СУ "Св. Климент Охридски"
Факултет по Математика и Информатика

Дипломна работа
на тема

ω-спектри и ω-ко-спектри на структури

Стефан Володев Вътев
ф.н. М-22051

Ръководител катедра: доц. Александра Соскова
Научен ръководител: доц. Александра Соскова

12 септември 2008 г.

Съдържание

Глава 1

Увод

Линда Рихтер [8] първа започва изучаването на връзката между изоморфните класове на структурите и тяхната степен на неразрешимост, в случая тюринговите степени. Нека да разгледаме структурата $\mathfrak{B} = \langle |\mathfrak{B}|, P_1, \ldots, P_n, f_1, \ldots, f_k \rangle$ в езика $\mathcal{L}$. С $\mathcal{D}^+(\mathfrak{B})$ да означим диаграмата на $\mathfrak{B}$, т.е. всички атомарни формули и отрицания на атомарни формули, които са верни в $\mathfrak{B}$. Използвайки ефективно кодиране на формули, можем да разглеждаме $\mathcal{D}^+(\mathfrak{B})$ като подмножество на естествените числа.

Нека A е множество от естествени числа. С $d_T(A)$ ще означаваме тюринговата степен на множеството. Детайлно изложение на структурата на тюринговите степени може да се намери в [9].

Важен въпрос е как може да се измери сложността на дадена структура. Първоначална идея е била да се съпостави тюрингова степен на структура, т.е. $d_T(\mathcal{D}^+(\mathfrak{A}))$, но това понятие не е инвариантно относно изоморфизъм.

Дефиниция 1.0.1 (Рихтер [8]). *За изброима структура $\mathfrak{A}$, спектърът на $\mathfrak{A}$ е множеството от всички тюрингови степени на нейните изоморфни копия.*

$$DS_T(\mathfrak{A}) = \{d_T(\mathcal{D}^+(\mathfrak{B})) \mid \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}.$$

Рихтер въвежда следната дефиниция за съпоставяне на тюрингова степен на структурата. Нека с $\mathbb{N}$ да означаваме множеството на естествените числа.

Дефиниция 1.0.2 (Рихтер [8]). *Една структура $\mathfrak{A}$ има степен $\mathbf{d}$, ако $\mathbf{d} = min\{d_T(\mathcal{D}^+(\mathfrak{B}) \mid \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$.*

Можем да обобщим понятието за произволно $k \in \mathbb{N}$.

Дефиниция 1.0.3 (Найт [6]). *Казваме, че $\mathfrak{A}$ има k-скок степен $\mathbf{d}$, ако $\mathbf{d} = min\{d_T(\mathcal{D}^+(\mathfrak{B})^{(k)}) \mid \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$.*

Понятието за степен на структура е инвариантно относно изоморфизъм. Оказва се, че не всяка структура има степен. Изследвани са основни структури като линейни наредби, групи, графи, булеви алгебри и други алгебрични структури.

Теорема 1.0.1 (Рихтер)**.** *Нека* **a** *да бъде произволна тюрингова степен.*

1. *Съществува абелева група със степен* **a**.
2. *Съществува решетка със степен* **a**.
3. *Съществува граф със степен* **a**.

От друга страна, някои структури нямат степени.

Теорема 1.0.2 (Рихтер)**.** *1. Съществува абелева група без степен.*

2. *Съществува линейна наредба без степен. Нека $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, =, \neq, <)$ е линейна наредба. Ако $\mathfrak{A}$ има степен, то тя е равна на $\mathbf{0}_T$.*

Теорема 1.0.3 (Найт [6])**.** *За всяко $k \in \mathbb{N}$ съществува линейна наредба, която има $(2k + 2)$-скок степен и няма $(k + 1)$-скок степен.*

Теорема 1.0.4 (Аш, Джокуш, Найт [1])**.** *За всеки рекурсивен ординал α, съществува структура, която няма α-скок степен.*

Теорема 1.0.5 (Джокуш, Найт [3])**.** *За всеки рекурсивен ординал $\alpha \geq 2$, и за всяка тюрингова степен $\mathbf{d} \geq_T 0^{(\alpha)}$ съществува линейна наредба с α-скок степен* **d***, която няма β-скок степен за $\beta < \alpha$.*

В [11] Сосков дефинира понятието за спектър на структура като множество от номерационни степени. Той въвежда понятието ко-спектър на структура като множеството от тези номерационни степени, които са долни граници на спектъра. Доказва теорема за минимална двойка и теорема за съществуване на квази-минимална степен относно структура. В [17] А. Соскова разширява понятието за спектър на структура като разглежда релативни спектри относно крайна редица от структури. Тя доказва, че основните свойства на спектрите се запазват и при релативните спектри.

В [15] Сосков въвежда структурата на ω-степените като разширение на структурата на номерационните степени. Обобщение на релативните спектри в $\mathcal{D}_\omega$ представляват ω-спектрите относно редица, разглеждани от Соскова в [18]. И за тях се оказва, че запазват основните свойства на спектрите.

Целта на настоящата работа е да изучим свойствата на ко-спектите на структури като множества от ω номерационни степени. В Глава 2 и в Глава 3 ще разгледаме основни понятия като номерационна сводимост и равномерна сводимост и ще въведем понятието спектър и ко-спектър на структура. В Глава 4 се дава характеризация на редици, чиито ω-степени принадлежат на ω-ко-спектъра на дадена структура. Характеризацията се дава чрез форсинг релация и чрез Σ_n формули, подобна на тази дадена от Сосков за ко-спектри в [11] и от Соскова за ω-ко-спектри относно редици в [18]. В [11] Сосков разглежда редица свойства на ко-спектрите и ко-множества от номерационни степени. В Глава 5 ще проверим кои от тези свойства остават сила за ω-ко-спектрите и ко-множества от ω номерационни степени. Освен това, в [11] Сосков доказва, че за всеки изброим идеал от номерационни степени съществува структура с ко-спектър равен на него. Това свойство не се запазва при ω-ко-спектрите на структури. За главните идеали от ω номерационни степени ще докажем, че съществува структура и редица с ω-ко-спектър равен на дадения главен идеал.

Авторът би искал да изкаже благодарности на членовете на катедрата по Математическа Логика към ФМИ на СУ за добрата им преподавателска работа. Специална благодарност към Александра Соскова за предлагането на тази тема за дипломна работа и за съществената помощ оказана по време на изготвянето й.

Глава 2

Основни понятия

2.1 Номерационни степени

Нека са дадени множествата $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Означаваме $A \leq_e B$ (A *е номерационно сводимо към* B), ако има номерационен оператор Γ_z такъв, че $A = \Gamma_z(B)$, т.е.

$$A \leq_e B \iff (\forall x)(x \in A \iff (\exists v)(\langle v, x \rangle \in W_z \ \& \ D_v \subseteq B)),$$

където $W_0, \ldots, W_z, \ldots$ е гьоделево кодиране на всички полуразрешими множества и D_v е крайното множество с каноничен код v. На всеки номерационен оператор Γ_z можем да съпоставим полу-разрешимото множество W_z. Затова оттук нататък ще означаваме номерационния оператор като W_z.

Релацията $\leq_e$ е рефлексивна и транзитивна и поражда релация на еквивалентност. Релацията $\equiv_e$, дефинирана като $A \equiv_{\mathrm{e}} B \iff A \leq_{\mathrm{e}} B \ \& \ B \leq_{\mathrm{e}} A$, е релация на еквивалентност.

Номерационната степен $\mathbf{a}$ на множеството A наричаме класа на еквивалентност относно $\equiv_{\mathrm{e}}$, т.е.

$$\mathbf{a} = d_e(A) = \{B \mid A \equiv_e B\} \ .$$

Нека A и B са множества от естествени числа. Дефинираме $A \oplus B = \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x+1 \mid x \in B\}$. Множеството $A \oplus B$ е точната горна граница на множествата A и B.

Да дефинираме и релация между номерационни степени: $d_{\mathrm{e}}(A) \leq_{\mathrm{e}} d_{\mathrm{e}}(B) \iff A \leq_{\mathrm{e}} B$. Ще бележим с $\mathcal{D}_{\mathrm{e}}$ множеството от всички номерационни степени. $\mathcal{D}_e = (\mathcal{D}_e, \leq_e, \mathbf{0}_e)$, където $\mathbf{0}_e$ е класът на еквивалентност, в който принадлежи $\emptyset$. За дадено множество A, да означим

$A^+ = A \oplus (\mathbb{N} \backslash A)$. Едно множество A се нарича *тотално*, ако $A \equiv_{\mathrm{e}} A^+$. Номерационната степен $\mathbf{a}$ е тотална, ако $\mathbf{a}$ съдържа тотално множество.

Роджърсовият изоморфизъм $\iota : \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_e$, дефиниран в [9] като $\iota(d_{\mathrm{T}}(A)) = d_{\mathrm{e}}(A^+)$, дава изоморфно влагане на тюринговите степени в номерационните.

Дефиниция 2.1.1. *Нека е дадено множество A и $K_A^0 = \{\langle x, z\rangle \mid x \in W_z(A)\}$. Дефинираме номерационния скок $'$ на множеството A като множеството $(K_A^0)^+$.*

Обобщаваме дефиницията за скок на множество по следния начин:

(i) $B^{(0)} = B$;

(ii) $B^{(n+1)} = (B^{(n)})'$;

(iii) $B^{(\omega)} = \{\langle x, y\rangle \mid x \in B^{(y)}\}$.

Лесно се проверяват следните свойства:

(i) $A \leq_e B \Rightarrow A' \leq_e B'$;

(ii) A е Σ^0_{n+1} в B, тогава и само тогава, когато $A \leq_e (B^+)^{(n)}$.

Дефиниция 2.1.2. *Нека е дадена крайна редица от множества $B_0, \ldots, B_k$. Дефинираме* скок редицата *за тези множества по следния начин:*

(i) $\mathcal{P}(B_0) = B_0$;

(ii) Ако $n < k$, то $\mathcal{P}(B_0, \ldots, B_{n+1}) = \mathcal{P}(B_0, \ldots, B_n)' \oplus B_{n+1}$.

Теорема 2.1.1 (Сосков [10])**.** *Нека $k \geq 0$ и $B_0, \ldots, B_k$ са произволни множества от естествени числа. Тогава съществуват тотални множества F и G, за които $F^{(k+2)} \equiv_e \mathcal{P}(B_0, \ldots, B_k)''$ и $G^{(k+2)} \equiv_e \mathcal{P}(B_0, \ldots, B_k)''$ и освен това е изпълнено:*

(i) За всяко $n \leq k$, $\mathcal{P}(B_0, \ldots, B_n) <_e F^{(n)}$ и $\mathcal{P}(B_0, \ldots, B_n) <_e G^{(n)}$;

(ii) Ако $n \leq k$, $A \leq_e F^{(n)}$ и $A \leq_e G^{(n)}$, то $A \leq_e \mathcal{P}(B_0, \ldots, B_n)$.

2.2 ω номерационни степени

В [15] Сосков започва изучаването на структурата $\mathcal{D}_\omega$ на ω номерационните степени. В този параграф ще дадем някои основни свойства на $\mathcal{D}_\omega$.

Да означим с $\mathcal{S}$ множеството от всички редици $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n<\omega}$ от множества от естествени числа.

За всеки елемент $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n<\omega}$ от $\mathcal{S}$, скок-класът на $\mathcal{B}$ е множеството

$$J_{\mathcal{B}} = \{d_T(X) \mid (\forall k)(B_k \leq_e (X^+)^{(k)}) \text{ равномерно по } k\} \; .$$

Условието за равномерност по n означава, че съществува тотална изчислима функция $\lambda n.g(n)$, за която за всяко $n \in \mathbb{N}$, $B_n = W_{g(n)}(X^{(n)})$.

За всеки две редици $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ нека $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ е *равномерно сводима към* $\mathcal{B}$), ако $J_{\mathcal{B}} \subseteq J_{\mathcal{A}}$ и нека $\mathcal{A} \equiv_\omega \mathcal{B}$, ако $J_{\mathcal{A}} = J_{\mathcal{B}}$. Релацията $\equiv_\omega$ е релация на еквивалентност за $\mathcal{S}$.

Нека *ω-номерационната степен на $\mathcal{B}$* да бъде $d_\omega(\mathcal{B}) = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \equiv_\omega \mathcal{B}\}$ и $\mathcal{D}_\omega = \{d_\omega(\mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \in \mathcal{S}\}$.

Нека $\mathbf{a} = d_\omega(\mathcal{A})$ и $\mathbf{b} = d_\omega(\mathcal{B})$. Тогава $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{b}$, ако $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}$. Да означим с $\mathbf{0}_\omega = d_\omega(\emptyset_\omega)$, където $\emptyset_\omega$ е редицата с всеки член равен на $\emptyset$.

Дефинираме операцията съчетание между редици по следния начин $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \{A_n \oplus B_n\}_{n<\omega}$. Лесно се проверява, че $J_{\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}} = J_{\mathcal{A}} \cap J_{\mathcal{B}}$. Следователно, за всеки два елемента $d_\omega(\mathcal{A}) = \mathbf{a} \in D_\omega$ и $d_\omega(\mathcal{B}) = \mathbf{b} \in D_\omega$, тяхната точна горна граница е $\mathbf{a} \cup \mathbf{b} = d_\omega(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$.

Дефиниция 2.2.1. *Нека е дадена редица от естествени числа $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n<\omega}$. Да дефинираме съответната* скок редица $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \{\mathcal{P}_n(\mathcal{B})\}_{n<\omega}$ *с индукция по n:*

(1) $\mathcal{P}_0(\mathcal{B}) = B_0$;

(2) $\mathcal{P}_{n+1}(\mathcal{B}) = (\mathcal{P}_n(\mathcal{B}))' \oplus B_{n+1}$.

Твърдение 2.2.1. *За произволни редици $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}$ е изпълнено:*

1. $\mathcal{A} \equiv_\omega \mathcal{P}(\mathcal{A})$.
2. *Ако съществува изчислима функция g такава, че $A_n = \Gamma_{g(n)}(\mathcal{P}_n(\mathcal{B}))$ за всяко n, то $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}$.*

Съществува естествено влагане на номерационните степени в ω номерационните степени. За дадено множество A, да означим с $A \uparrow \omega$ редицата $\{A_n\}_{n<\omega}$, където $A_0 = A$ и за всяко $n > 0$ $A_n = \emptyset$, т.е. $\mathcal{A} = \{A, \emptyset, \emptyset, \dots\}$.

За всяко $A, B \subseteq \mathbb{N}$ имаме, че $A \leq_{\mathrm{e}} B \iff A \uparrow \omega \leq_\omega B \uparrow \omega$. Следователно, изображението $\kappa(d_{\mathrm{e}}(A)) = d_\omega(A \uparrow \omega)$ дава изоморфно влагане на $\mathcal{D}_{\mathrm{e}}$ в $\mathcal{D}_\omega$. Оттук нататък няма да правим разлика между номерационната степен $d_{\mathrm{e}}(A)$ и нейното представяне като $d_\omega(A \uparrow \omega)$ в $\mathcal{D}_\omega$.

Така например, ако $\mathbf{a} = d_e(A)$ и $\mathbf{b} \in \mathcal{D}_\omega$, тогава ще пишем $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \leq_\omega \mathbf{a}$) като знаем, че $d_\omega(A \uparrow \omega) \leq_\omega \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \leq_\omega d_\omega(A \uparrow \omega)$).

$\mathcal{D}_1 = \{d_\omega(A \uparrow \omega) \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$. Тъй като $A \uparrow \omega \leq_\omega B \uparrow \omega \iff A \leq_e B$, то горната полурешетка $(\mathcal{D}_1, 0_\omega, \leq_\omega, \cup)$ е изоморфна на горната полурешетка на номерационните степени.

Дефиниция 2.2.2. *Ще дефинираме операцията скок за редици от множества. За всяко $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$, нека $\mathcal{A}' = \{\mathcal{P}_{k+1}(\mathcal{A})\}_{k<\omega}$.*

(i) $\mathcal{A}' = \{\mathcal{P}_{k+1}(\mathcal{A})\}_{k<\omega}$.

(ii) $\mathcal{A}^{(n+1)} = (\mathcal{A}^{(n)})'$.

Тогава имаме, че $\mathcal{A}^{(k)} = \{\mathcal{P}_{n+k}(\mathcal{A})\}_{n<\omega}$ за всяко k.

Твърдение 2.2.2. *(i)* $\mathcal{A} <_\omega \mathcal{A}'$;

(ii) $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}' \leq_\omega \mathcal{B}'$.

Добре е да се обърне внимание, че $X \subseteq \mathbb{N}$, тогава $\mathcal{P}_n(X \uparrow \omega) \equiv_{\mathrm{e}} X^{(n)}$ равномерно по n.

Следната теорема на Сосков и Ковачев [14] давя явна характеризация на равномерната сводимост.

Теорема 2.2.1. *Нека $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$ и $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n<\omega}$ да бъдат елементи от $\mathcal{S}$. Тогава условията са еквивалентни:*

(1) $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}$, *т.е. за всяко тотално множество X, ако $B_n \leq_{\mathrm{e}} X^{(n)}$ равномерно в n тогава $A_n \leq_{\mathrm{e}} X^{(n)}$ равномерно в n.*

(2) $A_n \leq_{\mathrm{e}} \mathcal{P}_n(\mathcal{B})$ *равномерно в n, т.е. съществува изчислима функция g такава, че $A_n = \Gamma_{g(n)}(\mathcal{P}_n(\mathcal{B}))$ за всяко n.*

От теоремата следва, че за всяко $X \subseteq \mathbb{N}$ и произволна редица $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$ имаме, че $A_n \leq_{\mathrm{e}} X^{(n)}$ равномерно в n тогава и само тогава когато $\mathcal{A} \leq_\omega \{X^{(n)}\}_{n<\omega}$ тогава и само тогава, когато $\mathcal{A} \leq_\omega X \uparrow \omega$.

С модификация на доказателството на Теорема 2.2.1 можем да получим следното:

Следствие 2.2.2. *Нека $\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_r, \dots$ са елементи на $\mathcal{S}$ така, че за всяко r, $\mathcal{A}_r \not\leq_\omega \mathcal{B}$. Тогава съществува тотално множество X такова, че $\mathcal{B} \leq_\omega \{X^{(n)}\}_{n<\omega}$ и $\mathcal{A}_r \not\leq_\omega \{X^{(n)}\}_{n<\omega}$ за всяко r.*

Това е теорема за обръщане на скока относно изброима редица от множества.

Теорема 2.2.3 (Сосков [10])**.** *Нека* $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ *да бъде редица от множества от естествени числа. Да предположим, че за някое* $X \subseteq \mathbb{N}$ *и за някое* $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n(\mathcal{B}) \leq_e X^+$. *Тогава съществува множество* $F \subseteq \mathbb{N}$, *което удовлетворява следните условия:*

(i) $(\forall k \leq n)(B_k \leq_e (F^+)^{(k)})$;

(ii) $(\forall k < n)((F^+)^{(k+1)} \equiv_e (F^+) \oplus \mathcal{P}_k(\mathcal{B})')$;

(iii) $(F^+)^{(n)} \equiv_e X^+$.

