Структури, допускащи максимална номерация

Дипломант: Стоян Тодоров Атанасов(Боев)
Научен ръководител: доцент, д-р Ангел Дичев
Ръководител катедра: доцент, дмн. Иван Сосков

Декември 2003

С благодарност на баба и дядо за това, което винаги са искали да бъда и на брат ми за това, което съм.

Съдържание

"Нещата, в които си абсолютно сигурен, никога не са верни. Това е фаталността на Вярата и поуката от Романса."

Оскар Уайлд

1 Въведение

Темата на настоящата дипломна работа е тясно свързана с един резултат на А.Дичев (изложен в [2]) според който в една тотална структура без предикати от допустимост следва изчислимост по Московакис. За целта е необходимо за всяка неизчислима по Московакис функция в структурата да бъде построена ефективна номерация, която я "опровергава" или, с други думи, неизчислимата функция да не е ефективна относно построената номерация. Но друга неизчислима по Московакис функция, може да се окаже ефективна относно тази номерация. Така въпросът, който си поставяме е дали съществува такава номерация, която да "опровергава" ако не всички неизчислими функции, то поне k-местните тотални такива. Тогава номерацията би била в известен смисъл "максимална"по отношение на неефективните относно нея k-местни функции.

Във втората част на дипломната работа са дадени всички необходими за целта дефиниции, както и известните връзки между тях, една от които беше спомената по-горе. Там са доказани и някои известни необходими помощни твърдения. В третата част вече формално е изложена дефиницията за k-максимална номерация и е доказано съществуването на 1-максимална номерация за определен вид структури. В общия случай въпросът остава отворен.

2 Основни понятия и връзки между тях

2.1 Изчислими функции в дадено множество.

Нека B е дадено множество от обекти и o е обект, който не принадлежи на B . Полагаме $B^o = B \cup \{o\}$ и определяме *Московакисово разширение* $B^\star$ като най-малкото множество, което съдържа B^o и е затворено относно дадена операция: $\langle .\,,.\rangle$ за образуване на наредени двойки, избрана така, че никой елемент на B^o не е наредена двойка. С други думи, множеството $B^\star$ изпълнява следните три условия:

1. Ако $a \in B^o$, то $a \in B^\star$;
2. Ako $a \in B^\star$ и $b \in B^\star$, то $\langle a, b\rangle \in B^\star$;
3. Ako $c \in B^\star$, то $c \in B^o$ или $\exists_{a,b \in B^\star}(c = \langle a, b\rangle)$;

Нека L и R са тотални изображения на $B^\star$ в $B^\star$ такива, че:

1. $L(o) = R(o) = o$;
2. Ако $a \in B$ то $L(a) = R(a) = \langle o, o\rangle$;
3. Ako $c \in B^\star$и $c = \langle a, b\rangle$, където $a, b \in B^\star$, то $L(c) = a$ и $R(c) = b$;

Нека $\mathcal{F}$ е множеството на едноместните частични изображения на $B^\star$ в $B^\star$. За всеки два елемента φ и ψ на $\mathcal{F}$ определяме операциите *композиция, съчетаване* и *итерация*, като:

1. ***(композиция)*** $\varphi \circ \psi(s) \cong \varphi(\psi(s))$, за $\forall s \in B^\star$;
2. ***(съчетаване)*** $\langle \varphi, \psi\rangle(s) \cong \langle \varphi(s), \psi(s)\rangle$, за $\forall s \in B^\star$;
3. ***(итерация)*** $[\varphi, \psi](s) \cong t$, точно тогава, когато съществува крайна редица $t_0, t_1, \ldots, t_m$ от елементи на $B^\star$, такава че :

$$t_0 = s, t_m = t, \forall_{i<m}(t_{i+1} = \varphi(t_i) \;\&\; \psi(t_i) \in B^\star \backslash B^o) \text{ и } \psi(t_m) \in B^o;$$

