \Rightarrow p((\varphi;\psi)) \leq x) = 1 \Rightarrow p((\varphi \wedge \gamma_i;\psi)) \leq x.p(\varphi \wedge \gamma_i)$ | $\overline{P}$, предположенията |
| 4 | $n.x = i \Rightarrow$ | |
| | $\Rightarrow (p((\varphi \wedge \gamma_i;\psi)) \leq x.p(\varphi \wedge \gamma_i) \Leftrightarrow n.p((\varphi \wedge \gamma_i;\psi)) \leq i.p(\varphi \wedge \gamma_i))$ | $U1$-$U12$, $PC$ |
| 5 | $n.x = i \Rightarrow$ | |
| | $\Rightarrow (p(\varphi \wedge \gamma_i \Rightarrow n.p((\varphi;\psi)) \leq i) = 1 \Rightarrow n.p((\varphi \wedge \gamma_i;\psi)) \leq i.p(\varphi \wedge \gamma_i))$ | 2-4, $PC$ |
| 6 | $\exists x(n.x = i) \Rightarrow$ | |
| | $\Rightarrow (p(\varphi \wedge \gamma_i \Rightarrow n.p((\varphi;\psi)) \leq i) = 1 \Rightarrow n.p((\varphi \wedge \gamma_i;\psi)) \leq i.p(\varphi \wedge \gamma_i))$ | 5, $PC$ |
| 7 | $\exists x(n.x = i)$ | $U13$ |
| 8 | $(p(\varphi \wedge \gamma_i \Rightarrow n.p((\varphi;\psi)) \leq i) = 1 \Rightarrow$ | |
| | $\Rightarrow n.p((\varphi \wedge \gamma_i;\psi)) \leq i.p(\varphi \wedge \gamma_i))$ | 6, 7, $PC$ |

От вида на $\gamma_i$ обаче следва, че $\vdash_{PITL} \gamma_i \Rightarrow n.p((\varphi;\psi)) \leq i$ и $\vdash_{PITL} \gamma_i \Rightarrow n.p((\varphi;\psi)) > i-1$. Оттук по $P_{\Leftrightarrow}$ получаваме $\vdash_{PITL} p(\varphi \wedge \gamma_i \Rightarrow n.p((\varphi;\psi)) \leq i) = 1$ и $\vdash_{PITL} p(\varphi \wedge \gamma_i \Rightarrow n.p((\varphi;\psi)) > i-1) = 1$. Следователно $\vdash_{PITL} n.p((\varphi \wedge \gamma_i;\psi)) \leq i.p(\varphi \wedge \gamma_i)$ и $\vdash_{PITL} n.p((\varphi \wedge \gamma_i;\psi)) > (i-1).p(\varphi \wedge \gamma_i)$. Събирайки тези неравенства за $i = 0,\ldots,n$, получаваме $\vdash_{PITL} n.p((\varphi;\psi)) \leq \sum_{i=0}^{n} i.p(\varphi \wedge \gamma_i)$ и $\vdash_{PITL} n.p((\varphi;\psi)) \geq \sum_{i=1}^{n} (i-1).p(\varphi \wedge \gamma_i)$. От истинността на тези формули в интервала $\sigma$ следват интересуващите ни неравенства. $\dashv$

## Забележки

Пълнотата на представената тук система за извод за $PITL$ е получена за по-ранни варианти на $PITL$ от автора в [Gue98c] и от Владимир Трифонов в дипломната му работа [Три99]. И в двата по-ранни варианта на $PITL$ е допустим само разширяващият оператор $\Diamond_l^c$. При това неговото участие не се допуска в $p$-термове. В най-ранния вариант от [Gue98c] ролята на релацията на $\tau$-съгласуваност се играе от асиметрична релация на *$\tau$-продължение*. Интерпретациите в един модел на $PITL$, които се намират в такава релация, могат да бъдат в различни структури, като продължаващата релация е във вид елементарно разширение на структурата, в която е продължаваната. Този недостатък е отстранен в работата на Трифонов с ново доказателство на пълнотата на, по-същество, същата система за извод. Той доказва пълнотата на системата за модели, в които всички интерпретации са в една и съща структура.

Както е типично за първите доказателства на нови резултати, това от [Три99] използва доста сложни конструкции. Новото в представеното тук доказателство е разширяването на езика на $PITL$ с неограничена употреба на $\Diamond_l$ и $\Diamond_r$ и заместването на тези конструкции с прилагане на интерполационна теорема.

На $PITL$ може да се гледа като на практически съдържателен пример за модална логика от първи ред с няколко интересни нови черти:

∘ Интерпретацията на оператора $p$ в $PITL$ по същество води до употреба на ново ниво на релация на достижимост, над нивото на релациите на достижимост, съответни на $\Diamond_l$ и $\Diamond_r$ в структурите на моделите на $PITL$. Тази релация се задава чрез $\tau$-съгласуваността между интерпретациите в моделите на $PITL$, които интерпретации при това имат ролята на възможни светове.

∘ Операторът $p$ е пример за модален оператор, с който се образуват термове, а не формули. Тъй като в съждителните модални езици не се срещат термове, появата

на такива оператори е възможна едва в логики от първи ред.

∘ На производното правило $P_{\Leftrightarrow}$ може да се гледа като на вид аксиома за обемност за $p$, която може да се разбира така: Ако две формули са еквивалентни в породения чрез релацията на $\tau$-съгласуваност от текущия възможен свят подмодел, то стойностите на $p$ за тях съвпадат.

Подобни черти имат темпоралните функционални символи в разширението на $ITL$ с дискретни предикати, въведено в параграф 6.6.

## По-нататъшна работа над $PITL$

### Изброима адитивност на вероятностите в моделите на $PITL$

В класическата теория на вероятностите обикновено се изучават само вероятностни мерки $P$, изпълняващи аксиомата за *изброима адитивност*

$$P\left(\bigcup_{i<\omega} A_i\right) = \sum_{i<\omega} P(A_i), \text{ за редици от две по две непресичащи се събития } \{A_i\}_{i<\omega}.$$

Аксиомите $U1$-$U7$ не осигуряват възможност в областите от вероятности да се вземат граници и следователно - да се сумират редове. Това възпрепятствува непосредственото изразяване на изброимата адитивност на вероятностите със стойности в такива области от моделите на $PITL$. Заместващи безкрайно малките редици на Коши от реални числа с такива, на които всички членове от някой нататък са 0, можем да въведем (по същество по-силен) аналог на свойството *непрекъснатост в* $\emptyset$ на вероятностните мерки, което, както е известно (вж. напр. [Обр74]), относно класическата дефиниция е равносилно на тяхната изброима адитивност. Дефиницията е:

**Дефиниция 7.36** Вероятността $P$ е *непрекъсната в* $\emptyset$, ако за всяка монотонна редица $A_i$, $i < \omega$ от събития, за която $\bigcap_{i<\omega} A_i = \emptyset$ съществува $i_0 < \omega$ такова, че $P(A_i) = 0$ за всички $i \geq i_0$.

Лесно е да се забележи, че ако $P$ е непрекъсната в $\emptyset$ вероятност в смисъла на тази дефиниция и взема стойности в стандартната област от вероятности $U_{\mathrm{R}} = \langle \mathbf{R}_+, +, 0, 1\rangle$, то $P$ е изброимо адитивна в класическия смисъл. Някои съображения, свързани с компактността на извода в $PITL$, дават основание за следната хипотеза:

**Хипотеза 7.37** *Предложената система за извод за $PITL$ е пълна в класа от онези модели $\langle F, \mathbf{M}, P\rangle$ на $PITL$, в които $P$ се състои от непрекъснати в $\emptyset$ вероятности.*

### Система за извод за $PDC$

Както се споменава в увода към тази част, крайната цел на въвеждането на $PITL$ е получаването на система за извод за $PDC$. В светлината на полученото за $ITL_{fin}(\Omega)$ в глава 6 и на полученото за $PITL$ в тази глава изгледите да бъде намерена такава система са твърде определени.

Тъй като $PITL$ е разширение на $NL$, навярно една такава система би се получила чрез добавяне към системата за $PITL$ на аксиомите за специфичните за $DC$ термове за продължителности на състояния и подходящ за $NL$ вариант на правилото $\omega^\gamma$ от параграф 6.1. За съжаление, във вида си от параграф 6.1 това правило не е коректно в $NL$, а следователно и във варианта $NDC$ на $DC$, съответен на $NL$. В частност, в $NL$ не е в сила лема 6.5. Правилото $\omega^\gamma$ е получено чрез усилване на правилата $IR_1$ и $IR_2$ от системата за извод за $DC$, представена [HZ92], които също не са коректни във варианта $NDC$ на $DC$, съответен на $NL$, който е представен в [RZ97]. В тази работа са предложени заместители на $IR_1$ и $IR_2$ за $NDC$. Може да се

предполага, че усилването им по подходящ начин би довело до заместител на $\omega^\gamma$ за $NL$ със свойството на крайните покрития и, съответно, за $NDC$ с абстрактна семантика. Съчетаването на една система за извод за $NDC$ с абстрактна семантика със системата за $PITL$ навярно би дало пълна система за извод за $PDC$ с абстрактна семантика.

Изпълняването на този план би наложило значителни, но осъществими редакции на доказателството на пълнотата за получената система за извод там, където за случая на $PITL$ се разчита на компактността на извода, например в доказателството на лема 7.31. Основание да се вярва в осъществимостта на тези редакции е успешната модификация на доказателството от [Dut95] на пълнотата на системата за извод на $ITL$ за нуждите на $ITL_{fin}(\Omega)$.

# 8 Итерацията в смятането на продължителностите

Както е споменато в увода към тази част, итерацията се определя в разширението на $DC$ с оператор за най-малка неподвижна точка с равенството:

$$\varphi^* \rightleftharpoons \mu P.\ell = 0 \vee (\varphi; P).$$

Истинността на $\varphi^*$ може да се определи и непосредствено така:

> $I, \sigma \models \varphi^*$, ако $\min\sigma = \max\sigma$ или съществуват $n < \omega$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ такива, че $\sigma = \sigma_1; \ldots; \sigma_n$ и $I, \sigma_i \models \varphi$ за $i = 1, \ldots, n$.

Това определение се използува в $DC^*$, където итерацията е единственият допустим случай на оператора $\mu$.

В тази глава представяме аксиоми за $^*$ в $DC^*$. Добавянето на тези аксиоми към $\omega$-пълната система за $DC$ от глава 6 позволява доказването на теорема за пълнота за фрагмент от $DC^*$ във вида

*Ако едно множество от формули* $\Gamma$ *е непротиворечиво, то* $\Gamma$ *е изпълнимо.*

На формулите от споменатото тук $\Gamma$ налагаме следните ограничения:

- Ако $\varphi^*$ е подформула на формула от $\Gamma$, то единствените нелогически символи, евентуално участвуващи във $\varphi$, са (задължителните във всички езици на $DC$) $0$, $+$, $\leq$, $\ell$ и, разбира се, индивидните променливи и променливите за състояния.
- Ако $\varphi^*$ е подформула на формула $\psi$ от $\Gamma$, то $\varphi$ няма участия в $\psi$ в обсега на квантор, свързващ някоя от свободните променливи на $\varphi$.

До края на тази глава наричаме формулите, които изпълняват тези ограничения, *допустими*. Второто ограничение по същество означава, че всяка допустима формула има вида $[\varphi_1^*/P_1, \ldots, \varphi_n^*/P_n]\psi$, където $\psi$ не съдържа $^*$, означените заместявания са коректни в изводите в смисъла на забележка 6.4 и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ са също допустими. Например, валидната в стандартния модел на $DC^*$ формула $x \neq 0 \Rightarrow (\ell \leq x)^*$ е допустима, а $\exists x(x \neq 0 \wedge \neg((\ell \leq x)^*))$ не е.

