1. Увод

Изразителната сила на предикатните езици от първи ред отдавна е обект на изследвания. Със самата поява на семантиката на Крипке [12] в неявна форма се заражда въпросът за съответствието между верността на модална формула в дадена структура и верността в същата структура, разглеждана като структура за предикатния език от първи ред с формално равенство и един двуместен предикатен символ, на предикатна формула. Крипке отбелязва съответните формули за случая на рефлексивност и транзитивност. Десетина години по-късно Салквист намира широк клас модални формули, за които показва наличието на съответни формули от първи ред и изучава разширенията на минималната модална логика с аксиоми измежду тези формули. В явна форма Ван Бентъм [4, 5] формулира задачите за модална определимост, определимост от първи ред и проблема за съответствието. Една затворена формула φ от споменатия език от първи ред се нарича *модално определима*, ако съществува модална формула A, такава че за всяка структура $\langle W, R\rangle$ да е в сила еквивалентността

$$\langle W, R\rangle \models \varphi \iff \langle W, R\rangle \models A$$

и се казва, че A *модално определя* φ. (Разбира се, в лявата страна на еквивалентността $\models$ означава вярност в смисъл на предикатното смятане, а в дясната страна се има предвид вярност в смисъл на семантиката на Крипке.) Аналогично, ако за една модална формула A съществува затворена предикатна формула φ, такава че A модално определя φ, се казва, че A е *определима с формула от първи ред*, и още, че φ *предикатно определя* A. Ван Бентъм поставя въпроса за алгоритмична разпознаваемост на всяка от двете определимости, а така също и въпроса за алгоритмичната разпознаваемост по дадени модална и предикатна формули дали едната определя другата. С други думи, разрешими ли са следните проблеми:

Проблем за модална определимост. Дадена е затворена предикатна формула от първи ред. Съществува ли формула, която я определя модално?

Проблем за определимост от първи ред. Дадена е модална формула. Съществува ли затворена предикатна формула от първи ред, която я определя?

Проблем за съответствието. Дадени са затворена предикатна формула от първи ред и модална формула. Вярно ли е, че едната определя другата?

През 1989 г. Л. Чагрова [6, 7] доказва, че горните три проблема са неразрешими.

Естествено разширение на горните въпроси се получава, когато модалният език съдържа повече модалности, а предикатният се разшири по съответния начин. Ясно е, че в общия случай теоремата на Чагрова се пренася или пък директно се прилага.

Друга модификация, особено полезна за различни модални логики, произлизащи от конкретни приложни задачи, е когато се разгледат определимостите релативизирани до конкретен клас от структури.

Така, нека $\mathcal{M}$ е модален език, а $\mathcal{L}$ е предикатен език. Нека $\mathcal{K}$ е клас от релационни структури, такива че за всяка структура $\mathcal{A}$ от $\mathcal{K}$ е дефинирана вярност $\models_{Mod}$ на модална формула от $\mathcal{M}$ в структурата и вярност $\models_{FOL}$ на предикатна формула от $\mathcal{L}$ в същата структура. Казваме, че модалната формула A е предикатно определима над $\mathcal{K}$, ако съществува затворена предикатна формула φ от $\mathcal{L}$, такава че за всяка структура $\mathcal{A}$ от $\mathcal{K}$ е в сила еквивалентността

$$\mathcal{A} \models_{FOL} \varphi \iff \mathcal{A} \models_{Mod} A.$$

За формулата φ казваме, че предикатно определя A над $\mathcal{K}$. В такъв случай казваме също, че A модално определя φ над $\mathcal{K}$. Когато за една предикатна формула φ съществува формула, която я определя модално над $\mathcal{K}$, казваме, че φ е модално определима над $\mathcal{K}$.

По очевиден начин се модифицират проблемите за определимост и за съответствието за релативизираните варианти.

Нека отбележим, че дори когато $\mathcal{M}$ е обичайният едномодален език, а $\mathcal{L}$ е предикатният език от първи ред с равенство и един двуместен предикатен символ, разрешимостта на всеки един от горните проблеми силно се влияе от спецификата на $\mathcal{K}$ и не се вижда универсален начин за разпознаване на приложимостта на теоремата на Чагрова. В това отношение си струва да отбележим, че когато $\mathcal{K}$ е класът на релациите на еквивалентност, проблемът за модалната определимост е разрешим. В [1] е доказано, че всъщност той е PSPACE-пълен. Още по-далеч от адаптация е теоремата на Чагрова за проблемът за предикатната определимост в горния случай: Ван Бентъм показва [4], че той е тривиален, по-точно — всяка модална формула е предикатно определима над $\mathcal{K}$. На другия полюс е случаят когато $\mathcal{K}$ е класът на транзитивните или крайните транзитивни структури. Тогава не само, че теоремата на Чагрова е приложима, но, както показват Чагров и Чагрова [8], проблемът не е дори полуразрешим.

В [2] са изследвани проблемите за модална и предикатна определимост в случая когато $\mathcal{K}$ отново е класът на релациите на еквивалентност, но модалните езици са други: модален език с две модалности, едната от които се интерпретира с релация на еквивалентност, а другата е универсалната модалност; фрагмент на езика с универсална модалност, който е свързан с модални логики за региони.

Целта на дипломната работа е да се изследват определимостите за подходящ подклас на класа структурите с две релации на еквивалентност, като модалният език е с две модалности или пък с три модалности, едната от които е универсалната. Да отбележим, че според теорема на Яничак [11] класът на структурите с две релации на еквивалентност има неразрешима теория от първи ред. Следователно проблемът за съответствието и за двата модални езика е неразрешим. Наистина, една затворена предикатна формула φ се определя с общовалидна в класа модална формула A точно тогава, когато затворената формула φ е от предикатната теория на класа. Освен това и проблемът за модалната определимост (в по-силен смисъл: ако имаме определимост, алгоритъмът да дава и определящата формула) не е разрешим, защото модалната логика на този клас е разрешима. Наистина, ако модалната определимост (в по-силния смисъл) е разрешима, то по дадена затворена предикатна формула ще можем да разпознаем дали тя е теорема на предикатната теория на класа или не е негова теорема. За целта е достатъчно да забележим, че предикатните теореми на класа са модално определими с формула, която е теорема на модалната логика. Ето защо ще се ограничим с класа $\mathcal{K}$ на две релации на еквивалентност, едната от които е по-фина от другата

$$\forall x \forall y (x R_1 y \Rightarrow x R_2 y).$$

За този клас ще намерим подходящи необходими и достатъчни условия, следвайки идеята от [2], от които следва разрешимостта на модалната определимост (малко по-прецизно разсъждение показва, че проблемът е PSPACE-пълен, [3]). Както непосредствено следва от [10] проблемът за предикатната определимост е отново тривиален — всяка модална формула е предикатно определима. Горните резултати се отнасят както за модалния език с две модалности, така и за модалния език с три модалности, едната от които е универсалната модалност.

2. Преглед на използваните понятия

2.1. Използвани понятия и резултати от модалната логика

Нека е M модален език с k едноместни модалности, $\Box_1, \ldots, \Box_k$. Нека $p_1, p_2, \ldots$ е изброимо множество от съждителни променливи. Модална формула A над езика M ще дефинираме индуктивно:

1) p е формула от M;

2) ако A е формула от M, то и $\neg A$ е формула от M;

3) ако A_1 и A_2 са формули от M, а $\sigma \in \{\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$, то и $A_1 \sigma A_2$ е формула от M;

4) ако A_1 е формула от M, то и $A = \Box_i A_1$, $1 \leq i \leq k$, е формула от M.

Сега ще припомним семантиката на Крипке за M. Структура на Крипке за езика M ще наричаме наредена $(k{+}1)$-орка $\mathcal{F} = (W, R_1, \ldots, R_k)$, където $W \neq \emptyset$ се нарича носител. Неговите елементи ще наричаме възможни светове. $R_1, \ldots, R_k$ се наричат релации на достижимост в W. $\mathcal{F}$ е прието да се нарича структура на Крипке или фрейм. Тук трябва да отбележим, че структурата $\mathcal{F}$ може да бъде разглеждана и като структура за предикатното смятане за езика $\mathcal{L} = (R_1, ..., R_k, =)$, където $R_1, \ldots, R_k$ са двуместни предикатни символи. Нека $p_1, p_2, \ldots$ са изброимо много съждителни променливи. Оценка на променливите в $\mathcal{F}$ ще наричаме изображение V, което на всяка променлива съпоставя подмножество на носителя W. Двойката $(\mathcal{F}, V)$ ще наричаме модел над структурата $\mathcal{F}$. Сега ще зададем вярност на модална формула от езика M в свят от даден модел.

Нека V е оценка на променливите в структурата $\mathcal{F}$, A е модална формула и $x \in W$. Ще дадем дефиниция за вярност на модалната формула A в $\mathcal{F}$ при оценката V и света x $(\mathcal{F}, V, x) \models A$ индуктивно:

1) ако $A = p$, то $(\mathcal{F}, V, x) \models A$ т.с.т.к. $x \in V(p)$

2) ако $A = \neg A_1$, то $(\mathcal{F}, V, x) \models A$ т.с.т.к. $(\mathcal{F}, V, x) \not\models A_1$

3) ако $A = A_1 \wedge A_2$, то $(\mathcal{F}, V, x) \models A$ т.с.т.к. $(\mathcal{F}, V, x) \models A_1$ и $(\mathcal{F}, V, x) \models A_2$. Аналогичен е случаят, когато имаме $\vee$, $\longrightarrow$ или $\longleftrightarrow$.

4) ако $A = \Box_i A_1$, то $(\mathcal{F}, V, x) \models A$ т.с.т.к. за всяко $y \in W$ от $x R_i y$ следва $(\mathcal{F}, V, x) \models A_1$.

Дефиниция 2.1 *Нека $(\mathcal{F}, V)$ е модел и A е модална формула от езика*

M. Тогава $(\mathcal{F}, V) \models A$, ако за всяко $x \in \mathcal{F}$ е изпълнено $(\mathcal{F}, V, x) \models A$

Дефиниция 2.2 *Нека $\mathcal{F}$ е структура и A е модална формула от езика M. Тогава $\mathcal{F} \models A$, ако за всяка оценка V е изпълнено $(\mathcal{F}, V) \models A$.*

Дефиниция 2.3 *Модалната формула A се нарича изпълнима в модела $(\mathcal{F}, V)$, ако съществува x, такова че $(\mathcal{F}, V, x) \models A$.*

Дефиниция 2.4 *Модалната формула A се нарича изпълнима в структурата $\mathcal{F}$, ако съществува оценка V, такава че $(\mathcal{F}, V) \models A$, т.е. съществува оценка V, такава че за всяко x е изпълнено $(\mathcal{F}, V, x) \models A$.*

Дефиниция 2.5 *Нека $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ са фреймове. Ще казваме, че $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ е p-морфизъм (относно езика M), ако:*

1) $\forall w \forall v (w, v \in W')(w R'_i v \longrightarrow f(w) R''_i f(v))$.

2) $(\forall w \in W')(\forall v \in W'')(f(w) R''_i v \longrightarrow (\exists u \in W')(w R'_i u \wedge f(u) = v))$.