Глава 3

Спектри на структури

В [11] Сосков дефинира понятието спектър на структура, базирано на номерационна сводимост и разглежда свойствата му. Нека $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}; R_1, \ldots, R_s)$ да бъде структура, R_i е подмножество на $\mathbb{N}^{r_i}$ и равенството $=$ и неравенството $\neq$ са измежду $R_1, \ldots, R_s$.

Дефиниция 3.0.3. Номерация f *на* $\mathfrak{A}$ *е тотално изображение от* $\mathbb{N}$ *върху* $\mathbb{N}$.

Нека е дадена номерация f на $\mathfrak{A}$ и подмножество A на $\mathbb{N}^a$. Тогава $f^{-1}(A) = \{\langle x_1, \ldots, x_a\rangle \mid (f(x_1), \ldots, f(x_a)) \in A\}$. Да означим $f^{-1}(\mathfrak{A}) = f^{-1}(R_1) \oplus \cdots \oplus f^{-1}(R_s)$.

При дадено множество X от естествени числа, да означим с $d_{\mathrm{e}}(X)$ номерационната степен на X, а Тюринг степента на X с $d_{\mathrm{T}}(X)$.

Спектър на структурата $\mathfrak{A}$ е множеството

$$DS(\mathfrak{A}) = \{d_e(f^{-1}(\mathfrak{A})) \mid f \text{ е номерация на } \mathfrak{A}\}$$

За всяко естествено число n, дефинираме n-тия скок на спектър на структурата $\mathfrak{A}$ по следния начин:

$$DS_n(\mathfrak{A}) = \{d_e(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}) \mid f \text{ е номерация на } \mathfrak{A}\} \ .$$

Първоначално понятието за *спектър от тюрингови степени* на структурата $\mathfrak{A}$ е въведено от Рихтер [8]:

$$\mathrm{DS}_{\mathrm{T}}(\mathfrak{A}) = \{d_{\mathrm{T}}(f^{-1}(\mathcal{D}^+(\mathfrak{A}))) \mid f \text{ е инективна номерация на } \mathfrak{A}\},$$

където $\mathcal{D}^+(\mathfrak{A})$ е диаграмата на структурата $\mathfrak{A}$, която е съставена от всички атомарни формули и отрицания на атомарни формули верни в $\mathfrak{A}$.

Има две разлики между дефиницията на Сосков и тази на Рихтер. Първата е, че Сосков разглежда диаграмата на структурата $\mathfrak{A}$ съставена само от затворени атомарни формули верни в $\mathfrak{A}$ (без отрицания на затворени атомарни формули верни в $\mathfrak{A}$). Ще означаваме тази диаграма с $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$.

Втората разлика се отнася до номерациите. В [8] спектърът се дефинира с помощта на всички биективни номерации, докато тук ние позволяваме произволни сюрективни номерации.

Не е задължително $DS(\mathfrak{A})$ да съдържа всички номерационни степени $\mathbf{b} \geq_e \mathbf{a}$ за $\mathbf{a} \in DS(\mathfrak{A})$. Например, спектърът $DS(\mathfrak{A})$ на структурата $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, =, \neq)$ представлява точно всички тотални степени. Ако разглеждаме структурата $\mathfrak{A}$ при дефиниция на спектър по Рихтер, то тогава $DS(\mathfrak{A}) = \{0_e\}$.

При дефиницията на Сосков, спектърът на структура е винаги затворен нагоре относно тотални номерационни степени.

Твърдение 3.0.3 (Сосков [11]). *Нека f да бъде произволна номерация на структурата $\mathfrak{A}$. Тогава съществува биективна номерация g на $\mathfrak{A}$ такава, че $g^{-1}(\mathfrak{A}) \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A})$.*

Доказателство. Да разгледаме множеството $E_f = \{\langle x, y\rangle \mid f(x) = f(y)\}$. Лесно се проверява, че $E_f^+ \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A})$, защото $=$ и $\neq$ са предикатни символи, които участват в езика на структурата $\mathfrak{A}$. Сега ще дефинираме с примитивна рекурсия тоталната изчислима функция h:

$$\begin{array}{rcl} h(0) & \cong & 0 \\ h(n+1) & \cong & \mu z[(\forall k \leq n)(\langle h(k), z\rangle) \notin E_f] \end{array}$$

Да дефинираме $g(n) = f(h(n))$. Нека $n_1 \neq n_2$. Без ограничение на общността, да допуснем, че $n_1 < n_2$. Ако $g(n_1) = g(n_2)$, то $f(h(n_1)) = f(h(n_2))$, т.е. $\langle h(n_1), h(n_2)\rangle \in E_f$. От $n_1 < n_2$ и от дефиницията на функцията h следва, че $\langle h(n_1), h(n_2)\rangle \notin E_f$, което е противоречие. Следователно $g(n_1) \neq g(n_2)$, т.е. g е инективна.

От дефиницията на h е ясно, че $n_1 < n_2 \Rightarrow h(n_1) < h(n_2)$. Да допуснем, че g не е сюрективна, т.е. $(\exists k)(\forall n)(g(n) \neq k)$, което е еквивалентно на $(\exists k)(\forall n)(f(h(n)) \neq k)$. f е върху $\mathbb{N}$, следователно съществува $(\exists l)(f(l) = k)$ и $(\forall n)(\langle h(n), l\rangle \notin E_f)$. Съществува t такова, че $h(t) < l$ и $h(t+1) > l$. Това означава, че $(\exists s \leq t)(\langle h(s), l\rangle \in E_f)$. Получаваме, че $g(s) = f(h(s)) = f(l) = k$, което е противоречи с допускането и следователно $(\forall k)(\exists s)(g(s) = k)$. Така доказахме, че g е върху $\mathbb{N}$. Лесно се показва, че $E_f^+ \oplus g^{-1}(\mathfrak{A}) \equiv_e f^{-1}(\mathfrak{A})$. □

Дефиниция 3.0.4. *Нека $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_e$. Казваме, че $\mathcal{A}$ е затворено нагоре (относно тотални номерационни степени), ако за $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ и произволна тотална e-степен $\mathbf{b}$ е изпълнено, че $\mathbf{a} \leq_e \mathbf{b}$, то $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$.*

Дефиниция 3.0.5. *Една изброима структура $\mathfrak{A}$ наричаме тривиална, ако за някое крайно множество $S \subseteq |\mathfrak{A}|$, всяка пермутация на $|\mathfrak{A}|$, която запазва елементите на S фиксирани, е автоморфизъм на $\mathfrak{A}$.*

Теорема 3.0.4 (Найт [6])**.** *Ако $\mathfrak{A}$ е не-тривиална изброима структура, тогава $DS_T(\mathfrak{A})$ е затворен нагоре.*

Твърдение 3.0.4 (Сосков [11])**.** *Нека f е номерация на $\mathfrak{A}$. Да предположим, че F е тотално множество и $f^{-1}(\mathfrak{A}) \leq_e F$. Тогава съществува номерация g на $\mathfrak{A}$, която $g^{-1}(\mathfrak{A}) \equiv_e F$.*

Доказателство. Нека да фиксираме две различни естествени числа s и t и нека x_s и x_t да бъдат такива, че $f(x_s) = s$ и $f(x_t) = t$. Да дефинираме функцията

$$g(x) \simeq \begin{cases} f(x/2) & \text{ако } x \text{ е четно} \\ s & \text{ако } x = 2z+1 \text{ и } z \in F \\ t & \text{ако } x = 2z+1 \text{ и } z \notin F \end{cases}$$

Ясно е, че $g(2x) = f(x)$, следователно g е върху $\mathbb{N}$, т.е. е номерация на $\mathfrak{A}$, и освен това имаме, че $f^{-1}(\mathfrak{A}) \leq_e g^{-1}(\mathfrak{A})$. $=$ и $\neq$ са предикати в $\mathfrak{A}$, следователно $F \leq_e g^{-1}(\mathfrak{A})$. Така получаваме, че $F \oplus f^{-1}(\mathfrak{A}) \leq_e g^{-1}(\mathfrak{A})$.

Нека R_i е предикат от структурата $\mathfrak{A}$ и да изберем произволни числа $\overline{x} = x_1, \dots, x_{r_i}$. Ще опишем процедура, рекурсивна в множеството F, която съпоставя на $\overline{x}$ числата $\overline{y} = y_1, \dots, y_{r_i}$.

(а) Ако x_j е четно, то $y_j = x_j/2$;

(б) Ако $x_j = 2z+1$ и $z \in F$, тогава $y_j = x_s$;

(в) Ако $x_j = 2z+1$ и $z \notin F$, тогава $y_j = x_t$.

Така получаваме, че $\langle x_1, \dots, x_{r_i} \rangle \in g^{-1}(R_i) \iff \langle y_1, \dots, y_{r_i} \rangle \in f^{-1}(R_i)$. От условието, $f^{-1}(\mathfrak{A}) \leq_e F$, следователно $g^{-1}(\mathfrak{A}) \leq_e F$. □

Сосков доказва, че всеки спектър е затворен нагоре относно тотални номерационни степени.

Следствие 3.0.5. *За всяка структура $\mathfrak{A}$, $DS(\mathfrak{A})$ е затворен нагоре.*

Доказателство. Нека $\mathbf{a} \in DS(\mathfrak{A})$ и $\mathbf{b}$ е тотална степен и $\mathbf{a} \leq_e \mathbf{b}$. Ясно е, че съществува номерация f на $\mathfrak{A}$, за която $d_e(f^{-1}(\mathfrak{A})) = \mathbf{a}$ и съществува тотално множество $F \in \mathbf{b}$. Следователно, $f^{-1}(\mathfrak{A}) \leq_e F$ и според горното твърдение можем да намерим номерация g на $\mathfrak{A}$, за която $g^{-1}(\mathfrak{A}) \equiv_e F$. Така получаваме, че $\mathbf{b} \in DS(\mathfrak{A})$ и следователно $DS(\mathfrak{A})$ е затворен нагоре. $\square$

Глава 4

ω-Спектри на структури

4.1 Въведение и основни свойства

Дефиниция 4.1.1. ω-спектър *за структурата* $\mathfrak{A}$ *е множеството* $\mathrm{DS}(\mathfrak{A}) = \{d_{\mathrm{e}}(f^{-1}(\mathfrak{A})) \mid f$ *е номерация на* $\mathfrak{A}\}$.

Нека $\mathcal{A}$ е множество от номерационни степени. Ще означаваме $co_e(\mathcal{A})$ ко-множеството на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{D}_e$, т.е.

$$co_e(\mathcal{A}) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{D}_e \mid (\forall \mathbf{a} \in \mathcal{A})(\mathbf{b} \leq_e \mathbf{a})\}.$$

С $co(\mathcal{A})$ ще означаваме ко-множеството на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{D}_\omega$, т.е.

$$co(\mathcal{A}) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{D}_\omega \mid (\forall \mathbf{a} \in \mathcal{A})(\mathbf{b} \leq_\omega \mathbf{a})\}.$$

Дефиниция 4.1.2. *(i)* ω-**ко-спектър** *на* $\mathfrak{A}$ *е множеството*

$$\mathrm{CS}(\mathfrak{A}) = co(\mathrm{DS}(\mathfrak{A}))$$

(ii) k-**ти** ω-**ко-спектър** *на* $\mathfrak{A}$ *е множеството*

$$\mathrm{CS}_k(\mathfrak{A}) = co(\mathrm{DS}_k(\mathfrak{A}))$$

Дефиниция 4.1.3. *Нека* $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$ *и* f *е номерация на структурата* $\mathfrak{A}$ *и* $k \in \mathbb{N}$*. Редицата* $\mathcal{A}$ *се нарича* k*-допустима в номерацията* f*, ако* $\mathcal{A} \leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A})^{(k)} \uparrow \omega$.

ω номерационната степен на една редица $\mathcal{A}$ принадлежи на k-тия ω-ко-спектър на дадена структура $\mathfrak{A}$ тогава и само тогава, когато $\mathcal{A}$ е k-допустима във всички номерации на $\mathfrak{A}$.

Дефиниция 4.1.4. *Нека f да бъде номерация на $\mathfrak{A}$. За всяко $n, e, x \in \mathbb{N}$, нека да дефинираме релациите $f \models_n F_e(x)$ и $f \models_n \neg F_e(x)$ с индукция по n:*

$$\begin{array}{lll} 1.\ f \models_0 F_e(x) & \iff & (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W_e \ \&\ D_v \subseteq f^{-1}(\mathfrak{A})); \\ 2.\ f \models_{n+1} F_e(x) & \iff & (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W_e \ \&\ (\forall u \in D_v)(\\ & & (u = \langle 0, e_u, x_u\rangle \ \&\ f \models_n F_{e_u}(x_u)) \vee \\ & & (u = \langle 1, e_u, x_u\rangle \ \&\ f \models_n \neg F_{e_u}(x_u))); \\ 3.\ f \models_n \neg F_e(x) & \iff & f \not\models_n F_e(x)\ . \end{array}$$

Лема 4.1.1. *(i) Нека $A \subseteq \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогава $A \leq_{\mathrm{e}} f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}$ тогава и само тогава, когато $A = \{x \mid f \models_n F_e(x)\}$ за някое $e \in \mathbb{N}$.*

(ii) Нека $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$. Тогава $\mathcal{A} \leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A})^{(k)} \uparrow \omega$ тогава и само тогава, когато съществува изчислима функция g такава, че $A_n = \{x \mid f \models_{n+k} F_{g(n)}(x)\}$ за всяко n.

Доказателство.

(i) Ще докажем твърдението с индукция по дефиницията на моделиращата релация. По-точно, ще докажем, че за всяко n, $A = W_e(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}) \iff A = \{x \mid f \models_n F_e(x)\}$.

(а) Нека да разгледаме базовия случай за $n = 0$.

В едната посока, нека $A \leq_{\mathrm{e}} f^{-1}(\mathfrak{A})$, т.е. съществува e такова, че $A = W_e(f^{-1}(\mathfrak{A}))$. От дефиницията на номерационни-я оператор следва, че

$$\begin{array}{lll} x \in A & \iff & (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W_e \ \&\ D_v \subseteq f^{-1}(\mathfrak{A})) \\ & \iff & f \models_0 F_e(x). \end{array}$$

Така получаваме, че $A = \{x \mid f \models_0 F_e(x)\}$.

Сега в другата посока, нека да фиксираме естествено число e и множество $A = \{x \mid f \models_0 F_e(x)\}$.

Тогава имаме, че:

$$\begin{array}{lll} x \in A & \iff & f \models_0 F_e(x) \\ & \iff & (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W_e \ \&\ D_v \subseteq f^{-1}(\mathfrak{A})) \\ & \iff & x \in W_e(f^{-1}(\mathfrak{A})). \end{array}$$

Следователно, $A \leq_{\mathrm{e}} f^{-1}(\mathfrak{A})$.

(б) Да допуснем, че твърдението е вярно за n. Ще докажем че то е вярно и за $n + 1$.

За да докажем едната посока, нека да вземем множество $A \leq_{\mathrm{e}} f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n+1)}$, т.е. съществува e такова, че $A = W_e(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n+1)})$.

Използвайки дефинициите на номерационната сводимост и операцията скок, получаваме следните еквивалентности:

$$\begin{array}{lll} x \in A & \iff & (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W_e \ \& \ D_v \subseteq f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n+1)}) \\ & \iff & (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W_e \ \& \ ((\forall u \in D_v) \\ & & (u = \langle 0, e_u, x_u\rangle \ \& \ x_u \in W_{e_u}(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}))\vee \\ & & (u = \langle 1, e_u, x_u\rangle \ \& \ x_u \notin W_{e_u}(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}))) \end{array}$$

Да означим $A_u = W_{e_u}(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)})$. Това означава, че $A_u \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}$ и като приложим индукционното предположение получаваме, че $x_u \in A_u \iff f \models_n F_{e_u}(x_u)$ и $x_u \notin A_u \iff f \models_n \neg F_{e_u}(x_u)$. Така можем да пренапишем горната еквивалентност по следния начин:

$$\begin{array}{lll} x \in A & \iff & (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W_e \ \& \ ((\forall u \in D_v) \\ & & (u = \langle 0, e_u, x_u\rangle \ \& \ x_u \in A_u) \\ & & (u = \langle 1, e_u, x_u\rangle \ \& \ x_u \notin A_u))) \\ & \iff & (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W_e \ \& \ ((\forall u \in D_v) \\ & & (u = \langle 0, e_u, x_u\rangle \& \ f \models_n F_{e_u}(x_u))\vee \\ & & (u = \langle 1, e_u, x_u\rangle \& \ f \models_n \neg F_{e_u}(x_u)))) \end{array}$$

От дефиницията на моделиращата релация следва, че $x \in A \iff f \models_{n+1} F_e(x)$. Следователно, $A = \{x \mid f \models_{n+1} F_e(x)\}$.

Сегаа за другата посока на еквивалентността, нека $A = \{x \mid f \models_{n+1} F_e(x)\}$. Ще докажем, че $A = W_e(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n+1)})$.

$$\begin{array}{lll} x \in A & \iff & f \models_{n+1} F_e(x) \\ & \iff & (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W_e \ \& \ (\forall u \in D_v) \\ & & ((u = \langle 0, e_u, x_u\rangle \& \ f \models_n F_{e_u}(x_u))\vee \\ & & (u = \langle 1, e_u, x_u\rangle \& \ f \models_n \neg F_{e_u}(x_u)))) \end{array}$$

Да означим $A_u = \{x \mid f \models_n F_{e_u}(x)\}$. От индукционното предположение знаем, че $A_u = W_{e_u}(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)})$. Тогава

$$f \models_n F_{e_u}(x_u) \iff x_u \in A_u \iff x_u \in W_{e_u}(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}) \text{ и}$$

$$f \models_n \neg F_{e_u}(x_u) \iff x_u \notin A_u \iff x_u \notin W_{e_u}(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}).$$

Това означава, че можем да напишем горните еквивалентности по следния начин:

$$\begin{array}{lll} x \in A & \iff & (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W_e \ \& \\ & & (\forall u \in D_v)((u = \langle 0, e_u, x_u\rangle \& \ x_u \in A_u)\vee \\ & & (u = \langle 1, e_u, x_u\rangle \& \ x_u \notin A_u))) \\ & \iff & (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W_e \ \& \\ & & (\forall u \in D_v)((u = \langle 0, e_u, x_u\rangle \& \ x_u \in W_{e_u}(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}))\vee \\ & & (u = \langle 1, e_u, x_u\rangle \& \ x_u \notin W_{e_u}(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)})))) \\ & \iff & x \in W_e(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n+1)}). \end{array}$$

Следователно, $A = W_e(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n+1)})$.

(ii) Ще докажем твърдението с индукция по k. Нека фиксираме една ω-редица $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$.

(а) Да разгледаме базовия случай за $k = 0$. Имаме $\mathcal{A} \leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A}) \uparrow \omega$. Тогава съществува тотална изчислима функция $\lambda n.g(n)$ такава, че $A_n = W_{g(n)}(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)})$. Сега използваме твърдението (i). В него доказахме, че $A_n = \{x \mid f \models_n F_{g(n)}(x)\}$.