Освен това се ограничаваме в класа от структурите за $DC$, в които е верен принципът на Архимед, изразен с $\omega$-правилото:

$$\frac{\forall n\ \varphi \Rightarrow n.x \leq y}{\varphi \Rightarrow x \leq 0}$$

Добавянето на това правило към споменатата система за $DC$ я прави пълна в класа от структури $F$ за $DC$, в които за всеки две $d_1, d_2 \in D_F$, $d_1 \neq 0_F$ съществува естествено $n$ такова, че $n.d_1 \geq d_2$. По-нататък означаваме най-малкото такова $n$ с $\left\lceil \frac{d_2}{d_1} \right\rceil$. В тази глава под модел на $DC$ разбираме модел с такава структура.

Доказателството на споменатата теорема за пълнота се състои от две части. В едната част доказваме, че във формулите, които изпълняват горните ограничения, итерацията е локално отстранима.

**Дефиниция 8.1** Итерацията е *локално отстранима* от една формула $\varphi$, ако за всеки модел $M$ и всеки интервал $\sigma \in \mathbf{I}(T_M)$ съществува формула $\psi$ без $^*$ такава, че $M, \sigma \models \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi)$.

В другата част използуваме това, за да получим самата теорема за пълнота. Идеята е следната:

Локалната отстранимост на итерацията осигурява съществуването на частни случаи на нашите аксиоми за итерацията, които да се нарушават при допускането, че истинността на дадена формула с итерация в модел на $DC$ не отговаря на дефиницията на $\models_{DC^*}$.

Първото от ограниченията, определящи допустимите формули в $DC^*$, използуваме най-съществено в доказателството на лема 8.6 от параграф 8.2, който е посветен на установяването на локалната отстранимост на итерацията в допустимите формули. Както става ясно там, тази лема по същество се отнася за известната отстранимост на кванторите в теорията от първи ред на наредените абелеви групи.

Второто ограничение позволява прилагането към допустими формули от $DC^*$ и техни подформули, образувани с итерация, на следната форма на замяна на еквивалентни подформули:

**Твърдение 8.2** *Нека никое участие на темпоралната съждителна променлива $P$ във формулата $\varphi$ не се намира в обсега на квантор, свързващ свободна променлива на някоя от формулите $\alpha$ и $\beta$. Тогава:*
$\models_{DC^*} \Box(\alpha \Leftrightarrow \beta) \Rightarrow \Box([\alpha/P]\varphi \Leftrightarrow [\beta/P]\varphi)$.

**Доказателство:** Нека $M$ е модел за езика $\mathbf{L}$ на формулите $\alpha$, $\beta$ и $\varphi$, а $\sigma \in \mathbf{I}(T_M)$ е такъв интервал, че $M, \sigma \models \Box(\alpha \Leftrightarrow \beta)$. Нека $\sigma'$ е подинтервал на $\sigma$, а $I'$ е интерпретация на символите от $\mathbf{L}$, която съвпада с $I_M$ за всички константни, функционални и релационни символи от $\mathbf{L}$ и за свободните променливи на $\alpha$ и $\beta$. Тогава $\langle F, I'\rangle, \sigma' \models \alpha$ е равносилно на $M, \sigma' \models \alpha$, което от своя страна е равносилно на $M, \sigma' \models \beta$ и, в крайна сметка - на $\langle F, I'\rangle, \sigma' \models \beta$. Това е така, защото истинността на $\alpha$ и $\beta$ не зависи от стойностите на променливи, които нямат свободни участия в тези формули.

Тъй като участията на $P$ във $\varphi$ не се намират в обсега на квантори, свързващи свободни променливи на $\alpha$ и $\beta$, истинността на $[\alpha/P]\varphi$ в $M$ и подинтервали на $\sigma$ зависи от истинността на $\alpha$ само в подинтервали на $\sigma$ и при интерпретации, съвпадащи за свободните променливи на $\alpha$ и $\beta$ с $I_M$. Както е показано по-горе, при такива условия истинността на $\alpha$ е равносилна на истинността на $\beta$. Следователно, $M$ изпълнява $[\alpha/P]\varphi \Leftrightarrow [\beta/P]\varphi$ в подинтервалите на $\sigma$. $\dashv$

Доказателството на пълнотата на споменатото разширение на системата за извод за $DC$ е в стила на доказателствата на свойствата на различни схеми да характеризират класове от модални структури по метода на присвояванията, широко използуван в модалната логика (вж. напр. [Ben83]). Самите аксиоми са получени чрез превод и други преобразувания на аксиомите за итерацията в $PDL$ (вж. напр. [AGM92]), близък до представения в [Rij93] превод на $PDL$ в представената там система $DML$. Точният начин на получаването им е описан в [Gue98b]. Найточно съответствие между безкванторния фрагмент на $DC^*$ и динамичните модални логики има изглежда в случая на $CPDL$[PT91]. Ролята на константите от $CPDL$ играят формулите от вида $\ell = t$ в $DC$.

Локалната отстранимост на итерацията е получавана за ограничени класове от формули в $DC^*$ и близките им времеви регулярни изрази с цел намиране разрешаващи процедури за изпълнимостта в тези класове в [LD96, DP97, LDZ97] и с цел аксиоматизация на $DC^*$ в [Gue98b, DG99]. Фрагментът от $DC^*$, за който получаваме това свойство тук, е значително по-голям от всички по-рано изследвани: Всички тези класове допускат само итерация на затворени безкванторни формули без отрицание.

## 8.1 Аксиоми за итерацията в $DC^*$

Аксиомите за $^*$, които изучаваме тук, са следните:
$(DC_1^*)$ $\quad \ell = 0 \Rightarrow \varphi^*$
$(DC_2^*)$ $\quad (\varphi^*; \varphi) \Rightarrow \varphi^*$
$(DC_3^*)$ $\quad (\varphi^* \wedge \psi; \top) \Rightarrow (\psi \wedge \ell = 0; \top) \vee (((\varphi^* \wedge \neg\psi; \varphi) \wedge \psi); \top)$

**Твърдение 8.3 (коректност)** *Нека $M$ е модел за езика $\mathbf{L}$ на $DC^*$. Нека $\varphi$ и $\psi$ са формули от $\mathbf{L}$. Тогава в $M$ са валидни $DC_1^*$, $DC_2^*$ и $DC_3^*$.*

**Доказателство:** Доказателството е тривиално за $DC_1^*$ и $DC_2^*$. Да докажем валидността на $DC_3^*$. Нека $\sigma \in \mathbf{I}(T_M)$ и $M, \sigma \models (\varphi^* \wedge \psi; \top)$. Тогава съществува най-малко естествено $k$ такова, че за някои $\tau_0, \ldots, \tau_k$ е изпълнено $\min \sigma = \tau_0 < \ldots < \tau_k \leq \max \sigma$, $M, [\tau_i, \tau_{i+1}] \models \varphi$ за $i = 0, \ldots, k-1$ и $M, [\min \sigma, \tau_k] \models \psi$. Ако $k = 0$, то $\tau_k$ е $\min \sigma$, откъдето следва, че $M, \sigma \models (\psi \wedge \ell = 0; \top)$. В противен случай, $M, [\min \sigma, \tau_{k-1}] \models \varphi^* \wedge \neg\psi$ поради избора на $k$. Оттук следва, че $M, [\min \sigma, \tau_k] \models ((\varphi^* \wedge \neg\psi; \varphi) \wedge \psi)$ и, в крайна сметка, $M, \sigma \models (((\varphi^* \wedge \neg\psi; \varphi) \wedge \psi); \top)$. $\dashv$

Изводимостта в известната ни система за извод за $DC$, разширена с $DC_1^*$, $DC_2^*$, $DC_3^*$ и $\omega$-правилото, изразяващо принципа на Архимед, означаваме с $\vdash_{DC^*}$. Следното твърдение илюстрира употребата на получената система:

**Твърдение 8.4**

$\vdash_{DC^*} x > 0 \Rightarrow (\ell \leq x)^*$

$\vdash_{DC^*} \Box(\varphi \Rightarrow \neg(\top; \neg\alpha) \wedge \neg(\neg\beta; \top)) \Rightarrow (\varphi^* \Rightarrow \Box((\alpha \vee \ell = 0; \varphi^*); \beta \vee \ell = 0))$

**Доказателство:** За да получим първата теорема, най-напред с индукция по $n$ доказваме $\vdash_{DC^*} \ell \leq n.x \Rightarrow (\ell \leq x)^*$. За $n = 0$ това е частен случай на $DC_1^*$. За индуктивната стъпка имаме извода:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\ell \leq (n+1).x \Rightarrow (\ell \leq n.x; \ell \leq x)$ | $ITL$ |
| 2 | $\ell \leq n.x \Rightarrow (\ell \leq x)^*$ | индукционно допускане |
| 3 | $(\ell \leq n.x; \ell \leq x) \Rightarrow ((\ell \leq x)^*; \ell \leq x)$ | 2, $Mono_l$ |
| 4 | $((\ell \leq x)^*; \ell \leq x) \Rightarrow (\ell \leq x)^*$ | $DC^2$ |
| 5 | $\ell \leq (n+1).x \Rightarrow (\ell \leq x)^*$ | 1, 3, 4, $ITL$ |

Оттук теоремата се получава с извода

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\ell \leq n.x \Rightarrow (\ell \leq x)^*$ | теорема |
| 2 | $y = \ell \wedge \neg(\ell \leq x)^* \Rightarrow n.x \leq y$ | 1, $ITL$ |
| 3 | $y = \ell \wedge \neg(\ell \leq x)^* \Rightarrow x \leq 0$ | 2, принцип на Архимед |
| 4 | $y = \ell \Rightarrow (x > 0 \Rightarrow (\ell \leq x)^*)$ | 3, $ITL$ |
| 5 | $\exists y(y = \ell) \Rightarrow (x > 0 \Rightarrow (\ell \leq x)^*)$ | 4, $ITL$ |
| 6 | $\exists y(y = \ell)$ | $ITL$ |
| 7 | $x > 0 \Rightarrow (\ell \leq x)^*$ | 5, 6, $ITL$ |

За да не правим излишно сложен извод на втората теорема, доказваме

$\varphi \Rightarrow \neg(\top; \neg\alpha), \varphi \Rightarrow \neg(\neg\beta; \top) \vdash_{DC^*} \varphi^* \Rightarrow \Box((\alpha \vee \ell = 0; \varphi^*); \beta \vee \ell = 0)$,