Дефиниция 2.6 *Ще казваме, че f е p-морфизъм от модела $(\mathcal{F}_1, V_1)$ в модела $(\mathcal{F}_2, V_2)$, ако е p-морфизъм от $\mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$ и за всяка съждителна променлива p е изпълнено: $w \in V_1(p) \longleftrightarrow f(w) \in V_2(p)$.*

Добре известна е следната

Лема 2.7 (Лема за p-морфизмите) *1)Нека $(\mathcal{F}_1, V_1)$ и $(\mathcal{F}_2, V_2)$ са модели за езика $M(\Box)$ и f е p-морфизъм от $\mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$. Тогава ако A е модална формула и $x \in |\mathcal{F}_1|$, то $(\mathcal{F}_1, V_1, x) \models A \longleftrightarrow (\mathcal{F}_2, V_2, f(x)) \models A$.*

2)Нека $(\mathcal{F}_1, V_1)$ и $(\mathcal{F}_2, V_2)$ са модели за езика $M(\Box)$ и f е p-морфизъм от $\mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$. Тогава ако A е модална формула, то $(\mathcal{F}_1, V_1) \models A \longleftrightarrow (\mathcal{F}_2, V_2) \models A$.

3)Нека $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ са структури за езика $M(\Box)$ и f е p-морфизъм от $\mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$. Тогава ако A е модална формула, то $(\mathcal{F}_1) \models A \longrightarrow (\mathcal{F}_2) \models A$.

Дефиниция 2.8 *Нека $W_0 \subset W$. Ще казваме, че $\mathcal{F}' = \langle W', R'_1, \ldots, R'_k \rangle$ е генерирана от W_0 подструктура на $\mathcal{F}$, ако W' е май-малкото множество, такова че $W_0 \subseteq W'$ и за всяко $x \in W'$ е изпълнено $x R_i y \longrightarrow y \in W'$ и $R'_i = R_i \cap (W' \times W')$, за $i = 1, \ldots, k$. Освен това, ако V е оценка в $\mathcal{F}$, а V' е оценка в $\mathcal{F}'$ и за всяка променлива p, $V'(p) = V(p) \cap W'$, казваме, че $(\mathcal{F}', V')$ е генериран подмодел на $(\mathcal{F}, V)$.*

Лема 2.9 *1) Нека $\mathcal{F} = (W, R, V)$ е модел и $\mathcal{F}' = (W', R', V')$ е негов генериран подмодел. Нека A е модална формула и $x' \in W'$. Тогава $(\mathcal{F}, V, x') \models A \longleftrightarrow (\mathcal{F}', V', x') \models A$.*

2) Нека $\mathcal{F}$ е структура и $\mathcal{F}'$ е нейна генерирана подструктура. Нека A е модална формула и $x' \in W'$. Тогава $\mathcal{F} \models A \longrightarrow \mathcal{F}' \models A$.

Дефиниция 2.10 *Нека $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ е фамилия от структури. Нека за $i \in I$ $\mathcal{F'}_i = \langle W'_i, R'_i\rangle$, където $W'_i = \{\langle i, w\rangle | w \in W_i\}$ и $R'_i = \{\langle\langle i, w\rangle, \langle i, v\rangle\rangle | \langle w, v\rangle \in R_i\}$. Тогава структурата на Крипке $\bigoplus\limits_{i\in I}\mathcal{F}_i = \langle \bigcup\{W'_i | i \in I\}, \bigcup\{R'_i | i \in I\}\rangle$ се нарича обединение на фамилията $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$. Ако освен това $\{V_i\}_{i\in I}$ е фамилия от оценки в съответните структури и за всяка променлива p $V(p) = \cup_{i\in I}V_i(p)$, то моделът $(\bigoplus\limits_{i\in I}\mathcal{F}_i, V)$ се нарича обединение на фамилията от модели $\{(\mathcal{F}_i, V_i)\}_{i\in I}$.*

Лема 2.11 *1) Нека A е модална формула и $\{(\mathcal{F}_i, V_i)\}_{i\in I}$ е фамилия от модели за модален език M. Тогава $(\mathcal{F}_i, V_i) \models A$ за всяко $i \in I \longleftrightarrow \bigoplus\limits_{i\in I}(\mathcal{F}_i, V_i) \models A$.*

2) Нека A е модална формула и $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ е фамилия от структури за модален език M. Тогава за всяко $i \in I$ $\mathcal{F}_i \models A \longleftrightarrow \bigoplus\limits_{i\in I}\mathcal{F}_i \models A$.

2.2. Някои понятия от теория на моделите за чисто предикатни езици

Нека е даден език от първи ред $\mathcal{L}$, чиито нелогически символи са краен брой предикатни символи.

Дефиниция 2.12 *Нека φ е формула от езика $\mathcal{L}$. Ще дефинираме понятието кванторен ранг на φ, $qr(\varphi)$, индуктивно:*

1) ако $\varphi = p$, то $qr(\varphi) = 0$,

2) ако φ_1 е формула и $\varphi = \neg\varphi_1$, то $qr(\varphi) = qr(\varphi_1)$,

3) ако φ_1 и φ_2 са формули от $\mathcal{L}$ и $\varphi = \varphi_1\sigma\varphi_2$, където $\sigma \in \{\wedge, \vee, \longrightarrow\}$, то $qr(\varphi) = \max(qr(\varphi_1), qr(\varphi_1))$,

4) ако φ_1 е формула, $Q \in \{\forall, \exists\}$, x е променлива и $\varphi = Qx\varphi_1$, то $qr(\varphi) = 1 + qr(\varphi_1)$.

Дефиниция 2.13 *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури за $\mathcal{L}$. Ще казваме, че $\mathcal{A}$ е подструктура на $\mathcal{B}$, ако:*

1)$|\mathcal{A}| \subseteq |\mathcal{B}|$

2) за всеки предикатен символ h в $\mathcal{L}$ е изпълнено $h^{\mathcal{A}} = h^{\mathcal{B}} \cap |\mathcal{A}|^n$, където n е арността на h.

Дефиниция 2.14 *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури за $\mathcal{L}$. Ще казваме, че $\mathcal{A}$ е изоморфна на $\mathcal{B}$, ако съществува биективно изображение $f : |\mathcal{A}| \mapsto |\mathcal{B}|$, такова че:*

за всеки n-местен предикатен символ h и произволни $x_1, ..., x_n \in |\mathcal{A}|$ е изпълнено $\langle x_1, ..., x_n \rangle \in h^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow \langle f(x_1), ..., f(x_n) \rangle \in h^{\mathcal{B}}$

Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език с краен брой нелогически символи, които са само предикатни символи и индивидни константи. С $\mathcal{L}_k^m$ ще означаваме рестрикцията на $\mathcal{L}$ до език с променливи $x_1, ..., x_m$ и формули с кванторен ранг не повече от k. С $\mathcal{L}_k$ ще означаваме всички формули от $\mathcal{L}$ с кванторен ранг ненадминаващ k.

Дефиниция 2.15 *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури за $\mathcal{L}$. Ще казваме, че $\mathcal{A}$ е m,k-еквивалентна на $\mathcal{B}$ и ще пишем $\mathcal{A} \equiv_k^m \mathcal{B}$ тогава, когато за всяка затворена предикатна формула φ от $\mathcal{L}_k^m$ е изпълнено $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$.*

Дефиниция 2.16 *Ще казваме, че $\mathcal{A}$ е k-еквивалентна на $\mathcal{B}$ и ще пишем $\mathcal{A} \equiv_k \mathcal{B}$ тогава, когато за всяка затворена предикатна формула φ от $\mathcal{L}_k$ е изпълнено $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$.*

Дефиниция 2.17 *Нека $\mathcal{K}$ е клас от структури и Γ е множество от от формули. Ще казваме, че Γ аксиоматизира $\mathcal{K}$, ako*

1) за всяка структура $\mathcal{F}$ от $\mathcal{K}$ е изпълнено $\mathcal{F} \models \Gamma$

2) всяка структура $\mathcal{F}$, която е модел на Γ, принадлежи на $\mathcal{K}$.

Когато Γ е крайно, казваме, че $\mathcal{K}$ е крайно аксиоматизируем.

2.3. Игри на Еренфойхт-Фресе с краен брой пулчета

Вариантът на играта на Еренфойхт-Фресе с краен брой пулчета е въведен независимо от Баруайз и Имерман през 70-те години. Нека k е естествено число. Всяка партия от играта $\mathcal{G}_k^m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ се играе в k рунда и се играе от двама играчи върху дъска, която се състои от две структури $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и m на брой двойки от пулчета, като всяка двойка пулчета се състои от едно черно и едно бяло пулче. С белите пулчета играе *Първият* играч, а с черните – *Вторият*. Всяко пулче си има номер от 1 до m. На рунд i се играят два хода с една двойка пулчета, номерът на двойката се избира от първия играч. Пулчетата се поставят върху елементите на структурите. Всеки от играчите вижда как играе противникът му. Играят се k на брой рунда. Всеки рунд се състои от два хода – един за *Първия* и един за *Втория* играч. Целта на *Първия* играч е да покаже разлика в структурите, а на *Втория* – да покаже, че структурите са неотличими (с подходяща формула от първи ред). На всеки рунд първият ход е на първия играч: той избира една от структурите и едно пулче, което поставя върху елемент от носителя на тази структура; на втория ход: вторият играч взема от своите пулчета онова, което има същия номер като пулчето, използвано на първия ход, и го поставя върху елемент от структурата, която не е избраната от първия играч. Да забележим, че върху един елемент от универсумите може да се поставят няколко пулчета едно върху друго. Освен това, първият играч би могъл да избере вече поставено бяло пулче, тогава той освобождава съответния елемент и може да го постави или в същата структура или в другата. (Разбира се, вторият играч трябва също да освободи елемент, тъй като взема своето черно пулче със същия номер и го поставя в структурата, в която първият играч не е поставил избраното от него бяло пулче за този рунд.)

Нека с двойката частични функции (α_r, β_r) означим конфигурацията на играта след r-тия ход:

$\alpha_r : \{x_1, ..., x_m\} \longrightarrow |\mathcal{A}|$

$\beta_r : \{x_1, ..., x_m\} \longrightarrow |\mathcal{B}|$

Когато на r-тия рунд i-тата двойка пулчета е поставена върху елементите $a \in |\mathcal{A}|$ и $b \in |\mathcal{B}|$, то това ще го означаваме съответно с $\alpha_r(x_i) = a$ и $\beta_r(x_i) = b$. Променливата x_i не е в $dom(\alpha_r)$ и $dom(\beta_r)$ тогава и само тогава, когато след r-тия рунд пулчетата с номер i не са върху дъската. За всеки свой ход на рунд с номер l, $1 \leq l \leq k$, *Първият* играч избира бялото пулче с номер i и го слага върху елемент от носителя на някоя от структурите. Тогава *Вторият* играч поставя черното пулче с номер i върху елемент от носителя на другата структура. Така получаваме, че за някое i, $1 \leq i \leq m$, i-тата двойка пулчета е поставена върху $a \in \mathcal{A}$ и $b \in \mathcal{B}$. Ще дефинираме k-конфигурация на дъската след r-тия рунд. Нека $dom(\alpha_0) = dom(\beta_0) = \emptyset$. Тогава $(\alpha_r, \beta_r) = (\alpha_{r-1}[a/x_i], \beta_{r-1}[b/x_i])$, т.е.

$$\alpha_r(x_j) = \begin{cases} \alpha_{r-1}(x_j), & i \neq j \\ a, & i = j \end{cases}$$

$$\beta_r(x_j) = \begin{cases} \beta_{r-1}(x_j), & i \neq j \\ b, & i = j \end{cases}$$

След r-тия рунд конфигурацията (α_r, β_r) определя релацията $\alpha_r^{-1} \circ \beta_r \subseteq |\mathcal{A}| \times |\mathcal{B}|$.