В другата посока, нека съществува изчислима функция $\lambda n.g(n)$, за която $A_n = \{x \mid f \models_n F_{g(n)}(x)\}$, за всяко $n \in \mathbb{N}$. Тогава отново използваме твърдение (i) и получаваме, че $A_n = W_{g(n)}(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)})$, за всяко $n \in \mathbb{N}$. Следователно, $\mathcal{A} \leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A}) \uparrow \omega$

(б) Да допуснем, че твърдението е вярно за k. Ще го докажем за $k+1$. Нека $\mathcal{A} \leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A})^{(k)} \uparrow \omega$. Това означава, че съществува изчислима функция $\lambda n.g(n)$, за която $A_n = W_{g(n)}(f^{-1}(\mathcal{A})^{(n+k)})$, за всяко $n \in \mathbb{N}$. От твърдение (i) следва, че $A_n = \{x \mid f \models_{n+k} F_{g(n)}(x)\}$, за всяко $n \in \mathbb{N}$. В другата посока, за изчислимата функция $\lambda n.g(n)$ имаме, че $A_n = \{x \mid f \models_{n+k} F_{g(n)}(x)\}$, за всяко $n \in \mathbb{N}$. Тогава от твърдение (i) следва, че $A_n = W_{g(n)}(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n+k)})$, за всяко $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

4.1.1 Форсинг релация

Ще дадем характеризация на редици от множества, чиито ω-степени принадлежат на ω-ко-спектъра на дадена структура $\mathfrak{A}$. За целта ще дефинираме форсинг релация.

Форсинг условията са крайни изображения τ на $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, които ние ще наричаме *крайни части*. Ще означаваме крайните части с буквите δ, τ, ρ.

Дефиниция 4.1.5. *За произволни естествени числа n, e и x, и за всяка крайна част τ, нека да дефинираме форсинг релациите $\tau \Vdash_n F_e(x)$ и $\tau \Vdash_n \neg F_e(x)$, като следваме дефиницията на релацията “$\models_n$”.*

$$
\begin{array}{lll}
1.\ \tau \Vdash_0 F_e(x) & \iff & (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W_e \ \&\ D_v \subseteq \tau^{-1}(\mathfrak{A}));\\
2.\ \tau \Vdash_{n+1} F_e(x) & \iff & (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W_e \ \&\ \ (\forall u \in D_v)(\\
 & & (u = \langle 0, e_u, x_u\rangle \ \&\ \tau \Vdash_n F_{e_u}(x_u)) \vee \\
 & & (u = \langle 1, e_u, x_u\rangle \ \&\ \tau \Vdash_n \neg F_{e_u}(x_u)));\\
3.\ \tau \Vdash_n \neg F_e(x) & \iff & (\forall \rho \supseteq \tau)(\rho \nVdash_n F_e(x))\ .
\end{array}
$$

Дефиниция 4.1.6. *Нека k е произволно естествено число. Една номерация f на структурата $\mathfrak{A}$ е k-*генерична*, ако за всяко $j < k$ и $e, x \in \mathbb{N}$ е изпълнено, че:* $(\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash_j F_e(x) \vee \tau \Vdash_j \neg F_e(x))$.

Да разгледаме множествата $X^j_{\langle e,x\rangle} = \{\tau \mid \tau \Vdash_j F_e(x)\}$. Горната дефиниция може да се запише и така: Една номерация f на $\mathfrak{A}$ е *k-генерична*, ако за всяко $j < k$ и $e, x \in \mathbb{N}$ е изпълнено, че

$$(\exists \tau \subseteq f)(\tau \in X^j_{\langle e,x\rangle} \vee (\forall \delta \supseteq \tau)(\delta \notin X^j_{\langle e,x\rangle}))$$

Лема 4.1.2. *(i) Ако f е k-генерична номерация на структурата $\mathfrak{A}$, тогава f е j-генерична за всяко $j \leq k$.*

(ii) Ако $\tau \subseteq \rho$, тогава $\tau \Vdash_k (\neg)F_e(x) \Rightarrow \rho \Vdash_k (\neg)F_e(x)$.

(iii) За всяко $(k+1)$-генерична номерация f на $\mathfrak{A}$ $f \models_k (\neg)F_e(x) \iff (\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash_k (\neg)F_e(x))$.

Доказателство.

(i) Твърдението следва директно от дефиницията на k-генерична номерация за структура $\mathfrak{A}$.

(ii) Ще докажем твърдението с индукция по дефиницията на форсинг релацията.

(а) Нека $k = 0$ и $\tau \subseteq \rho$ и $\tau \Vdash_0 F_e(x)$. Тогава съществува v, каноничен код на крайно множество, за което $(\langle v, x\rangle \in W_e \ \&\ D_v \subseteq \tau^{-1}(\mathfrak{A}))$. От $\tau \subseteq \rho$ следва, че $\tau^{-1}(\mathfrak{A}) \subseteq \rho^{-1}(\mathfrak{A})$. Откъдето следва, че за това v, $D_v \subseteq \rho^{-1}(\mathfrak{A})$. Следователно, $\rho \Vdash_0 F_e(x)$. Сега нека $\tau \Vdash_0 \neg F_e(x)$. От дефиницията на форсинг релацията имаме, че $(\forall \delta \supseteq \tau)(\delta \nVdash_0 F_e(x))$. Да допуснем, че $(\exists \gamma \supseteq \rho)(\gamma \Vdash_0 F_e(x))$. Тогава от $\tau \subseteq \rho$ следва, че $\gamma \supseteq \tau$ следва, че $(\exists \gamma \supseteq \tau)(\gamma \Vdash_0 F_e(x)$, което е противоречие. Следователно, $(\forall \delta \supseteq \rho)(\delta \nVdash_0 F_e(x))$, откъдето получаваме, че $\rho \Vdash_0 \neg F_e(x)$.

(б) Да допуснем, че твърдението е вярно за k, т.е. $\tau \Vdash_k (\neg)F_e(x) \Rightarrow \rho \Vdash_k (\neg)F_e(x)$. Ще докажем, че то е вярно и за $k+1$. Нека $\tau \supseteq \rho$ и $\tau \Vdash_{k+1} F_e(x)$. От дефиницията на форсинг релацията следва, че съществува v, за което $(\langle v, x\rangle \in W_e \ \&\ (\forall u \in D_v)((u = \langle 0, e_u, x_u\rangle \ \&\ \tau \Vdash_k F_{e_u}(x_u)) \vee (u = \langle 1, e_u, x_u\rangle \ \&\ \tau \Vdash_k \neg F_{e_u}(x_u))))$. От индукционното предположение знаем, че $\tau \Vdash_k F_{e_u}(x_u) \Rightarrow \rho \Vdash_k F_{e_u}(x_u)$ и $\tau \Vdash_k \neg F_{e_u}(x_u) \Rightarrow \rho \Vdash_k \neg F_{e_u}(x_u)$. Следователно, $(\forall u \in D_v)((u = \langle 0, e_u, x_u\rangle \ \&\ \rho \Vdash_k F_{e_u}(x_u)) \vee (u = \langle 1, e_u, x_u\rangle \ \&\ \rho \Vdash_k$

$\neg F_{e_u}(x_u))))$. Откъдето, съгласно дефиницията на $\Vdash_{k+1}$ получаваме, че $\rho \Vdash_{k+1} F_e(x)$.

Остана да разгледаме отрицанието. Нека $\tau \Vdash_{k+1} \neg F_e(x)$. От дефиницията на $\Vdash_{k+1}$ следва, че $(\forall \delta \supseteq \tau)(\delta \nVdash_{k+1} F_e(x))$. С аналогични разсъждения както в базовия случай, получаваме, че $(\forall \delta \supseteq \rho)(\delta \nVdash_{k+1} F_e(x))$. Откъдето следва, че $\rho \Vdash_{n+1} \neg F_e(x)$.

(iii) Доказателството на $f \models_k F_e(x) \iff (\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash_k F_e(x))$ се провежда с индукция по дефиницията на моделиращата релация $\models_k$.

(а) Да разгледаме най-напред базовия случай $k = 0$. Нека f да бъде 1-генерична номерация на структурата $\mathfrak{A}$.

Нека $f \models_0 F_e(x)$. От дефиницията на моделиращата релация следва, че съществува v, каноничен код на крайно множество, за което $\langle v, x\rangle \in W_e$ & $D_v \subseteq f^{-1}(\mathfrak{A})$. D_v е крайно множество, следователно съществува крайна част $\tau \subseteq f$, за която $D_v \subseteq \tau^{-1}(\mathfrak{A})$. Тогава от дефиницията на форсинг релацията следва, че $\tau \Vdash_0 F_e(x)$. Следователно, $f \models_0 F_e(x) \Rightarrow (\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash_0 F_e(x))$.

За доказателството на обратната импликация, нека $(\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash_0 F_e(x))$. Тогава съществува код v и $\langle v, x\rangle \in W_e$ & $D_v \subseteq \tau^{-1}(\mathfrak{A})$. От $\tau \subseteq f$ следва, че $\tau^{-1}(\mathfrak{A}) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{A})$. Следователно, $\langle v, x\rangle \in W_e$ & $D_v \subseteq f^{-1}(\mathfrak{A})$, откъдето получаваме $f \models_0 F_e(x)$.

(б) Нека да допуснем, че твърдението е вярно за k, т.е. $f \models_k (\neg)F_e(x) \iff (\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash_k (\neg)F_e(x))$. Ще го докажем за $k+1$.

Първо ще докажем еквивалентността $f \models_{k+1} F_e(x) \iff (\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash_{k+1} F_e(x))$. В едната посока, нека $f \models_{k+1} F_e(x)$, т.е. съществува v, каноничен код на крайно множество, и $\langle v, x\rangle \in W_e$ & $(\forall u \in D_v)((u = \langle 0, e_u, x_u\rangle$ & $f \models_k F_{e_u}(x_u)) \vee (u = \langle 1, e_u, x_u\rangle$ & $f \models_k \neg F_{e_u}(x_u)))$. От индукционното предположение имаме, че съществуват крайни части $\tau_u \subseteq f$ & $\tau_u \Vdash_k F_{e_u}(x_u)$, ако $u = \langle 0, e_u, x_u\rangle$ и $\tau_u \subseteq f$ & $\tau_u \Vdash_k \neg F_{e_u}(x_u)$, ако $u = \langle 1, e_u, x_u\rangle$, за всяко $u \in D_v$. Нека $\delta = \bigcup_{u \in D_v} \tau_u$. δ е крайна част като крайно обединение на крайни части. δ е добре дефинирана и $\delta \subseteq f$, защото от $(\forall u \in D_v)(\tau_u \subseteq f)$ следва, че $(\forall u, l \in D_v)(\tau_u \subseteq \tau_l \vee \tau_u \supseteq \tau_l)$. От $(\forall u \in D_v)(\tau_u \subseteq \delta)$ и от монотонността на форсинг релацията имаме, че $\delta \Vdash_k F_{e_u}(x_u)$, ако $u = \langle 0, e_u, x_u\rangle$ и $\delta \Vdash_k \neg F_{e_u}(x_u)$, ако $u = \langle 1, e_u, x_u\rangle$. От дефиницията на форсинг релацията следва, че $\delta \Vdash_{k+1} F_e(x)$.

Нека сега $(\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash_{k+1} F_e(x))$. Тогава от дефиницията на форсинг релацията имаме, че съществува каноничен код v такъв, че $\langle v, x\rangle \in W_e$ & $(\forall u \in D_v)((u = \langle 0, e_u, x_u\rangle$ & $\tau \Vdash_k F_{e_u}(x_u)) \vee (u = \langle 1, e_u, x_u\rangle$ & $\tau \Vdash_k \neg F_{e_u}(x_u)))$. От индукционното предположение имаме, че $f \models_k F_{e_u}(x_u)$, ако $u = \langle 0, e_u, x_u\rangle$ и $f \models_k \neg F_{e_u}(x_u)$, ако $u = \langle 1, e_u, x_u\rangle$, за всяко $u \in D_v$. Тогава от дефиницията на моделиращата релация имаме, че $f \models_{k+1} F_e(x)$.

Нека за $i < k$ е вярно, че $f \models_i (\neg)F_e(x) \iff (\exists\tau \subseteq f)(\tau \Vdash_i (\neg)F_e(x))$ и за k е вярно, че $f \models_k F_e(x) \iff (\exists\tau \subseteq f)(\tau \Vdash_k F_e(x))$.

Остана да докажем, че $f \models_k \neg F_e(x) \iff (\exists\tau \subseteq f)(\tau \Vdash_k \neg F_e(x))$ за всяко $i \in \mathbb{N}$. Нека f е $(k+1)$-генерична номерация. Това означава, че съществува крайна част $\tau \subseteq f$ и $\tau \Vdash_k F_e(x)$ или $\tau \Vdash_k \neg F_e(x)$.

Нека $f \models_k \neg F_e(x)$ и да допуснем, че за всяка крайна част $\tau \subseteq f$, $\tau \Vdash_k F_e(x)$. Тогава от доказаното по-горе следва, че $f \models_k F_e(x)$, което е противоречие. Следователно, $\tau \Vdash_k \neg F_e(x)$.

Нека $\tau \subseteq f$ и $\tau \Vdash_k \neg F_e(x)$. Да допуснем, че $f \models_k F_e(x)$. Тогава съществува крайна част $\delta \subseteq f$ и $\delta \Vdash_k F_e(x)$. Имаме, че $\tau \subseteq f$ и $\delta \subseteq f$, следователно $\tau \subseteq \delta$ или $\delta \subseteq \tau$. Използвайки (ii) на лемата достигаме до противоречие и в двата случая. $\square$

Твърдение 4.1.1. *Нека g е изоморфизъм на структурата $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}, R_1^{'}, \ldots, R_n^{'})$ върху $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, R_1, \ldots, R_n)$ и γ е произволна крайна част. Тогава $\gamma \Vdash_k (\neg)F_e(x)$ за $\mathfrak{B}$, тогава и само тогава, когато $g \circ \gamma \Vdash_k (\neg)F_e(x)$ за $\mathfrak{A}$.*

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по k.

(а) Да разгледаме базовия случай, $\gamma \Vdash_0 F_e(x))$. От дефиницията на форсинг релацията знаем, че

$$\begin{aligned} \gamma \Vdash_0 F_e(x)) \quad &\iff \quad (\exists v)(\langle x, v\rangle \in W_e)(\forall u \in D_v) \\ &\qquad\quad (\exists i \leq n)(u = \langle i, \overline{y}\rangle \ \&\ \overline{y} \in \gamma^{-1}(R_i^{'})) \text{ за } \mathfrak{B} \\ &\iff \quad (\exists v)(\langle x, v\rangle \in W_e)(\forall u \in D_v) \\ &\qquad\quad (\exists i \leq n)(u = \langle i, \overline{y}\rangle \ \&\ \overline{y} \in \gamma^{-1} \circ g^{-1}(R_i)) \\ &\iff \quad g \circ \gamma \Vdash_0 F_e(x)) \text{ за } \mathfrak{A} \end{aligned}$$

Ясно е, че $\neg(\gamma \Vdash_0 F_e(x))$ за $\mathfrak{B} \iff \neg(g \circ \gamma \Vdash_0 F_e(x))$ за $\mathfrak{A}$

$$\begin{aligned} \gamma \Vdash_0 \neg F_e(x) \quad &\iff \quad (\forall\tau \supseteq \gamma)\neg(\tau \Vdash_0 F_e(x)) \text{ за } \mathfrak{B} \\ &\iff \quad (\forall\tau \supseteq \gamma)\neg(g \circ \tau \Vdash_0 F_e(x)) \text{ за } \mathfrak{A} \\ &\iff \quad (\forall\tau \supseteq g \circ \gamma)\neg(\tau \Vdash_0 F_e(x)) \text{ за } \mathfrak{A} \\ &\iff \quad g \circ \gamma \Vdash_0 \neg F_e(x) \text{ за } \mathfrak{A} \end{aligned}$$

(б) Да допуснем, че твърдението е вярно за k, т.е. $(\gamma \Vdash_k (\neg)F_e(x))$ за $\mathfrak{B} \iff (g \circ \gamma \Vdash_k (\neg)F_e(x))$ за $\mathfrak{A}$. Тогава,

$$\begin{array}{rcl}
\gamma \Vdash_{k+1} F_e(x)) \text{ за } \mathfrak{B} & \iff & (\exists v)((\langle x,v\rangle \in W_e)(\forall u \in D_v) \\
& & ((u = \langle 0, x_u, e_u\rangle \;\&\; \gamma \Vdash_k F_{e_u}(x_u))\vee \\
& & (u = \langle 1, x_u, e_u\rangle \;\&\; \gamma \Vdash_k \neg F_{e_u}(x_u))) \\
& \iff & (\exists v)((\langle x,v\rangle \in W_e)(\forall u \in D_v) \\
& & ((u = \langle 0, x_u, e_u\rangle \;\&\; g\circ\gamma \Vdash_k F_{e_u}(x_u))\vee \\
& & (u = \langle 1, x_u, e_u\rangle \;\&\; g\circ\gamma \Vdash_k \neg F_{e_u}(x_u))) \\
& \iff & g\circ\gamma \Vdash_{k+1} F_e(x) \text{ за } \mathfrak{A}
\end{array}$$

Така получаваме, че

$$(\forall k)((\gamma \Vdash_k (\neg)F_e(x)) \text{ за } \mathfrak{B} \iff (g\circ\gamma \Vdash_k (\neg)F_e(x)) \text{ за } \mathfrak{A}).$$

□

4.1.2 Форсинг определимост

Дефиниция 4.1.7. *Нека $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$. Редицата $\mathcal{A}$ е* форсинг определима *върху $\mathfrak{A}$, ако съществува крайна част δ и тотална изчислима функция g такава, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено, че $x \in A_n \iff (\exists\tau \supseteq \delta)(\tau \Vdash_n F_{g(n)}(x))$.*

Дефиниция 4.1.8. *Нека $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$. Редицата $\mathcal{A}$ е* форсинг k-определима *върху $\mathfrak{A}$, ако съществува крайна част δ и тотална изчислима функция g такава, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено, че $x \in A_n \iff (\exists\tau \supseteq \delta)(\tau \Vdash_{n+k} F_{g(n)}(x))$.*

Твърдение 4.1.2. *Нека $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}, R_1', \dots, R_n')$ е структура, изоморфна на $\mathfrak{A}$. Тогава всяка форсинг k-определима върху $\mathfrak{B}$ ω-редица е форсинг k-определима върху $\mathfrak{A}$.*

Доказателство. Нека да фиксираме рекурсивна функция $\lambda n.g(n)$, $k \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i<\omega}$, която е ω-редица форсинг k-определима върху $\mathfrak{B}$, т.е. съществува крайна част δ и

$$(\forall i \in \mathbb{N})(A_i = \{x : (\exists\tau \supseteq \delta)(\tau \Vdash_{k+i} F_{g(i)}(x)) \text{ за } \mathfrak{B}\}).$$

За произволно $i \in \mathbb{N}$ имаме, че $A_i = \{x : (\exists\tau \supseteq \delta)(\tau \Vdash_{k+i} F_{g(i)}(x)) \text{ за } \mathfrak{B}\}$. От предишното твърдение следва, че ако $\lambda n.h(n)$ е изоморфизъм на $\mathfrak{B}$ върху $\mathfrak{A}$, то $A_i = \{x : (\exists\tau \supseteq \delta)(h\circ\tau \Vdash_{k+i} F_{g(i)}(x)) \text{ за } \mathfrak{A}\}$. Тогава, $(\forall i \in \mathbb{N})(A_i = \{x : (\exists\tau \supseteq \kappa)(\tau \Vdash_{k+i} F_{g(i)}(x)) \text{ за } \mathfrak{A}\})$ за крайна част $\kappa = h\circ\tau$. □

Следващото твърдение е ключово в доказателството на форсинг определимостта за дадена редица. В [18] Соскова доказва аналогично твърдение за структура относно редица.