откъдето твърдението следва по теоремата за дедукцията за $DC$ [HZ97], която е в сила и за $DC^*$. Нека за краткост $\alpha' \rightleftharpoons \alpha \vee \ell = 0$ и $\beta' \rightleftharpoons \beta \vee \ell = 0$. Имаме извода:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\varphi \Rightarrow \neg(\top; \neg\alpha')$ | предпоставка |
| 2 | $\varphi \Rightarrow \neg(\top; \neg(\alpha'; \ell = 0))$ | 1, $DC$ |
| 3 | $\ell = 0 \Rightarrow \varphi^*$ | $DC_1^*$ |
| 4 | $\varphi \Rightarrow \neg(\top; \neg(\alpha'; \varphi^*))$ | 2, 3, $DC$ |
| 5 | $\ell = 0 \Rightarrow (\ell = 0; \ell = 0)$ | $DC$ |
| 6 | $\ell = 0 \Rightarrow \alpha'$ | $DC$ |
| 7 | $\ell = 0 \Rightarrow (\alpha'; \varphi^*)$ | 3, 5, 6, $DC$ |
| 8 | $(\top; \neg(\alpha'; \varphi)) \Rightarrow \ell \neq 0$ | 7, $DC$ |
| 9 | $\neg((\top; \neg(\alpha'; \varphi^*)) \wedge \ell = 0; \top)$ | 8, $DC$ |
| 10 | $\varphi^* \wedge (\top; \neg(\alpha'; \varphi^*)) \Rightarrow$ $\Rightarrow ((\top; \neg(\alpha'; \varphi^*)) \wedge \ell = 0; \top) \vee$ $\vee((\varphi^* \wedge \neg(\top; \neg(\alpha'; \varphi^*)); \varphi) \wedge (\top; \neg(\alpha'; \varphi^*)); \top)$ | $DC_3^*$ |
| 11 | $(\varphi^* \wedge \neg(\top; \neg(\alpha'; \varphi^*)); \varphi) \wedge (\top; \neg(\alpha'; \varphi^*)) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\top; ((\alpha'; \varphi^*); \varphi) \wedge \neg(\alpha'; \varphi^*)) \vee (\top; \varphi \wedge (\top; \neg(\alpha'; \varphi^*)))$ | $DC$ |
| 12 | $((\alpha'; \varphi^*); \varphi) \Rightarrow (\alpha'; \varphi^*)$ | $DC_2^*$, $DC$ |

| | | |
|---|---|---|
| 13 | $\neg((\top;((\alpha';\varphi^*);\varphi)\wedge\neg(\alpha';\varphi^*))\vee(\top;\varphi\wedge(\top;\neg(\alpha';\varphi^*))))$ | 4, 12, $DC$ |
| 14 | $\varphi^*\Rightarrow\neg(\top;\neg(\alpha';\varphi^*))$ | 9, 10, 11, 13, $DC$ |
| 15 | $(\alpha';\varphi^*)\wedge(\neg((\alpha';\varphi^*);\beta');\top)\Rightarrow$ $\Rightarrow(\alpha'\wedge(\neg((\alpha';\varphi^*);\beta');\top);\top)\vee(\alpha';\varphi^*\wedge(\neg(\varphi^*;\beta');\top)))$ | $DC$ |
| 16 | $\ell=0\Rightarrow\beta'$ | $DC$ |
| 17 | $\ell=0\Rightarrow((\varphi^*;\beta');\top)$ | 5, 16, $DC_1^*$, $DC$ |
| 18 | $\alpha'\Rightarrow(((\alpha';\varphi^*);\beta');\top)$ | 17, $DC$ |
| 19 | $(\alpha';\varphi^*)\wedge(\neg((\alpha';\varphi^*);\beta');\top)\Rightarrow(\alpha';\varphi^*\wedge(\neg(\varphi^*;\beta');\top))$ | 15, 18, $DC$ |
| 20 | $\varphi^*\wedge(\neg(\varphi^*;\beta');\top)\Rightarrow(\varphi^*\wedge(\neg(\varphi^*;\beta');\top);\top)$ | $DC$ |
| 21 | $\varphi^*\wedge(\neg(\varphi^*;\beta');\top)\Rightarrow(\ell=0\wedge(\neg(\varphi^*;\beta');\top))\vee$ $\vee((\varphi^*\wedge\neg(\neg(\varphi^*;\beta');\top);\varphi)\wedge(\neg(\varphi^*;\beta');\top);\top)$ | 20, $DC_3^*$ |
| 22 | $\ell=0\Rightarrow(\varphi^*;\beta')$ | 5, $DC_1^*$, 16, $DC$ |
| 23 | $(\neg(\varphi^*;\beta');\top)\Rightarrow\ell\neq 0$ | 22, $DC$ |
| 24 | $(\varphi^*\wedge\neg(\neg(\varphi^*;\beta');\top);\varphi)\wedge(\neg(\varphi^*;\beta');\top)\Rightarrow(\varphi^*;\varphi\wedge(\neg\beta';\top))$ | $DC$ |
| 25 | $\varphi\Rightarrow\neg(\neg\beta';\top)$ | предпоставка |
| 26 | $\neg(\varphi^*;\varphi\wedge(\neg\beta';\top))$ | 25, $DC$ |
| 27 | $\neg((\varphi^*\wedge\neg(\neg(\varphi^*;\beta');\top);\varphi)\wedge(\neg(\varphi^*;\beta');\top);\top)$ | 24, 26, $DC$ |
| 28 | $\varphi^*\Rightarrow\neg(\neg(\varphi^*;\beta');\top)$ | 21, 23, 27, $DC$ |
| 29 | $\neg(\alpha';\varphi^*\wedge(\neg(\varphi^*;\beta');\top))$ | 28, $DC$ |
| 30 | $(\alpha';\varphi^*)\Rightarrow\neg(\neg((\alpha';\varphi^*);\beta');\top)$ | 19, 29, $DC$ |
| 31 | $\varphi^*\Rightarrow\neg((\top;\neg((\alpha';\varphi^*);\beta'));\top)$ | 14, 30, $DC$ |

$\dashv$

Първата от доказаните теореми на $DC^*$ е илюстрация за съществена употреба на принципа на Архимед. Втората теорема на $DC^*$ изразява свойството на подинтервалите на интервал, изпълняващ $\varphi^*$, да изпълняват "няколко $\varphi$-стъпки", евентуално предхождани "край на $\varphi$-стъпка" и следвани от "начало на $\varphi$-стъпка", които в теоремата са представени съответно от формулите $\alpha$ и $\beta$.

## 8.2 Локална отстранимост на итерацията

Тук доказваме, че итерацията е локално отстранима от допустимите формули в $DC^*$, определени с дадените в началото на главата ограничения. До края на параграфа с **L** означаваме езика на $DC$, образуван само от задължителния набор от символи 0, +, $\leq$, $\ell$ статични константи и, разбира се, индивидни променливи и променливи за състояния. Доказателството включва няколко твърдения, които показват, че формулите от **L** от подходящи специални видове при подходящи условия имат еквивалентни от още по-специални видове.

**Твърдение 8.5** *Нека $\varphi$ е формула от* **L**, *която не съдържа $\int$. Тогава $\varphi$ е еквивалентна на формула от вида $\exists x(\ell=x\wedge\psi)$, където $\psi$ не съдържа $\int$, нито $\ell$, нито оператора $(.;.)$.*

**Доказателство:** Провеждаме индукция по броя на участията на $(.;.)$ във $\varphi$. Ако $\varphi$ не съдържа $(.;.)$, тя има вида $[\ell/x]\psi$ и очевидно е еквивалентна на $\exists x(\ell=x\wedge\psi)$, където $x$ е нова за $\varphi$ индивидна променлива. Ако $\varphi$ съдържа $(.;.)$, то тя има подформула от вида $(\chi_1;\chi_2)$, където $\chi_1$ и $\chi_2$ не съдържат $(.;.)$. Нека $\models_{DC}\chi_1\Leftrightarrow\exists x_1(\ell=x_1\wedge\psi_1)$ и $\models_{DC}\chi_2\Leftrightarrow\exists x_2(\ell=x_2\wedge\psi_2)$. Тогава $\models_{DC}(\chi_1;\chi_2)\Leftrightarrow\exists x\exists x_1\exists x_2(\ell=x\wedge x=x_1+x_2\wedge\psi_1\wedge\psi_2)$. Заместването на $(\chi_1;\chi_2)$ във $\varphi$ с еквивалентната на $(\chi_1;\chi_2)$ формула дава еквивалентна на $\varphi$ формула с по-малък брой участия на $(.;.)$. $\dashv$

Формулата $\psi$ от горното твърдение по същество е формула от езика на предикатното смятане, построен със символите 0, +, $\leq$ и статични константи.

**Лема 8.6** *Нека $\varphi$ е отворена формула от езика на предикатното смятане, построен със символите 0, +, $\leq$ и статични константи. Тогава съществува отворена формула $\psi$ от същия език такава, че $\models_{DC}\psi\Leftrightarrow\exists x\varphi$.*

**Доказателство:** Можем да считаме, че $\varphi$ е в дизюнктивна нормална форма. Тъй като от $\models_{DC} \psi_i \Leftrightarrow \exists x \varphi_i$, $i = 1, 2$ следва $\models_{DC} \psi_1 \vee \psi_2 \Leftrightarrow \exists x(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, е достатъчно да докажем лемата при условие, че $\varphi$ е елементарна конюнкция.

Тъй като $t_1 = t_2$ може да се представи като $t_1 \leq t_2 \wedge t_2 \leq t_1$, можем да предполагаме, че $\leq$ е единственият предикатен символ във $\varphi$. Тогава $\varphi$ е конюнкция от формули от видовете $t_1 \leq t_2$ и $t_1 < t_2$, където $t_1$ и $t_2$ са сборове, евентуално съдържащи $x$. Достатъчно е да разгледаме случаите, когато $x$ участвува във всички тези формули, и то само в $t_1$ или само в $t_2$. Случаите, в които $x$ не участвува в $t_1$, нито в $t_2$, могат да отпаднат, защото $\models_{DC} \exists x(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Leftrightarrow \varphi_1 \wedge \exists x \varphi_2$, ако $x \notin FV(\varphi_1)$. В случаите, когато $x$ участвува и от двете страни на $\leq$ или $<$, тези участия могат да се "унищожат" по двойки. От комутативността и асоциативността на събирането следва, че всяка формула от вида $t_1 \leq t_2$, където само $t_1$ съдържа $x$, е еквивалентна на формула от вида $n.x + t_1' \leq t_2$, за някое цяло положително $n$, където $t_1'$ не съдържа $x$. Ако $x$ участвува само в $t_2$, $t_1 \leq t_2$ е еквивалентна на $t_1 \leq n.x + t_2'$. Същото е в сила и ако вместо $\leq$ имаме $<$. Нека $\varphi$ е конюнкция на формулите от $n_i'.x + t_{1,i}' R_i' t_{2,i}'$, $i = 1, \ldots, f$, и $t_{1,j}'' R_j'' n_j''.x + t_{2,i}''$, $j = 1, \ldots, g\}$, $R_i', R_j'' \in \{\leq, <\}$, които не съдържат $x$, освен на означените места. Нека сред тези формули е $0 \leq x$. Тогава избираме за $\psi$ конюнкцията

$$\bigwedge_{i=1}^{f} \bigwedge_{j=1}^{g} n_j''.t_{1,i}' + n_i'.t_{1,j}'' R_{i,j} n_j''.t_{2,i}' + n_i'.t_{2,j}'',$$

където $R_{i,j}$ е $\leq$, ако и $R_i'$ и $R_j''$ са $\leq$, а иначе е $<$. За да установим, че $\vdash_{DC} \psi \Leftrightarrow \exists x \varphi$, е достатъчно да забележим, че неравенствата $t_{1,j}'' R_j'' n_j''.x + t_{2,i}''$ ограничават $x$ отгоре, $n_i'.x + t_{1,i}' R_i' t_{2,i}'$ ограничават $x$ отдолу, а $i,j$-тото неравенство в $\psi$ изразява, че $i$-тото ограничение отдолу е по-малко от (по-малко или равно на) $j$-тото ограничение отгоре. Съществуването на $x$, което да изпълнява всичките неравенства, е равносилно на това, всички двойки ограничения да се намират в това разположение. Добавянето на $0 \leq x$ към тези неравенства отразява изискването $x$ да е неотрицателно, което те иначе не изразяват. $\dashv$

**Следствие 8.7** *Нека $\varphi$ е формула от езика на предикатното смятане, построен със символите $0$, $+$, $\leq$ и статични константи. Тогава съществува отворена формула $\psi$ от същия език такава, че $\models_{DC} \psi \Leftrightarrow \varphi$.*

**Доказателство:** Индукция по броя на участията на $\exists$ във $\varphi$. Ако $\varphi$ съдържа $\exists$, то тя има подформула от вида $\exists x \psi$, където $\psi$ не съдържа $\exists$. Според лема 8.6, съществува отворена $\chi$, за която $\models_{DC} \chi \Leftrightarrow \exists x \psi$. Резултатът от заместването на $\exists x \psi$ с $\chi$ във $\varphi$ е еквивалентна на $\varphi$ формула с по-малък брой участия на $\exists$. $\dashv$

**Следствие 8.8** *Нека $\varphi$ е формула от* **L**, *която не съдържа $\int$. Тогава $\varphi$ е еквивалентна на формула от вида $\exists x(\ell = x \wedge \psi)$, където $\psi$ е отворена и не съдържа $\int$, нито $\ell$, нито оператора $(.;.)$.*