Дефиниция. Нека множеството $\{\psi_1, \ldots, \psi_l\} \subset \mathcal{F}$. Ще казваме, че елементът φ на $\mathcal{F}$ е ***просто изчислим относно*** $\boldsymbol{\{\psi_1, \ldots, \psi_l\}}$, ako φ може да бъде получен от $\psi_1, \ldots, \psi_l, R, L$ и тоталните константни функции $\hat{c}(c \in B^\star)$ с помощта на краен брой прилагания на операциите *композиция, съчетаване* и *итерация.*

Ако елементът φ на $\mathcal{F}$ е просто изчислим относно $\{\psi_1, \ldots, \psi_l\}$ ще казваме още, че φ е ***изчислим по Московакис относно*** $\boldsymbol{\{\psi_1, \ldots, \psi_l\}}$.

2.2 Ефективна номерация на структура. Структури допускащи *тотална ефективна номерация.*

Нека $\mathcal{D} = (B; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n; \Sigma_1, \ldots, \Sigma_k)$ е частична структура от релационен тип $\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle, \langle b_1, \ldots, b_k\rangle\rangle$, където:

1. B е най-много изброимо множество;
2. $\vartheta_i : B^{a_i} \multimap B, 1 \leq i \leq n$ са частични функции;
3. $\Sigma_j : B^{b_j} \multimap \{true, false\}, 1 \leq j \leq k$ са частични предикати;

Ако $\vartheta_i (1 \leq i \leq n)$ са тотални функции и $\Sigma_j (1 \leq j \leq k)$ са тотални предикати, то казваме, че структурата $\mathcal{D}$ е ***тотална***.

Дефиниция. Една наредена двойка $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$ се нарича ***номерация на структурата*** $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, ако $\mathcal{B} = (N; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ е частична структура от същия релационен тип като $\mathcal{D}$, а $\alpha : N \multimap B$ е сюрективна функция, и са изпълнени условията:

1. $Dom(\alpha)$ е затворено по отношение на частичните операции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$;
2. За произволни $x_1, \ldots, x_{a_i} \in Dom(\alpha)$, $1 \leq i \leq n$,
$$\alpha(\varphi_i(x_1, \ldots, x_{a_i})) \cong \vartheta_i(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_{a_i}));$$
3. За произволни $x_1, \ldots, x_{b_j} \in Dom(\alpha)$, $1 \leq j \leq k$,
$$\sigma_j(x_1, \ldots, x_{b_j}) \cong \Sigma_j(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_{b_j}));$$

Ако α е тотална сюрективна функция, то $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$ наричаме ***тотална номерация на структурата*** $\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

Дефиниция. Нека функцията $\varphi : B^k \multimap B$. Казваме, че φ е ***ефективна относно номерацията*** $\boldsymbol{\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle}$, ako $\exists k-$местна частично рекурсивна функция $f : N^k \multimap N$, такава че:

$\varphi(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_k)) \cong \alpha(f(x_1, \ldots, x_k))$ за произволни $x_1, \ldots, x_k \in Dom(\alpha)$.

Дефиниция. Нека множеството S е от частични функции дефинирани и приемащи стойности в B. Казваме, че S е ***ефективно относно номерацията*** $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mathcal{B}} \rangle$, ако всяка функция от множеството S е ефективна относно номерацията $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mathcal{B}} \rangle$.

Дефиниция. Една наредена двойка $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$ се нарича ***ефективна номерация на структурата*** $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, ако $\mathcal{B} = (N; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ е частична структура от същия релационен тип като $\mathcal{D}$, а $\alpha : N \multimap\!\!\rightarrow B$ е сюрективна функция, и са изпълнени условията:

1. $Dom(\alpha)$ е полуразрешимо множество затворено по отношение на частичните операции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$;

2. За произволни $x_1, \ldots, x_{a_i} \in Dom(\alpha)$, $1 \leq i \leq n$,

$$\alpha(\varphi_i(x_1, \ldots, x_{a_i})) \cong \vartheta_i(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_{a_i}));$$

3. За произволни $x_1, \ldots, x_{b_j} \in Dom(\alpha)$, $1 \leq j \leq k$,

$$\sigma_j(x_1, \ldots, x_{b_j}) \cong \Sigma_j(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_{b_j}));$$

4. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$ са частично рекурсивни;

Ако α е тотална сюрективна функция, то $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$ наричаме ***тотална ефективна номерация на структурата*** $\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

Забележка. *Така дефинираната ефективна номерация в [4] се нарича силно ефективна номерация, заради изискването $Dom(\alpha)$ да е полуразрешимо множество.*

Дефиниция. Казваме, че структурата $\mathcal{D}$ ***допуска ефективна номерация***, ако съществува ефективна номерация на структурата $\mathcal{D}$.