Твърдение 4.1.3. *Нека $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$ да бъде редица* **не** *форсинг определима върху $\mathfrak{A}$. Тогава съществува номерация f на $\mathfrak{A}$ такава, че $\mathcal{A} \not\leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A}) \uparrow \omega$.*

Доказателство. Ще конструираме номерацията f на стъпки. На всяка стъпка i ще конструираме крайни части $\delta_i \subseteq \delta_{i+1}$ и накрая ще образуваме $f = \bigcup_i \delta_i$. На стъпки $i = 3r$ ще осигурим условието f да бъде номерация на $\mathfrak{A}$, което според нашата дефиниция означава да бъде тотална функция и да бъде върху $\mathbb{N}$. На стъпки $i = 3r + 1$ ще осигурим f да бъде k-генерична за всяко $k > 0$ и на стъпки $i = 3r + 2$ ще осигурим условието $\mathcal{A} \not\leq_e f^{-1}(\mathfrak{A}) \uparrow \omega$. Нека $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ да бъде номерация на всички тотални изчислими функции. Да означим $X^n_{\langle e,x\rangle} = \{\rho \mid \rho \Vdash_n F_e(x)\}$. Нека $\delta_0 = \emptyset$. Да допуснем, че сме дефинирали δ_q.

(i) Ако $q = 3r$, нека x_0 да бъде най-малкото число, което не принадлежи на $Dom(\delta_q)$ и нека t_0 да бъде най-малкото естествено число, което не принадлежи на $Range(\delta_q)$. Да означим $\delta_{q+1} = \delta_q \cup \{\langle x_0, t_0\rangle\}$.

(ii) Случая $q = 3\langle e, n, x\rangle + 1$. Проверяваме дали има $\rho \in X^n_{\langle e,x\rangle}$ и $\delta_q \subseteq \rho$. Ако съществува такова ρ, то δ_{q+1} е равно на най-малкото разширение на δ_q, което принадлежи на $X^n_{\langle e,x\rangle}$, иначе нека $\delta_{q+1} = \delta_q$.

(iii) Случая $q = 3r + 2$. Да разгледаме функцията φ_r. За всяко n, означаваме

$$C_n = \{x \mid (\exists \tau \supseteq \delta_q)(\tau \Vdash_n F_{\varphi_r(n)}(x))\} \ .$$

Ясно е, че $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n<\omega}$ е форсинг определима редица върху $\mathfrak{A}$, следователно $\mathcal{C} \neq \mathcal{A}$. Нека да изберем n такова, че $C_n \neq A_n$. Нека $\langle x, n\rangle$ да бъде най-малката двойка, която удовлетворява условието

$$x \in C_n \ \& \ x \notin A_n \vee x \notin C_n \ \& \ x \in A_n \ .$$

Ако $x \in C_n$, тогава съществува крайна част τ, за която $\tau \supseteq \delta_q \ \& \ \tau \Vdash_n F_{\varphi_r(n)}(x)$. Нека да изберем δ_{q+1} да бъде равно на най-малкото такова τ.

Ако $x \notin C_n$, тогава $\delta_{q+1} = \delta_q$. В този случай имаме, че $\delta_{q+1} \Vdash_n \neg F_{\varphi_r(n)}(x)$.

Нека $f = \bigcup_n \delta_n$. Лесно се проверява, че f е номерация на $\mathfrak{A}$. Нека $k \in \mathbb{N}$. Ще докажем, че f е $(k+1)$-генерична. Да вземем $j \leq k$ и да разгледаме стъпката $q = 3\langle e, j, x\rangle$. На тази стъпка или сме намерили $\rho \supseteq \delta_q$, което $\rho \Vdash_j F_e(x)$, тогава $\delta_{q+1} \Vdash_j F_e(x)$. Ако няма такова ρ, от конструкцията следва, че $\delta_{q+1} \neg \Vdash_j F_e(x)$. Следователно, f е $(k+1)$-генерична.

Остана да докажем, че $\mathcal{A} \not\leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A}) \uparrow \omega$. Да допуснем, че $\mathcal{A} \leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A}) \uparrow \omega$. Тогава съществува изчислима функция φ_s и за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $A_n = \{x \mid f \models_n F_{\varphi_s(n)}(x)\}$.

От $(n+1)$-генеричността на f следва, че

$$f \models_n (\neg)F_{\varphi_s(n)}(x) \iff (\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash_n (\neg)F_{\varphi_s(n)}(x)) \ . \tag{4.1}$$

Да разгледаме стъпка $q = 3s+2$ и да дефинираме редицата $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n<\omega}$

$$C_n = \{x \mid (\exists \tau \supseteq \delta_q)(\tau \Vdash_n F_{\varphi_s(n)}(x))\} \ .$$

$\mathcal{C}$ е форсинг определима върху $\mathfrak{A}$ и следователно съществуват x и n, за които един от двата случая е изпълнен:

(i) $x \in C_n \ \& \ x \notin A_n$. Тогава от $x \in C_n$ следва, че $\delta_{q+1} \Vdash_n F_{\varphi_s(n)}(x)$. $\delta_{q+1} \subseteq f$ и получаваме, че $f \models_n F_{\varphi_s(n)}(x)$ откъдето следва $x \in A_n$. Така достигаме до противоречие.

(ii) Другата възможност е $x \notin C_n \ \& \ x \in A_n$. Това означава, че $(\delta_q \Vdash_n \neg F_{\varphi_s(n)}(x))$, т.е. $(\forall \delta \supseteq \delta_q)(\delta \nVdash_n F_{\varphi_s(n)}(x))$. Тогава от (4.1) следва, че $f \not\models_n F_{\varphi_s(n)}(x)$. Получаваме, че $x \notin A_n$, което е противоречие.

От всичко дотук следва, че допускането е невярно, т.е. $\mathcal{A} \not\leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A}) \uparrow \omega$. □

Следствие 4.1.3. *Нека $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_i, \ldots$ да бъде редица от елементи на $\mathcal{S}$ такива, че всяка $\mathcal{A}_i$ не е форсинг определима в $\mathfrak{A}$. Тогава съществува номерация f на $\mathfrak{A}$, за която $\mathcal{A}_i \not\leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A}) \uparrow \omega$ за всяко i.*

Доказателство. Доказателството е аналогично на Твърдение 4.1.3. Единствената разлика в конструкцията на номерацията f е на стъпки $q = \langle r, i\rangle + 2$. Тогава разглеждаме функцията g_r и осигуряваме условието $\mathcal{A}_i \neq \mathcal{C}$. □

Следствие 4.1.4. *За всяка редица $\mathcal{A}$, ако $d_\omega(\mathcal{A}) \in CS(\mathfrak{A})$, тогава $\mathcal{A}$ е форсинг определима върху $\mathfrak{A}$.*

Доказателство. Нека $\mathcal{A}$ е ω-редица и $d_\omega(\mathcal{A}) \in CS(\mathfrak{A})$ и да допуснем, че $\mathcal{A}$ не е форсинг определима върху $\mathfrak{A}$. Тогава от горното твърдение имаме, че съществува номерация f на $\mathfrak{A}$, за която $\mathcal{A} \not\leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A}) \uparrow \omega$. Но от дефиницията на ω-ко-спектър на структура следва, че $d_\omega(\mathcal{A}) \notin CS(\mathfrak{A})$, което е противоречие. □

Следствието директно се обобщава и за форсинг k-определими ω-редици.

Следствие 4.1.5. *За всяка редица $\mathcal{A}$, ако $d_\omega(\mathcal{A}) \in CS_k(\mathfrak{A})$, тогава $\mathcal{A}$ е форсинг k-определима върху $\mathfrak{A}$.*

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по k. Знаем, че то е вярно за $k = 0$. Да допуснем, че твърдението е вярно за $k = n$, т.е. ако $d_\omega(\mathcal{A}) \in CS_n(\mathfrak{A})$, то $\mathcal{A}$ е форсинг n-определима върху $\mathfrak{A}$. Ще го докажем за $k = n + 1$. Нека $d_\omega(\mathcal{A}) \in CS_{n+1}(\mathfrak{A})$. Да разгледаме редицата $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i<\omega}$, за която $B_0 = \emptyset$ и $B_{i+1} = A_i, i < \omega$. Знаем, че за всяка номерация f, съществува рекурсивна функция h и $A_i = W_{h(i)}(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n+1+i)})$. Знаем, че за всяко множество C, $\emptyset \leq_e C$. Нека a_0 е код на номерационен оператор, за която $\emptyset = W_{a_0}(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)})$ и да дефинираме рекурсивната функция $\lambda i.h'(i)$ по следния начин: $h'(0) = a_0$ и $h'(i + 1) = h(i)$. Тогава за всяка номерация f, съществува рекурсивна функция h', за която $B_i = W_{h'(i)}(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n+i)})$. Така получаваме, че $d_\omega(\mathcal{B}) \in CS_n(\mathfrak{A})$. Следователно можем да приложим индукционното предположение. Следователно има крайна част δ и тотална изчислима функция g, за които $B_i = \{x \mid (\exists\tau \supseteq \delta)(\tau \Vdash_{i+n} F_{g(i)}(x))\}$. Тогава $A_i = B_{i+1} = \{x \mid (\exists\tau \supseteq \delta)(\tau \Vdash_{i+n+1} F_{g(i+1)}(x))\}$. Нека да дефинираме тоталната изчислима функция $\lambda i.h(i) = \lambda i.g(i + 1)$. $A_i = \{x \mid (\exists\tau \supseteq \delta)(\tau \Vdash_{i+(n+1)} F_{h(i)}(x))\}$. Така получаваме, че $\mathcal{A}$ е форсинг $n + 1$-определима. □

4.1.3 Формална определимост

Дефиниция 4.1.9. *Нека $\mathcal{L} = \{T_1, \dots, T_s\}$ да бъде език от първи ред за структурата $\mathfrak{A}$.*

(i) Елементарна Σ_0^+ формула със свободни променливи измежду W_1, $\dots, W_r$ е екзистенциална формула от вида

$$\exists Y_1 \dots \exists Y_m \Phi(W_1, \dots, W_r, Y_1, \dots, Y_m) \ ,$$

където Φ е крайна конюнкция от атомарни формули от $\mathcal{L}$;

(ii) Σ_n^+ формула е рекурсивно номеруема дизюнкция от елементарни Σ_n^+ формули;

(iii) Елементарна Σ_{n+1}^+ формула е формула от вида

$$\exists Y_1 \dots \exists Y_m \Phi(W_1, \dots, W_r, Y_1, \dots, Y_m) \ ,$$

където Φ е крайна конюнкция от Σ_n^+ формули или отрицания на Σ_n^+ формули в $\mathcal{L}$.

Дефиниция 4.1.10. *Нека A е множество от естествени числа и $k \in \mathbb{N}$. Казваме, че $\mathfrak{A}$ е* k-формално определимо *върху $\mathfrak{A}$, ако съществува рекурсивна редица рекурсивна функция $\lambda x.\gamma(x)$, за която $\Phi^{\gamma(x)}$ е Σ_k^+ формула със свободни променливи измежду $W_1, \ldots, W_r$ и елементи $t_1, \ldots, t_r$ of $\mathbb{N}$ такива, че за всяко $x \in \mathbb{N}$, е изпълнено:*

$$x \in A \iff \mathfrak{A} \models \Phi^{\gamma(x)}(W_1/t_1, \ldots, W_r/t_r) \ .$$

Дефиниция 4.1.11. *Нека $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$ и $k \in \mathbb{N}$. Редицата $\mathcal{A}$ е* k-формално определима *върху $\mathfrak{A}$ ако съществува рекурсивна редица $\{\Phi^{\gamma(n,x)}\}_{n,x<\omega}$ от формули такива, че за всяко n, $\Phi^{\gamma(n,x)}$ е Σ_{n+k}^+ формула със свободни променливи измежду $W_1, \ldots, W_r$ и елементи $t_1, \ldots, t_r$ of $\mathbb{N}$ такива, че за всяко $x \in \mathbb{N}$, е изпълнено:*

$$x \in A_n \iff \mathfrak{A} \models \Phi^{\gamma(n,x)}(W_1/t_1, \ldots, W_r/t_r) \ .$$

Лема 4.1.6. *Нека Φ е Σ_n^+ формула. Можем ефективно по кода на формулата да намерим номерационен оператор W_{e_n}, за който за произволни естествени числа $\bar{t}$:*

$$\mathfrak{A} \models \Phi(\overline{W}/\bar{t}) \iff \langle \bar{t} \rangle \in W_{e_n}(\mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(n)}) \ .$$

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по n. Нека Φ е Σ_0^+ формула. Тя представлява рекурсивно номеруема дизюнкция от елементарни Σ_0^+ формули. Това означава, че съществува полуразрешимо множество W_{e_0}, за което $\ulcorner\alpha\urcorner \in W_{e_0} \iff \alpha(\overline{W})$ е дизюнкт в формулата $\Phi(\overline{W})$ и $\alpha(\overline{W})$ има вида $(\exists\overline{Y})(P_{l_1}(\overline{W},\overline{Y})\ \& \ldots \&\ P_{l_k}(\overline{W},\overline{Y}))$. Получаваме, че:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \Phi(\overline{W}/\bar{t}) \quad &\iff \quad \text{съществува елементарна } \Sigma_0^+ \text{ формула } \alpha : \\
&\qquad\ \ulcorner\alpha\urcorner \in W_{e_0}\ \&\ \mathfrak{A} \models \alpha(\overline{W}/\bar{t}) \\
&\iff \quad \text{съществува елементарна } \Sigma_0^+ \text{ формула } \alpha : \\
&\qquad\ \ulcorner\alpha\urcorner \in W_{e_0}\ \& \\
&\qquad\ \mathfrak{A} \models (\exists\overline{Y})(P_{l_1}(\overline{W}/\bar{t},\overline{Y})\ \&\ \ldots\ \&\ P_{l_k}(\overline{W}/\bar{t},\overline{Y})) \\
&\iff \quad \text{съществува формула } \alpha \text{ и естествени числа } \overline{u} : \\
&\qquad\ \ulcorner\alpha\urcorner \in W_{e_0}\ \& \\
&\qquad\ \mathfrak{A} \models P_{l_1}(\overline{W}/\bar{t},\overline{Y}/\overline{u})\ \&\ \ldots\ \&\ P_{l_k}(\overline{W}/\bar{t},\overline{Y}/\overline{u})
\end{aligned}$$

За опростяване на означенията, нека сме избрали такова кодиране, че $\langle l_i, \overline{x}\rangle \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) \iff \overline{x} \in P_{l_i}$. Така получаваме, че:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \Phi(\overline{W}/\bar{t}) \quad &\iff \quad \text{съществува } D_v = \{\langle l_1, \bar{t}, \overline{u}\rangle \ldots, \langle l_k, \bar{t}, \overline{u}\rangle\} : \\
&\qquad\ \ulcorner\alpha\urcorner \in W_{e_0}\ \&\ D_v \subseteq \mathcal{D}(\mathfrak{A}) \\
&\qquad\ (D_v \text{ ефективно определя } \alpha) \\
&\iff \quad \text{съществува } D_v = \{\langle l_1, \bar{t}, \overline{u}\rangle \ldots, \langle l_k, \bar{t}, \overline{u}\rangle\} : \\
&\qquad\ \langle v, \bar{t}\rangle \in W_{e_0'}\ \&\ D_v \subseteq \mathcal{D}(\mathfrak{A}), \\
&\qquad\ \text{кодът } e_0' \text{ ефективно се определя от } e_0 \\
&\iff \quad \langle t\rangle \in W_{e_0'}(\mathcal{D}(\mathfrak{A}))
\end{aligned}$$

Да допуснем, че за Σ_n^+ формула $\Phi(\overline{W},\bar{t})$, съществува полуразрешимо множество $W_{e'_n}$ такова, че

$$\mathfrak{A} \models \Phi(\overline{W}/\bar{t}) \iff \langle \bar{t} \rangle \in W_{e'_n}(\mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(n)}) \ .$$

Ще докажем твърдението за $n+1$.