**Доказателство:** Прилагаме следствие 8.7 към $\psi$ от твърдение 8.5. $\dashv$

**Твърдение 8.9** *Нека $\varphi$ е формула от* **L**, *$M$ е модел за* **L**, *$\sigma \in \mathbf{I}(T_M)$ и $I_M(P)$ е постоянна в $\sigma^{[)}$ за всяка променлива за състояние $P$ от $\varphi$. Тогава съществува формула $\psi$ от* **L**, *която не съдържа $\int$ и е такава, че $M, \sigma \models \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi)$.*

**Доказателство:** Тъй като за всяка променлива за състояние $P$ от $\varphi$ или $I_M(P)(\tau) = 0$ за всяко $\tau \in \sigma^{[)}$, или $I_M(P)(\tau) = 1$ за всяко $\tau \in \sigma^{[)}$, за всеки израз за състояние $S$ от $\varphi$ имаме или $M, \sigma' \models \int S = 0$, или $M, \sigma' \models \int S = \ell$ за всеки подинтервал $\sigma'$ на $\sigma$. Определяме $\psi$ като резултата от заместването във $\varphi$ на термовете от вида $\int S$ със равните им 0 или $\ell$. $\dashv$

**Твърдение 8.10** *Нека $\varphi$ е формула от* **L**, *$M$ е модел за* **L**, *$\sigma \in bfI(T_M)$ и $I_M(P)$ е постоянна в $\sigma^{[)}$ за всяка променлива за състояние $P$ от $\varphi$. Нека за всяко $l > 0$ съществува*

*подинтервал на $\sigma$ с дължина не по-голяма от $l$, който изпълнява $\varphi$. Тогава съществува $h > 0$ такова, че всеки подинтервал на $\sigma$ с дължина в $(0, h]$ изпълнява $\varphi$.*

**Доказателство:** Според твърдение 8.9 съществува формула $\psi$ от $\mathbf{L}$, която не съдържа $\int$ и е такава, че $M, \sigma \models \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi)$. Според следствие 8.8 съществува отворена формула $\chi$ от $\mathbf{L}$, която не съдържа $\int$, $\ell$ и $(.;.)$ и е такава, че $\models_{DC} \psi \Leftrightarrow \exists x(\ell = x \wedge \chi)$. Следователно $M, \sigma \models \Box(\varphi \Leftrightarrow [\ell/x]\chi)$. При стойностите на променливите от $[\ell/x]\chi$, които задава $M$, дизюнктивната нормална форма на $[\ell/x]\chi$ е дизюнкция на системи от неравенства за $\ell$, които, тъй като $\varphi$ се изпълнява в произволно къси подинтервали на $\sigma$, имат произволно малки положителни решения. Следователно съществува $h > 0_M$ такова, че всички продължителности от интервала $(0_M, h]$ са решения на някоя от тези системи. Оттук следва, че $\varphi$ е изпълнена във всички подинтервали с дължина в $(0, h]$. $\dashv$

**Лема 8.11** *Нека $\varphi$ е формула от $\mathbf{L}$, $M$ е модел за $\mathbf{L}$ и $\sigma \in \mathbf{I}(T_M)$. Тогава съществува формула $\psi$ от $\mathbf{L}$ такава, че $M, \sigma \models \Box(\varphi^* \Leftrightarrow \psi)$.*

**Доказателство:** Лесно се проверява, че $\models_{DC} \bigvee\limits_{k<n} \varphi^k \Rightarrow \varphi^*$ за всяко $n < \omega$. За да получим лемата, е достатъчно да докажем, че съществува $n$ такова, че за всеки нетривиален подинтервал $\sigma'$ на $\sigma$ е изпълнено $M, \sigma' \models \varphi^* \Rightarrow \bigvee\limits_{k<n} \varphi^k$.

Нека $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \mathbf{I}(T_M)$ са нетривиални интервали такива, че $\sigma_1; \ldots; \sigma_m = \sigma$ и за всяка променлива за състояние $P$ от $\varphi$ и $i = 1, \ldots, m$ $I_M(P)$ е постоянна в $\sigma_i^{[)}$. Нека $M, \sigma' \models \varphi^*$. Тогава съществуват $\pi_0, \ldots, \pi_p \in \sigma'$ такива, че $\min \sigma' = \pi_0 < \ldots < \pi_p = \max \sigma'$ и $M, [\pi_i, \pi_{i+1}] \models \varphi$ за $i < p$. Всички интервали от вида $[\pi_i, \pi_{i+1}]$, освен не повече от $m-1$ на брой, са подинтервали на интервали от вида $\sigma_i$. Нека фиксираме $i < m$ и разгледаме интервала $\sigma_i$. Нека $\sigma_i$ пресича $\sigma'$. Нека $j_1$ и $j_2$ са съответно най-малкото и най-голямото естествени числа $j$ със свойството $\pi_j \in \sigma_i$. Ако съществуват подинтервали на $\sigma_i$ с произволно малка положителна продължителност, които изпълняват $\varphi$, то според твърдение 8.5 всички подинтервали на $\sigma_i$ с положителна продължителност, по-малка или равна на някое фиксирано $h$, изпълняват $\varphi$. Следователно, ако $j_1 \neq j_2$, $M, [\pi_{j_1}, \pi_{j_2}] \models \varphi^{\left\lceil \frac{m_M(\sigma_i)}{h} \right\rceil}$. Ако $j_1 = j_2$, то $M, [\pi_{j_1}, \pi_{j_2}] \models \varphi^0$. Ако съществува $h > 0_M$ такова, че подинтервалите на $\sigma_i$ с дължина по-малка или равна на $h$ не изпълняват $\varphi$, то съществува $k \leq \left\lceil \frac{m_M(\sigma_i)}{h} \right\rceil$ такова, че $M, [\pi_{j_1}, \pi_{j_2}] \models \varphi^k$. И в двата случая оценките за степента на $\varphi$, изпълнена в $[\pi_{j_1}, \pi_{j_2}]$, не зависят от $\sigma'$, а само от $M$ и $\sigma$.

Получихме, че $\sigma'$ се разбива на не повече от $m-1$ подинтервала, които покриват точките $\{\max \sigma_i : i = 1, \ldots, m-1\} \cap \sigma'$ и изпълняват $\varphi$ и не повече от $m$ подинтервала, всеки от които е част от интервал от вида $\sigma_i$ и изпълнява $\varphi^k$ за $k$ ограничено от величина $K$, зависеща само от $M$ и $\sigma$. Следователно $M, \sigma' \models \varphi^n$ за някое $n \leq (K+1).m-1$, т.е. $M, \sigma' \models \bigvee\limits_{k<(K+1).m} \varphi^k$. $\dashv$

**Теорема 8.12 (за локална отстранимост на итерацията)** *Нека $\varphi$ е допустима формула от разширението на $\mathbf{L}$ с итерация, $M$ е модел за $\mathbf{L}$ и $\sigma \in \mathbf{I}(T_M)$. Тогава съществува формула $\psi$ от $\mathbf{L}$ такава, че $M, \sigma \models \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi)$.*

**Доказателство:** Индукция по броя на участията на $^*$ във $\varphi$. Ако $\varphi$ съдържа $^*$, то $\varphi$ има подформула от вида $\chi^*$, в която $\chi$ не съдържа $^*$. Според лема 8.11 съществува $\psi$ от $\mathbf{L}$ такава, че $M, \sigma \models \Box(\chi^* \Leftrightarrow \psi)$. Тогава според твърдение 8.2 резултатът от заместването на $\chi^*$ с $\psi$ във $\varphi$ е формула, еквивалентна на $\varphi$, но с по-малко участия на $^*$. $\dashv$

## 8.3 Теорема за пълнота

В доказателството на теоремата за пълнота, което следва, използуваме индукция по **-височината* $h^*$ на формули от език на $DC^*$. Определяме $h^*$ с индукция по дължината на формулите така:

$$h^*(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{ако } \alpha \text{ не съдържа } {}^*, \\ 1 + \max\{h^*(\beta) : \beta^* \text{ е подформула на } \alpha\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Теорема 8.13 (пълнота на $DC^*$)** *Нека* $\Gamma$ *е непротиворечиво множество от допустими формули от език* $\mathbf{L}$ *на* $DC^*$. *Тогава съществуват модел* $M$ *за* $\mathbf{L}$ *и интервал* $\sigma_0 \in \mathbf{I}(T_M)$ *такива, че* $M, \sigma_0 \models \Gamma$.

**Доказателство:** Нека $S = \{s_\varphi : \varphi \in \mathbf{L}\}$ е множество от темпорални съждителни променливи, нови за $\mathbf{L}$. Нека $\mathbf{L}(S)$ е езикът на $DC$, образуван със символите от езика $\mathbf{L}$ на $DC^*$ и символите от $S$.

За всяка формула $\varphi$ от $\mathbf{L}$ с $\mathsf{t}(\varphi)$ означаваме формулата от $\mathbf{L}(S)$, получена по следния начин: С точност до избора на темпоралните съджителни променливи $P_1, \ldots, P_n$ съществува единствено представяне на $\varphi$ във вида $[\psi_1^*/P_1, \ldots, \psi_n^*/P_n]\psi$, където $\psi$ съдържа $P_1, \ldots, P_n$ и не съдържа ${}^*$, а $\psi_1, \ldots, \psi_n$ са различни формули. Тогава $\mathsf{t}(\varphi)$ е $[s_{\psi_1}/P_1, \ldots, s_{\psi_n}/P_n]\psi$.

Нека $\Delta = \{\Box\alpha : \alpha$ е частен случай на $DC_1^*, DC_2^*$ или $DC_3^*\}$. Тогава $\Gamma' = \{\mathsf{t}(\varphi) : \varphi \in \Gamma \cup \Delta\}$ е непротиворечиво в $DC$. Да допуснем противното. Тогава съществува извод в известната система за $DC$ на $\bot$ с предпоставки от $\Gamma'$. Може да се предполага, че формулите в този извод не съдържат индивидни променливи, участвуващи свободно във формулите $\varphi$, за които $s_\varphi$ се срещат в извода. Тогава резултатът от заместването на всяка темпорална съждителна променлива $s_\varphi$ със съответната ѝ формула $\varphi$ в този извод е извод на $\bot$ в предложената система за $DC^*$ с предпоставки от $\Gamma$. По условие, $\Gamma$ е непротиворечиво спрямо тази система. Това показва, че допускането, че $\Gamma'$ е противоречиво спрямо системата за $DC$, е невярно.

Следователно съществуват модел $M'$ за $\mathbf{L}(S)$ и интервал $\sigma_0 \in \mathbf{I}(T_{M'})$ такива, че $M', \sigma_0 \models \Gamma'$. $M'$ може да се разглежда и като модел на езика на $DC^*$, образуван със символите на езика $\mathbf{L}(S)$ на $DC$.

Да докажем, че за всяка допустима $\chi$ от $\mathbf{L}$ е изпълнено $M', \sigma_0 \models \Box(s_\chi \Leftrightarrow \chi^*)$. Доказателството е с индукция по $h^*(\chi)$.

От избора на $\Gamma'$ следва, че във всички подинтервали на $\sigma_0$ са изпълнени $\mathsf{t}$-преводите:

$\ell = 0 \Rightarrow s_\chi$

$(s_\chi; \mathsf{t}(\chi)) \Rightarrow s_\chi$

$(s_\chi \wedge \mathsf{t}(\theta); \top) \Rightarrow (\mathsf{t}(\theta) \wedge \ell = 0; \top) \vee ((s_\chi \wedge \neg\mathsf{t}(\theta); \mathsf{t}(\chi)) \wedge \mathsf{t}(\theta); \top)$

на частните случаи на аксиомите $DC_1^*$, $DC_2^*$ и $DC_3^*$. Преводът на $DC_3^*$ е изпълнен за всички формули $\theta$ от $\mathbf{L}$.