Казваме, че *Вторият* играч печели r-тия рунд от една конкретна партия от играта $\mathcal{G}_k^m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ точно тогава, когато за $x_j \in dom(\alpha_r)$ изображението $\alpha_r(x_j) \mapsto \beta_r(x_j)$ задава изоморфизъм между породените подструктури на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ съответно от $range(\alpha_r)$ и $range(\beta_r)$, т.е. $\langle \mathcal{A}, range(\alpha_r) \rangle \cong$

$\langle \mathcal{B}, range(\beta_r)\rangle$. От тук следва, че $\alpha_r(x_i) = \alpha_r(x_j)$ точно тогава, когато $\beta_r(x_i) = \beta_r(x_j)$.

Вторият играч печели една конкретна партия от играта, ако той печели всеки отделен рунд от партията, т.е. след всеки рунд r, $1 \leq r \leq k$, изображението $\alpha_r(x_j) \mapsto \beta_r(x_j)$ е изоморфизъм между породените подструктури. Ще казваме, че *Вторият* играч печели играта $\mathcal{G}_k^m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, ако той има *стратегия*, следвайки която той печели всяка партия.

Дефиниция 2.18 *Нека $\mathcal{G}_k^m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ е игра на Еренфойхт-Фресе с краен брой пулчета. Ще използваме означението $\mathcal{A} \sim_k^m \mathcal{B}$ за да означим, че* Вторият *играч има печелившa стратегия за $G_k^m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

Добре известна е, [9], следната

Теорема 2.19 *Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури за чисто предикатния език $\mathcal{L}$, имащ краен брой индивидни константи и предикатни символи. Тогава следните две условия са еквивалентни:*

1) $\mathcal{A} \sim_k^m \mathcal{B}$;

2) $\mathcal{A} \equiv_k^m \mathcal{B}$.

Игрите на Ернфойхт и Фресе с фиксиран брой пулчета са въведени от Баруайз и Имерман през 70-те години на миналия век като обобщение на въведените десетина години преди това игри на Еренфойхт и Фресе. Тези игри могат да се разглеждат като игри с безброй много пулчета. С тяхна помощ получаваме, че условията

1) $\mathcal{A} \equiv_k \mathcal{B}$,

2) Вторият играч има печелившa стратегия за играта $\mathcal{G}_k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (k рунда при наличие на безброй много пулчета),

са еквивалентни, което е съдържанието на теоремата на Еренфойхт-Фресе.

За целите на настоящата дипломна работа можем да използваме кой да е от двата вида игри.

Нека да дадем пример за приложение на игра на Еренфойхт-Фресе с краен брой пулчета. Нека е даден езикът $\mathcal{L} = (R, =)$, където R е друместен предикатен символ. Разглеждаме предикатната формула $\varphi = \forall x \forall y \forall z(xRy \wedge yRz \longrightarrow xRy)$ от $\mathcal{L}$. Това е формула, задаваща транзитивност. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са следните две структури за $\mathcal{L}$: $|\mathcal{A}| = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $R^{\mathcal{A}} = \{\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_1, a_3\rangle, \langle a_2, a_3\rangle\}$, а $|\mathcal{B}| = \{b_1, b_2, b_3\}$ и $R^{\mathcal{B}} = \{\langle b_1, b_2\rangle, \langle b_2, b_3\rangle\}$. Очевидно е, че $\mathcal{A} \models \varphi$, но $\mathcal{B} \not\models \varphi$. Ще покажем, че *Втория* играч има печелившa стратегия за играта $G_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, но няма такава за $G_3(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Стратегията на *Втория* играч за конкретната игра $G_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ е следната:

Нека *Първият* играч на първия си ход е избрал елемент $a \in |\mathcal{A}|$. Ако съществува $a' \in |\mathcal{A}|$, такова че $\langle a, a' \rangle \in R^{\mathcal{A}}$, то *Втория* играч избира на първия си ход елемент $b \in |\mathcal{B}|$, за който съществува такъв елемент b' от $|\mathcal{B}|$, че $\langle b, b' \rangle \in R^{\mathcal{B}}$. Ако обаче такова a' не съществува, то $b \in |\mathcal{B}|$, за който също не съществува b' с $\langle b, b' \rangle \in R^{\mathcal{B}}$. Същото се повтаря и на втория рунд. Ако *Първият* играч на някой от ходовете избере елемент от структурата $\mathcal{A}$, то *Вторият* играч използва симетричното съображение за своя ход на този рунд. Очевидно е, че *Втория* играч винаги може да избере елемент с описаното свойство, т.е. винаги може да изиграе предписанията от горното правило ход. Така получените обаче подструктури са очевидно изоморфни. С други думи, описаното правило за избор на ход от *Втория* играч е печеливша негова стратегия. Ето защо никоя затворена предикатна формула с кванторен ранг 2 не може да отличи тези две структури. Обаче формулата φ ги отличава. Следователно, тя не е логически еквивалентна с никоя затворена формула от разглеждания език с кванторен ранг 2. Също така лесно съобразяваме, че лека модификация на тази стратегия е печеливша за *Втория* играч за всяка една от игрите $G_k^m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $m \leq 2$ и произволно k. Следователно никоя затворена формула, независимо от кванторния й ранг, с по-малко от 3 индивидни променливи не може да зададе транзитивността.

Сега ще покажем с конкретен пример, т.е. конкретнен начин на игра на *Първия*, че *Вторият* играч няма печеливша стратегия за играта $G_3(\mathcal{A}, \mathcal{B})$:

I-ви рунд:
ход на I-вия играч : a_1
ход на II-ия играч : ?
II-ри рунд :
ход на I-вия играч : a_2
ход на II-ия играч : ?
III-ти рунд :
ход на I-вия играч : a_3
ход на II-ия играч : ?

С други думи, *Първият* винаги избира структурата $\mathcal{A}$ и така на всеки свой ход другият играч е длъжен да играе в структурата $\mathcal{B}$. При посочените ходове на *Първия* е очевидно, че не може да му се репликира по такъв начин, че да се получи изоморфизъм.

3. Един клас структури с две релации на еквивалентност

Сега ще разглеждаме структури с две релации на еквивалентност, като първата от тях е по-фина от втората, т.е. всеки клас на еквивалентност $[a]_{R_1}$, породен от произволен елемент a относно първата релация на еквивалентност R_1, се съдържа (е подмножество) на класа на еквивалентност $[a]_{R_2}$, породен от същия елемент a от втората релация на еквивалентност R_2. Ще означаваме този клас с $\mathcal{C}$.

Казано по друг начин, разглеждаме език от първи ред $\mathcal{L}(R_1, R_2)$ с два бинарни предикатни символа и равенство. Нека $\mathcal{A}(W, R_1^{\mathcal{A}}, R_2^{\mathcal{A}})$ е структура за този език, където $W \neq \emptyset$ и $R_1^{\mathcal{A}}$ и $R_2^{\mathcal{A}}$ са интерпретациите на R_1 и R_2 в W, т.е. $R_1^{\mathcal{A}}, R_2^{\mathcal{A}} \subseteq |W| \times |W|$. Освен това ще наложим още две условия над R_1 и R_2 , а именно те да са релации на еквивалентност и да е изпълнено включването $R_1^{\mathcal{A}} \subseteq R_2^{\mathcal{A}}$

Класът $\mathcal{C}$ от тези структури е крайно аксиоматизируем в езика $\mathcal{L}(R_1, R_2)$, като неговата теория $\mathrm{EQUIV}^{1\subset 2}$е следната :

1) $\forall x(xR_1x)$
$\forall x \forall y(xR_1y \Longrightarrow yR_1x)$
$\forall x \forall y \forall z(xR_1y \wedge yR_1z \Longrightarrow yR_1x)$
2) $\forall x(xR_2x)$
$\forall x \forall y(xR_2y \Longrightarrow yR_2x)$
$\forall x \forall y \forall z(xR_2y \wedge yR_2z \Longrightarrow yR_2x)$
3) $\forall x \forall y(xR_1y \Longrightarrow xR_2y)$

Нека фиксираме едно естествено число $k \geq 1$. За всяка структура $\mathcal{A}$, която е модел на $\mathrm{EQUIV}^{1\subset 2}$ще прилагаме следните 3 операции, които формално ще опишем по-долу:

I_k) За всеки клас на еквивалентност по R_1 избираме точно k елемента, ако той е с повече от k елемента, а останалите елементи ги изхвърляме.

II_k) За всеки клас на еквивалентност по R_2 и за всяко i, такова че $1 \leqq i \leqq k$, гледаме колко са класовете на еквивалентност по R_1, които са точно с i елемента. Ако има повече от k на брой такива класове, избираме си точно k, а останалите ги изхвърляме. Нека предположим, че имаме клас на еквивалентност по R_2 всеки от чиито елементи относно R_1 поражда клас с $\leqq k$ елемента. Всеки такъв клас на еквивалентност по R_2 може да се определи с наредена k-орка $\langle l_1, \ldots, l_k \rangle$, където $0 \leqq l_i \leqq k$ и $l_1 + \ldots + l_k \neq 0$. Такава наредена k-орка ще наричаме k-*физиономия* на съответния клас на еквивалентност по R_2. Броят на всевъзможните k-физиономии е $(k+1)^k - 1$.

III_k) За всяка k-физиономия гледаме колко са класовете на еквивалентност по R_2, които имат точно тази k-физиономия и ако броят на тези класове е по-голям от k избираме си k на брой, а останалите ги изхвърляме.

За нашите разглеждания структурата $\mathcal{A}$ ще бъде произволен модел на EQUIV$^{1\subset 2}$, а структурата $\mathcal{B}$ ще бъде резултата от прилагането на някоя от I_k, II_k и III_k над $\mathcal{A}$. Така получената структура $\mathcal{B}$ също е модел на EQUIV$^{1\subset 2}$. Както ще видим, като приложение на игрите, тези две структури не могат да се отличат със затворена формула, чийто кванторен ранг не надминава k, нито със затворена формула с неповече от k различни индивидни променливи.

Ще дадем формална дефиниция на операциите I_k, II_k и III_k. И така, имаме фиксирано естествено число $k > 0$. Дефинираме структурата $I_k(\mathcal{A})$ по следния начин:

Нека $a \in |\mathcal{A}|$. Разглеждаме класа $[a]_{R_1^{\mathcal{A}}}$. От него искаме да премахнем толкова елементи, че да останат точно k, в случай, че елементите в него са повече от k. Разглеждаме $\mathcal{A}/_{R_1^{\mathcal{A}}}$. Дефинираме функция f с дефиниционна област $\mathcal{A}/_{R_1^{\mathcal{A}}}$ по следния начин :

$$f([a]_{R_1^{\mathcal{A}}}) = \begin{cases} [a]_{R_1^{\mathcal{A}}}, & \text{ако } |[a]_{R_1^{\mathcal{A}}}| \leq k \\ X, \text{ където } |X| = k \text{ и } X \subseteq [a]_{R_1^{\mathcal{A}}}, & \text{ако } |[a]_{R_1^{\mathcal{A}}}| > k \end{cases}$$

Ясно е, поради Ах. за избора, че такава функкция съществува. Универсумът на $I_k(\mathcal{A})$ е $\bigcup \mathrm{range} f$. Означаваме го с B. Очевидно $B \subseteq A$, където A е носителят на $\mathcal{A}$, а B е носителя на $\mathcal{B}$. $I_k(\mathcal{A})$ е породената от B подструктура на $\mathcal{A}$.