Знаем, че $\mathfrak{A} \models \Phi(\overline{W}/\bar{t}) \iff$ съществува α : $\ulcorner\alpha\urcorner \in W_{e_{n+1}}$ & $\mathfrak{A} \models \alpha(\overline{W}/\bar{t})$, за α е елементарна Σ_{n+1}^+ формула и има вида

$$(\exists \overline{Y})((\neg)\beta_1(\overline{W}/\bar{t},\overline{Y}) \ \& \ldots \ \& \ (\neg)\beta_k(\overline{W}/\bar{t},\overline{Y})), \text{ където}$$

β_i са Σ_n^+ формули.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \Phi(\overline{W}/\bar{t}) \quad &\iff \quad \text{съществува елементарна } \Sigma_{e_{n+1}}^+ \text{ формула } \alpha : \\
& \quad \ulcorner\alpha\urcorner \in W_{e_{n+1}} \ \& \ \mathfrak{A} \models \alpha(\overline{W}/\bar{t}) \\
&\iff \quad \text{съществуват } \Sigma_n^+ \text{ формули } \beta_1,\ldots,\beta_k \text{ и } \overline{u} \in \mathbb{N} : \\
& \quad \ulcorner\alpha\urcorner \in W_{e_{n+1}} \ \& \ \mathfrak{A} \models (\neg)\beta_1(\overline{W}/\bar{t},\overline{Y}/\overline{u}) \& \ldots \& \\
& \quad \mathfrak{A} \models (\neg)\beta_k(\overline{W}/\bar{t},\overline{Y}/\overline{u})
\end{aligned}$$

Формулите $\beta_i(\overline{W},\overline{Y})$ са Σ_n^+ формули. От индукционното предположение следва, че за всяка формула β_i можем по нейния код ефективно да намерим код на номерационен оператор e_n^i и за произволни числа $\bar{t},\overline{u}$:

$$\mathfrak{A} \models \beta_i(\overline{W}/\bar{t},\overline{Y}/\overline{u}) \iff \langle \bar{t},\overline{u} \rangle \in W_{e_n^i}(\mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(n)}) \ .$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \Phi(\overline{W}/\bar{t}) \quad &\iff \quad \text{съществува } D_v = \{\langle l_1,\ulcorner\beta_1\urcorner,\bar{t},\overline{u}\rangle,\ldots, \\
& \quad \langle l_k,\ulcorner\beta_k\urcorner,\bar{t},\overline{u}\rangle\} \text{ и} \\
& \quad \ulcorner\alpha\urcorner \in W_{e_{n+1}} \text{ и за } i=1,\ldots,k : \\
& \quad \langle \bar{t},\overline{u}\rangle \in W_{e_n^i}(\mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(n)}), \text{ ако } l_i = 0 \text{ и} \\
& \quad \langle \bar{t},\overline{u}\rangle \notin W_{e_n^i}(\mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(n)}), \text{ ако } l_i = 1 \\
&\iff \quad (\exists v)(\langle \bar{t},v\rangle \in W_{e'_{n+1}} \ \& (\forall u \in D_v)(\\
& \quad (u = \langle 0,x_u,e_u\rangle \ \& \ x_u \in W_{e_u}(\mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(n)}))\vee \\
& \quad (u = \langle 1,x_u,e_u\rangle \ \& \ x_u \notin W_{e_u}(\mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(n)})))), \\
& \quad \text{кодът } e'_{n+1} \text{ ефективно се определя от } e_{n+1} \\
&\iff \quad \text{съществува полуразрешимо множество } W_{e''_{n+1}} \\
& \quad \text{и } (\exists v')(\langle \bar{t},v'\rangle \in W_{e''_{n+1}} \ \& \ D_{v'} \subseteq \mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(n+1)}) \\
& \quad \text{кодът } e''_{n+1} \text{ ефективно се определя от } e'_{n+1} \\
&\iff \quad \langle \bar{t}\rangle \in W_{e''_{n+1}}(\mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(n+1)})
\end{aligned}$$

□

Следствие 4.1.7. *Нека множеството $A = \{x \mid \mathfrak{A} \models \Phi^{\varphi_e(x)}(\overline{W}/\bar{t})\}$, φ_e е рекурсивна функция и $\bar{t}$ са естествени числа и за всяко x $\Phi^{\varphi_e(x)}$ е Σ_k^+ формула. Можем ефективно по кода e и по $\bar{t}$ да намерим номерационен оператор W_{e_k}, за който $x \in A \iff x \in W_{e_k}(\mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(k)})$.*

Доказателство. Да фиксираме x. Нека $\varphi_e(x) = e_x$. От Лема 4.1.6 следва, че $\mathfrak{A} \models \Phi^{e_x}(\overline{W}/\bar{t}) \iff \langle \bar{t} \rangle \in W_{a_x}(\mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(k)})$, като кода a_x се определя ефективно от e_x. Следователно функцията $\lambda x.f(x)$, дефинирана като $f(x) = a_x$, е рекурсивна. Така получаваме, че :

$$x \in A \iff \mathfrak{A} \models \Phi^{\varphi_e(x)}(\overline{W}/\bar{t}) \iff \langle \bar{t} \rangle \in W_{f(x)}(\mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(k)}) \ .$$

Можем ефективно да намерим полуразрешимо множество W_a, за което $\langle \bar{t} \rangle \in W_{f(x)} \iff \langle \bar{t}, x \rangle \in W_a$. Така получаваме, че :

$$x \in A \iff \langle \bar{t}, x \rangle \in W_a(\mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(k)}) \ .$$

Естествените числа $\bar{t}$ са предварително зададени, следователно можем ефективно да изберем код a_k, за който:

$$x \in A \iff x \in W_{a_k}(\mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(k)}) \ .$$

$\square$

Следствие 4.1.8. *Нека редицата $\mathcal{A}$ да бъде формално k-определима в структурата $\mathfrak{A}$. Тогава $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(k)}$.*

Доказателство. Нека $\mathcal{A}$ е формално k-определима редица за структурата $\mathfrak{A}$. Това означава, че съществуват естествени числа $\bar{t}$ и тотална изчислима функция $\lambda n, x.\gamma(n, x)$ такива, че за всяко $n \in \mathbb{N}$: $x \in A_n \iff \mathfrak{A} \models \Phi^{\gamma(n,x)}(\overline{W}/\bar{t})$, където $\Phi^{\gamma(n,x)}$ е Σ^+_{n+k} формула.

Нека най-напред да фиксираме $n \in \mathbb{N}$ и да разгледаме множеството A_n от $\mathcal{A}$. Имаме, че $x \in A_n \iff \mathfrak{A} \models \Phi^{\gamma_n(x)}(\overline{W}/\bar{t})$, където $\lambda x.\gamma_n(x) = \lambda x.\gamma(n, x)$ е рекурсивна функция и $\Phi^{\gamma_n(x)}(\overline{W})$ е Σ^+_{n+k} формула. От Следствие 4.1.7 следва, че $x \in A_n \iff \mathfrak{A} \models \Phi^{\gamma_n(x)}(\overline{W}/\bar{t}) \iff x \in W_{a_n}(\mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(n+k)})$ и кода a_n се определя ефективно от $\lambda x.\gamma_n(x)$.

За всяко n можем да намерим ефективно кода a_n. $\lambda x, n.\gamma(n, x)$ е рекурсивна функция, следователно можем да намерим ефективно рекурсивна функция h, за която за всяко естествено число n, да е изпълнено $h(n) = a_n$. Тогава $x \in A_n \iff x \in W_{h(n)}(\mathcal{D}(\mathfrak{A})^{(n+k)})$ и следователно $\mathcal{A}$ е формално k-определима редица от множества. $\square$

Твърдение 4.1.4. *Нека $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$ и нека $k \in \mathbb{N}$ и нека $\mathcal{A}$ да бъде формално k-определима в $\mathfrak{A}$. Тогава $\mathcal{A}$ е k-допустима във всички номерации на $\mathfrak{A}$.*

Доказателство. Нека $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, P_1, \ldots, P_k)$. $\mathcal{A}$ е k-формално определима, следователно съществуват изчислима функция $\lambda n, x.\gamma(n, x)$ и естествени числа $t_1, \ldots, t_l$, където формулата $\Phi^{\gamma(n,x)}$ е Σ^+_n формула. Да допуснем, че $\mathcal{A}$ не е k-допустима във всички номерации на $\mathfrak{A}$. Това означава, че съществува номерация g, за която $\mathcal{A} \not\leq_\omega g^{-1}(\mathfrak{A})^{(k)} \uparrow \omega$. Тогава от Твърдение 3.0.3 следва, че съществува биективна номерация f, която $f^{-1}(\mathfrak{A}) \leq_e g^{-1}(\mathfrak{A})$ и $\mathcal{A} \not\leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A})^{(k)} \uparrow \omega$.

Нека $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}, f^{-1}(P_1), \ldots, f^{-1}(P_k))$. Ясно е, че $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ и $f^{-1}(\mathfrak{A}) \equiv_e D(\mathfrak{B})$. Нека $f(t_i) = u_i$, за $i \leq l$. Тогава $\mathfrak{A} \models \Phi^{\gamma(n,x)}(\overline{W}/\overline{t}) \iff \mathfrak{B} \models \Phi^{\gamma(n,x)}(\overline{W}/\overline{u})$. Следователно $\mathcal{A}$ е формално k-определима в структурата $\mathfrak{B}$ и ако $(\forall n)(\forall x)(x \in A_n \iff \mathfrak{B} \models \Phi^{\gamma(n,x)}(\overline{W}/\overline{u}))$, то $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{D}(\mathfrak{B})^{(k)} \uparrow \omega$. Но ние знаем, че $\mathcal{D}(\mathfrak{B})^{(k)} \equiv_e f^{-1}(\mathfrak{A})^{(k)}$, откъдето $\mathcal{D}(\mathfrak{B})^{(k)} \uparrow \omega \equiv_\omega f^{-1}(\mathfrak{A})^{(k)} \uparrow \omega$ и $\mathcal{A} \leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A})^{(k)} \uparrow \omega$. Така достигаме до противоречие с допускането, че $\mathcal{A} \not\leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A})^{(k)} \uparrow \omega$. Следователно $\mathcal{A}$ е k-допустима редица във всички номерации. □

Лема 4.1.9 (Сосков[11])**.** *Нека $D = \{w_1, \ldots, w_k\}$ да бъде крайно и непразно множество от естествени числа, e, x да бъдат елементи на $\mathbb{N}$. Нека също и $k \in \mathbb{N}$. Съществува равномерен ефективен алгоритъм за построяване на Σ_k^+ формула $\Phi_{D,e,x}^k$ със свободни променливи измежду $W_1, \ldots, W_r$ такива, че за всяка крайна част δ, за която $dom(\delta) = D$, е изпълнена еквивалентността:*

$$\mathfrak{A} \models \Phi_{D,e,x}^k(W_1/\delta(w_1), \ldots, W_r/\delta(w_r)) \iff \delta \Vdash_k F_e(x) \ .$$

Нека $y_1 < y_2 < \cdots < y_k$ са елементите на крайно множество $\mathcal{D}$. Нека Q да бъде квантора $\forall$ или $\exists$ и нека Φ да бъде произволна формула. Тогава с $Q(y : y \in D)\Phi$ ще означаваме формулата $QY_1 \ldots QY_k\Phi$.

Теорема 4.1.10. *Нека k е произволно естествено число. Ако редицата $\mathcal{A}$ е форсинг k-определима върху $\mathfrak{A}$, то A е формално k-определима върху $\mathfrak{A}$.*

Доказателство. Нека редицата $\mathcal{A}$ е форсинг k-определима. Тогава съществуват крайна част δ и рекурсивна функция g такива , че за всяко естествено число x имаме, че

$$x \in A_n \iff (\exists \tau \supseteq \delta)(\tau \Vdash_{n+k} F_{g(n)}(x)) \ .$$

Нека $D = dom(\delta) = \{w_1, \ldots, w_r\}$ и $\delta(w_i) = t_i, i = 1, \ldots, r$.

Да фиксираме $n \in \mathbb{N}$. Ще разгледаме множеството A_n и нека $g(n) = a_n$. Имаме, че $x \in A_n \iff (\exists \tau \supseteq \delta)(\tau \Vdash_{n+k} F_{a_n}(x))$, т.е. множеството A_n е форсинг $(n+k)$-определимо. Като приложим предишната лема получаваме, че съществува рекурсивна функция h, за която

$$\Phi^{h(n+k,a_n,x,D)} = \exists(y \in D^*/D)\Phi_{D^*,a_n,x}^{n+k}(W_1/t_1, \ldots, W_r/t_r)$$

и $\mathfrak{A} \models \Phi^{h(n+k,a_n,x,D)}$ тогава и само тогава, когато съществува крайна част τ и $dom(\tau) = D^*, \tau \supseteq \delta$ и $\tau \Vdash_{n+k} F_{a_n}(x)$. За множеството A_n получаваме, че

$$x \in A_n \iff \mathfrak{A} \models \bigvee_{D^* \supseteq D} \exists (y \in D^*/D) \Phi^{n+k}_{D^*,a_n,x}(W_1/t_1, \ldots, W_r/t_r)$$

Нека $h_n(x) = h(n+k, a_n, x, D)$. Ясно е, че тя е рекурсивна функция и определя код на формулата :

$$\Phi^{h_n(x)} = \bigvee_{D^* \supseteq D} \exists (y \in D^*/D) \Phi^{n}_{D^*,a_n,x}(W_1/t_1, \ldots, W_r/t_r).$$

Нека да означим $\lambda x, n.f(x,n) = \lambda x.h_n(x)$. Така получаваме, че

$$\Phi^{f(x,n)} = \Phi^{h_n(x)} = \bigvee_{D^* \supseteq D} \exists (y \in D^*/D) \Phi^{n+k}_{D^*,a_n,x}(W_1, \ldots, W_r) \; .$$

Знаем, че a_n се определя от рекурсивната функция $\lambda n.g(n)$, следователно $\lambda x, n.f(x,n)$ е рекурсивна функция.

Така получаваме, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ и за всяко $x \in \mathbb{N}$,

$$x \in A_n \iff \mathfrak{A} \models \Phi^{f(x,n)}(\overline{W}/\bar{t}) \; .$$

□

Следствие 4.1.11. *Нека $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$ и нека $k \in \mathbb{N}$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:*

(i) $d_\omega(\mathcal{A}) \in \mathrm{CS}_k(\mathfrak{A})$*;*

(ii) $\mathcal{A}$ *е форсинг k-определима върху* $\mathfrak{A}$*.*

(iii) $\mathcal{A}$ *е формално k-определима върху* $\mathfrak{A}$*.*

(iv) $\mathcal{A}$ *е k-допустима във всички номерации на* $\mathfrak{A}$*.*

Доказателство. Импликацията $(i) \to (ii)$ следва от Следствие 4.1.5. Импликацията $(ii) \to (iii)$ следва от Теорема 4.1.10. Импликацията $(iii) \to (iv)$ следва от Твърдение 4.1.4. Импликацията $(iv) \to (i)$ следва от дефиницията на ω-ко-спектър. □

4.2 Релативен спектър на структура

В [19] А. Соскова релативизира понятието на Сосков за спектър, като разглежда многокомпонентен спектър, т.е. спектър на структура относно крайна редица от структури.

Дефиниция 4.2.1. *Номерацията f на $\mathfrak{A}$ е* **допустима** *относно $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, ако за всяко $k \leq n$,*

$$f^{-1}(\mathfrak{A}_k) \leq_{\mathrm{e}} f^{-1}(\mathfrak{A})^{(k)}.$$

Да означим класа от тези номерации с $\mathcal{E}_n(\mathfrak{A})$.

Дефиниция 4.2.2. *Релативен спектър на структурата $\mathfrak{A}$ относно структурите $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ е множеството*

$$RS(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \{d_e(f^{-1}(\mathfrak{A})) \mid f \in \mathcal{E}_n(\mathfrak{A})\}\ .$$

Дефиниция 4.2.3. *Релативен ко-спектър на структурата $\mathfrak{A}$ относно структурите $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ е множеството от номерационни степени*

$$CRS(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) = co_e(RS(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n))\ .$$

Дефиниция 4.2.4. *Нека $\mathcal{L} = \{T_1, \ldots, T_s\}$ да бъде език от първи ред за структурата $\mathfrak{A}$ и нека $\mathcal{L}_i$ да бъде езикът за структурата $\mathfrak{A}_i$ за $i \leq n$. Без ограничение на общността, можем да считаме, че езиците нямат общи предикатни символи.*

1. *Елементарна Σ_0^+ формула със свободни променливи измежду $W_1, \ldots, W_r$ е екзистенциална формула от вида*

   $$\exists Y_1 \ldots \exists Y_m \Phi(W_1, \ldots, W_r, Y_1, \ldots, Y_m)\ ,$$

   където Φ е крайна конюнкция от атомарни формули от $\mathcal{L}$;

2. *Σ_i^+ формула е рекурсивно номеруема дизюнкция от елементарни Σ_i^+ формули;*

3. *Елементарна Σ_{i+1}^+ формула е формула от вида*

   $$\exists Y_1 \ldots \exists Y_m \Phi(W_1, \ldots, W_r, Y_1, \ldots, Y_m)\ ,$$

   където Φ е крайна конюнкция от атоми в езика $\mathcal{L}_{i+1}$ и Σ_i^+ формули или отрицания на Σ_i^+ формули.

Нека да представим елементарната Σ^+_{i+1} формула Φ като $\Phi = (\phi \,\&\, \alpha)$, където ϕ е конюнкция от Σ^+_i или отрицания на Σ^+_i формули, а α е конюнкция от атоми в езика $\mathcal{L}_{i+1}$. Тогава :

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{i+1}) \models \Phi(\overline{W}/\bar{t}) \quad \iff \quad & (\exists \bar{s})((\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_i) \models \alpha(\overline{W}/\bar{t}, \overline{Y}/\bar{s}) \\ & \& \ (\mathfrak{A}_{i+1}) \models \alpha(\overline{W}/\bar{t}, \overline{Y}/\bar{s}))\end{aligned}$$

Дефиниция 4.2.5. *Нека $A \subseteq \mathbb{N}$ и $k \leq n$. A е* формално k-определимо *върху $\mathfrak{A}$ относно $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, ако съществува рекурсивна редица $\{\Phi^{\gamma(x)}\}_{x<\omega}$ от формули такива, че за всяко x, $\Phi^{\gamma(x)}$ е Σ^+_k формула със свободни променливи измежду $W_1, \ldots, W_r$ и елементи $t_1, \ldots, t_r$ of $\mathbb{N}$ такива, че за всяко $x \in \mathbb{N}$, е изпълнено:*

$$x \in A \iff (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) \models \Phi^{\gamma(x)}(W_1/t_1, \ldots, W_r/t_r) \ .$$

Дефиниция 4.2.6. *За произволни естествени числа $i < n, e$ и x, и за всяка крайна част τ, нека да дефинираме форсинг релациите $\tau \Vdash_i F_e(x)$ и $\tau \Vdash_i \neg F_e(x)$:*

$$\begin{aligned}
\tau \Vdash_0 F_e(x) \quad & \iff \quad (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W_e \ \& \ D_v \subseteq \tau^{-1}(\mathfrak{A})));\\
\tau \Vdash_{i+1} F_e(x) \quad & \iff \quad (\exists v)(\langle v, x\rangle \in W_e \ \& \ (\forall u \in D_v)(\\
& \qquad (u = \langle 0, e_u, x_u\rangle \ \& \ \tau \Vdash_i F_{e_u}(x_u)) \vee \\
& \qquad (u = \langle 1, e_u, x_u\rangle \ \& \ \tau \Vdash_i \neg F_{e_u}(x_u)) \vee \\
& \qquad (u = \langle 2, x_u\rangle \ \& \ x_u \in \tau^{-1}(\mathfrak{A}_i))));\\
\tau \Vdash_i \neg F_e(x) \quad & \iff \quad (\forall \rho \supseteq \tau)(\rho \nVdash_i F_e(x)) \ .
\end{aligned}$$

Дефиниция 4.2.7. *Нека $A \subseteq \mathbb{N}$ и $k \leq n$. Множеството A е* форсинг k-определимо върху $\mathfrak{A}$ *относно $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, ако съществува крайна част δ и код e такива, че : $x \in A \iff (\exists \tau \supseteq \delta)(\tau \Vdash_k F_e(x))$.*

Твърдение 4.2.1 (А. Соскова). *Нека $A \subseteq \mathbb{N}$ и $k \leq n$. Тогава следните условия са еквивалентни :*

(1) $d_e(A) \in CS_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$.

(2) A е форсинг k-определимо върху $\mathfrak{A}$ относно $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$.

(3) A е формално k-определимо върху $\mathfrak{A}$ относно $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$.

Други интересни свойства, които са разгледани в [19] са теорема за минималната двойка и за квази-минималната степен. Те ще бъдат по-подробно разгледани в техния вариант за ω-ко-спектър в Глава 5.

4.3 Спектър на структура относно ω-редица

Нека $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n<\omega}$ да бъде редица от естествени числа. Казваме, че номерацията f е *допустима относно* $\mathcal{B}$, ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено, че $f^{-1}(B_n) \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A})^n$ равномерно по n. Да означим с $\mathcal{E}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ класа на всички допустими номерации на структурата $\mathfrak{A}$ относно редицата $\mathcal{B}$.

Дефиниция 4.3.1. *ω-спектърът на структурата $\mathfrak{A}$ относно редицата $\mathcal{B}$ е множеството $DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) = \{d_e(f^{-1}(\mathfrak{A}) \mid f \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})\}$.*

Понятието за ω-спектър относно редица е обобщение на релативния ω-спектър, защото за произволен релативен спектър $\mathrm{RS}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n)$, можем да конструираме редица $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$, за която $\mathrm{RS}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n) = \mathrm{DS}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. Например, можем да дефинираме редицата $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ по следния начин : $B_0 = \emptyset$, $B_k = \mathcal{D}(\mathfrak{A}_k)$ за $0 < k \leq n$ и $B_k = \emptyset$ за всяко $k > n$.