От истинността на посочените преводи на $DC_1^*$ и $DC_2^*$ в подинтервалите на $\sigma_0$ следва, че в тези подинтервали са верни формулите $(\mathsf{t}(\chi))^k \Rightarrow s_\chi$, $k < \omega$. Това се установява с проста индукция по $k$. Оттук следва, че в подинтервалите на $\sigma_0$ е изпълнена $(\mathsf{t}(\chi))^* \Rightarrow s_\chi$. Ако $h^*(\chi) = 0$, $\mathsf{t}(\chi)$ е $\chi$. Следователно в подинтервалите на $\sigma_0$ за такива $\chi$ е изпълнена $\chi^* \Rightarrow s_\chi$. Нека $h^*(\chi) = l + 1$ за някое $l < \omega$. Тогава $\chi$ има вида $[\psi_1^*/P_1, \ldots, \psi_k^*/P_k]\psi$, където $h^*(\psi_i) \leq l$, $i = 1, \ldots, k$, а $\psi$ не съдържа ${}^*$. Тогава $\mathsf{t}(\chi)$ е $[s_{\psi_1}/P_1, \ldots, s_{\psi_k}/P_k]\psi$. Тъй като $h^*(\psi_i) \leq l$, според индукционното допускане, в подинтервалите на $\sigma_0$ за $i = 1, \ldots, k$ е вярна $s_{\psi_i} \Leftrightarrow \psi_i^*$, т.е. $M', \sigma_0 \models \Box(s_{\psi_i} \Leftrightarrow \psi_i^*)$. Тъй като $\chi$ е допустима формула, оттук с $k$-кратно прилагане на твърдение 8.2 се получава $M', \sigma_0 \models \Box(\mathsf{t}(\chi) \Leftrightarrow \chi)$. С още едно прилагане на твърдение 8.2, този път към $(\mathsf{t}(\chi))^* \Rightarrow s_\chi$, оттук получаваме, че подинтервалите на $\sigma_0$ изпълняват $\chi^* \Rightarrow s_\chi$.

Остава да докажем, че в тези подинтервали е вярна формулата $s_\chi \Rightarrow \chi^*$. Както установихме по-горе, $M', \sigma_0 \models \Box(\mathsf{t}(\chi) \Leftrightarrow \chi)$. Оттук, прилагайки твърдение 8.2 към

$\mathsf{t}$-превода на $DC_3^*$, даден по-горе, получаваме, че в подинтервалите на $\sigma_0$ за всяка $\theta$ от $\mathbf{L}$ е вярна формулата

$(s_\chi \wedge \mathsf{t}(\theta); \top) \Rightarrow (\mathsf{t}(\theta) \wedge \ell = 0; \top) \vee ((s_\chi \wedge \neg\mathsf{t}(\theta); \chi) \wedge \mathsf{t}(\theta); \top)$.

Нека $\theta$ е свободна от $^*$ формула и $M', \sigma_0 \models \Box(\chi^* \Leftrightarrow \neg\theta)$. Такава формула съществува според теорема 8.12. Според определението на $\mathsf{t}$, $\mathsf{t}(\theta)$ е $\theta$. Следователно подинтервалите на $\sigma_0$ изпълняват

$(s_\chi \wedge \theta; \top) \Rightarrow (\theta \wedge \ell = 0; \top) \vee ((s_\chi \wedge \neg\theta; \chi) \wedge \theta; \top)$.

С цел противоречие допускаме, че съществува интервал $\sigma \subseteq \sigma_0$ такъв, че $M', \sigma \models s_\chi, \neg\chi^*$. Тогава $M', \sigma \models \theta$, откъдето $M', \sigma \models (s_\chi \wedge \theta; \top)$. Тъй като $\theta$ е еквивалентна на отрицанието на формула, образувана с $^*$, $\theta$ не е изпълнена в тривиални интервали. Следователно, $M', \sigma \not\models (\theta \wedge \ell = 0; \top)$. За да получим търсеното противоречие, остава да установим и $M', \sigma \not\models ((s_\chi \wedge \neg\theta; \chi) \wedge \theta; \top)$. Да допуснем противното. Тогава $\sigma$ може да се представи във вида $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$ така, че $M', \sigma_1 \models \neg\theta$, $M', \sigma_2 \models \chi$ и $M', \sigma_1; \sigma_2 \models \theta$. Но от $M', \sigma_1 \models \neg\theta$, според избора на $\theta$, следва $M', \sigma_1 \models \chi^*$. Следователно, $M', \sigma_1; \sigma_2 \models (\chi^*; \chi)$, откъдето $M', \sigma_1; \sigma_2 \models \chi^*, \theta$. Но това противоречи на избора на $\theta$. С това е доказано, че подинтервалите на $\sigma_0$ изпълняват $s_\chi \Rightarrow \chi^*$.

В крайна сметка установихме, че $M', \sigma_0 \models \Box(s_\chi \Leftrightarrow \chi^*)$ за всяка допустима формула $\chi$ от $\mathbf{L}$. Използуваме това, за да приложим твърдение 8.2 към $\mathsf{t}$-преводите на формулите от $\Gamma$, които са изпълнени в интервала $\sigma_0$ на $M'$. Получаваме, че $M', \sigma_0 \models \varphi$ за всяка $\varphi \in \Gamma$. Нека $I$ е обедняването на $I_{M'}$ до символите от $\mathbf{L}$. Тогава $M = \langle F_{M'}, I\rangle$ е модел със желаните свойства. $\dashv$

# Приложение: Системи за извод

## Към логиките от част I

*QP*

Крайно-пълна система:

$(A0)$ *всички класически съждителни тавтологии*

$(A1)$ $\Box(\varphi \Leftrightarrow \varphi') \wedge \Box(\psi \Leftrightarrow \psi') \Rightarrow (\varphi \leq \psi \Rightarrow \varphi' \leq \psi')$

$(A2)$ $\varphi \leq \psi \vee \psi \leq \varphi$

$(A3)$ $\bot \leq \varphi$

$(A4)$ $\Diamond \top$

$(B_m)$ $\Box(\varphi_1, \ldots, \varphi_m \mathsf{E} \psi_1, \ldots, \psi_m) \Rightarrow \left( \bigwedge_{i=1}^{m-1} \psi_i \leq \varphi_i \Rightarrow (\varphi_m \leq \psi_m) \right)$, $2 \leq m < \omega$

$(MP)$ $\dfrac{\varphi \Rightarrow \psi,\ \varphi}{\psi}$ $\quad$ $(N)$ $\dfrac{\varphi}{\top \leq \varphi}$

Разширението на крайно-пълната система с аксиомите

$$\Pi_j \rightleftharpoons \bigwedge_{i<j} p_{i,j} \equiv p_{0,j} \wedge \Box \left( \bigvee_{i<j} p_{i,j} \right) \wedge \bigwedge_{i_1<i_2<j} (p_{i_1,j} \wedge p_{i_2,j}) \leq \bot,\ j < \omega$$

за спомагателните променливи $p_{i,j}$, $0 \leq i < j, j < \omega$ и $\omega$-правилото

$$\frac{\forall j\ \theta \Rightarrow \Pi_j \wedge \bigwedge_{i<j} (\psi \leq R_{i,j} \Rightarrow \varphi \leq R_{i,j})}{\theta \Rightarrow \varphi \leq \psi}\ Ded, \qquad R_{i,j} \rightleftharpoons \bigvee_{k=0}^{i-1} p_{k,j}$$

е $\omega$-пълна система за $QP$ (вж. теорема 2.21).

*DQP*

Разширението на $\omega$-пълната система за $QP$, където $\leq \in \{\leq_t$: $t$ е терм за процеси$\}$, с аксиомите

$(I)$ $\varphi \Leftrightarrow \Box_{Id}\varphi$

$(U_{k_1,k_2,j})$ $\Pi_j^{t_1} \wedge \Pi_j^{t_2} \wedge \Pi_{2j}^{t_1+t_2} \wedge \varphi \leq_{t_1} \frac{k_1}{j} \wedge \varphi \leq_{t_2} \frac{k_2}{j} \Rightarrow \varphi \leq_{t_1+t_2} \frac{k_1+k_2}{2j}$

$(M_{p,j,l})$ $\Pi_j^{t_1} \wedge \Box_{t_1} \Pi_l^{t_2} \wedge \Pi_{jl}^{t_1;t_2} \wedge \bigwedge_{q_1<q_2<p} (\psi_{q_1} \wedge \psi_{q_2}) \leq_{t_1} \bot \wedge \Box_{t_1} \left( \bigvee_{q<p} \psi_q \right) \wedge$

$$\wedge \bigwedge_{q<p} \psi_q \leq_{t_1} \tfrac{i_q}{j} \wedge \bigwedge_{q<p} \Box_{t_1} \left( \psi_q \Rightarrow \varphi \leq_{t_2} \tfrac{k_q}{l} \right) \Rightarrow \varphi \leq_{t_1;t_2} \frac{\sum_{q<p} i_q k_q}{jl}$$

$$\Pi_j^{t_1} \wedge \Box_{t_1} \Pi_l^{t_2} \wedge \Pi_{jl}^{t_1;t_2} \wedge \bigwedge_{q_1<q_2<p} (\psi_{q_1} \wedge \psi_{q_2}) \leq_{t_1} \bot \wedge \Box_{t_1} \left( \bigvee_{q<p} \psi_q \right) \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{q<p} \tfrac{i_q}{j} \leq_{t_1} \psi_q \wedge \bigwedge_{q<p} \Box_{t_1} \left( \psi_q \Rightarrow \tfrac{k_q}{l} \leq_{t_2} \varphi \right) \leq_{t_2} \varphi \Rightarrow \frac{\sum_{q<p} i_q k_q}{jl} \leq_{t_1;t_2} \varphi$$

$(F_{k,j})$ $\Pi_j^{t^*} \wedge \Pi_j^{Id+t;t^*} \Rightarrow \left( \varphi \leq_{t^*} \frac{k}{j} \Leftrightarrow \varphi \leq_{Id+t;t^*} \frac{k}{j} \right)$

Тук $\Pi_j^t$ е съкращение за аксиомата $\Pi_j$ с $\leq_t$ вместо $\leq$, а $\frac{i}{j}$ - за $R_{i,j}$.

*EQP*

| | |
|---|---|
| $(A0)$ | *всички класически съждителни тавтологии* |
| $(A1)$ | $\Box(\varphi \Leftrightarrow \varphi') \wedge \Box(\psi \Leftrightarrow \psi') \Rightarrow (\varphi \leq \psi \Rightarrow \varphi' \leq \psi')$ |
| $(A2)$ | $\varphi \leq \psi \vee \psi \leq \varphi$ |
| $(A3)$ | $\bot \leq \varphi$ |
| $(A4)$ | $\Diamond \top$ |
| $(B_3)$ | $\Box(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \mathsf{E} \psi_1, \psi_2, \psi_3) \Rightarrow (\psi_1 \leq \varphi_1 \wedge \psi_2 \leq \varphi_2 \Rightarrow (\varphi_3 \leq \psi_3))$ |
| $(C1)$ | $\mathbf{c}(\varphi, \psi) \Rightarrow \psi$ |
| $(C2_l)$ | $\psi \leq \varphi \Rightarrow \mathbf{c}(\varphi, \psi) \equiv \psi$ |
| $(C2_r)$ | $\varphi \leq \psi \Rightarrow \mathbf{c}(\varphi, \psi) \equiv \varphi$ |
| $(R1)$ | $\mathbf{r}(\varphi, \psi) \Rightarrow \psi$ |
| $(R2)$ | $\Diamond \psi \Rightarrow (\mathbf{r}(\varphi, \psi) \leq \mathbf{r}(\psi, \chi) \Leftrightarrow \varphi \leq \chi)$ |
| $(R\wedge)$ | $\mathbf{r}(\varphi_1, \psi) \wedge \mathbf{r}(\varphi_2, \psi) \Leftrightarrow \mathbf{r}(\varphi_1 \wedge \varphi_2, \psi)$ |
| $(R\neg)$ | $\mathbf{r}(\neg\varphi_1, \psi) \Leftrightarrow \psi \wedge \neg\mathbf{r}(\varphi_1, \psi)$ |
| $(MP)$ | $\dfrac{\varphi \Rightarrow \psi,\ \varphi}{\psi}$ |
| $(N)$ | $\dfrac{\varphi}{\top \leq \varphi}$ |
| $(E_{\mathbf{c}})$ | $\dfrac{\vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi' \ \vdash \psi \Leftrightarrow \psi'}{\vdash \mathbf{c}(\varphi, \psi) \Leftrightarrow \mathbf{c}(\varphi', \psi')}$ |
| $(E_{\mathbf{r}})$ | $\dfrac{\vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi' \ \vdash \psi \Leftrightarrow \psi'}{\vdash \mathbf{r}(\varphi, \psi) \Leftrightarrow \mathbf{r}(\varphi', \psi')}$ |