По аналогичен начин можем да дадем и формални дефиниции на $II_k(\mathcal{A})$ и $III_k(\mathcal{A})$. Сега ще се заемем с описанието на алгоритъм, който ще задава печеливша стратегия за *Втория* играч. Ще разглеждаме играта $\mathcal{G}_k(\mathcal{A}, I_k(\mathcal{A}))$. И така, нека са изиграни r рунда от играта , $1 \leq r < k$, като в $\mathcal{A}$ са избрани $a_1, \ldots, a_r$, а в $I_k(\mathcal{A})$ - $b_1, \ldots, b_r$.

Iсл.) *Първият* играч е избрал на $r+1$-вия си ход елемента $a \in A$.

Ако $f([a]_{R_1^{\mathcal{A}}}) = [a]_{R_1^{\mathcal{A}}}$, т.е. $|[a]_{R_1^{\mathcal{A}}}| \leq k$, то *Вторият* играч избира елемента b, $b = a$ (като елемент на $I_k(\mathcal{A})$).

Ако $f([a]_{R_1^{\mathcal{A}}}) \neq [a]_{R_1^{\mathcal{A}}}$, т.е. $|[a]_{R_1^{\mathcal{A}}}| > k$, то *Вторият* играч избира елемент от $f([a]_{R_1^{\mathcal{A}}})$, който не е избиран до този момент (като елемент на

$I_k(\mathcal{A})$).

IIсл.) *Първият* играч е избрал на $r+1$-вия си ход елемента $b \in |I_k(\mathcal{A})|$.

Ако $f([b]_{R_1^{\mathcal{A}}}) = [b]_{R_1^{\mathcal{A}}}$, то *Вторият* играч избира елемента a, $a = b$ (като елемент на $\mathcal{A}$).

Ако $f([b]_{R_1^{\mathcal{A}}}) \neq [b]_{R_1^{\mathcal{A}}}$, то *Вторият* играч избира елемента $a \in [b]_{R_1^{\mathcal{A}}}$, който до този момент не е бил избиран, като елемент на $\mathcal{A}$.

Сега ще се заемем с коректността на описания алгоритъм.

Твърдение 1. *Вторият* играч винаги може да направи ход, съгласно описаната стратегия.

Док:

С индукция относно r, $1 \leq r < k$, ще докажем, че на хода r от всяка структура са избрани по r елемента и че *Вторият* играч може да направи $r+1$-ви ход, когато $r < k$.

1) Нека $r = 1$.

Нека *Първия* играч направи своя първи избор от клас $[a]_{R_1^{\mathcal{A}}}$, такъв че $f([a]_{R_1^{\mathcal{A}}}) = [a]_{R_1^{\mathcal{A}}}$. Тогава по стратегията и *Вторият* играч може да направи ход, защото по нея той трябва да избере същия елемент, но гледан като елемент на другата структура.

Ако обаче *Първият* избере елемент от класа $[a]_{R_1^{\mathcal{A}}}$, такъв че $f([a]_{R_1^{\mathcal{A}}}) \neq [a]_{R_1^{\mathcal{A}}}$, то *Втория* играч отново ще има възможност да направи своя първи ход, защотото трябва да избира от множество с повече от k елемента ($k > 0$).

2) Нека $1 \leq r < k$ и твърдението е изпълнено за r. На $r+1$-вия ход *Първият* играч избира елемент от една от двете структури, който още не е избран като елемент на тази структура. Тъй като до този момент и в двете структури има избрани по r елемента, то с хода си *Първият* играч избира своя $r+1$-ви елемент от структурата, в която играе.

Ако *Първият* играч е играл в клас $[a]_{R_1^{\mathcal{A}}}$, такъв че $f([a]_{R_1^{\mathcal{A}}}) = [a]_{R_1^{\mathcal{A}}}$, то *Вторият* избира същият елемент, но като елемент на другата структура. Следователно този ход е осъществим и така и от втората структура има избран $r+1$-ви елемент.

Ако *Първият* играч е играл в клас $[a]_{R_1^{\mathcal{A}}}$, такъв че $f([a]_{R_1^{\mathcal{A}}}) \neq [a]_{R_1^{\mathcal{A}}}$, то съгласно стратегията *Втория* трябва да избира елемент от клас с не по-малко от k елемента, като от тях до този момент са избрани r елемента, гледани като елементи на тази структура. Следователно има ненулев брой елементи, от които *Вторият* играч трябва да избере своя

$r+1$-ви елемент, който до този момент не е избиран като елемент на неговата структура. ■

След направените k рунда на играта, в която *Вторият* играч е следвал гореописаната стратегия имаме две подструктури $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{B}_k$ с по точно k елемнта в универсумите си.

Твърдение 2. $\mathcal{A}_k \cong \mathcal{B}_k$

Док: Ще докажем по-силното твърдение, а именно: $\mathcal{A}_r \cong \mathcal{B}_r$ за всяко r, $1 \leq r \leq k$, където $\mathcal{A}_r$ и $\mathcal{B}_r$ са подструктурите получени след r-тия рунд. Прилагаме индукция по r:

1) $r = 1$. Тогава $|\mathcal{A}_r|$=$|\mathcal{B}_r|$=1. Нека $a_1 \in |\mathcal{A}_r|$ и $b_1 \in |\mathcal{B}_r|$ и дефинираме функцията $h_1(a_1) = b_1$.

$(a_1, a_1) \in R_i^{\mathcal{A}}$, за $i = 1, 2$. Тогава тъй като $\mathcal{A}_1$ е породена подструктура на $\mathcal{A}$, то $(a_1, a_1) \in R_i^{\mathcal{A}_1}$, за $i = 1, 2$.

$(b_1, b_1) \in R_i^{\mathcal{A}} \longrightarrow (b_1, b_1) \in R_i^{I_k(\mathcal{A})} \longrightarrow (b_1, b_1) \in R_i^(\mathcal{B}_1)$.

$(a_1, a_1) \in R_i^{\mathcal{A}_1} \longleftrightarrow (h(a_1), h(a_1)) \in R_i^{\mathcal{A}_1}$

2) Да предположим, че $\mathcal{A}_r \cong \mathcal{B}_r$ и $h_r : \mathcal{A}_r \longrightarrow \mathcal{B}_r$, като $h_r(a_i) = b_i$, $1 \leq r < k$. Ще докажем, че $\mathcal{A}_{r+1} \cong \mathcal{A}_{r+1}$, като $h_{r+1}(a_i) = b_i$ е изоморфизъм. Ясно е, че h_{r+1} е биекция: $a_1, ..., a_{r+1}$ са избраните елементи от $\mathcal{A}_{r+1}$, а $b_1, ..., b_{r+1}$ са избраните от $\mathcal{B}_{r+1}$. $h_{r+1}(a_i) = b_i = h_r(a_i)$, за $i = 1, ..., r$.

Ще покажем еквивалентността: $(a', a'') \in R_j^{\mathcal{A}_{r+1}} \longleftrightarrow (h(a'), h(a'')) \in R_j^{\mathcal{B}_{r+1}}$, $j = 1, 2$.

2.1) Нека $a', a'' \in a_1, ..., a_r$. Тогава $h_{r+1}(a') = h_r(a')$ и $h_{r+1}(a'') = h_r(a'')$.

$(a', a'') \in R_j^{\mathcal{A}_{r+1}} \longleftrightarrow (a', a'') \in R_j^{\mathcal{B}_r} \longleftrightarrow (h_r(a'), h_r(a'')) \in R_j^{\mathcal{B}_r} \longleftrightarrow (h_r(a'), h_r(a'')) \in R_j^{\mathcal{B}_{r+1}} \longleftrightarrow (h_r(a'), h_r(a'')) \in R_j^{\mathcal{B}_{r+1}}$, $j = 1, 2$.

2.2) $(a', a'') \neq R_j^{\mathcal{A}_{r+1}}$, т.е. $a' = a'' = a_{r+1}$.

$h_{r+1}(a') = h_{r+1}(a_{r+1}) = b_{r+1}$ и $h_{r+1}(a'') = h_{r+1}(a_{r+1}) = b_{r+1}$. Тогава:

$(a_{r+1}, a_{r+1}) \in R_j^{\mathcal{A}_{r+1}} \longleftrightarrow (a_{r+1}, a_{r+1}) \in R_j^{\mathcal{A}}$

$(b_{r+1}, b_{r+1}) \in R_j^{\mathcal{B}_{r+1}} \longleftrightarrow (b_{r+1}, b_{r+1}) \in R_j^{I_k(\mathcal{A})} \longleftrightarrow (b_{r+1}, b_{r+1}) \in R_j^{\mathcal{A}}$, за $j = 1, 2$.

Следователно $(a', a'') \in R_j^{\mathcal{A}_{r+1}} \longleftrightarrow (h(a'), h(a'')) \in R_j^{\mathcal{B}_{r+1}}$, $j = 1, 2$.

2.3) Нека $a' \in a_1, ..., a_r$ и $'' \notin a_1, ..., a_r$. Тогава $a'' = a_{r+1}$ и $a' = a_j$, за някое j, $1 \leq j \leq r$.

2.3.1) Нека a_{r+1} е избран от *Първият* играч. Има две възможности за a_{r+1}:

2.3.1.1) $a_{r+1} \in [a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}}$. Тогава *Вторият* играч, следвайки стратегията си, е избрал $b_{r+1} \in f([a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}})$.

Нека $(a', a'') = (a_j, a_{r+1}) \in R_1^{\mathcal{A}}$. Тогава $(a_j, a_{r+1}) \in R_1^{\mathcal{A}_{r+1}}$.

$h(a'') = b_{r+1} \in f([a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}})$. От друга страна $f([a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}}) \subseteq [a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}}$. Тогава $b_{r+1} \in [a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}}$ и следователно $(a_j, b_{r+1}) \in R_1^{\mathcal{A}}$. (1)

$h(a') = h(a_j) = b_j \in f([a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}})$. $(a_j, b_j) \in R_1^{\mathcal{A}}$. (2)

От (1) и (2) и от факта, че $R_1^{\mathcal{A}}$ е релация на еквивалентност следва, че $(b_j, b_{r+1}) \in R_1^{\mathcal{A}}$, а от факта, че B_{r+1} е породената подструктура на $I_k(\mathcal{A})$ получаваме $(b_j, b_{r+1}) \in R_1^{\mathcal{B}_{r+1}}$. Така показахме, че $(a', a'') \in R_1^{\mathcal{A}_{r+1}} \longleftrightarrow (h(a'), h(a'')) \in R_1^{\mathcal{B}_{r+1}}$.

2.3.1.2) Нека сега $(a', a'') = (a_j, a_{r+1}) \notin R_1^{\mathcal{A}}$. Тогава *Вторият* играч, следвайки стратегията си, е избрал елемент от $f([a_{r+1}]_{R_1^{\mathcal{A}}})$. Но $f([a_{r+1}]_{R_1^{\mathcal{A}}}) \cap f([a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}}) = \emptyset$.