Твърдение 4.3.1 (А. Соскова [18])**.** *Следните твърдения се запазват при ω-спектър относно редица.*

1. *ω-спектърът на структурата $\mathfrak{A}$ относно редица $\mathcal{B}$ е затворен нагоре относно тотални e-степени.*

2. *k-тия скок на ω-спектърът на структурата $\mathfrak{A}$ относно редицата $\mathcal{B}$ е затворен нагоре относно тотални e-степени.*

Дефиниция 4.3.2. *k-ти ω-ко-спектър на структурата $\mathfrak{A}$ относно редицата $\mathcal{B}$ наричаме $CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) = co(DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B}))$.*

Дефиницията на Σ_n^+ формула, за $n \in \mathbb{N}$, е аналогична на Дефиниция 4.2.4. Единствената разлика е, че на стъпка i въвеждаме само един предикат P_i, разпознаващ множеството B_i, а не предикатите от езика $\mathcal{L}_i$.

Дефиниция 4.3.3. *Нека $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$ и $k \in \mathbb{N}$. Редицата $\mathcal{A}$ е* формално $k-$ определима *върху $\mathfrak{A}$ относно $\mathcal{B}$, ако съществува рекурсивна редица $\{\Phi^{\gamma(n,x)}\}_{n,x<\omega}$ от формули такива, че за всяко n, $\Phi^{\gamma(n,x)}$ е Σ_{n+k}^+ формула със свободни променливи измежду $W_1, \dots, W_r$ и елементи $t_1, \dots, t_r$ of $\mathbb{N}$ такива, че за всяко $x \in \mathbb{N}$, е изпълнено:*

$$x \in A_n \iff (\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models \Phi^{\gamma(n,x)}(W_1/t_1, \dots, W_r/t_r) \ .$$

Дефиницията на форсинг релацията е аналогична на тази от Дефиниция 4.2.6. Различава се единствено при случая $u = \langle 2, x_u \rangle$. Тогава искаме да е изпълнено $x_u \in \tau^{-1}(B_n)$.

Дефиниция 4.3.4. *Нека $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$. Редицата $\mathcal{A}$ е* форсинг *k*-определима върху $\mathfrak{A}$ *относно редицата $\mathcal{B}$, ако съществува крайна част δ и тотална изчислима функция g такава, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено, че $x \in A_n \iff (\exists\tau \supseteq \delta)(\tau \Vdash_{n+k} F_{g(n)}(x))$.*

Имаме и аналогично твърдение за връзката между формална определимост, форсинг определимост на редици и ω-ко-спектрите.

Твърдение 4.3.2 (А. Соскова [18])**.** *Нека $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$ и $k \in \mathbb{N}$. Тогава следните условия са еквивалентни :*

(1) $d_\omega(\mathcal{A}) \in CS_k(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

(2) $\mathcal{A}$ е форсинг k-определима върху $\mathfrak{A}$ относно $\mathcal{B}$.

(3) $\mathcal{A}$ е формално k-определима върху $\mathfrak{A}$ относно $\mathcal{B}$.

В [18] са доказани теореми за минимална двойка и за квази-минимална степен. На тях ще обърнем по-голямо внимание в глава 5.

Глава 5

Свойства на ω-ко-спектрите

В тази глава ще разгледаме някои свойства на ω-спектрите и ω-ко-спектрите. Ще проверим кои от тях, доказани от Сосков[11] и А. Соскова[19] за спектри и ко-спектри в $\mathcal{D}_e$, могат да се пренесат в $\mathcal{D}_\omega$. Ще разгледаме и някои разширения на дефиницията за спектър на структура разгледани от А. Соскова в [18] и [19].

5.1 Ко-множества в $\mathcal{D}_e$ и $\mathcal{D}_\omega$

Твърдение 5.1.1. *Нека $\mathcal{A} \subseteq D_e$ е затворено нагоре множество. Нека $\mathcal{A}_t = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}\ \&\ \mathbf{a}$ е тотална степен$\}$. Тогава $co(\mathcal{A}) = co(\mathcal{A}_t)$.*

Доказателство. Нека $\mathbf{b}$ е произволна ω-степен, която $\mathbf{b} \in co(\mathcal{A}_t)$. Да допуснем, че $\mathbf{b} \notin co(\mathcal{A})$. Това означава, че съществува номерационна степен $\mathbf{c} \in \mathcal{A}$, за която $\mathbf{b} \not\leq_\omega \mathbf{c}$. От Теорема 2.2.1 следва, че съществува тотално множество A, за което $\mathbf{c} \leq_\omega d_\omega(A \uparrow \omega)$ и $\mathbf{b} \not\leq_\omega d_\omega(A \uparrow \omega)$. Нека $\mathbf{a} = d_\omega(A \uparrow \omega)$. От условието, че $\mathcal{A}$ е затворено нагоре множество следва, че $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$, откъдето получаваме, че $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_t$. Оттук, $\mathbf{b} \notin co(\mathcal{A}_t)$ и така достигаме до противоречие. Следователно, $co(\mathcal{A}_t) \subseteq co(\mathcal{A})$.

От дефиницията на $\mathcal{A}_t$ лесно се проверява, че $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}$. Тогава от свойствата на ω-ко-множеството получаваме, че $co(\mathcal{A}) \subseteq co(\mathcal{A}_t)$.

Така получаваме, че $co(\mathcal{A}) = co(\mathcal{A}_t)$. $\square$

Ако разглеждаме ко-множеството на дадено подмножество на $\mathcal{D}_e$, то следващото свойство е в сила, доказано от Сосков в [11].

Твърдение 5.1.2. *За произволно затворено нагоре множество $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_e$, за всяко естествено число $k > 0$ и номерационна степен $\mathbf{b}$ имаме, че $co_e(\mathcal{A}) = co_e(\mathcal{A}_{\mathbf{b},k})$, където:*

$$\mathcal{A}_{\mathbf{b},k} = \{\mathbf{a} : \mathbf{a} \in \mathcal{A}\ \&\ \mathbf{b} \leq_e \mathbf{a}^{(k)}\}.$$

Оказва се, че за ко-множеството в $\mathcal{D}_\omega$, това свойство не е в сила.

Твърдение 5.1.3. *За произволно множество $\mathcal{A} \subseteq D_e$ и всяко естествено число $k > 0$, съществува номерационна степен $\mathbf{b}$ такава, че $co(\mathcal{A}) \neq co(\mathcal{A}_{\mathbf{b},k})$, където:*

$$\mathcal{A}_{\mathbf{b},k} = \{\mathbf{a} : \mathbf{a} \in \mathcal{A} \ \& \ \mathbf{b} \leq_e \mathbf{a}^{(k)}\}.$$

Доказателство. От $\mathcal{A}_{\mathbf{b},k} \subseteq \mathcal{A}$ следва, че $co(\mathcal{A}) \subseteq co(\mathcal{A}_{\mathbf{b},k})$. Ще докажем, че включването е строго. Нека да разгледаме скучая за $k = 1$. Той лесно се обобщава за произволно k. Нека да изберем $d_e(A) \in \mathcal{A}$ и множество B така, че $B \not\leq_e A'$. Например, можем да построим B като A'-генерично множество. Нека $\mathbf{b} = d_e(B)$. Ясно е, че $co(\mathcal{A}) \subseteq co(\mathcal{A}_{\mathbf{b},1})$. За да докажем, че включването е строго, нека да разгледаме редицата $\mathcal{B} = \{\emptyset, B, B', \dots\}$. Ще докажем, че $d_\omega(\mathcal{B}) \notin co(\mathcal{A})$ и $d_\omega(\mathcal{B}) \in co(\mathcal{A}_{\mathbf{b},1})$.

Първо, да допуснем, че $d_\omega(\mathcal{B}) \in co(\mathcal{A})$. От $d_e(A) \in \mathcal{A}$ следва, че $d_\omega(\mathcal{B}) \leq_\omega d_\omega(A \uparrow \omega)$. Това означава, че $B_n \leq_e \mathcal{P}_n(A \uparrow \omega)$ равномерно по n. Оттук, $B_n \leq_e A^{(n)}$ равномерно по n. Но от $B_1 = B$ следва, че $B \leq_e A'$, което е противоречие с избора на B. Следователно, $d_\omega(\mathcal{B}) \notin co(\mathcal{A})$.

Сега да допуснем, че $d_\omega(\mathcal{B}) \notin co(\mathcal{A}_{\mathbf{b},1})$. Това означава, че имаме множество C, за което $d_e(C) \in \mathcal{A}$ и $B \leq_e C'$ и $\mathcal{B} \not\leq_\omega C \uparrow \omega$. От $B \leq_e C'$ следва, че $B \uparrow \omega \leq_\omega C' \uparrow \omega$. $\mathcal{B} = \{\emptyset, B', B'', \dots\}$ и $\emptyset \leq_e C$, следователно $\mathcal{B} \leq_\omega C \uparrow \omega$. Така достигаме до противоречие. Следователно, $d_\omega(\mathcal{B}) \in co(\mathcal{A}_{\mathbf{b},1})$.

От всичко дотук получаваме, че $co(\mathcal{A}) \neq co(\mathcal{A}_{\mathbf{b},1})$.

За произволно k, нека да изберем $B \not\leq_e A^{(k)}$ за множество $A \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{B} = \{\emptyset, \emptyset', \dots, \emptyset^{(k)}, B, B', \dots\}$. Тогава аналогично доказваме, че $d_\omega(\mathcal{B}) \notin co(\mathcal{A})$ и $d_\omega(\mathcal{B}) \in co(\mathcal{A}_{\mathbf{b},k})$. □

Твърдение 5.1.4 (Сосков [11])**.** *Нека $k > 0$ и $\mathbf{b} \in \mathbf{DS_k}(\mathfrak{A})$. Да означим $\mathcal{A} = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathbf{DS}(\mathfrak{A}) \ \& \ \mathbf{a^{(k)}} = \mathbf{b}\}$. Тогава за ко-спектъра в $\mathcal{D}_e$ е изпълнено, че $CS(\mathfrak{A}) = co_e(\mathcal{A})$.*

Също така Сосков показва, че то не е вярно за произволни затворени нагоре множества. Като използваме горното твърдение ще докажем, че то се нарушава в D_ω.

Твърдение 5.1.5. *Нека $k > 0$. Съществуват структура $\mathfrak{A}$ и номерационна степен $\mathbf{b} \in DS_k(\mathfrak{A})$ такива, че ω-ко-спектъра $CS(\mathfrak{A}) \subsetneqq co(\mathcal{A})$, където $\mathcal{A} = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in DS(\mathfrak{A}) \ \& \ a^{(k)} = \mathbf{b}\}$.*

Доказателство. Да фиксираме $k > 0$.

Ясно е, че за всяка структура $\mathfrak{A}$, $CS(\mathfrak{A}) \subseteq co(\mathcal{A})$. Ще докажем, че включването е строго. За тази цел ще намерим структура $\mathfrak{A}$ и ω-редица

$\mathcal{C}$, за която $d_\omega(\mathcal{C}) \in co(\mathcal{A})$ и $d_\omega(\mathcal{C}) \notin CS(\mathfrak{A})$. Това се оказва лесно. Да разгледаме спектъра на структура $\mathfrak{A}$, която няма k-ти скок степен. Например, знаем, че има такива линейни наредби. Да вземем за произволно множество B, за което $d_e(B) \in DS_k(\mathfrak{A})$. Да дефинираме

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \emptyset', \dots, \emptyset^{(k-1)}, B, B', \dots\} \ .$$

Първо ще покажем, че $d_\omega(\mathcal{C}) \notin CS(\mathfrak{A})$. Да допуснем, че противното. Тогава за всяка номерация f на $\mathfrak{A}$ имаме, че $C_n \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}$, равномерно по n. Но тогава за всяка номерация f на $\mathfrak{A}$ имаме, че $B \uparrow \omega \leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A})^{(k)} \uparrow \omega$. От свойствата на $\leq_\omega$ следва, че $B \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A})^{(k)}$. $d_e(B) \in DS_k(\mathfrak{A})$, което означава, че $d_e(B)$ е k-ти скок степен на $DS(\mathfrak{A})$, което е противоречие с избора на структура.

Остава да покажем, че $d_\omega(\mathcal{C}) \in co(\mathcal{A})$. Нека отново да допуснем противното. Това означава, че съществува номерация f на структурата $\mathfrak{A}$, за която $f^{-1}(\mathfrak{A})^{(k)} \equiv_e B$ и $\mathcal{C} \not\leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A}) \uparrow \omega$. От $f^{-1}(\mathfrak{A})^{(k)} \equiv_e B$ следва, че $\mathcal{C}^{(k)} \leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A})^{(k)} \uparrow \omega$. Ясно е, че $\emptyset^{(i)} \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A})^{(i)}$ за $i < k$. Тогава $\mathcal{C} \leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A}) \uparrow \omega$, което е противоречие.

И така, намерихме ω-редица, за която доказахме, че $d_\omega(\mathcal{C}) \notin CS(\mathfrak{A})$, но пък $d_\omega(\mathcal{C}) \in co(\mathcal{A})$. Следователно, $CS(\mathfrak{A}) \neq co(\mathcal{A})$. $\square$

5.2 Релативни ω-ко-спектри

В [19] А. Соскова доказва следното твърдение за релативни ко-спектри в $\mathcal{D}_e$:

Твърдение 5.2.1 (А. Соскова). *$CRS_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n) = CRS_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_k)$, $k \in \{0, \dots, n\}$.*

Интересно е да се провери дали това свойство се запазва, когато разглеждаме релативни ω-ко-спектри.

Очевидно е, че за всяка структура $\mathfrak{A}$ и редица $\mathcal{B}$, $DS(\mathfrak{A}) \supseteq DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. В [18] А. Соскова разглежда структурата $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, =, \neq, S)$, където $S = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Знаем, че имаме ефективна номерация f, следователно $f^{-1}(\mathfrak{A})$ е полуразрешимо множество и тогава $d_e(f^{-1}(\mathfrak{A})) = \mathbf{0}_e \in DS(\mathfrak{A})$.

Нека за произволна номерация f да фиксираме $f(x_0) = 0$. Тогава $k \in B_n \iff (\exists x_1, \dots, x_k)(f^{-1}(S)(x_0, x_1) \,\&\dots\&\, f^{-1}(S)(x_{k-1}, x_k) \in f^{-1}(B_n))$. Тогава $B_n \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A}) \oplus f^{-1}(B_n) \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}$.

Да изберем редицата $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ като $B_0 = \emptyset'$ и $B_k = \emptyset$ за $k > 0$. Тогава за всяка номерация $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ имаме, че $\emptyset' \leq_e B_0 \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A})$ и следователно $\mathbf{0}_e \notin DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. Така получаваме, че $DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \subsetneqq DS(\mathfrak{A})$.

Ние ще докажем малко по-силното твърдение за ω-ко-спектри. Достатъчно е да докажем, че равенството се нарушава за случая $k = 0, n = 1$.

Твърдение 5.2.2. *Съществуват структури $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ такива, че $CS(\mathfrak{A}) \neq CRS(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.*

Доказателство. В доказателството ще използваме наблюдението, че ако $\mathfrak{A}$ е произволна структура и $\mathfrak{B}$ структура със степен $\mathbf{b}$ за $DS(\mathfrak{B})$, то $RS(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \subseteq \mathcal{A}_{\mathbf{b},1} \subseteq DS(\mathfrak{A})$, където $\mathcal{A}_{\mathbf{b},1} = \{d_e(f^{-1}(\mathfrak{A})) \mid \mathbf{b} \leq_e d_e(f^{-1}(\mathfrak{A})')\}$. Ясно е, че тогава имаме $CS(\mathfrak{A}) \subseteq co(\mathcal{A}_{\mathbf{b},1}) \subseteq CRS(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Ще докажем, че имаме строгото включване $CS(\mathfrak{A}) \subsetneq co(\mathcal{A}_{\mathbf{b},\mathbf{1}})$ откъдето ще следва, че $CS(\mathfrak{A}) \subsetneq CRS(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Нека $\mathcal{A} = DS(\mathfrak{A})$. От Твърдение 5.1.3 следва, че съществува номерационна степен $\mathbf{b}$, за която $CS(\mathfrak{A}) = co(\mathcal{A}) \neq co(\mathcal{A}_{\mathbf{b},1})$. Да изберем такава структура $\mathfrak{B}$, която да има степен $\mathbf{b}$. Тогава получаваме, че $CS(\mathfrak{A}) \neq CS(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. □

Следствие 5.2.1. *Съществуват структура $\mathfrak{A}$ и ω-редица $\mathcal{B}$ такива, че $CS(\mathfrak{A}) \neq CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.*

Доказателство. Намираме структура $\mathfrak{B}$, за която $CS(\mathfrak{A}) \neq CS(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Нека да изберем ω-редицата $\mathcal{B} = \{D(\mathfrak{A}), D(\mathfrak{B}), \emptyset, \emptyset, \dots\}$. Тогава лесно се проверява, че $CS(\mathfrak{A}) \neq CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. □

5.3 Главни идеали в $\mathcal{D}_\omega$

Дефиниция 5.3.1. *Нека $\mathcal{M} = (M, \leq, \cup)$ е горна полурешетка. Казваме, че множеството $I \subseteq M$ е идеал за $\mathcal{M}$ тогава и само тогава когато:*

(i) Ако $x \in I$ и $y \leq x$, то $y \in I$;

(ii) Ако $x \in I$ и $y \in I$, то $x \cup y \in I$.

Това означава, че идеал е множество, което е затворено относно операцията точна горна граница и освен това е затворено надолу. Знаем, че $\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_e$ и $\mathcal{D}_\omega$ са горни полурешетки, затова е уместно да говорим за идеали в тези структури. Нека $A \subseteq M$.