## Към логиките от част II

*ITL*

Аксиоми за предикатното смятане от първи ред с равенство и:

| | |
|---|---|
| $(D1)$ | $x + (y + z) = (x + y) + z$ |
| $(D2)$ | $x + 0 = 0 + x = x$ |
| $(D3)$ | $x + y = x + z \Rightarrow y = z,\ x + z = y + z \Rightarrow x = y$ |
| $(D4)$ | $x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0$ |
| $(D5)$ | $\exists z(x + z = y \vee y + z = x),\ \exists z(z + x = y \vee z + y = x)$ |
| $(ITL\text{-}A1_l)$ | $(\varphi; \psi) \wedge \neg(\chi; \psi) \Rightarrow (\varphi \wedge \neg\chi; \psi)$ |
| $(ITL\text{-}A1_r)$ | $(\varphi; \psi) \wedge \neg(\varphi; \chi) \Rightarrow (\varphi; \psi \wedge \neg\chi)$ |
| $(ITL\text{-}A2)$ | $((\varphi; \psi); \chi) \Leftrightarrow (\varphi; (\psi; \chi))$ |
| $(ITL\text{-}R_l)$ | $(\varphi; \psi) \Rightarrow \varphi$ ако $\varphi$ е статична |
| $(ITL\text{-}R_r)$ | $(\varphi; \psi) \Rightarrow \psi$ ако $\psi$ е статична |
| $(ITL\text{-}B_l)$ | $(\exists x\varphi; \psi) \Rightarrow \exists x(\varphi; \psi)$ ако $x \notin FV(\psi)$ |
| $(ITL\text{-}B_r)$ | $(\varphi; \exists x\psi) \Rightarrow \exists x(\varphi; \psi)$ ако $x \notin FV(\varphi)$ |
| $(ITL\text{-}L1_l)$ | $(\ell = x; \varphi) \Rightarrow \neg(\ell = x; \neg\varphi)$ |
| $(ITL\text{-}L1_r)$ | $(\varphi; \ell = x) \Rightarrow \neg(\neg\varphi; \ell = x)$ |
| $(ITL\text{-}L2)$ | $\ell = x + y \Leftrightarrow (\ell = x; \ell = y)$ |
| $(ITL\text{-}L3_l)$ | $\varphi \Rightarrow (\ell = 0; \varphi)$ |
| $(ITL\text{-}L3_r)$ | $\varphi \Rightarrow (\varphi; \ell = 0)$ |

| | |
|---|---|
| $(MP)$ | $\dfrac{\varphi\ \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}$ |
| $(G)$ | $\dfrac{\varphi}{\forall x\varphi}$ |
| $(ITL\text{-}N_l)$ | $\dfrac{\varphi}{\neg(\neg\varphi; \psi)}$ |
| $(ITL\text{-}N_r)$ | $\dfrac{\varphi}{\neg(\psi; \neg\varphi)}$ |
| $(ITL\text{-}Mono_l)$ | $\dfrac{\varphi \Rightarrow \psi}{(\varphi; \chi) \Rightarrow (\psi; \chi)}$ |
| $(ITL\text{-}Mono_r)$ | $\dfrac{\varphi \Rightarrow \psi}{(\chi; \varphi) \Rightarrow (\chi; \psi)}$ |

$ITL_{fin}(\Omega)$

Системата за $ITL$, разширена с аксиомата
$\gamma \Rightarrow \Box\gamma$
и правилото
$\dfrac{\forall k < \omega\ [\gamma^k/P]\varphi}{[\top/P]\varphi}\ (\omega^\gamma)$, $\gamma \in \Omega$.

$ITL_d(\Delta)$

Системата за $ITL$, разширена с аксиомите и правилото:

$(D_0)$ $\quad \Box(\delta \Rightarrow \ell = 0)$, $\delta \in \Delta$;

$(D_=)$ $\quad \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow f(\varphi, t_1, \ldots, t_n) = f(\psi, t_1, \ldots, t_n)$

$(D_\Leftrightarrow)$ $\quad \Box(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow (R(\varphi, t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow R(\psi, t_1, \ldots, t_n))$

$\Box_i \neg\Delta \Rightarrow \Box\Box_i\neg\Delta$, $\delta \in \Delta$

$$\frac{\forall k < \omega \ [(\Box_i\neg\Delta)^k/P]\varphi}{[\top/P]\varphi}, \ \delta \in \Delta$$

**$ITL$ с квантор по дискретни съждителни променливи**

Системата за $ITL_d(\Delta)$, където $\Delta$ се състои от дискретните съждителни променливи, разширена с аксиомите и правилото:

$(B_l^D)$ $\quad (\exists p\varphi; \psi) \Rightarrow \exists p(\varphi; \psi)$ ако $p \notin FV(\psi)$

$(B_r^D)$ $\quad (\varphi; \exists p\psi) \Rightarrow \exists p(\varphi; \psi)$ ако $p \notin FV(\varphi)$

$(\exists^D)$ $\quad [q/p]\varphi \Rightarrow \exists p\varphi$, $q \in \Delta$

$$(G^D) \quad \frac{[q/p]\varphi}{\forall p\varphi}, \ q \in D$$

$(S_0)$ $\quad \exists p\Box\neg p$

$(S_1)$ $\quad x \leq \ell \Rightarrow \exists p\forall y((\ell = y; (p; \top)) \Leftrightarrow y = x)$

$(\vee)$ $\quad \exists r\Box(r \Leftrightarrow (p \vee q))$

**Формули, представящи състояния, и темпорални константи, представящи продължителности, в $ITL_{fin}(\Omega)$**

За формули $\varphi$, представящи състояния:

$(S1)$ $\quad \varphi \Rightarrow \ell \neq 0$

$(S2)$ $\quad \varphi \Rightarrow \Box(\varphi \vee \ell = 0)$

$\varphi \vee \Box\neg\varphi \Rightarrow \Box(\varphi \vee \Box\neg\varphi)$

$$\frac{\forall k < \omega \ [(\varphi \vee \Box\neg\varphi)^k/P]\psi}{[\top/P]\psi}$$

За темпорални константи, представящи продължителности:

$(I1)$ $\quad \ell = 0 \Rightarrow \ell^\varphi = 0$

$(I2)$ $\quad (\ell^\varphi = x; \Box\neg\varphi) \Rightarrow \ell^\varphi = x$

$(I3)$ $\quad (\ell^\varphi = x; \varphi \wedge \ell = y) \Rightarrow \ell^\varphi = x + y$

$ITL^2$

Системата за $ITL$, разширена с аксиомите и правилото:

$(L2^*)$ $\quad \ell^* = x + y \Leftrightarrow (\ell^* = x; \ell^* = y)$

$(L+)$ $\quad \ell = \ell^- + \ell^|$

$(L\Box)$ $\quad (\ell = l^- \vee \ell = \ell^|) \Rightarrow \Box(\ell = \ell^- \vee \ell = \ell^|)$

$$(\omega_{ITL^2}) \quad \frac{\forall k < \omega \ [(\ell = \ell^- \vee \ell = \ell^|)^k/P]\varphi}{[\top/P]\varphi}$$

където $* \in \{|, -\}$, е $\omega$-пълна за $ITL^2$.

$DC$

Системата за $ITL$, разширена с аксиомите и правилата по-долу, е относително пълна за $DC$ (вж. теорема 5.12).

$(DC\text{-}A1)$ $\int \mathbf{0} = 0$
$(DC\text{-}A2)$ $\int \mathbf{1} = \ell$
$(DC\text{-}A3)$ $\int S \geq 0$
$(DC\text{-}A4)$ $\int S_1 + \int S_2 = \int (S_1 \vee S_2) + \int (S_1 \wedge S_2)$
$(DC\text{-}A5)$ $(\int S = x; \int S = y) \Rightarrow \int S = x + y$
$(DC\text{-}A6)$ $\int S_1 = \int S_2$ ако $S_1 \Leftrightarrow S_2$ е класическа съждителна тавтология.

$$(IR_1) \quad \frac{[\ell = 0/A]\varphi \;\; \varphi \Rightarrow [A \vee (A; \lceil S \rceil) \vee (A; \lceil \neg S \rceil)/A]\varphi}{[\top/A]\varphi}$$

$$(IR_2) \quad \frac{[\ell = 0/A]\varphi \;\; \varphi \Rightarrow [A \vee (\lceil S \rceil; A) \vee (\lceil \neg S \rceil; A)/A]\varphi}{[\top/A]\varphi}$$

### $DC$ с абстрактна семантика

Системата за $ITL_{fin}(\Omega)$, където $\Omega = \{\lceil S \rceil \vee \lceil \neg S \rceil \vee \ell = 0 : S$ е израз за състояние$\}$, разширена с аксиомите
$(DC0)$ $l = 0 \Rightarrow \int S = 0$
$(DC1)$ $\int \mathbf{0} = 0$
$(DC2)$ $\lceil \mathbf{1} \rceil \vee l = 0$
$(DC3)$ $(\int S = x; \lceil S \rceil \wedge l = y) \Rightarrow \int S = x + y$
$(DC4)$ $(\int S = x; \lceil \neg S \rceil) \Rightarrow \int S = x$
$(DC5)$ $\lceil S_1 \rceil \wedge \lceil S_2 \rceil \Leftrightarrow \lceil S_1 \wedge S_2 \rceil$
$(DC6)$ $\lceil S_1 \rceil \Leftrightarrow \lceil S_2 \rceil$, ако $S_1 \Leftrightarrow S_2$ е съждителна тавтология.
$(DC7)$ $\lceil S \rceil \Rightarrow \Box(\lceil S \rceil \vee l = 0)$
е $\omega$-пълна за $DC$ с абстрактна семантика.

### $DC^2$ с абстрактна семантика

Системата за $ITL^2$, разширена с аксиомите и правилото
$(DC0^*)$ $\ell^* = 0 \Rightarrow \int^* S = 0$
$(DC1^*)$ $\int^* \mathbf{0} = 0$
$(DC2^*)$ $\lceil \mathbf{1} \rceil^* \vee \ell^* = 0$
$(DC3^*)$ $(\int^* S = x; \lceil S \rceil^* \wedge \ell^* = y) \Rightarrow \int^* S = x + y$
$(DC4^*)$ $(\int^* S = x; \lceil \neg S \rceil^*) \Rightarrow \int^* S = x$
$(DC5^*)$ $\lceil S_1 \rceil^* \wedge \lceil S_2 \rceil^* \Leftrightarrow \lceil S_1 \wedge S_2 \rceil^*$
$(DC6^*)$ $\lceil S_1 \rceil^* \Leftrightarrow \lceil S_2 \rceil^*$ ако $S_1 \Leftrightarrow S_2$ е съждителна тавтология
$(DC7^*)$ $\lceil S \rceil^* \Rightarrow \Box(\lceil S \rceil^* \vee \ell^* = 0)$
$(DC+)$ $\int S = \int^- S + \int^| S$

$$(\omega_{DC^2}) \quad \frac{\forall k < \omega \;\; [(\lceil S \rceil^* \vee \lceil \neg S \rceil^* \vee \ell^* = 0)^k/P]\varphi}{[\top/P]\varphi}$$

където $* \in \{-, |\}$, е $\omega$-пълна за $DC^2$ с абстрактна семантика.