Теорема 1 *Ако структурата $\mathcal{D}$ допуска ефективна номерация $\langle\alpha,\mathcal{B}\rangle$, то тя допуска и тотална ефективна номерация $\langle\alpha^*,\mathcal{B}^*\rangle$.*

Доказателство. Нека структурата $\mathcal{D}$ допуска ефективна номерация $\langle\alpha,\mathcal{B}\rangle$. Тогава от факта, че $Dom(\alpha)$ е полуразрешимо и очевидно непразно множество следва, че съществува тотална рекурсивна функция f за която $Ran(f) = Dom(\alpha)$. Дефинираме тоталната сюрективна функция $\alpha^\star : N \to B$ и структурата $B^\star = (N; \varphi_1^\star, \dots, \varphi_n^\star; \sigma_1^\star, \dots, \sigma_k^\star)$ като:

- $\alpha^\star = \lambda x.\alpha(f(x))$;
- $\varphi_i^\star = \lambda x_1 \dots \lambda x_{a_i}.\mu_{z\in N}(f(z) \cong \varphi_i(f(x_1), \dots, f(x_{a_i})))$, за $i = 1, \dots, n$;
- $\sigma_i^\star = \lambda x_1 \dots \lambda x_{b_j}.\sigma_j(f(x_1), \dots, f(x_{b_j}))$, за $j = 1, \dots, k$;

Ще покажем, че $\langle\alpha^\star, B^\star\rangle$ е ефективна номерация на структурата $\mathcal{D}$. Наистина:

1. $Dom(\alpha^\star) \equiv N$ и в частност е полуразрешимо множество затворено по отношение на операциите $\varphi_1^\star, \dots, \varphi_n^\star$;
2. За произволни $x_1, \dots, x_{a_i} \in N$, $1 \le i \le n$,
   $\alpha^\star(\varphi_i^\star(x_1, \dots, x_{a_i})) \overset{\text{def}}{\cong} \alpha^\star(\mu_{z\in N}(f(z) \cong \varphi_i(f(x_1), \dots, f(x_{a_i})))) \cong$
   $\overset{\text{def}}{\cong} \alpha(\varphi_i(f(x_1), \dots, f(x_{a_i}))) \overset{\langle\alpha,\mathcal{B}\rangle}{\cong} \vartheta_i(\alpha(f(x_1)), \dots, \alpha(f(x_{a_i})))$
   $\overset{\text{def}}{\cong} \vartheta_i(\alpha^\star(x_1), \dots, \alpha^\star(x_{a_i}))$;
3. За произволни $x_1, \dots, x_{b_j} \in N$, $1 \le j \le k$,
   $\sigma_j^\star(x_1, \dots, x_{b_j}) \overset{\text{def}}{\cong} \sigma_j(f(x_1), \dots, f(x_{b_j})) \cong$
   $\overset{\langle\alpha,\mathcal{B}\rangle}{\cong} \Sigma_j(\alpha(f(x_1)), \dots, \alpha(f(x_{b_j}))) \overset{\text{def}}{\cong} \Sigma_j(\alpha^\star(x_1), \dots, \alpha^\star(x_{b_j}))$;
4. $\varphi_1^\star, \dots, \varphi_n^\star, \sigma_1^\star, \dots, \sigma_k^\star$ са частично рекурсивни, понеже функцията f е рекурсивна;

И тъй като $\alpha^\star$ е тотална сюрективна функция, то $\langle\alpha^\star, B^\star\rangle$ е тотална ефективна номерация на структурата $\mathcal{D}$. С това доказателството е завършено.