С $\mathcal{I}(A)$ ще означаваме най-малкия идеал в M, който съдържа множеството $A : \mathcal{I}(A) = \bigcap\{I$ е идеал в M & $A \subseteq I\}$. Можем да запишем дефиницията и по следния начин:

$$\mathcal{I}(A) = \{\mathbf{x} \mid (\exists k \in \mathbb{N})(\mathbf{x} \leq \mathbf{a_1} \cup \dots \cup \mathbf{a_k} \ \& \ \mathbf{a_1}, \dots \mathbf{a_k} \in A\} \ .$$

Казваме, че един идеал I е изброим, ако $I = \mathcal{I}(A)$ за A изброимо множество. Казваме, че един идеал е главен, ако има най-голям елемент, или $\mathcal{I}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} : \mathbf{b} \leq \mathbf{a}\}$

Дефиниция 5.3.2. *Нека I да бъде идеал в $\mathcal{D}_\omega$ (съответно в $\mathcal{D}_e$ и $\mathcal{D}_T$) . Дефинираме скока на идеала I като най-малкият идеал в $\mathcal{D}_\omega$ (съответно в $\mathcal{D}_e$ и $\mathcal{D}_T$) съдържащ всички първи скокове на елементите от I. Означаваме го по следния начин:*

$$I' = \mathcal{I}(\{\mathbf{a}' : \mathbf{a} \in I\}).$$

Лесно се проверява, че ако I е главен идеал, генериран от степен $\mathbf{a}$, то $I' = \mathcal{I}(\mathbf{a}')$. В тази секция ще докажем, че на всеки главен идеал I в $\mathcal{D}_\omega$ съответства структура $\mathfrak{A}$ и редица $\mathcal{B}$ такива, че $I = CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Да разгледаме структурата $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, =, \neq, S)$, където S е графиката на рекурсивната функция $\sigma(x) \cong x+1$. Ще означаваме езика на структурата $\mathfrak{A}$ с $\mathcal{L}$. Нека $\mathcal{B} \in \mathbf{b}$ и $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i<\omega}$. Да дефинираме множествата Ще докажем, че $I(\mathbf{b}) = CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Лема 5.3.1. $I(\mathbf{b}) \subseteq CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$

Доказателство. Да изберем произволна допустима номерация f на $\mathfrak{A}$ относно $\mathcal{B}$. Да фиксираме число x_0 такова, че $f(x_0) = 0$. Тогава за всяко n е изпълнено:

$$x \in B_n \iff (\exists y_1) \dots (\exists y_x)(f^{-1}(S)(x_0, y_1) \ \& \ \dots$$
$$\& \ f^{-1}(S)(y_{x-1}, y_x) \ \& \ f^{-1}(B_n)(y_x)),$$

Следователно, $B_n \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A}) \oplus f^{-1}(B_n)$. Така получаваме, че

$$B_n \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A}) \oplus f^{-1}(B_n) \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A}) \oplus f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)} \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)},$$

защото f е допустима номерация (т.е. $f^{-1}(B_n) \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}$ равномерно по n). Оттук, $\mathcal{B} \leq_\omega f^{-1}(\mathfrak{A}) \uparrow \omega$ за произволна допустима номерация f на $\mathfrak{A}$. Следователно, $d_\omega(\mathcal{B}) \in CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. Така доказахме, че $I(\mathbf{b}) \subseteq CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. □

Лема 5.3.2. *Нека $\Phi(\overline{W})$ е Σ_n^+ формула. Можем ефективно по кода на формулата да намерим кода e на номерационния оператор, за който за произволни естествени числа $\overline{t}$:*

$$(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models \Phi(\overline{W}/\overline{t}) \iff \langle \overline{t} \rangle \in W_e(\mathcal{P}_n(\mathcal{B})) \ .$$

Доказателство.

Ще докажем твърдението с индукция по n.

Нека $\Phi(\overline{W})$ е Σ_0^+ формула. По кода на формулата можем ефективно да построим полуразрешимо множество W_{a_0}, за което $\ulcorner\alpha\urcorner \in W_{a_0} \iff \alpha$

е елементарна Σ_0^+ формула и е дизюнкт в Φ. Получаваме, че $(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models \Phi(\overline{W}/\overline{t}) \iff$ съществува $\ulcorner\alpha\urcorner \in W_{a_0}$ и $(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models \alpha(\overline{W}/\overline{t})$.

Нека да разгледаме формулата $\alpha(\overline{W}) = (\exists\overline{Y})M(\overline{W}, \overline{Y})$, като M е крайна конюнкция в езика $\mathcal{L} \cup \{B_0\}$. Нека $M = (L_1 \ \& \ldots \ \& \ L_p)$.

Като заменим атомарните предикати от вида $S(X, Y)$ с $X = \sigma(Y)$, можем да считаме, че предиката S не се среща във формулата. С $X = \sigma^{n+1}(Y)$ ще означаваме формулата :

$$(\exists Z_1, \ldots, Z_{n+1})(Z_1 = \sigma(Y) \ldots \ \& \ \ldots Z_{n+1} = \sigma(Z_n) \ \& \ Z_{n+1} = X) \ .$$

Ще разглеждаме тези $X = \sigma^{n+1}(Y)$, за които всичките им конюнкти са измежду $\{L_1, \ldots, L_p\}$. Описваме ефективна процедура, която приема като вход крайната редица $L_1, \ldots, L_p$ от атомите на Σ_0^+ формулата α и проверява дали $(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \not\models \alpha(\overline{W}/\overline{t})$ или извежда краен брой атоми $L'_1, \ldots, L'_s$ от вида $W_i = \sigma^n(X)$, $X \neq \sigma^k(Z)$ или $B_0(\sigma^n(X))$, като променливите X и Z са различни и могат да бъдат измежду $W_1, \ldots, W_r, Y_1, \ldots, Y_k$.

(1) Ако всички атоми са от желания вид, то прекратяваме процедурата. Ако има атом от вида $Z \neq Z$ или от вида $\sigma^{n_1}(Z) = \sigma^{n_2}(Z)$ и $n_1 \neq n_2$, то заключаваме, че $(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \not\models \alpha(\overline{W}/\overline{t})$ и преминаваме към стъпка (6).

Ако има атоми, които не са от желания вид, то продължаваме на следващата стъпка.

(2) Премахваме атомите от вида $\sigma^n(Z) = \sigma^n(Z)$. Ако има атом L от вида $\sigma^{n_1}(X) = \sigma^{n_2}(Z)$ и $X \notin \{W_1, \ldots, W_r\}$ и $X \neq Z$, то разглеждаме случаите :

(а) Ако $n_1 \leq n_2$, то премахваме L от списъка от атоми и заместваме във всички други атоми от списъка променливата X с $\sigma^{(n_2-n_1)}(Z)$ и отиваме на стъпка (1).

(б) Ако $n_1 > n_2$, то заместваме L с $\sigma^{n_2}(Z) = \sigma^{n_1}(X)$ и отиваме на стъпка (2).

Ако няма такива атоми, то продължаваме на следващата стъпка.

(3) Ако има атом L от вида $\sigma^{n_1}(W_i) = \sigma^{n_2}(Z)$ и $W_i \neq Z$, то разглеждаме случаите :

(а) Ако $n_1 \leq n_2$ и $n_1 > 0$ (за да не "зацикли" процедурата), то заместваме L от списъка с атоми с $W_i = \sigma^{(n_2-n_1)}(Z)$. Преминаваме към стъпка (1).

(б) Ако $n_1 > n_2$, то заместваме L от списъка с атоми с $\sigma^{n_2}(Z) = \sigma^{n_1}(W_i)$. Преминаваме към стъпка (2).

В противен случай, преминаваме на следващата стъпка.

(4) Да разгледаме първия атом L от вида $\sigma^{n_1}(X) \neq \sigma^{n_2}(Z)$, за който $n_1 \leq n_2$ и $n_1 > 0$ (за да не "зацикли" процедурата). Да разгледаме случаите:

(а) Ако X и Z са различни символи, тогава заместваме с $X \neq \sigma^{(n_2-n_1)}(Z)$. Преминаваме към стъпка (1).

(б) Ако $X = Z$ и $n_1 = n_2$, то заключаваме, че $(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \not\models \alpha(\overline{W}/\overline{t})$. Преминаваме към стъпка (6).

(в) Ако $X = Z$ и $n_1 \neq n_2$, то премахваме L от списъка с атоми.

(5) Да разгледаме първия атом L от вида $\sigma^{n_1}(X) \neq \sigma^{n_2}(Z)$, за който $n_1 > n_2$. Заместваме L с атома $\sigma^{n_2}(Z) \neq \sigma^{n_1}(X)$. Преминаваме към стъпка (4).

(6) Край на процедурата.

Нека да дефинираме следните множества :

$$\begin{aligned} E'_\alpha(\overline{t}) &= \{n + t_i \mid B_0(\sigma^n(W_i)) \in \{L'_1, \dots, L'_s\}\} \\ E''_\alpha(\overline{u}) &= \{n + u_j \mid B_0(\sigma^n(Y_j)) \in \{L'_1, \dots, L'_s\}\} \end{aligned}$$

Да означим с $\chi_\alpha(\overline{t}, \overline{u})$ рекурсивния предикат, който проверява верността на атомите от вида $W_i = \sigma^n(X)$ и $X \neq \sigma^k(Z)$ в $(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, които участват в $\alpha(\overline{W})$, при заместени променливите $\overline{W}$ с $\overline{t}$ и заместени променливите $\overline{Y}$, които са под действието на екзистенциалните квантори, с $\overline{u}$.

Получаваме, че :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models \Phi(\overline{W}/\overline{t}) \quad &\iff \quad \text{съществува } \ulcorner\alpha\urcorner \in W_{a_0} \text{ и } \overline{u} \in \mathbb{N} : \\ &\qquad\quad (\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models \alpha(\overline{W}/\overline{t}, \overline{Y}/\overline{u}) \\ &\iff \quad \text{съществува } \ulcorner\alpha\urcorner \in W_{a_0} \text{ и } \overline{u} \in \mathbb{N} : \\ &\qquad\quad \chi_\alpha(\overline{t}, \overline{u}) \ \&\ E'_\alpha(\overline{t}) \cup E''_\alpha(\overline{u}) \subseteq B_0 \\ &\iff \quad \text{съществува крайно множество} \\ &\qquad\quad E_\alpha = E'_\alpha(\overline{t}) \cup E''_\alpha(\overline{u}), \text{ за което} \\ &\qquad\quad \langle E_\alpha, \overline{t}\rangle \in W_e \ \&\ E_\alpha \subseteq B_0 \\ &\qquad\quad (\text{кодът } e \text{ ефективно се определя от } a_0 \text{ и } \chi_\alpha) \\ &\iff \quad \langle \overline{t} \rangle \in W_e(B_0) \end{aligned}$$

Да предположим, че твърдението е изпълнено за Σ_n^+ формули и да преминем към индукционната стъпка.

Нека $\Phi(\overline{W})$ е Σ^+_{n+1} формула. Тогава $(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models \Phi(\overline{W}/\overline{t}) \iff$ съществува $\ulcorner\alpha\urcorner \in W_{a_{n+1}}$ и $(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models \alpha(\overline{W}/\overline{t})$, където $W_{a_{n+1}}$ е полуразрешимо множество, което можем да определим ефективно от кода на формулата Φ.

Знаем, че $\alpha(\overline{W}) = (\exists\overline{Y})((\neg)\beta_1(\overline{W}, \overline{Y})\ \&\ (\neg)\beta_k(\overline{W}, \overline{Y}))$. Формулите β_i, за $i = 1, \ldots, k$ представляват Σ^+_n формули от вида $\Psi(\overline{W}, \overline{Y})$ или атоми от вида $B_{n+1}(W_i)$ или $B_{n+1}(Y_j)$. От индукционното предположение знаем, че $(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models \beta_i(\overline{W}/\overline{t}, \overline{Y}/\overline{u}) \iff \langle\overline{t}, \overline{u}\rangle \in W_{e_i}(\mathcal{P}_n(\mathcal{B}))$, където кода e_i се определя ефективно от Σ^+_n формулата β_i.

Можем да построим крайното множество $E_\alpha(\overline{t}, \overline{u}) = E'_\alpha(\overline{t}, \overline{u}) \oplus E''_\alpha(\overline{t}, \overline{u})$, където:

$$\begin{aligned}
E'_\alpha(\overline{t}, \overline{u}) &= \{2\langle e_i, \overline{t}, \overline{u}\rangle \mid \beta_i \in \{L_1, \ldots, L_p\}\} \cup \\
&\quad\ \{2\langle e_i, \overline{t}, \overline{u}\rangle + 1 \mid \neg\beta_i \in \{L_1, \ldots, L_p\}\} \\
E''_\alpha(\overline{t}, \overline{u}) &= \{t_i \mid B_{n+1}(W_i) \in \{L_1, \ldots, L_p\}\} \cup \\
&\quad\ \{u_j \mid B_{n+1}(Y_j) \in \{L_1, \ldots, L_p\}\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models \Phi(\overline{W}/\overline{t}) &\iff \text{съществува } \ulcorner\alpha\urcorner \in W_{a_{n+1}} \text{ и числа } \overline{u} \\
&\qquad (\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models (\neg)\beta_i(\overline{W}/\overline{t}, \overline{Y}/\overline{u}) \text{ за } i = 1, \ldots, k \\
&\iff \text{съществува } \ulcorner\alpha\urcorner \in W_{a_{n+1}} \text{ и числа } \overline{u} \text{ за които} \\
&\qquad E'_\alpha(\overline{t}, \overline{u}) \oplus E''_\alpha(\overline{t}, \overline{u}) \subseteq \mathcal{P}_n(\mathcal{B})' \oplus B_{n+1} \\
&\iff \text{съществува крайно множество} \\
&\qquad E_\alpha = E'_\alpha(\overline{t}, \overline{u}) \oplus E''_\alpha(\overline{t}, \overline{u}), \text{ за което} \\
&\qquad \langle E_\alpha, \overline{t}\rangle \in W_a \text{ и } E_\alpha \subseteq \mathcal{P}_n(\mathcal{B})' \oplus B_{n+1}, \\
&\qquad (\text{кодът } a \text{ се определя ефективно от } a_{n+1}) \\
&\iff \langle\overline{t}\rangle \in W_a(\mathcal{P}_{n+1}(\mathcal{B}))
\end{aligned}$$

□

Следствие 5.3.3. *Нека $A = \{x \mid (\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models \Phi^{\varphi_e(x)}(\overline{W}/\overline{t})\}$, φ_e е рекурсивна функция и $\overline{t}$ са естествени числа и за всяко x, $\Phi^{\varphi_e(x)}$ е Σ^+_k формула. Можем ефективно по кода e и по $\overline{t}$ да намерим номерационен оператор W_{e_k}, за който $x \in A \iff x \in W_{e_k}(\mathcal{P}_k(\mathcal{B}))$.*

Доказателство. Използваме идеята от доказателството на Следствие 4.1.7. От Лема 5.3.2 получаваме, че

$$x \in A \iff (\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models \Phi^{\varphi_e(x)}(\overline{W}/\overline{t}) \iff \langle t\rangle \in W_{g(x)}(\mathcal{P}_k(\mathcal{B})),$$

където $\lambda x.g(x)$ е рекурсивна функция, която можем да определим ефективно от $\lambda x.\varphi_e(x)$. Това означава, че можем да намерим код e_k ефективно по $\overline{t}$ и по кода e, за който :

$$x \in A \iff x \in W_{e_k}(\mathcal{P}_k(\mathcal{B}))\ .$$

□

Следствие 5.3.4. *Нека $\mathcal{A}$ е формално определима редица от множества в структурата $\mathfrak{A}$ относно редицата $\mathcal{B}$. Тогава $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}$.*

Доказателство. Използваме идеята от доказателството на Следствие 4.1.8.

Нека $\mathcal{A}$ е формално определима редица за структурата $\mathfrak{A}$ относно редицата $\mathcal{B}$. Това означава, че съществуват естествени числа $\bar{t}$ и тотална изчислима функция $\lambda n, x.\gamma(n,x)$ такива, че за всяко $n \in \mathbb{N}$: $x \in A_n \iff (\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models \Phi^{\gamma(n,x)}(\overline{W}/\bar{t})$, където $\Phi^{\gamma(n,x)}$ е Σ_n^+ формула. От Следствие 5.3.3 следва, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ имаме, че :

$$(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models \Phi^{\gamma(n,x)}(\overline{W}/\bar{t}) \iff x \in W_{a_n}(\mathcal{P}_n(\mathcal{B})),$$

където кодът a_n се определя ефективно от рекурсивната функция $\lambda x.\gamma(n,x)$. $\lambda n, x.\gamma(n,x)$ е рекурсивна функция, следователно можем ефективно да намерим рекурсивна функция $\lambda n.g(n)$, за която $g(n) = a_n$. Така получаваме, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено :

$$x \in A_n \iff x \in W_{g(n)}(\mathcal{P}_n(\mathcal{B})) \ .$$

$\square$

Лема 5.3.5. *$CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{I}(\mathbf{b})$.*

Доказателство. Нека за редицата $\mathcal{A}$ е изпълнено, че $d_\omega(\mathcal{A}) \in CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. Тогава $\mathcal{A}$ е формално определима редица. Прилагаме Следствие 5.3.4 и получаваме, че $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}$, откъдето следва, че $d_\omega(\mathcal{A}) \in \mathcal{I}(\mathbf{b})$. $\square$

Теорема 5.3.6. *За всеки главен идеал генериран от степен $\mathbf{b} \in D_\omega$ съществува ω-ко-спектър $CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ такъв, че $I(\mathbf{b}) = CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.*

Доказателство. Теоремата следва от Лема 5.3.1 и Лема 5.3.5. $\square$

5.4 Теорема за минималните двойки

Сосков [11] доказва следната теорема за минимални двойки за спектри от e-степени:

Теорема 5.4.1. *Нека $\mathfrak{A}$ е изброима структура. Съществуват елементи $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ от $\mathrm{DS}(\mathfrak{A})$ такива, че:*

$$\mathbf{a} \leq_{\mathrm{e}} \mathbf{f}^{(k)} \ \&\ \mathbf{a} \leq_{\mathrm{e}} \mathbf{g}^{(k)} \Rightarrow \mathbf{a} \in \mathrm{CS}_k(\mathfrak{A}) \text{ и за всяко } \mathbf{a} \in \mathcal{D}_{\mathrm{e}} \text{ и за всяко } k \in \mathbb{N}.$$

Ще докажем аналог на тази теорема за спектри от ω-степени.

Теорема 5.4.2. *За всяка изброима структура $\mathfrak{A}$ съществуват тотални номерационни степени $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ в $\mathrm{DS}(\mathfrak{A})$ такива, че за всяка ω-номерационна степен $\mathbf{a}$ и $k \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbf{a} \leq_e \mathbf{f}^{(k)} \ \&\ \mathbf{a} \leq_e \mathbf{g}^{(k)} \Rightarrow \mathbf{a} \in \mathrm{CS}_k(\mathfrak{A}) \ . \tag{5.1}$$

Доказателство. Първо ще построим тотални номерационни степени $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ в $\mathrm{DS}(\mathfrak{A})$, които удовлетворяват (5.1) за $k = 0$ и след това ще покажем, че $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ удовлетворяват (5.1) за всяко k.

Нека f да бъде номерация на $\mathfrak{A}$ такава, че $f^{-1}(\mathfrak{A})$ е тотално множество. От Твърдение 3.0.4 знаем, че можем да намерим такава номерация. Да означим $\mathcal{P}^f = \{f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}\}_{n<\omega}$ и $F = f^{-1}(\mathfrak{A})$. Ясно е, че $d_{\mathrm{e}}(F) \in \mathrm{DS}(\mathfrak{A})$.

Да означим с $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \dots \mathcal{X}_r \dots$ всички редици, които са ω-сводими към $\mathcal{P}^f$.

Да разгледаме тези редици $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_r \dots$ от $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \dots \mathcal{X}_r \dots$, които не са форсинг определими върху $\mathfrak{A}$. От Следствие 4.1.3 следва, че съществува номерация h такава, че $\mathcal{C}_r \not\leq_\omega \mathcal{P}^h$ за всяко r. Тогава от Следствие 2.2.2 следва, че съществува тотално множество G такова, че $\mathcal{P}^h \leq_\omega \{G^{(n)}\}_{n<\omega}$ и $\mathcal{C}_r \not\leq_\omega \{G^{(n)}\}_{n<\omega}$ за всяко r. От Твърдение 3.0.4 съществува номерация g на $\mathfrak{A}$ за която $g^{-1}(\mathfrak{A}) \equiv_{\mathrm{e}} G$. Тогава $d_{\mathrm{e}}(G) \in \mathrm{DS}(\mathfrak{A})$.