### $DC$ с абстрактна семантика и квантор по променливите за състояния

Системата за $DC$ с абстрактна семантика, разширена с аксиомите и правилото:
$(\exists^S)$ $[S/P]\varphi \Rightarrow \exists P \varphi$, където $S$ е израз за състояние
$(B_l^S)$ $(\exists P\varphi; \psi) \Rightarrow \exists P(\varphi; \psi)$ ако $P$ не е свободна в $\psi$
$(B_r^S)$ $(\varphi; \exists P\psi) \Rightarrow \exists P(\varphi; \psi)$ ако $P$ не е свободна в $\varphi$
$(;)$ $x = 0 \vee \ell \leq x \vee \exists P(\lceil S_1 \Leftrightarrow P \rceil \wedge \ell = x; \lceil S_2 \Leftrightarrow P \rceil)$

$$(G^S) \quad \frac{\varphi}{\forall P \varphi}$$

е $\omega$-пълна за $DC$ с абстрактна семантика и квантор по променливите за състояния.

$NL$

Аксиоми за предикатното смятане от първи ред с равенство и:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(D1)$ | $x+(y+z)=(x+y)+z$ | $(D5')$ | $x \leq x$ |
| $(D2)$ | $x+0=0+x=x$ | $(D6')$ | $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x=y$ |
| $(D3)$ | $x+y=x+z \Rightarrow y=z$ | $(D7')$ | $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ |
| | $x+z=y+z \Rightarrow x=y$ | $(D8')$ | $x \leq y \Leftrightarrow \exists z(x+z=y \wedge 0 \leq z)$ |
| $(D4')$ | $\exists z(x+z=y)$ | | |
| | $\exists z(z+x=y)$ | | |

$(NL\text{-}A1)$ $\Diamond_d\varphi \Rightarrow \varphi$ ако $\varphi$ е статична.

$(NL\text{-}A2)$ $0 \leq l$

$(NL\text{-}A3)$ $0 \leq x \Rightarrow \Diamond_d(\ell = x)$

$(NL\text{-}A4)$ $\Diamond_d(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \Diamond_d\varphi \vee \Diamond_d\psi$

$(NL\text{-}A4')$ $\Diamond_d\exists x\varphi \Rightarrow \exists x\Diamond_d\varphi$

$(NL\text{-}A5)$ $\Diamond_d(\ell = x \wedge \varphi) \Rightarrow \Box_d(\ell = x \Rightarrow \varphi)$

$(NL\text{-}A6)$ $\Diamond_d^c\varphi \Rightarrow \Box_d\Diamond_{\overline{d}}\varphi$

$(NL\text{-}A7)$ $\ell = x \Rightarrow (\varphi \Leftrightarrow \Diamond_d^c(\ell = x \wedge \varphi))$

$(NL\text{-}A8)$ $0 \leq x \Rightarrow 0 \leq y \Rightarrow \Diamond_d(\ell = x \wedge \Diamond_d(\ell = y \wedge \Diamond_d\varphi)) \Rightarrow \Diamond_d(\ell = x+y \wedge \Diamond_d\varphi)$

$(NL\text{-}Mono)$ $\dfrac{\varphi \Rightarrow \psi}{\Diamond_d\varphi \Rightarrow \Diamond_d\psi}$ $\quad$ $(MP)$ $\dfrac{\varphi \;\; \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}$

$(NL\text{-}Nec)$ $\dfrac{\varphi}{\Box_d\varphi}$ $\quad$ $(G)$ $\dfrac{\varphi}{\forall x\varphi}$

$PITL$

Системата за $NL$, разширена с аксиомите за областите от вероятности

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(U1)$ | $x+(y+x)=(x+y)+z$ | $(U5)$ | $x+y=0 \Rightarrow x=0$ |
| $(U2)$ | $x+0=x$ | $(U6)$ | $\exists z(x+z=y \vee y+z=x)$ |
| $(U3)$ | $x+y=y+x$ | $(U7)$ | $0 \neq 1$ |
| $(U4)$ | $x+y=x+z \Rightarrow y=z$ | | |

и следните аксиоми и правила:

| | |
|---|---|
| $(P_\bot)$ | $p(\bot)=0$ |
| $(P_\top)$ | $p(\top)=1$ |
| $(P_+)$ | $p(\varphi)+p(\psi)=p(\varphi \vee \psi)+p((\varphi;\top) \wedge (\psi;\top))$ |
| $(P_=)$ | $x_1=y_1 \wedge \ldots \wedge x_n=y_n \Rightarrow p(\varphi,x_1,\ldots,x_n)=p(\varphi,y_1,\ldots,y_n)$ |
| $(P_\Diamond)$ | $\dfrac{\varphi \Rightarrow \Diamond_l^c\psi \Rightarrow \Diamond_l^c\chi}{\varphi \Rightarrow p(\psi) \leq p(\chi)}$ |
| $(P_;)$ | $\dfrac{\varphi \Rightarrow \neg(\varphi;\ell \neq 0)}{(\varphi;p(\psi)=x) \Rightarrow p((\varphi;\psi))=x}$ |

**Равенството на Чапмън и Колмогоров във** $PITL$

Аксиоми за умножението на вероятности:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(U8)$ | $x.1=x$ | $(U11)$ | $x.(y+z)=z.y+x.z$ |
| $(U9)$ | $x.(y.z)=(x.y).z$ | $(U12)$ | $x.y=x.z \wedge x \neq 0 \Rightarrow y=z$ |
| $(U10)$ | $x.y=y.x$ | $(U13)$ | $x \neq 0 \Rightarrow \exists y(x.y=z)$ |

Правила за вероятността на формули, образувани с $(.;.)$:

$$(\overline{P}) \quad \frac{\varphi \Rightarrow \neg(\varphi;\ell \neq 0)}{\ell = 0 \wedge p(\varphi \wedge \theta \Rightarrow p((\varphi;\psi)) \leq x)=1 \Rightarrow p((\varphi \wedge \theta;\psi)) \leq x.p(\varphi \wedge \theta)}$$

$$(\underline{P}) \quad \frac{\varphi \Rightarrow \neg(\varphi;\ell \neq 0)}{\ell = 0 \wedge p(\varphi \wedge \theta \Rightarrow p((\varphi;\psi)) \geq x)=1 \Rightarrow p((\varphi \wedge \theta;\psi)) \geq x.p(\varphi \wedge \theta)}$$

$DC^*$

Принцип на Архимед:

$$\frac{\forall n\ \varphi \Rightarrow n.x \leq y}{\varphi \Rightarrow x \leq 0}$$

Аксиоми за итерацията:

$(DC_1^*)$ $\quad \ell = 0 \Rightarrow \varphi^*$

$(DC_2^*)$ $\quad (\varphi^*; \varphi) \Rightarrow \varphi^*$

$(DC_3^*)$ $\quad (\varphi^* \wedge \psi; \top) \Rightarrow (\psi \wedge \ell = 0; \top) \vee (((\varphi^* \wedge \neg\psi; \varphi) \wedge \psi); \top)$

## Литература


[Гел94] Гелев, Д. П. *Теорема за силна пълнота на вероятностната логика на Сегерберг.* Дипломна работа, Софийски университет, юни 1994.

[Гре78] Гретцер, Г. *Общая теория решеток*, Мир, Москва, 1982 (превод от английски).

[КЛ88] Капитонова, Ю. В. и А. А. Летичевский. *Математическая теория проектирования вычислительных систем*, Наука, Москва, 1988.

[КЧ77] Кейслер, Г. и Ч. Ч. Чэн. *Теория моделей*, Мир, Москва, 1977 (превод от английски).

[Мак79] Максимова, Л. Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр *Алгебра и логика*, т. 18, 5. сс.556-586, 1979.

[Мал70] Мальцев, А. И. *Алгебраические системы.* Москва, Наука, 1970.

[Обр74] Обретенов, А. *Теория на вероятностите.* Наука и изкуство, София, 1974.

[Три99] Трифонов, В. *Теорема за пълнота на вероятностната интервална темпорална логика относно стандартната й семантика.* Дипломна работа, Софийски университет, юли 1999.

[Цал89] Цаленко, М. Ш. *Моделирование семантики в базах данных*, Москва, Наука, 1989.

[Шон67] Шенфилд, Дж. *Математическая логика*, Москва, Наука, 1975 (превод от английски).

[ACM97] Asarin, E., P. Caspi and O. Maler. A Kleene Theorem for Timed Automata, В *Proceedings of IEEE International Symposium on Logics in Computer Science*, 1997.

[AD94] Alur, R. and D. L. Dill. A Theory of Timed automata, *Theoretical Computer Science* 126, стр. 183-235, 1994.

[AGM92] Abramsky, S., D. Gabbay and T.S.E. Maibaum (eds.) *Handbook of Logic in Computer Science*, Clarendon Press, Oxford, 1992.

[Ale94] Alechina, N. *Logic with Probabilistic Operators*, Report ML-94-10, ILLC, University of Amsterdam, 1994.

[Ben83] Van Benthem, J. A. F. K. *Modal Logic and Classical Logic*, Chapter VI, Bibliopolis, Naples, 1983.

[BH83] Van Benthem, J. A. F. K., I. L. Humberstone. Halldén Completeness by Gluing of Kripke Frames. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 24, Number 4, стр. 426-430, 1983.

[BT98] Blackburn, P. and M. Tzakova. Hybrid Completeness. *Journal of the IGPL*, Vol. 6, no. 4, стр. 625-650, 1998.

[BZ97] Barua, R. and Zhou Chaochen. *Neighbourhood Logics: NL and NL*$^2$. Research Report 120, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, August 1997.

[Dan98] Dang Van Hung. Modelling and Verification of Biphase Mark Protocols in Duration Calculus Using PVS/DC$^-$. B *Proceedings of the 1998 International Conference on Application of Concurrency to System Design* (CSD'98), 23-26 March 1998, Aizu-wakamatsu, Fukushima, Japan, IEEE Computer Society Press, 1998, стр. 88-98.

[DG99] Dang Van Hung and Dimitar P. Guelev. Completeness and Decidability of a Fragment of Duration Calculus with Iteration. B P.S. Thiagarajan and R. Yap (eds), *Advances in Computing Science*, LNCS 1742, Springer-Verlag, 1999, стр. 139-150.

[Dim98] Dima, C. *Timed Regular Expressions, Real-time Automata and Simple Duration Calculus.* Technical Note DeTfoRS 15, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, October 1998.

[DP97] Dang Van Hung and Pham Hong Thai. On Checking Parallel Real-Time Systems for Linear Duration Invariants, B Kramer, B., N. Uchihita, P. Croll and St. Russo (eds.) *Proceedings of the International Symposium of Software Engineering for Parallel and Distributed Systems* (PDSE'98), 20-21 April, 1998, Kyoto, Japan. IEEE Computer Society Press, 1998, стр. 61-71.

[DVH99] Dang Van Hung. *Projections: A Technique for Verifying Real-Time Programs in Duration Calculus.* Research Report 178, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, November 1999.

[DW94] Dang Van Hung and Wang Ji. On The Design of Hybrid Control Systems Using Automata Models. B Chandru, V. and V. Vinay (eds.) LCNS 1180, *Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*, 16th Conference, Hyderabad, India, December 1996, Springer, 1996.

[Dut95] Dutertre, B. *On First Order Interval Temporal Logic* Report no. CSD-TR-94-3 Department of Computer Science, Royal Holloway, University of London, Egham, Surrey TW20 0EX, England, 1995.

[DZ94] Dang Van Hung and Zhou Chaochen. *Probabilistic Duration Calculus for Continuous Time.* Research Report 25, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, May 1994.

[FHM90] Fagin, R., Halpern, J. Y., Megiddo, N. A Logic For Reasoning About Probabilities. *Information and Computation*, Vol. 87, Nos. 1/2, стр. 78-128, July/August 1990.

[FL79] Fisher, M. and R. Ladner Propositional Dynamic Logic of Regular Programs. *Journal of Computer and System Sciences*, v. 18, стр. 194-211, 1979.

[Gar75] Gärdenfors, P. Qualitative Probability as an Intensional Logic. *Journal of Philosophical Logic*, 4, стр. 171-185, 1975.