$b_{r+1} \notin f([a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}})$, а $b_j \in f([a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}})$. Тогава $(b_j, b_{r+1}) = (h_{r+1}(a'), h_{r+1}(a'')) \notin R_1^{\mathcal{A}}$ и слеодвателно $(b_j, b_{r+1}) = (h_{r+1}(a'), h_{r+1}(a'')) \notin R_1^{\mathcal{B}_{r+1}}$. От $(a', a'') \notin R_1\mathcal{A}$ следва $(a', a'') \notin R_1\mathcal{A}_{r+1}$. Така получихме, че $(h_{r+1}(a'), h_{r+1}(a'')) \notin R_1^{\mathcal{B}_{r+1}} \longleftrightarrow (h_{r+1}(a'), h_{r+1}(a'')) \notin R_1^{\mathcal{A}_{r+1}}$

2.3.2) Нека сега a_{r+1} е бил избран от *Втория* играч. Отново имаме две възможности:

2.3.2.1) $a_{r+1} \in [a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}}$. Тогава *Първия* играч е бил избрал $b_{r+1} \in f([a_{r+1}]_{R_1^{\mathcal{A}}})$ като елемент на $\mathcal{B}$. $(a', a'') = (a_j, a_{r+1}) \in R_1^{\mathcal{A}_{r+1}}$. $h_{r+1}(a') = h_{r+1}(a_j) = b_j$.

$h_{r+1}(a'') = h_{r+1}(a_{r+1}) = b_{r+1} \in f([a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}}) \subseteq [a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}}$. Следователно $(a_{r+1}, b_{r+1}) \in R_1^{\mathcal{A}}$ и $(a_j, b_j) \in R_1^{\mathcal{A}}$. Тогава $(a_{r+1}, b_{r+1}) \in R_1^{\mathcal{A}_{r+1}}$ и $(a_j, b_j) \in R_1^{\mathcal{A}_{r+1}}$. Следователно $(b_j, b_{r+1}) \in R_1\mathcal{A}$. Така $(b_j, b_{r+1}) \in R_1^{\mathcal{B}_{r+1}}$. Така отново получихме $(h_{r+1}(a'), h_{r+1}(a'')) \in R_1^{\mathcal{B}_{r+1}} \longleftrightarrow (h_{r+1}(a'), h_{r+1}(a'')) \in R_1^{\mathcal{A}_{r+1}}$.

2.3.2.2) Нека сега $a_{r+1} \notin [a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}}$. Тогава *Първият* играч е бил избрал $b_{r+1} \in f([a_{r+1}]_{R_1^{\mathcal{A}}})$. При това $f([a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}}) \cap f([a_{r+1}]_{R_1^{\mathcal{A}}}) = \emptyset$. $b_j \in f([a_j]_{R_1^{\mathcal{A}}})$. Тогава $(b_j, b_{r+1}) \notin R_1^{\mathcal{A}}$, откъдето и $(h_{r+1}(a_j), h_{r+1}(a_{r+1})) \notin R_1^{\mathcal{A}}$.

$(a_j, a_{r+1}) \notin R_1^{\mathcal{A}}$, а следователно и $(a_j, a_{r+1}) \notin R_1^{\mathcal{A}_{r+1}}$. От $(h_{r+1}(a_j), h_{r+1}(a_{r+1})) \in R_1^{\mathcal{B}}$ следва $(h_{r+1}(a_j), h_{r+1}(a_{r+1})) \in R_1^{\mathcal{B}_{r+1}}$.

Окончателно получихме

$$(h_{r+1}(a'), h_{r+1}(a'')) \in R_1^{\mathcal{B}_{r+1}} \longleftrightarrow (h_{r+1}(a'), h_{r+1}(a'')) \in R_1^{\mathcal{A}_{r+1}}. \blacksquare$$

Съществуването на изоморфизъм между породените подструктури $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{B}_k$ ни гарантира, че *Вторият* играч има печеливша стратегия за играта $\mathcal{G}_k(\mathcal{A}, I_k(\mathcal{A}))$. По аналогичен начин се доказва, че *Вторият* играч има печеливша стратегия и в игрите $\mathcal{G}_k(\mathcal{A}, II_k(\mathcal{A}))$ и $\mathcal{G}_k(\mathcal{A}, III_k(\mathcal{A}))$, и в крайна сметка, и за играта $\mathcal{G}_k(\mathcal{A}, III_k(II_k(I_k(\mathcal{A}))))$. Да забележим, че напълно аналогично се разсъждава и за игрите $\mathcal{G}_k^m(\mathcal{A}, I_k(\mathcal{A}))$, $\mathcal{G}_k^m(\mathcal{A}, I_k(\mathcal{A}))$, $\mathcal{G}_k^m(\mathcal{A}, I_k(\mathcal{A}))$ при $m \leq k$. Сега можем да приложим теорема 2.19, от където непосредствено следва

Теорема 3.1 *Нека $\mathcal{A}$ е модел за теорията $EQUIV^{1\subset 2}$. Нека φ е затворена предикатна формула, $k = min$(броя на променливите във φ, $qr(\varphi)$) и $\mathcal{B}$ е структура, получена от $\mathcal{A}$ чрез прилагането на I_k, II_k или III_k. Тогава $\mathcal{B}$ е също модел на $EQUIV^{1\subset 2}$, при това $\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$.*

4. Модална определимост в $\mathcal{C}$ с две модалности

С $\mathcal{C}$ вече означихме класа от всички модели на теорията $\mathrm{EQUIV}^{1\subset 2}$. Разглеждаме модалния език с две модалности $\Box_1, \Box_2$. Ще се интересуваме от модалната определимост в този модален език $M(\Box_1, \Box_2)$ над класа $\mathcal{C}$. С други думи, разглеждаме въпроса: *дадена е затворена предикатна формула φ, съществува ли модална формула A от модалния език, такава че за всяка структура $\mathcal{A}$ от $\mathcal{C}$ е в сила еквивалентността*

$$\mathcal{A} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{A} \models A.$$

(Разбира се, знакът $\models$ от лявата страна на еквивалентността е в смисъл на вярност на предикатното смятане, а от дясната страна е в смисъл на модалната вярност.)

Търсенето на условия, при които затворена предикатна формула φ е модално определима в класа $\mathcal{C}$ с модална формула A ще сведем до това какви свойства има φ в C^k_{bou}, където C^k_{bou} е класът на всички структури от вида $III_k(II_k(I_k(\mathcal{A})))$ за $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$.

И така, нека $C^k_{bou} = III_k(II_k(I_k(\mathcal{C})))$. Ясно е, че класът C^k_{bou} съдържа краен брой структури с точност до изоморфизъм. Да предположим, че сме намерили условия в термините на вярност на φ в структури от C^k_{bou}, т.е. условия валидността на които за C^k_{bou} е еквивалентна с модалната определимост на φ над $\mathcal{C}$. Ако тези условия са ефективно проверими, то от тук ще получим и разрешимост на модалната определимост над $\mathcal{C}$. Ние ще намерим такива условия по аналогия с подобни разглеждания в [1] и [2]. Дори нещо повече, както в цитираните статии, ще имаме ефективен начин за посочването на такава модална формула.

Лема 4.1 *Нека $\mathcal{G} = (U, S_1, S_2)$ е крайна структура, S_1 е релация на еквивалентност, $S_1 \subseteq S_2$ и $S_2 = U \times U$. Тогава съществува модална формула $A_{\mathcal{G}}$, такава че за всяка структура $\mathcal{F} = (W, R_1, R_2)$, в която R_1 е релация на еквивалентност, $R_1 \subseteq R_2$ и $R_2 = W \times W$, е в сила еквивалентността*

$$\mathcal{F} \not\models A_{\mathcal{G}} \longleftrightarrow \mathcal{G} \text{ не е p-морфен образ на } \mathcal{F}. \qquad (1)$$

Доказателство. Ще докажем Лемата с контрапозиция. Тогава (1) ще изглежда така :

Съществува оценка V, такава че $(\mathcal{F}, V) \models A_{\mathcal{G}} \longleftrightarrow \mathcal{G}$ е p-морфен образ на $\mathcal{F}$.

Нека с $a_j^1, a_j^2, ..., a_j^{l_j}$ означим класовете на еквивалентност относно S_1, които са с точно j елемента. Техният брой е l_j, където $1 \leq j \leq k$. Нека $a_j^i = \{a_{j1}^i, ..., a_{jj}^i\}$, където $1 \leq i \leq l_j$. Нека p_{js}^i са различни променливи, $1 \leq s \leq j$. Ще конструираме модалната формула $A_{\mathcal{G}}$ само с тези променливи. Тя ще бъде конюнкцията на следните модални формули:

I : $\bigwedge\limits_{1\leq i\leq l_j;1\leq j\leq k;1\leq s\leq j} \Diamond_2 p_{js}^i$

II : $\bigwedge\limits_{s\neq s'} \Box_2(p_{js}^i \longrightarrow \Diamond_1 p_{js'}^i)$

III : $\bigwedge\limits_{\langle i,j,s\rangle\neq\langle i',j',s'\rangle} \Box_2(p_{js}^i \longrightarrow \Box_1 \neg p_{j's'}^i)$

IV : $\bigwedge\limits_{1\leq i\leq l_j;1\leq j\leq k;1\leq s\leq j} \Box_2(\bigvee\limits_{i,j,s} p_{js}^i)$

V : $\bigwedge\limits_{1\leq i\leq l_j;1\leq j\leq k;1\leq s\leq j} \Box_2(p_{js}^i \longrightarrow \Box_1 \bigvee\limits_{s'=1}^{j} p_{js'}^i)$

$\longrightarrow$) Нека V е произволна оценка в $\mathcal{F}$ и $(\mathcal{F}, V) \models A_{\mathcal{G}}$. Следователно $(\mathcal{F}, V) \models \Diamond_2 p_{js}^i$. Нека $x_0 \in W$. Това означава, че $\exists y(x_0 R_2 y \wedge (\mathcal{F}, V, y) \models p_{js}^i)$, т.е. $\exists y(x_0 E_2 y \wedge y \in V(p_{js}^i))$. Това означава, че $y \in V(p_{js}^i)$, т.е. $V(p_{js}^i) \neq \emptyset$. Така модалната формула I ни казва, че $V(p_{js}^i) \neq \emptyset$.

Да разгледаме модалната формула IV. Нека $x \in W$. Тогава $x_0 R_2 x$. Имаме $(\mathcal{F}, V, x_0) \models \Box_2(\bigvee\limits_{i,j,s} p_{js}^i)$. Следователно $(\mathcal{F}, V, x) \models \bigvee\limits_{i,j,s} p_{js}^i$. Тогава съществуват $\langle i_0, j_0, s_0\rangle$, такива че $(\mathcal{F}, V, x) \models p_{j_0 s_0}^{i_0}$, т.е. $x \in V(p_{j_0 s_0}^{i_0}) \subseteq \bigcup V(p_{js}^i)$. Следователно $W \subseteq \bigcup V(p_{js}^i)$. Но $V(p_{js}^i) \subseteq W$. Следователно $W = \bigcup V(p_{js}^i)$.

Да разгледаме модалната формула III. Ще покажем,че множествата $V(p_{js}^i)$ и $V(p_{j's'}^{i'})$ са непресичащи се при $\langle i, j, s\rangle \neq \langle i', j', s'\rangle$. Наистина, ако $\langle i, j, s\rangle \neq \langle i', j', s'\rangle$ и $y \in V(p_{js}^i) \cap V(p_{j's'}^{i'})$, то от $x_0 R_2 y$ и от III получаваме последователно $(\mathcal{F}, V, y) \models p_{js}^i \longrightarrow \Box_1 \neg p_{j's'}^{i'}$ и $(\mathcal{F}, V, y) \models p_{js}^i$, откъдето получаваме $(\mathcal{F}, V, y) \models \Box_1 \neg p_{j's'}^{i'}$. Но $y R_2 y$, от където $(\mathcal{F}, V, y) \models \neg p_{j's'}^{i'}$, т.е. $y \in W \setminus V(p_{j's'}^{i'})$. Но това е невъзможно, защото $y \in V(p_{j's'}^{i'})$.