Сега нека да допуснем, че $\mathcal{A}$ е редица за която $\mathcal{A} \leq_\omega \{F^{(n)}\}_{n<\omega}$ и $\mathcal{A} \leq_\omega \{G^{(n)}\}_{n<\omega}$. Тогава $\mathcal{A} = \mathcal{X}_r$ за някое r. Ако предположим, че $\mathcal{A}$ не е форсинг определима върху $\mathfrak{A}$ тогава $\mathcal{A} = \mathcal{C}_l$ за някое l и $\mathcal{A} \not\leq_\omega \{G^{(n)}\}_{n<\omega}$. Така достигаме до противоречие. Следователно $\mathcal{A}$ е форсинг определима върху $\mathfrak{A}$ и от Твърдение 4.1.11 $d_\omega(\mathcal{A}) \in \mathrm{CS}(\mathfrak{A})$.

Ако положим $\mathbf{f} = d_{\mathrm{e}}(F)$ и $\mathbf{g} = d_{\mathrm{e}}(G)$ ние получаваме търсената минималната двойка.

За всяко $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_e$ да означим с $I(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \mid \mathbf{b} \in \mathcal{D}_\omega \ \&\ \mathbf{b} \leq_\omega \mathbf{a}\}$ главния идеал генериран от $\mathbf{a}$. Ние вече доказахме, че $I(\mathbf{f}) \cap I(\mathbf{g}) \subseteq \mathrm{CS}(\mathfrak{A})$. От $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathrm{DS}(\mathfrak{A})$ следва, че $I(\mathbf{f}) \cap I(\mathbf{g}) = \mathrm{CS}(\mathfrak{A})$. Остава да докажем, че

$$I(\mathbf{f}^{(k)}) \cap I(\mathbf{g}^{(k)}) = \mathrm{CS}_k(\mathfrak{A}) \text{ за всяко } k \ .$$

От $\mathbf{f}^{(k)}, \mathbf{g}^{(k)} \in \mathrm{DS}_k(\mathfrak{A})$ следва, че $\mathrm{CS}_k(\mathfrak{A}) \subseteq I(\mathbf{f}^{(k)}) \cap I(\mathbf{g}^{(k)})$. Да допуснем, че $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$, $\mathcal{A} \leq_\omega F^{(k)} \uparrow \omega$ и $\mathcal{A} \leq_\omega G^{(k)} \uparrow \omega$. Да означим с $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n<\omega}$ редицата, за която $C_n = \emptyset$ за $n \leq k$, и $C_{n+k} = A_n$ за всяко n. Ясно е, че $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{C}^{(k)}$ и $\mathcal{C} \leq_\omega \{F^{(n)}\}_{n<\omega}$, $\mathcal{C} \leq_\omega \{G^{(n)}\}_{n<\omega}$. Следователно, $d_\omega(\mathcal{C}) \in \mathrm{CS}(\mathfrak{A})$ и за произволна номерация h на $\mathfrak{A}$, $\mathcal{C} \leq_\omega \{h^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}\}_{n<\omega}$. $\mathcal{C}^{(k)} \leq_\omega \{h^{-1}(\mathfrak{A})^{(n+k)}\}_{n<\omega}$ и $\mathcal{A} \leq_\omega \{h^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}\}^{(k)}_{n<\omega}$. Оттук получаваме, че $d_\omega(\mathcal{A}) \in \mathrm{CS}_k(\mathfrak{A})$, защото h е произволна номерация на $\mathfrak{A}$. $\square$

Следствие 5.4.3. $\mathrm{CS}_k(\mathfrak{A})$ *е най-малкият идеал, който съдържа всички k-ти скокове на елементите от* $\mathrm{CS}(\mathfrak{A})$.

Доказателство. Ганчев [5] доказва, че ако номерационните степени $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ формиратg точна двойка за изброимия идеал I от ω-номерационни степени, т.е. $I = I(\mathbf{f}) \cap I(\mathbf{g})$, тогава за всяко k, двойката $\mathbf{f}^{(k)}$, $\mathbf{g}^{(k)}$ образува точна двойка за най-малкия идеал $I^{(k)}$, който съдържа всички k-ти скокове на елементите от I, т.е. $I^{(k)} = I(\mathbf{f}^{(k)}) \cap I(\mathbf{g}^{(k)})$. Нека $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ да бъде минималната двойка от Теорема 5.4.2. От факта, че $I = \mathrm{CS}(\mathfrak{A})$ е изброим идеал, $I \subseteq \mathcal{D}_\omega$ и $\mathrm{CS}(\mathfrak{A}) = I(\mathbf{f}) \cap I(\mathbf{g})$, тогава $I^{(k)} = I(\mathbf{f}^{(k)}) \cap I(\mathbf{g}^{(k)}) = \mathrm{CS}_k(\mathfrak{A})$ за всяко k. □

Обърнете внимание, че горното следствие не винаги е изпълнено в случая на идеал и спектри от $\mathcal{D}_e$. Ще покажем, че не е необходимо ако f и g е точна двойка за идеала I, то f' и g' да бъде точна двойка за първия скок на идеала I'. Така например, нека да вземем главния идеал $I(\mathbf{0}_e) = \{\mathbf{0}_e\}$. Можем да изберем точна двойка f и g за $I(\mathbf{0}_e)$ такава, че $\mathbf{0}_e'' \leq_e f'$ и $\mathbf{0}_e'' \leq_e g'$. Лесно се проверява, че ако I е главен идеал, генериран от $\mathbf{a}$, то $I' = I(\mathbf{a}')$. Тогава $I' = \mathcal{I}(\mathbf{0}_e')$ и очевидно f' и g' не е точна двойка за $I^{'}$. За да се убедим, че можем да изберем такава точна двойка, ще използваме Теорема 2.1.1:

И така, нека да разгледаме редицата $B_0 = \emptyset, B_1 = \emptyset''$ за $k = 1$. От Теорема 2.1.1 имаме, че съществуват тотални множества F и G такива, че

(i) $\emptyset <_e F \ \& \ \emptyset <_e G$ и $\emptyset^{''} <_e F^{'} \ \& \ \emptyset^{''} <_e G^{'}$.

(ii) $(\forall A \subseteq \mathbb{N})(A \leq_e F \ \& \ A \leq_e G \Rightarrow A \leq_e \emptyset)$ и $(\forall A \subseteq \mathbb{N})(A \leq_e F^{'} \ \& \ A \leq_e G^{'} \Rightarrow A \leq_e \emptyset^{''})$

Сега като изберем номерационните степени $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ такива, че $F \in \mathbf{f}$ и $G \in \mathbf{g}$ получаваме търсената точна двойка.

Теорема 5.4.4 (Сосков [11]). *За всеки изброим идеал в горната полурешетка на $\mathcal{D}_e$, съществува структура $\mathfrak{A}$, за която $I = CS(\mathfrak{A})$.*

Това твърдение се оказва твърде силно в случая за изброими идеали в D_ω. Ще дадем пример за изброим идеал в горната полурешетка на $\mathcal{D}_\omega$, за който няма равен на него ω-ко-спектър на структура.

Дефиниция 5.4.1. *Една степен $\mathbf{b}$ е n-тата точна горна граница за множество от степени $\mathcal{A}$, ако тя е най-малкият елемент на множеството:*

$$\{x^{(n)} : (\forall a \in \mathcal{A})(a \leq x)\}.$$

Според тази дефиниция, точна горна граница е 0-вата точна горна граница.

Теорема 5.4.5 (Ендертън и Пътнъм [7]). *$\emptyset^{(\omega)}$ е втората точна горна граница на множеството $\{\emptyset^{(n)}\}_{n<\omega}$ в структурата на тюринговите степени.*

Да разгледаме множеството $B = \{\mathbf{0}_\omega, \mathbf{0}'_\omega, \dots, \mathbf{0}^{(n)}_\omega, \dots\}$. Като следствие от горната теорема ще покажем, че идеалът генериран от B дава търсения контра-пример.

Следствие 5.4.6. *За изброимият идеал $I(B)$ не съществува структура $\mathfrak{A}$ такава, че $I(B) = CS(\mathfrak{A})$.*

Доказателство. Да допуснем, че съществува структура $\mathfrak{A}$, за която $\mathcal{I}(B) = CS(\mathfrak{A})$. От теоремата за минималните двойки, следва, че съществуват тотални степени $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{D}_1$ такива, че $\mathcal{I}(B) = CS(\mathfrak{A}) = \mathcal{I}(\mathbf{f}) \cap \mathcal{I}(\mathbf{g})$. Тогава от теоремата за минимални двойки знаем, че $I''(B) = CS_2(\mathfrak{A}) = \mathcal{I}(\mathbf{f}'') \cap \mathcal{I}(\mathbf{g}'')$. Следователно, за всяко $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{0}^{(k+2)}_\omega \leq_\omega \mathbf{f}'', \mathbf{g}''$. Тогава за всяко $k \in \mathbb{N}$, $\emptyset^{(k+2)} \leq_e F'', G''$, където $F \uparrow \omega \in \mathbf{f}$ и $G \uparrow \omega \in \mathbf{g}$. Можем да приложим Теорема 5.4.5, от която следва, че $\emptyset^{(\omega)} \leq_e F'', G''$ и $d_\omega(\emptyset^{(\omega)} \uparrow \omega) \leq_\omega \mathbf{f}'', \mathbf{g}''$.

Това означава, че $d_\omega(\emptyset^{(\omega)} \uparrow \omega) \in \mathcal{I}''(B)$, откъдето $d_\omega(\emptyset^{(\omega)} \uparrow \omega) \in CS_2(\mathfrak{A})$. Така получаваме, че $d_\omega(\{\emptyset, \emptyset, \emptyset^{(\omega)}, \emptyset, \dots\}) \in CS(\mathfrak{A}) = \mathcal{I}(B)$. Следователно, съществува k, за което $d_\omega(\{\emptyset, \emptyset, \emptyset^{(\omega)}, \emptyset, \dots\}) \leq_\omega \mathbf{0}^{(k)}_\omega$. Това означава, че $\emptyset^{(\omega)} \leq_e \emptyset^{(k+2)}$, което е противоречие. Така доказахме, че за идеала съставен от B не съществува ω-ко-спектър на структура, за който $\mathcal{I}(B) = CS(\mathfrak{A})$. $\square$

Следствие 5.4.7. *За изброимия идеал $I(B)$ не съществува структура $\mathfrak{A}$ и ω-редица $\mathcal{B}$ такива, че $I(B) = CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.*

Доказателство. В [18] Соскова доказва теоремата за минимална двойка за спектър на структура относно редица. Да допуснем, че $I(B) = CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. Съществуват степени $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{D}_1$, за които $I(B) = CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) = I(\mathbf{f}) \cap I(\mathbf{g})$ и $I''(B) = I(\mathbf{f}'') \cap I(\mathbf{g}'')$. Прилагаме аналогични разсъждения както в Следствие 5.4.6 и стигаме до противоречие. $\square$

5.5 Квази-минимални степни

Сосков [11] дава следна дефиниция :

Дефиниция 5.5.1. *Нека $\mathcal{A} \subseteq D_e$. Номерационната степен $\mathbf{q}$ наричаме квази-минимална относно $\mathcal{A}$, ако*

(1) $\mathbf{q} \notin \mathcal{A}$;

(2) Ако $\mathbf{a}$ *е тотална е-степен и* $\mathbf{a} \geq_e \mathbf{q}$*, то* $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$;

(3) Ако $\mathbf{a}$ *е тотална е-степен и* $\mathbf{a} \leq_e \mathbf{q}$*, то* $\mathbf{a} \in co(\mathcal{A})$.

Сосков [11] показва, че за всяка структура $\mathfrak{A}$ има квази-минимална степен $\mathbf{q}$ относно $\mathrm{DS}(\mathfrak{A})$, т.е. $\mathbf{q} \notin \mathrm{CS}(\mathfrak{A})$ и ако $\mathbf{a}$ е тотална e-степен и $\mathbf{a} \geq_\mathrm{e} \mathbf{q}$, тогава $\mathbf{a} \in \mathrm{DS}(\mathfrak{A})$ и ако $\mathbf{a}$ е тотална e-степен и $\mathbf{a} \leq_\mathrm{e} \mathbf{q}$, тогава $\mathbf{a} \in \mathrm{CS}(\mathfrak{A})$. Ние ще формулираме аналог на тази теорема за ω-степени.

Теорема 5.5.1 (Соскова [18])**.** *За всяка структура* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$*, съществува множество* $F \subseteq \mathbb{N}$ *такова, че за* $\mathbf{q} = d_\omega(F \uparrow \omega)$ *е изпълнено:*

(1) $\mathbf{q} \notin CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$;

(2) Ако $\mathbf{a}$ *е тотална е-степен и* $\mathbf{a} \geq_\omega \mathbf{q}$*, то* $\mathbf{a} \in DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$;

(3) Ако $\mathbf{a}$ *е тотална е-степен и* $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{q}$*, то* $\mathbf{a} \in CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Следствие 5.5.2. *За всяка структура* $\mathfrak{A}$*, съществува множество* $F \subseteq \mathbb{N}$ *такова, че за* $\mathbf{q} = d_\omega(F \uparrow \omega)$ *е изпълнено:*

(1) $\mathbf{q} \notin CS(\mathfrak{A})$;

(2) Ако $\mathbf{a}$ *е тотална е-степен и* $\mathbf{a} \geq_\omega \mathbf{q}$*, то* $\mathbf{a} \in DS(\mathfrak{A})$;

(3) Ако $\mathbf{a}$ *е тотална е-степен и* $\mathbf{a} \leq_\omega \mathbf{q}$*, то* $\mathbf{a} \in CS(\mathfrak{A})$.

Доказателство. Директно следствие от горната теорема, като използваме факта, че $DS(\mathfrak{A}, \emptyset_\omega) = DS(\mathfrak{A})$. □

5.6 Отворени въпроси

Ще завършим със списък с някои въпроси, които дават перспектива за бъдеща работа в тази област.

(i) Да се характеризират множествата от номерационни степени, които са спектри на структури. Знаем, че ако едно множество е спектър, то е затворено нагоре относно тотални степени, но не всяко затворено нагоре множество е спектър.

(ii) Сосков характеризира изброимите идеали в $\mathcal{D}_e$ като доказва че те съвпадат с ко-спектрите на структури. Знаем, че ако един идеал в $\mathcal{D}_\omega$ е равен на ω-ко-спектър на структура, то съществува точна двойка за него. Интересен е обратният въпрос, т.е. дали за всеки изброим идеал, за който има точна двойка съществува равен на него ω-ко-спектър на структура?

(iii) Ние доказахме, че за всеки главен идеал I в $\mathcal{D}_\omega$ съществува структура $\mathfrak{A}$ и редица $\mathcal{B}$, за които $I = CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. Естествено възниква въпросът дали за всеки главен идеал в I в $\mathcal{D}_\omega$ съществува структура $\mathfrak{A}$, за която $I = CS(\mathfrak{A})$.

(iv) Знаем, че има структури $\mathfrak{A}$ и редица $\mathcal{B}$, за които $DS(\mathfrak{A}) \neq DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, а също и че $CS(\mathfrak{A}) \neq CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$. Остава отворен въпросът дали за всяка структура $\mathfrak{A}$ и редица $\mathcal{B}$ съществува структура $\mathfrak{C}$, за която $DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) = DS(\mathfrak{C})$.

(v) В [12] Соскова и Сосков доказват теорема за обръщане на скока за спектри в $\mathcal{D}_T$. Интересен въпрос е дали тази теорема може да се обобщи за спектри в $\mathcal{D}_e$, т.е. дали за структури $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, за които $DS(\mathfrak{A}) \subseteq DS_1(\mathfrak{B})$ съществува структура $\mathfrak{C}$ и $DS(\mathfrak{C}) \subseteq DS(\mathfrak{B})$ и $DS_1(\mathfrak{C}) = DS(\mathfrak{A})$.

Библиография

[1] C. J. Ash, C. Jockush, and J. F. Knight, *Jumps of orderings*, Trans. Amer. Math. Soc. **319** (1990), 573–599.

[2] Ash, C. J. : Generalizations of enumeration reducibility using recursive infinitary propositional senetences. Ann. Pure Appl. Logic **58**, 173–184 (1992)

[3] R. G. Downey and J. F. Knight, *Orderings with α-th jump degree* $\mathbf{0}^{(\alpha)}$, Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), 545–552.

[4] Ganchev, H. : A jump inversion theorem for the infinite enumeration jump. Ann. Sofia Univ. (2005) to appear

[5] Ganchev, H. : Exact Pair Theorem for the ω- Enumeration Degrees In: Computation and Logic in the Real World (S. B. Cooper, B. Lowe, A. Sorbi eds) CiE 2007, Siena, LCNS 4497, 2007 316–324

[6] J. F. Knight, *Degrees coded in jumps of orderings*, J. Symbolic Logic **51** (1986), 1034–1042.

[7] Odifreddi, P. : Classical Recursion Theory, Studies in Logic and the Foundation of Mathematics vol. 125, Elsevier (1992)

[8] Richter, L. J. : Degrees of structures. J. Symbolic Logic **46**, 723–731 (1981)

[9] Rogers Jr. , H. : Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967

[10] Soskov, I. N. : A jump inversion theorem for the enumeration jump. Arch. Math. Logic **39**, 417–437 (2000)

[11] Soskov, I. N. : Degree spectra and co-spectra of structures. Ann. Sofia Univ. **96**, 45–68 (2004)

[12] Soskova, A. A., Soskov, I. N. A jump inversion theorem for the degree spectra, to appear in Journal of Logic and Computation

[13] Soskov, I. N., Baleva, V. : Ash's theorem for abstract structures. In: Proceedings of Logic Colloquium'02, Muenster, Germany, 2002 (Z. Chatzidakis; P. Koepke; W. Pohlers, eds.) Lect. Notes in Logic **27**, 327–341, Association for Symbolic Logic (2006)

[14] Soskov, I. N., Kovachev, B., : Uniform regular enumerations, Mathematical Structures in Comp. Sci. **16**, no. 5, 901–924 (2006)

[15] Soskov, I. N. : The ω-enumeration degrees, Journal of Logic and Computation, to appear.

[16] Soskov, I. N., Ganchev H. : The jump operator on the ω-enumeration degrees, Ann. Pure Appl. Logic, to appear.

[17] Soskova, A. A. : Relativized degree spectra. In: Logical Approaches to Computational barriers (A. Beckmann; U. Berger; B. Löwe; J. Tucker eds.), CiE2006, Swansea, Lecture Notes in Comp. Sci **3988**, 546–555, Springer-Verlag (2006)

[18] Soskova, A. A. : ω-degree spectra. In: Logic and Theory of Algorithms (A. Beckmann; C. Dimitracopoulos; B. Löwe; eds.), CiE2008, Lecture Notes in Comp. Sci **5028**, 544–553, Springer-Verlag (2008)

[19] Soskova, A. A. : Relativized degree spectra. In: J. Logic and Computation 17(6), 1215–1233, (2007)