Теорема 2 *Ако структурата* $(B; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ *е тотална, то тя допуска тотална ефективна номерация* $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$.

Доказателство. Ще кодираме крайните редици от естествени числа с помощта на изчислимата функция на Гьодел $\beta : N^2 \to N$:

$$\langle p_1, \ldots, p_n \rangle = \mu p(\beta(p,0) = n \,\&\, \beta(p,1) = p_1 \,\&\ldots\&\, \beta(p,n) = p_n);$$

Конструкция

- Дефинираме изчислимите функции $\varphi_i : N^{a_i} \to N$, като:

  $$\varphi_i(p_1, \ldots, p_{a_i}) = \langle i-1, p_1, \ldots, p_{a_i} \rangle, \text{ за } i = 1, \ldots, n;$$

  и нека $N_0 = N \setminus (Range(\varphi_1) \cup \ldots \cup Range(\varphi_n))$, което очевидно е безкрайно разрешимо множество.

- Нека $\alpha^0 : N_0 \to B$ е произволна тотална сюрективна функция. Дефинираме изображението $\alpha : N \multimap B$ като:

  1. Ако $x \in N_0$, то $\alpha(x) = \alpha^0(x)$;
  2. Ако $x \in Range(\varphi_i)$ и $x = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{a_i})$, то $\alpha(x) \cong \vartheta_i(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_{a_i}))$;

Коректност

Дефинираме тоталното изображение $\boldsymbol{h : N \to N}$ като:

1. Ако $p \in N_0$, то $h(p) = 0$;
2. Ако $p \in Range(\varphi_i)$ и $p = \varphi_i(p_1, \ldots, p_{a_i})$ за някое $i \in N(1 \leq i \leq n)$, то $h(p) = h(p_1) + \ldots + h(p_{a_i}) + 1$;

Лема1 Изображението h е тотална функция.

Док. Ако p е произволно естествено число то имаме следните възможности:

- Ако $p \in N_0$, то по дефиниция еднозначно определяме $h(p) = 0$;
- Ако $p \notin N_0$, то от факта, че

$$\forall_{1 \leq i,j \leq n}(i \neq j \Rightarrow Range(\varphi_i) \cap Range(\varphi_j) = \emptyset)$$

$\Longrightarrow$ еднозначно определяме някое i, за което $p \in Range(\varphi_i)$, но

$$\forall_{1 \leq i \leq n}(\varphi_i \text{ е инективна функция})$$

$\Longrightarrow$ еднозначно определяме числата $p_1 \dots p_{a_i}$, за които $p = \varphi_i(p_1, \dots, p_{a_i})$
$\overset{\text{def}}{\Longrightarrow}$ еднозначно определяме $h(p) = h(p_1) + \dots + h(p_{a_i}) + 1$.

$\Longrightarrow$ h е еднозначно тотално изображение, което наричаме **височина**.

Лема2 Изображението α е тотална сюрективна функция.

Док. От *Лема1* получаваме, че всяко естествено число има еднозначно определена височина. Тогава с индукция по тази височина ще покажем, че α е тотална функция. Нека p е произволно естествено число.

- Ако $h(p) = 0$, то $p \in N_0$ и по дефиниция еднозначно определяме $\alpha(p) = \alpha^0(p)$.
- Ако $h(p) = m > 0$ и за всяко естествено число с височина по-малка от m изображението α е еднозначно определено, то ще покажем това и за p:
  От $h(p) > 0$, еднозначно определяме $i, p_1, \dots, p_{a_i} \in N, 1 \leq i \leq n$ такива, че:

  $$p \in Range(\varphi_i), p = \varphi_i(p_1, \dots, p_{a_i}) \text{ и } h(p) = h(p_1) + \dots + h(p_{a_i}) + 1$$

  Тогава $h(p_1) < m, \dots, h(p_{a_i}) < m$ и от И.П. еднозначно определяме $b_1, \dots, b_{a_i} \in B$ такива, че:

  $$\alpha(p_1) = b_1, \dots, \alpha(p_{a_i}) = b_{a_i}$$

Но ϑ_i е тотална функция и следователно съществува единствено $b \in B$ такова, че:

$$\vartheta_i(b_1, \ldots, b_{a_i}) = b$$

$\stackrel{\text{def}}{\Longrightarrow}$ еднозначно определяме $\alpha(p) = b$.