Сега ще докажем, че $\bigcup\limits_{s=1}^{j} V(p_{js}^i)$ е обединение на класове на еквивалентност относно релацията R_1 и всеки един от тези класове има поне j

елемента. Че е обединение на класове на еквивалентност означава да видим, че от $x \in \bigcup\limits_{s=1}^{j} V(p^i_{js})$ и xR_1y следва $y \in \bigcup\limits_{s=1}^{j} V(p^i_{js})$. Но това, както ще видим след малко, се гарантира от модалната формула V. Нека сега X е произволен клас на еквивалентност относно R_1 и $X \subseteq \bigcup\limits_{s=1}^{j} V(p^i_{js})$. Ще покажем, че X има поне j различни елементи. Наистина нека $x \in \bigcup\limits_{s=1}^{j} V(p^i_{js})$. Това означава, че за някое s,$1 \leq s \leq j$, $x \in V(p^i_{js})$. Тогава $(\mathcal{F}, V, x) \models p^i_{js}$. Но x_0R_2x. Следователно $(\mathcal{F}, V, x) \models \Box_1 p^i_{js'}$, за всяко $s' \neq s$, $1 \leq s' \leq j$. Така получихме, че $\exists y(xR_1y \wedge y \in V(p^i_{js'}))$. Тъй като X е клас на еквивалентност относно R_1, то $y \in X$. Така получихме, че за всяко s', $1 \leq s' \leq j$, съществува $y \in X$, такова че $y \in V(p^i_{js'})$. Но $\{V(p^i_{js})\}_{i,j,s}$ е фамилия от непресичащи се множества. В частност и $V(p^i_{j1}), ..., V(p^i_{jj})$ са непресичащи се множества и във всяко от тях има поне един елемент от X. Следователно X има поне j елемента.

Сега ще дефинираме изображението $f : W \longrightarrow U$ по следния начин:

$$f(x) = a^i_{js} \longleftrightarrow x \in V(p^i_{js})$$

Очевидно f е сюрекция. Ще покажем, че f е p-морфизъм от $\mathcal{F}$ в $\mathcal{G}$. За тази цел ще покажем, че са изпълнени следните два пункта от дефиницията за p-морфизъм:

$$1)\forall w \forall v(w, v \in W)(wR_1v \longrightarrow f(w)S_1f(v))$$

Нека wR_1v. Тогава съществуват $\langle i, j, s\rangle$, такива че $w, v \in V(p^i_{js})$. Тогава $f(w) = f(v) = a^i_{js}$. Тъй като S_1 е рефлексивна релация, то $f(w)S_1f(v))$.

$$2)\forall w \forall v(w \in W \wedge v \in U \wedge f(w)S_1v \longrightarrow (\exists u \in W)(wR_1u \wedge f(u) = v))$$

Нека $w \in W \wedge v \in U \wedge f(w)S_1v$. Тогава съществуват $\langle i, j, s\rangle$, такива че $w \in V(p^i_{js})$. От тук следва, че $f(w) = a^i_{js}$. Тогава $v = a^i_{js'}$, за някое s', $1 \leq s' \leq j$. Но $[w]_{R_1} = \bigcup\limits_{s=1}^{j} V(p^i_{js})$ и $\{V(p^i_{js})\}$ са непразни непресичащи се множества. Следователно съществува $u \in V(p^i_{js'})$, такова че wR_1u. Но тогава $f(u) = a^i_{js'} = v$. Следователно f е p-морфизъм.

$\longleftarrow$) (Отново разглеждаме условието (1) в контрапозиция.) Нека f е p-морфизъм от $\mathcal{F}$ в $\mathcal{G}$. В структурата $\mathcal{F}$ дефинираме оценка на променливите V по следния начин:

$$V(p^i_{js}) = f^{-1}(a^i_{js})$$

Ще покажем, че $(\mathcal{F}, V) \models A_{\mathcal{G}}$, т.е. ще покажем, че $(\mathcal{F}, V) \models I \wedge II \wedge III \wedge IV \wedge V$. Като разпишем формулите подробно и вземем под внимание факта, че образ на клас на еквивалентност е клас на еквивалентност и прообраз на клас на еквивалентност е обединение на класове на еквивалентност ще видим, че действително $(\mathcal{F}, V) \models A_{\mathcal{G}}$.

$(\mathcal{F}, V, x) \models I \iff (\mathcal{F}, V, x) \models \bigwedge\limits_{i,j,s} \Diamond_2 p^i_{js} \iff$ съществуват $\langle i, j, s\rangle$, такива че xR_2y и $(\mathcal{F}, V, y) \models p^i_{js} \iff$ същесвува y, такова че $y \in V(p^i_{js})$. Но $V(p^i_{js}) \neq \emptyset$. Следователно такова y съществува.

$(\mathcal{F}, V, x) \models II \iff (\mathcal{F}, V, x) \models \bigwedge\limits_{s\neq s'} \Box_2(p^i_{js} \longrightarrow \Box_1 p^i_{js'}) \iff$ за всяко y, такова че xR_2y следва $(\mathcal{F}, V, y) \models p^i_{js} \longrightarrow \Box_1 p^i_{js'} \iff (\mathcal{F}, V, y) \models p^i_{js} \Longrightarrow (\mathcal{F}, V, y) \models \Box_1 p^i_{js'} \iff y \in V(p^i_{js}) \Longrightarrow$ за всяко z, такова че yR_1z, следва $z \in V(p^i_{js'}) \iff y \in f^{-1}(a^i_{js'}) \Longrightarrow$ за всяко z, такова че yR_1z следва $z \in f^{-1}(a^i_{js'}) \iff \forall x \forall y(y \in f^{-1}(a^i_{js}) \wedge yR_1z \longrightarrow z \in f^{-1}(a^i_{js'}))$

$(\mathcal{F}, V, x) \models III \iff (\mathcal{F}, V, x) \models \bigwedge\limits_{\langle i,j\rangle\neq\langle i',j'\rangle} \Box_2(p^i_{js} \longrightarrow \Box_1 \neg y^{i'}_{j's'}) \iff y \in V(p^i_{js}) \longrightarrow (\mathcal{F}, V, y) \models \Box_1 \neg p^{i'} j' s' \iff y \in V(p^i_{js}) \longrightarrow \forall z(yR_1z \longrightarrow z \notin V(p^{i'}_{j's'})) \iff \forall y \forall z(y \in V(p^i_{js}) \wedge yR_1z \longrightarrow z \notin V(p^{i'}_{j's'}) \iff \forall y \forall z(y \in V(p^i_{js}) \wedge yR_1z \longrightarrow z \notin f^{-1}(a^{i'}_{j's'})$

$(\mathcal{F}, V, x) \models IV \iff (\mathcal{F}, V, x) \models \bigwedge\limits_{i,j,s} \Box_2(p^i_{js}) \iff \forall y(xR_2y \longrightarrow (\mathcal{F}, V, y) \models \bigvee\limits_{i,j,s} p^i_{js}) \iff \exists\langle i, j, s\rangle \forall y(y \in V(p^i_{js})) \iff \exists\langle i, j, s\rangle \forall y(y \in f^{-1}(a^i_{js}))$

$(\mathcal{F}, V, x) \models V \iff (\mathcal{F}, V, x) \models \bigwedge\limits_{i,j,s} p^i_{js} \longrightarrow \Box_1 \bigvee\limits_{s'=1}^{j} p^i_{js'} \iff (\mathcal{F}, V, y) \models p^i_{js} \longrightarrow (\mathcal{F}, V, y) \models \Box_1 \bigvee\limits_{s'=1}^{j} p^i_{js'} \iff y \in V(p^i_{js}) \longrightarrow \forall z(yR_1z \longrightarrow \exists s'(z \in$

$V(p^i_{js'}))) \Longleftrightarrow \forall y \forall z \exists s'(y \in f^{-1}(a^i_{js}) \wedge yR_1z \longrightarrow z \in f^{-1}(a^i_{js'}))$

Дефиниция 4.2 *Структурите от $\mathcal{C}$ в които релационният символ R_2 е интерпретиран с декартовия квадрат на универсума, ще наричаме разделяния.*

Да забележим, че разделянията са точно подструктурите, породени от един елемент. Казано по друг начин, разделянията са точно онези подструктури, чийто универсум е точно един клас на еквивалентност относно R_2. Съвсем непосредствено се съобразява, че ако $\mathcal{F}$ е разделяне, то $I_k(\mathcal{F})$ и $II_k(\mathcal{F})$ са също разделяния, при това $II_k(\mathcal{F})$ е p-морфен образ на $I_k(\mathcal{F})$, а $I_k(\mathcal{F})$ е p-морфен образ на $\mathcal{F}$.

Да забележим, че за всяко разделяне $\mathcal{F}$ от $\mathcal{C}$ е в сила $III_k(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Всяко разделяне от $\mathcal{C}^k_{bou}$ се определя с точност до изоморфизъм от наредена k-орка от естествени числа $\langle l_1, \ldots, l_k \rangle$, $0 \leq l_i \leq k$, $l_1 + \cdots + l_k > 0$, — l_i е броят на i-елементните класове на еквивалентност относно интерпретацията на R_1. Тази наредена k-орка ще наричаме k-физиономия на разделянето.

Ако ψ е затворена предикатна формула, то с $\mathcal{C}(\psi)$ и с $\mathcal{C}^k_{bou}(\psi)$ ще означаваме онези структури съответно от $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}^k_{bou}$, в които ψ е вярна.

Нека k е положително естествено число. Ще дефинираме следната операция O_k от множеството на крайните фамилии от разделяния в $\mathcal{C}^k_{bou}$ в $\mathcal{C}^k_{bou}$. Ако $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, е крайна фамилия от разделяния, то $O_k(\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) = III_k(II_k(I_k(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda)))$.

Теорема 4.3 *Нека е дадена затворената предикатна формула φ от езика $L(R_1, R_2, =)$ и $k = min(VAR(\varphi), qr(\varphi))$. Необходимо и достатъчно условие да бъде φ модално определима в класа $\mathcal{C}$ с модална формула е $C^k_{bou}(\varphi)$ да удовлетворява следните условия:*

1) затвореност относно p-морфизми,

2) затвореност относно подструктури генерирани от точка,

3) ако $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, са разделяния от $\mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$ то и $O_k(\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ е от $\mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$.

4) ако $(l_1, ..., l_{i-1}, k, l_{i+1}, ..., l_k)$ за някое $1 \leq i \leq k$ е k-физиономия на разделяне от $C^k_{bou}(\varphi)$, то и $(k, ..., k, l_{i+1}, ..., l_k)$ е k-физиономия на разделяне от $C^k_{bou}(\varphi)$, за $1 \leq i \leq k$.

Доказателство.

А) Нека φ е модално определима с модална формула A в класа C. Тогава за всяка структура $\mathcal{F}$ от C е изпълнено $\mathcal{F} \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{F} \models A$. Нека $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$. Нека $\mathcal{F}'$ е неин p-морфен образ. Ще покажем, че $\mathcal{F}' \in C^k_{bou}(\varphi)$. От $\mathcal{F} \models \varphi$ следва $\mathcal{F} \models A$. Но p-морфизмите запазват верността на модалните формули. Следователно $\mathcal{F}' \models A$ и тъй като A моделано определя φ, то $\mathcal{F}' \models \varphi$. От $\mathcal{F} \in C^k_{bou}$ следва, че $\mathcal{F}' \in C^k_{bou}$, защото при p-морфизмите няма нарастване на класове на еквивалентност, както непосредствено се забелязва. Следователно $\mathcal{F}' \in C^k_{bou}(\varphi)$.