[GHR94] Gabbay, D. M, I. Hodkinson and M. Reynolds. *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects, vol. I: Mathematical Foundations.* Oxford University Press, Oxford, 1994.

[Gel94a] Gelev, D. P. *Introducing Some Classical Elements of Modal Logic to the Propositional Logics of Qualitative Probabilities*, Report LP-94-01, ILLC, University of Amsterdam, 1994.

[Gor94] Goranko, V. Temporal Logic with Reference Pointers. B Gabbay, D. and H. J. Ohlbach (eds.) *Proceedings of the 1st International Conference on Temporal Logic*, LNAI 827, стр. 133-148, Springer, 1994.

[Gor96a] Goranko, V. Hierarchies of Modal and Temporal Logics with Reference Pointers. *Journal of Logic, Language and Information*, 5(1), стр. 1-24, 1996.

[Gor96b] Goranko, V. *An Interpretation of Computational Tree Logics into Temporal Logics with Reference Pointers.* Technical Report 2/96, Verslagreeks van die Department Wiskunde, RAU, Johannesburg, South Africa, 1996.

[GP92] Goranko, V. and S. Passy. Using the Universal Modality: Gains and Questions. *Journal of Information and Computation*, 2(1), стр. 5-30, 1992.

[Gue95] Guelev, D. P. A Propositional Dynamic Logic with Qualitative Probabilities. *Journal of Philosophical Logic*, v. 28, n. 6, стр. 575-604, 1999.

[Gue98a] Guelev, D. P. *A Calculus of Durations on Abstract Domains: Completeness and Extensions.* Technical Report 139, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, May 1998.

[Gue98b] Guelev, D. P. *Iteration of Simple Formulas in Duration Calculus.* Technical Report 141, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, June 1998.

[Gue98c] Guelev, D. P. *Probabilistic Interval Temporal Logic*, Technical Report 144, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, August 1998, Draft.

[Gue98d] Guelev, D. P. *Quantification over State in Duration Calculus is Essentially First Order.* Technical Note DeTfoRS 11, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, July 1998.

[HC84] Hughes, G. E. and M. J. Cresswell. *A Companion to Modal Logic*, Methuen, London 1984.

[He99] He Jifeng. *A Behavioral Model for Co-design.* Research Report 166, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, May 1999, Издадено в *Proceedings of the World Congress on Formal Methods in the Development of Computing Systems*, September, 1999.

[He99b] He Jifeng. *Integrating Variants of DC.* Research Report 172, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, August 1999,

[HeZ94] He Weidong and Zhou Chaochen. A Case Study of Optimization. *The Computer Journal*, Vol. 38, No. 9, стр. 734-746, 1995.

[Hoe92] Van der Hoek, W. *Modalities for Reasoning About Knowledge and Quantities*, chapter 7, дисертация, Vrije Universiteit van Amsterdam, 1992.

[Hoe97] Van der Hoek, W. Some Considerations on the Logics $P_FD$. A Logic Combining Modality and Probability. *Journal of Applied Non-Classical Logics.* Vol. 7, No. 3, стр. 287-307, 1997.

[Hu98] Hu Chengjun. *DC/P User's Guide.*, Достъпно чрез `http://www.iist.unu.edu`.

[Hu99] Hu Chengjun. *Proof Techniques and Tools for Interval Logics.* дисертация, Changsha Institute of Technology, Changsha, China, 1999.

[HZ92] Hansen, M. R. and Zhou Chaochen. Semantics and Completeness of Duration Calculus. В *Real-Time: Theory and Practice*, LNCS 600, Springer-Verlag, 1992, стр. 209-225.

[HZ97] Hansen, M. R. and Zhou Chaochen. Duration Calculus: Logical Foundations. *Formal Aspects of Computing*, 9, стр. 283-330, 1997.

[Koz85] Kozen, D. A Probabilistic PDL. *Journal of Computer and System Sciences*, 30, стр. 162-178, 1985.

[IEEE95] IEEE Computer Society. *IEEE Standard Hardware Description Language Based on the Verilog Hardware Description Language (IEEE std 1364-1995)*, 1995.

[LD96] Li Xuan Dong and Dang Van Hung. Checking Linear Duration Invariants by Linear Programming. В Jaffar, J. and R. H. C. Yap (eds.) *Concurrency and Palalellism, Programming, Networking, and Security* LNCS 1179, Springer-Verlag, Dec 1996, стр. 321-332.

[LDZ97] Li Xuan Dong, Dang Van Hung and Zheng Tao. Checking Hybrid Automata for Linear Duration Invariants. В Shamasundar, R. K., K. Ueda (eds.) *Advances in Computing Science*, LNCS 1345, Springer-Verlag, 1997, стр. 166-180.

[PD97] Pandya, P. K. and Dang Van Hung. *Duration Calculus of Weakly Monotonic Time*. Technical Report 122, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, September 1997.

[LRSZ92] Liu Zhiming, A. P. Ravn, E. V. Sørensen and Zhou Chaochen. A Probabilistic Duration Calculus. В *Proceedings of the Second International Workshop on Responsive Computer Systems.* KDD Research and Development Laboratories, Saitama, Japan, 1992, също в Zhou Chaochen (ed.) *Duration Calculus. Compendium*, 3, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, March 1993.

[Mar95] Marx, M. *Algebraic Relativization and Arrow Logic.* дисертация, Institute for Logic Language and Computation, University of Amsterdam, 1995. ILLC Dissertation Series 1995-3.

[Mat95] Mathai, J. *Real-Time Systems.* Prentice Hall, 1995.

[Mos85] Moszkowski, B. Temporal Logic For Multilevel Reasoning About Hardware. *IEEE Computer*, 18(2):10-19, February 1985.

[MDP96] Manoranjan Satpathy, Dang Van Hung and Paritosh P. Pandya. *Some Results on the Decidability of Duration Calculus unders Synchronous Interpretation*, Research Report 86, UNU/IIST,P.O.Box 3058, Macau, December 1996. Издадено в: *Formal Techniques in Real-Time and Fault-Tolerant Systems*, 5th International Symposium, Lyngby, Denmark, LNCS 1486, Springer, Berlin, 1998.

[MR95] Montanari, A. and M. de Rijke. *Two-sorted Metric Temporal Logics.* Report CS-R9577, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, 1995.

[MV96] Marx, M. and Y. Venema. *Multi-dimensional Modal Logic.* Kluwer, Dordrecht, Netherlands, 1996.

[PT91] Passy, S. and T. Tinchev. An Essay in Combinatory Dynamic Logic. *Information and Computation* 93, стр. 263-332, 1991.

[Rij93] De Rijke, M. *Extending Modal Logic.* дисертация, Institute for Logic Language and Computation, University of Amsterdam, 1993. ILLC Dissertation Series 1993-4.

[RZ97] Roy, S. and Zhou Chaochen. *Notes on Neighbourhood Logic.* Research Report 97, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, February 1997.

[Sah75] Sahlqvist, H. Completeness and correspondence in the first- and second-order semantics for modal logic. В Kanger, S. (ed.) *Proceedings of the Third Scandinavian Logic Symposium.* North Holland, Amsterdam, 1975.

[Seg71] Segerberg, K. Qualitative probability in a modal setting. В Fenstad, J. E. (ed.) *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium.* North Holland, Amsterdam, 1971.

[Seg77] Segerberg, K. A Completeness Theorem in the Modal Logic of Programs. *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 24 (1977), p. A-552, 77T-E69.

[SS94] J.U. Skakkebæk, J. U. and N. Shankar. Towards a Duration Calculus Proof Assistant in PVS. В *Formal Techniques in Real-Time and Fault-Tolerant Systems.* Springer-Verlag, LNCS 863, September, 1994.

[SX98] Schneider, G. and Xu Qiwen. *Towards a Formal Semantics of Verilog Using Duration Calculus.* Technical Report 133, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, February 1998. В *Proceedings of Formal Techniques in Real-Time and Fault-Tolerant Systems 5th International Symposium*, Lyngby, Denmark, September 1998 (FTRTFT'98), Anders P. Ravn and Hans Rischel (eds.), LNCS 1486, стр. 282-293, Springer-Verlag, 1998.

[UNUIIST99] *Annual Report 1998.* Administrative Report 157, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, January 1999.

[Ven91a] Venema, Y. A Modal Logic for Chopping Intervals. *Journal of Logic and Computation*, 1(4), стр. 453-476, 1991.

[Ven91b] Venema, Y. *Many-Dimensional Modal Logics. дисертация*, University of Amsterdam, Amsterdam, 1991.

[WHCZ94] Widjaja, B. H., He Weidong, Chen Zongji and Zhou Chaochen. A Cooperative Design for Hybrid Systems. В Pnueli, A. and H. Lin (eds.) *Logic and Software Engineering International Workshop in Honour of Chih-Sung Tang*, стр. 127-150, World Scientific, 1996.

[XH95] Xu Qiwen and He Weidong. Hierarchical Design of a Chemical Concentration Control System. В *Proceedings of Hybrid Systems III: Verification and Control*, U.S.A., LNCS 1066, Springer-Verlag, 1995, стр. 270-281.

[YWZP94] Yu Xinyao, Wang Ji, Zhou Chaochen, and Paritosh K. Pandya. Specification of an Adaptive Control System. Research Report 19, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, April 1994. Издадено в *Formal Techniques in Real-Time and Fault-Tolerant systems*, LNCS 863, 1994, стр. 738-755.

[ZCC96] Zhou Chaochen. *A Complete Calculus for the Neighbourhood Logic.* Manuscript, 1996.

[ZNJ99] Zhan Naijun. *Completeness of Higher-Order Duration Calculus.* Research Report 175, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, August 1999.

[ZGZ99] Zhou Chaochen, Dimitar P. Guelev and Zhan Naijun. *A Higher-Order Duration Calculus.* Research Report 167, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, June 1999. Издадено в *Proceedings of the Symposium in Celebration of the Work of C. A. R. Hoare*, Oxford, 1999.

[ZH96] Zhou Chaochen, and Michael Hansen. *An Adequate First Order Interval Logic.* Research Report 91, UNU/IIST, P.O.Box 3058, Macau, December 1996. *Издадено в: International Symposium, Compositionality - The Significant Difference*, H. Langmaack, A. Pnueli and W.-P. de Roever (eds.), Springer, 1998.

[ZHR91] Zhou Chaochen, C. A. R. Hoare and A. P. Ravn. A Calculus of Durations. *Information Processing Letters*, 40(5), стр. 269-276, 1991.

[ZHRR92] Zhou Chaochen, M.R. Hansen, A.P. Ravn and H. Rischel. *Duration Specifications for Shared Processors.* Research Report, ID/DTH, Bldg. 344, DK-2800 Lyngby, Denmark, October 1991. Издадено и в *Proceedings of the Symposium on Formal Techniques in Real-Time and Fault-Tolerant Systems*, Niijmegen, January 1992, LNCS 571, стр. 21-32, 1992.

[ZHS93] Zhou Chaochen, M.R. Hansen and P. Sestoft. Decidability and Undecidability Results for Duration Calculus, *Proceedings of STACS'93, 10th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, Würzburg, LNCS 665, стр. 58-68, February 1993.

[ZRH92] Zhou Chaochen, A.P. Ravn and M.R. Hansen. *An Extended Duration Calculus for Hybrid Real-Time Systems.* ProCoS Research Report, ID/DTH, Bldg. 344, DK-2800 Lyngby, Denmark, October 1992. Преработен вариант е достъпен като UNU/IIST Report 9.) Издадено и в *Hybrid Systems*, LNCS 736, Springer Verlag, 1993.

[ZZ94] Zheng Yuhua and Zhou Chaochen. A Formal Proof of a Deadline Driven Scheduler. В *Formal Techniques in Real-Time and Fault-Tolerant Systems*, LNCS 863, 1994, стр. 756-775.

**Забележка:** Повечето от цитираните доклади на UNU/IIST са достъпни от `http://www.iist.unu.edu/home/Unuiist/newrh/III/1/page.html`.