$\Longrightarrow \alpha$ е тотална функция.

Остава да отбележим, че α е и сюрективна функция като продължение на сюрективната функция α^0 , с което доказателството е завършено.

Лема3 Наредената двойка $\langle \alpha, \mathcal{B} = (N; \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \rangle$ е тотална ефективна номерация на структурата $(B; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$.

Док. От *Лема2* получаваме, че α е тотална сюрективна функция. Тогава:

1. $Dom(\alpha) \equiv N$ и в частност е полуразрешимо множество затворено по отношение на тоталните операции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$;

2. Нека $i : 1 \leq i \leq n$. Ако $x_1, \ldots, x_{a_i}$ са произволни естествени числа и $x = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{a_i}), \alpha(x_1) = s_1, \ldots, \alpha(x_{a_i}) = s_{a_i}$, и $\vartheta_i(s_1, \ldots, s_{a_i}) = t$, то по дефиниция $\alpha(x) = t$, т.е.

$$\alpha(\varphi_i(x_1, \ldots, x_{a_i})) = \vartheta_i(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_{a_i}));$$

3. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ са рекурсивни по дефиниция.

$\Longrightarrow \langle \alpha, \mathcal{B} = (N; \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \rangle$ е тотална ефективна номерация за структурата $(B; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ и ще я наричаме ***стандартна номерация*** за дадената тотална структура.

С това нашата конструкция е завършена, като трябва да обърнем внимание на факта, че $\alpha^0 : N_0 \to B$ беше произволно избрана тотална сюрективна функция, така че *всяка стандартна номерация може да подлежи на целесъобразно конкретизиране.*

2.3 Допустими функции в дадена структура. Връзки между понятията *изчислимост и допустимост.*

Дефиниция. Нека функцията $\varphi : B^k \multimap\!\!\rightarrow B$. Казваме, че φ е ***допустима в структурата*** $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, ako φ е ефективна относно всяка ефективна номерация $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mathcal{B}} \rangle$ на структурата $\mathcal{D}$.

Нека $s_1 \ldots, s_k$, $k \geq 1$ са произволни k елемента на $B^\star$. Определяме елемента $\langle s_1 \ldots, s_k \rangle$ на $B^\star$ като:

1. Ako $k = 1$, то $\langle s_1 \rangle = s_1$;
2. Ako $k > 1$, то $\langle s_1, \ldots, s_k \rangle = \langle \langle s_1, \ldots, s_{k-1} \rangle, s_k \rangle$;

Нека $B^\star_k = \{\langle s_1, \ldots, s_k \rangle \,|\, s_1 \in B \,\&\, \ldots \,\&\, s_k \in B\}$. Тогава на всяка k-местна частична функция $\varphi : B^k \multimap\!\!\rightarrow B$ ще съпоставим едноместната функция $\varphi^\star : B^\star_k \multimap\!\!\rightarrow B$ дефинирана като:

$$\varphi^\star(\langle s_1, \ldots, s_k \rangle) \cong \varphi(s_1, \ldots, s_k), \text{ за произволни } s_1, \ldots, s_k \in B$$

и понеже $B^\star_k \subset B^\star$, то $\varphi^\star : B^\star \multimap\!\!\rightarrow B^\star$.

Освен това за да не претрупваме означенията, ще казваме, че функцията $\varphi : B^k \multimap\!\!\rightarrow B$ е изчислима по Московакис относно дадено множество $\{\psi_1, \ldots, \psi_l\}$, когато $\varphi^\star$ е изчислима по Московакис относно $\{\psi^\star_1, \ldots, \psi^\star_l\}$.