Сега ще покажем, че $C^k_{bou}(\varphi)$ е затворено относно генерирани подструктури, откъдето в частност следва затвореност относно генерираните от точка подструктури. Нека $\mathcal{F} \in C^k_{bou}(\varphi)$. Нека $\mathcal{F}'$ е нейна генерирана подструктура. Тогава очевидно $\mathcal{F}' \in C^k_{bou}$. Тъй като A модално определя φ имаме $\mathcal{F} \models A$. Тогава от теоремата за генерираните подструктури получаваме, че $\mathcal{F}' \models A$. Но A модално определя φ в C, поради което $\mathcal{F}' \models \varphi$ и следователно $\mathcal{F}' \in C^k_{bou}(\varphi)$.

Сега да видим, че $C^k_{bou}(\varphi)$ удовлетворява и условието 3), което е в известен смисъл също условие за затвореност. Нека $\mathcal{F}_\lambda$ са разделяния от $\mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$ за всяко $\lambda \in \Lambda$. От модалната определимост получаваме, че за всяко $\lambda \in \Lambda$ е в сила $\mathcal{F}_\lambda \models A$. Тогава от теоремата за чуждите обединения следва, че $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda \models A$. Отново използваме модалната определимост, за да заключим, че $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda \models \varphi$. Следователно $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda \in \mathcal{C}(\varphi)$ сега от теорема 3.1 и дефиницията на операцията O_k следва $O_k(\{\mathcal{F}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}) \in \mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$.

Да проверим и условието 4). Нека за някое $1 \leq i \leq k$ $(l_1, ..., l_{i-1}, k, l_{i+1}, ..., l_k)$ е k-физиономия на разделяне от $C^k_{bou}(\varphi)$. Да вземем едно такова разделяне $\mathcal{F}$. Да дефинираме едно ново разделяне $\mathcal{F}'$ като добавим към $\mathcal{F}$ нови класове на еквивалентност относно R_1 на брой $k(i-1)$, всеки един от тях с по точно k елемента. Тогава $\mathcal{F}'$ е разделяне от $\mathcal{C}$ и $II_k(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$. Следователно $\mathcal{F}' \models \varphi$ и тъй като φ модално се определя в $\mathcal{C}$ с A, ще имаме $\mathcal{F}' \models A$. От лемата p-морфизмите следва, че във всеки p-морфен образ на $\mathcal{F}'$ формулата A е също вярна. Сега непосредствено съобразяваме, че разделянията с k-физиономия $(k, ..., k, k, l_{i+1}, ..., l_k)$ са p-морфни образи на $\mathcal{F}'$ и, разбира се, са от $\mathcal{C}^k_{bou}$ и в тях е вярна модалната формула A. От модалната определимост на φ с A в $\mathcal{C}$ следва, че в тези разделяния е вярна φ, поради което те принадлежат на $\mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$.

Б) Нека са изпълнени четирите условия от теоремата. Без ограничение на общността можем да смятаме, че φ е изпълнима и нейното отрицание е също изпълнимо, защото иначе съответната модална тавтология или противоречие ще я определят модално. Ще покажем, че φ е модално определима с формула A_φ. Дефинираме тази модална формула с помощта ма лема 4.1: $A_\varphi = \bigwedge_\alpha \neg A_\alpha$, където конюнкцията е по всички α, които са k-физиономии на разделяния от $\mathcal{C}^k_{bou}(\neg\varphi)$. Тъй като $\mathcal{C}^k_{bou}$ е крайно, и разделянията от $\mathcal{C}^k_{bou}(\neg\varphi)$ са краен и ненулев брой. Наистина, ако няма такива разделяния, то във всяко разделяне е вярна φ и от условие 3) получаваме, че φ е вярна във всяка структура от $\mathcal{C}^k_{bou}$, откъдето пък следва, че отрицанието на φ е неизпълнимо. Сега ще покажем, че формулата A_φ има желаното свойство: да определя модално φ в класа $\mathcal{C}$. За целта да фиксираме една произволна структура $\mathcal{F}$ от $\mathcal{C}$. Да означим с $\{\mathcal{F}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ фамилията от всички генерирани от един елемент подструктури на $\mathcal{F}$. Тогава $\mathcal{F} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$.

Б.1) Нека допуснем, че $\mathcal{F} \models \varphi$, но $\mathcal{F} \not\models A_\varphi$.

От дефиницията на A_φ и $\mathcal{F} \not\models A_\varphi$ следва, че за някое α, което е k-физиономия на структура $\mathcal{G}_\alpha$ от $C^k_{bou}(\neg\varphi)$ е изпълнено, че $\mathcal{F} \not\models \neg A_\alpha$. От лемата за чуждите обединения следва, че има поне едно $\lambda \in \Lambda$, за което е в сила $\mathcal{F}_\lambda \not\models \neg A_\alpha$. Да означим с Λ_1 множеството от всички такива елементи на Λ, за които $\mathcal{F}_\lambda \not\models \neg A_\alpha$. Следователно за всяко $\lambda \in \Lambda_1$ съществува оценка V_λ, за която имаме $(\mathcal{F}_\lambda, V_\lambda) \models A_\alpha$. От лема 4.1 следва, че $\mathcal{G}_\alpha$ е p-морфен образ на $\mathcal{F}_\lambda$ за всяко $\lambda \in \Lambda_1$. Нека за всяко $\lambda \in \Lambda$ дефинираме

$$\mathcal{F}'_\lambda = I_k(\mathcal{F}_\lambda), \quad \mathcal{F}''_\lambda = II_k(\mathcal{F}'_\lambda), \quad \mathcal{F}'''_\lambda = III_k(\mathcal{F}''_\lambda).$$

Да означим с $\mathcal{F}_1$ чуждото обединение на структурите $\mathcal{F}''_\lambda$, т.е. $\mathcal{F}_1 = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}''_\lambda$. Да забележим, че чуждото обединение комутира с всяка от операциите I_k и II_k. Тогава имаме

$$\mathcal{F}_1 = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}''_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} II_k(I_k(\mathcal{F}_\lambda)) = II_k(I_k(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda)) = II_k(I_k(\mathcal{F})).$$

Така получихме $\mathcal{F}_1 = II_k(I_k(\mathcal{F}))$ откъдето следва, че $\mathcal{F}_1 \equiv_k \mathcal{F}$, поради което $\mathcal{F}_1 \models \varphi$. Сега да разгледаме структурата $\mathcal{F}_2 = III_k(\mathcal{F}_1)$. За нея можем да твърдим, че има едни и същи (с точност до изоморфизъм) разделяния като $\mathcal{F}_1$, по точно: ако една структура е подструктура на $\mathcal{F}_2$ генерирана от точка, то тя е подструктура на $\mathcal{F}_1$ генерирана от точка и всяка структура, която е подструктура на $\mathcal{F}_1$ генерирана от точка е изоморфна с подструктура на $\mathcal{F}_2$ генерирана от точка. Ясно е, че $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{C}^k_{bou}$, а така също че $\mathcal{F}_2 \models \varphi$, понеже $\mathcal{F}_2 \equiv_k \mathcal{F}_1$. Следователно $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$.

Сега условието 2) ни позволява да заключим, че всяка подструктура на $\mathcal{F}_2$ генерирана от точка, а значи и всяка подструктура на $\mathcal{F}_1$ е от $\mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$. Така за всяко $\lambda \in \Lambda$ е в сила

$$\mathcal{F}''_\lambda \in \mathcal{C}^k_{bou}(\varphi). \tag{2}$$

Сега ще се стремим да покажем, че $\mathcal{G}_\alpha \in \mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$, което ще е желаното противоречие. За целта разглеждаме следващите два случая.

Случай 1). Съществува $\lambda \in \Lambda_1$, за което $\mathcal{F}''_\lambda = \mathcal{F}_\lambda$. Да вземем едно такова λ. Тогава съгласно (2) имаме $\mathcal{F}_\lambda \in \mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$, от където според условие 1) всеки p-морфен образ на $\mathcal{F}_\lambda$ е от $\mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$. В частност, $\mathcal{G}_\alpha \in \mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$.

Случай 2). За всяко $\lambda \in \Lambda_1$, $\mathcal{F}''_\lambda \neq \mathcal{F}_\lambda$. Да вземем едно такова λ, значи $\mathcal{F}''_\lambda = II_k(I_k(\mathcal{F}_\lambda)) \neq \mathcal{F}_\lambda$. Нека $\beta = \langle l_1, \ldots, l_k \rangle$ е k-физиономията на $\mathcal{F}''_\lambda$. Тогава има два случая: (а) за всяко i, $1 \le i \le k$ имаме $l_i < k$; (б) съществува i, $1 \le i \le k$, за което $l_i = k$.

Да разгледаме случая (а). Тогава забелязваме, че операциите II_k и I_k не са променили нито един клас на еквивалентност относно R_1 в $\mathcal{F}_\lambda$, който е с по-малко от k елемента. Следователно в $\mathcal{F}_\lambda$ има точно l_k класа на еквивалентност относно R_1, които са с поне по k елемента, като s, $s > 0$, от тях са с по повече от k елемента. Тъй като $\mathcal{G}_\alpha$ е p-морфен образ на $\mathcal{F}_\lambda$, очевидно $\mathcal{G}_\alpha$ е p-морфен образ и на $\mathcal{F}''_\lambda$. От условието 1) във формулировката на теоремата и (2) следва, че $\mathcal{G}_\alpha \in \mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$.

Да разгледаме случая (б). Нека разгледаме най-голямото i, $1 \le i \le k$, за което $l_i = k$. Следователно $l_j < k$ за всяко j, $i+1 \le j \le k$. Тогава съгласно условието 4) в $\mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$ има разделяне $\mathcal{F}^*$ с k-физиономия $\langle k, k, \ldots, k, k, l_{i+1}, \ldots, l_k \rangle$. Да забележим, че в $\mathcal{F}_\lambda$ за всяко j, $i+1 \le j < k$, има точно l_j класа на еквивалентност с по точно j елемента и неповече от l_k класа с по точно k елемента. Ето защо от факта, че $\mathcal{G}_\alpha$ е p-морфен образ на $\mathcal{F}_\lambda$ следва, че $\mathcal{G}_\alpha$ е p-морфен образ и на $\mathcal{F}^*$. Сега от $\mathcal{F}^* \in \mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$ и условието 1) заключаваме, че $\mathcal{G}_\alpha \in \mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$.

Така доказахме, че $\mathcal{G}_\alpha \in \mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$, което е противоречие, тъй като по условие $\mathcal{G}_\alpha \in \mathcal{C}^k_{bou}(\neg\varphi)$. Ето защо всеки път когато $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{F} \models \varphi$ е в сила и $\mathcal{F} \models A$.

Б.2) Нека допуснем, че $\mathcal{F} \not\models \varphi$, но $\mathcal{F} \models A_\varphi$.

Сега от $\mathcal{F} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ и лемата за генерираните подструктури заключаваме, че за всяко $\lambda \in \Lambda$ е в сила $\mathcal{F}_\lambda \models A_\varphi$. Нека $\lambda \in \Lambda$. Тогава $\mathcal{F}_\lambda \models \neg A_\alpha$ за всяка k-физиономия α на разделяне от $\mathcal{C}^k_{bou}(\neg\varphi)$. От лема 4.1 следва, че нито едно разделяне от $\mathcal{C}^k_{bou}(\neg\varphi)$ не е p-морфен образ на $\mathcal{F}_\lambda$. Ето защо разделянето $II_k(I_k(\mathcal{F}_\lambda))$, което е p-морфен образ на $\mathcal{F}_\lambda$ и е от $\mathcal{C}^k_{bou}$, не е от $\mathcal{C}^k_{bou}(\neg\varphi)$. Следователно за всяко $\lambda \in \Lambda$ е в сила $II_k(I_k(\mathcal{F}_\lambda)) \in \mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$. Нека $\mathcal{F}_1 = II_k(I_k(\mathcal{F}))$. Тогава $\mathcal{F}_1 \not\models \varphi$ и, разбира се, $III_k(\mathcal{F}_1) \not\models \varphi$. Имаме

$$\mathcal{F}_1 = II_k(I_k(\mathcal{F})) = II_k(I_k(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda)) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} II_k(I_k(\mathcal{F}_\lambda)),$$

откъдето предвид $II_k(I_k(\mathcal{F}_\lambda)) \in \mathcal{C}^k_{bou}$ и $III_k(II_k(I_k(\mathcal{F}_\lambda))) = II_k(I_k(\mathcal{F}_\lambda))$ следва, че $III_k(\mathcal{F}_1) = O_k(\{II_k(I_k(\mathcal{F}_\lambda))\}_{\lambda\in\Lambda'})$ за някое крайно Λ', $\Lambda' \subseteq \Lambda$. От $II_k(I_k(\mathcal{F}_\lambda)) \in \mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$ и условието 3), получаваме $III_k(\mathcal{F}_1) \in \mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$, т.е. $III_k(\mathcal{F}_1) \models \varphi$. Това е в противоречие с полученото $III_k(\mathcal{F}_1) \not\models \varphi$, с което се убеждаваме, че допускането в случая Б2) е невярно.

С това теоремата е доказана.

5. Разрешимост и сложност

Едно непосредствено приложение на теорема 4.3

Теорема 5.1 *Модалната определимост в $\mathcal{C}$ е разрешим проблем*

Доказателство. Нека φ е произволна формула. Тогава ефективно намираме числото k — по-малкото от числата брой на различните индивидни променливи и кванторен ранг на φ. След това ефективно намираме крайно множество от структури, такива че те са с точност до изоморфизъм структурите от класа $\mathcal{C}^k_{bou}$. Тъй като те са краен брой и са крайни, ефективно можем да намерим крайно множество от структури — с точност до изоморфизъм структурите от класа $\mathcal{C}^k_{bou}(\varphi)$. За това множество очевидно можем алгоритмично да проверим дали удовлетворява условията 1)–4) от теорема 4.3. Според същата теорема, ако множеството удовлетворява 1)–4), то φ е модално определима, освен това, ако множеството не удовлетворява тези условия, то φ не е модално определимо. ■

Интересно би било да се намери сложността на проблемът за разглежданата тук модална определимост, но тук няма да се занимаваме с този въпрос. Вместо това ще направим едно непосредствено приложение на теорема 3.1. И така, разглеждаме следния проблем "Теорема на EQUIV$^{1\subset 2}$":

вход : затворена предикатна формула от езика $\mathcal{L}(R_1, R_2)$ с формално равенство.

изход: EQUIV$^{1\subset 2} \vdash \varphi$ или EQUIV$^{1\subset 2} \nvdash \varphi$

Този проблем е разрешим, тъй като вместо да разглеждаме верността на формулата в $\mathcal{C}$ ще разглеждаме верността ѝ в $\mathcal{C}^k_{bou}$, което с точност до изоморфизъм е крайно множество. Ще покажем, че проблема "Теорема на EQUIV$^{1\subset 2}$"е PSPACE-пълен. Да напомним, че даден проблем е PSPACE-пълен, ако са изпълнени условията:

1) той се намира в класа PSPACE,

2) всеки друг проблем, който е в PSPACE може полиномиално да се сведе към него.

Твърдение. Проблемът "Теорема на EQUIV$^{1\subset 2}$"е от класа PSPACE.

Док. Ще се заемем с построяването на следния алгоритъм :
по фиксирана структура $\mathcal{A}$ за езика $\mathcal{L}(R_1, R_2)$ и затворена предикатна

формула φ проверява дали φ е теорема на теорията $\text{EQUIV}^{1\subset 2}$. Този алгоритъм ще бъде в $PSPACE$.

Ясно е, че за линейно време и пространство относно $|\varphi|$ можем да намерим кванторния ранг k на φ. Нека имаме s на брой структури (с точност до изоморфозъм) от вида $III_k(II_k(I_k(\mathcal{A})))$. Всяка една от тях е с размер ограничен полиномиално (спрямо пространсвото) от $k = |\varphi|$.

Алгоритъмът е следния:

Последователно пораждаме тези s на брой структури(пораждаме k-физиономиите им). За всяка породена структура правим проверка дали φ е вярна в нея. Добре известен факт е, че тази проверка е на полиномиална (спрямо пространството) цена относно $|\varphi|$.

Ако отговора е "НЕ", то спираме пораждането и казваме, че $\text{EQUIV}^{1\subset 2} \nvdash \varphi$

Ако пораждането свърши (т.е. φ е вярно във всяка породена структура), то казваме че $\text{EQUIV}^{1\subset 2} \vdash \varphi$.

Сега ще покажем, че алгоритъмът е PSPACE-труден, т.е. ще проверим второто условие от дефиницията. За целта ще покажем, че всяка задача, която лежи в PSPACE може полиномиално да се сведе до задача от "Теорема на $\text{EQUIV}^{1\subset 2}$".

Вместо произволна задача ще разгледаме задача от вида $EQ \vdash \varphi$, където φ е затворена предикатна формула само с равно и EQ е теорията на език само с равно. Заради Теоремата на **Стокмаер** тази задача е PSPACE-трудна. Ще покажем, че има алгоритъм Ω, който по дадена формула φ от език само с формално равенство дава формула от език $\mathcal{L} = (R_1, R_2, =)$, така че $EQ \vdash \varphi \longleftrightarrow \text{EQUIV}^{1\subset 2} \vdash \Omega(\varphi)$. Тогава ще имаме, че "Теорема на $\text{EQUIV}^{1\subset 2}$"е PSPACE-труден.

Еквивалентно, достатъчно е да покажем, че $\text{EQUIV}^{1\subset 2}$ е консервативно разширение на чистата теория на равенството, т.е. верността на формулите от EQ се запазва и в $\text{EQUIV}^{1\subset 2}$.

Твърдение. Теорията $\text{EQUIV}^{1\subset 2}$е консервативно разширение на EQ.

Нека φ е затворена формула от език само с равно. Нека $\Omega = id$. Нека $EQ \vdash \varphi$. Тогава φ е формула и в езика $\mathcal{L} = (R_1, R_2, =)$ и $\text{EQUIV}^{1\subset 2} \vdash \varphi$, защото аксиомите на равенството се запазват и в по-богатия език.

Обратно: Нека $\text{EQUIV}^{1\subset 2} \vdash \varphi$. Тогава за всяка структура $\mathcal{A}$ от $\mathcal{L} = (R_1, R_2, =)$ имаме $\mathcal{A} \models \varphi$. Да допуснем, че $EQ \nvdash \varphi$. Тогава съществува структура $\mathcal{B}$ над език само с равно, такава че $\mathcal{B} \not\models \varphi$. Обогатяваме $\mathcal{B}$ до структура $\mathcal{B}'$ от езика $\mathcal{L} = (R_1, R_2)$, като $R_1^{\mathcal{B}'} = R_2^{\mathcal{B}'} = \{\langle a, a\rangle \mid a \in |\mathcal{B}'|\}$. Тогава $\mathcal{B}' \not\models \varphi$. Но това е в противоречие с факта, че φ е вярна във всяка структура от по-богатия език. Следователно $EQ \vdash \varphi$. Така $\mathrm{EQUIV}^{1\subset 2}$ е консервативно разширение на EQ. Показхме, че има алгоритъм Ω, който за полиномиално пространство свежда проблема "теорема на EQ"до проблема "теорема на $\mathrm{EQUIV}^{1\subset 2}$". Следователно, вземайки пред вид и предното твърдение, получаваме, че проблема "теорема на $\mathrm{EQUIV}^{1\subset 2}$"е PSPACE-пълен.

Следователно имаме следната

Теорема Проблемите "Теорема на $\mathrm{EQUIV}^{1\subset 2}$"и "изпълнимост на формула в модел на $\mathrm{EQUIV}^{1\subset 2}$"са PSPACE-пълни.

Док: От предните две твърдения имаме, че "Теорема на $\mathrm{EQUIV}^{1\subset 2}$"е PSPACE-пълна. За изпълнимост да забележим, че φ е изпълнима точно тогава, когато φ има модел от C^k_{bou}. За тази проверка е по-удобно да пуснем алгоритъма, който прави проверка за принадлежност на φ в $\mathrm{EQUIV}^{1\subset 2}$, като за вход му подадем $\neg\varphi$. Пространствената сложност в този случаи е coPSPACE, което от Теоремата на Савич пак е PSPACE. Тогава от сложността на проблема "Теорема на $\mathrm{EQUIV}^{1\subset 2}$"следва, че и "проблема за изпълнимост в модел на $\mathrm{EQUIV}^{1\subset 2}$"е PSPACE-пълен.

Литература

[1] Ph. Balbiani and T. Tinchev. Decidability and Complexity of Definability within the Class of All Partitions. In: Proceedings of the 5th Panhellenic Logic Symposium, July 25-28, 2005, Athens, Greece, p. 26–33.

[2] Ph. Balbiani and T. Tinchev. Definability over the Class of All Partitions. Journal of Logic and Computation, 2006, Vol. 16, 5, pp. 541–557.

[3] Ph. Balbiani, Ts. Dunchev and T. Tinchev. Modal definability over a class of structures with two equivalence relations. In: "Pioneers of Bulgarian Mathematics International Conference dedicated to Nikola Obrechkoff and Lubomir Tschakaloff, Sofia, July 8-10, 2006, Abstracts.

[4] J. F. A. K. van Benthem. *Modal Logic and Classical Logic*. Bibliopolis, 1983.

[5] J. F. A. K. van Benthem. Correspondence Theory. In: D. M. Gabbay and F. Guenthner (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*. 2nd edition. Kluwer Academic Publishers, 325–408, 2001.

[6] L. A. Chagrova. *On the problem of definability of propositional formulas of intuitionistic logic by formulas of classical first order logic*. PhD, Kalinin State University, 1989. (in Russian)

[7] L. A. Chagrova. An undecidable problem in correspondence theory. *Journal of Symbolic Logic*, 56:1261–1272, 1991.

[8] A. V. Chagrov and L. A. Chagrova. Algorithmic problems concerning first order definability of modal formulas on the class of all finite frames. *Studia Logica*, 55:421–448, 1995.

[9] H. D. Ebbinghaus and J. Flum. *Finite Model Theory.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1995.

[10] G. Georgiev and T. Tinchev. Monadic Second Order logic on equivalence relations. To appear in Annuaire de l'Universite de Sofia "St. Kliment Ohridski".

[11] A. Janiczak. Undecidability of some simple formalized theories. *Fundamenta Mathematicae*, 40:131–139, 1953.

[12] S. Kripke. Semantical Analysis of Modal Logic I: Normal Propositional Calculi. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9:67–96, 1963.