Нека $\Sigma \subseteq B^\star$ и $\widehat{\Sigma} : B^\star \multimap\!\!\rightarrow B^\star$ е функцията удовлетворяваща следните две условия:

1. $Dom(\widehat{\Sigma}) = \Sigma$;
2. Ако $x \in \Sigma$ то $\widehat{\Sigma}(x) = o$;

Теорема 3 (А.Дичев) *Ако функцията* $\varphi : B^k \multimap\!\!\rightarrow B$ *е изчислима по Московакис относно* $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \widehat{\Sigma_1}, \ldots, \widehat{\Sigma_m}\}$, *то* φ *е допустима в структурата* $\mathcal{D} = (B; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n; \Sigma_1, \ldots, \Sigma_m)$.

Доказателство В работата [1].

Теорема 4 (А.Дичев) *Ако функцията $\varphi : B^k \multimap\!\!\rightarrow B$ е допустима в тоталната структура $\mathcal{D} = (B; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$, то φ е изчислима по Московакис относно $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$.*

Доказателство. Пълното доказателство на това твърдение е изложено в [2], но тук ще изложим поне идеята на доказателството, защото тя най-точно изразява техниката с т.нар. "стандартна номерация".

Първо построяваме неконкретизирана стандартна номерация $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$ на структурата $\mathcal{D}$. Нека φ е допустима в $\mathcal{D}$ и следователно φ е ефективна относно $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$. Тогава:

1. Ако допуснем, че φ не е тотална и не е никъде недефинираната функция, то чрез подходящо конкретизиране на α^0 достигаме до противоречие.

2. Ако допуснем, че φ е тотална и неизчислима по Московакис относно $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$ функция, то чрез подходящо конкретизиране на α^0 достигаме отново до противоречие.

Следователно φ е изчислима по Московакис относно $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$.

Следствие 1. Ако функцията φ не е изчислима по Московакис относно множеството $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$ от тотални функции, то съществува такава тотална ефективна номерация $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$ на структурата $\mathcal{D} = (B; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$, че φ не е ефективна относно $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$.

Следствие 2. За произволно, най-много изброимо множество Ω от k-местни тотални функции, неизчислими по Московакис относно множеството $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$ от тотални функции, съществува такава тотална ефективна номерация $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$ на структурата $\mathcal{D} = (B; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$, че никоя функция от Ω не е ефективна относно $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$.

Забележка. *Последното следствие не е директно, но се получава след тривиална модификация в конструкцията на α^0, на втория етап от доказателството на теоремата.*

3 Тотални структури допускащи максимални номерации

3.1 ***Максимална номерация*** на тотална структура

Нека $\mathcal{D} = (B; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ е тотална структура от релационен тип $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, където:

1. B е най-много изброимо множество;
2. $\vartheta_i : B^{a_i} \multimap\!\!\!\to B, 1 \leq i \leq n$ са тотални функции;

Ако $\mathcal{D}$ допуска тотална ефективна номерация $\langle \alpha, \mathcal{B} = (N; f_1, \ldots, f_n) \rangle$, то тогава да забележим, че ϑ_i $(1 \leq i \leq n)$ са ефективни относно тази номерация.

Определяме индуктивно множеството $\boldsymbol{SF}$ по следния начин:

1. $f_i \in SF$ за всяко $i = 1, \ldots, n$;
2. Ако $I_i^m : N^m \to N$ и $I_i^m(x_1, \ldots, x_m) = x_i$, за $i, m \in N, 1 \leq i \leq n$, то
$$I_i^m \in SF;$$
3. Ако $g : N^m \to N, g \in SF$ и $g_i : N^s \to N, g_i \in SF$ за $i = 1, \ldots, m$, и s-местната функция $g(g_1, \ldots, g_m) : N^s \to N$ е дефинирана като: $g(g_1, \ldots, g_m)(x_1, \ldots, x_s) = g(g_1(x_1, \ldots, x_s), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_s))$, то
$$g(g_1, \ldots, g_m) \in SF;$$

Или с други думи $SF = \{f | f$ е получена от суперпозиция на $\{f_1, \ldots, f_n\}\}$ и в частност SF се състои само от рекурсивни функции.

Аналогично индуктивно определяме множеството $\boldsymbol{S\Theta}$ като:

1. $\vartheta_i \in S\Theta$ за всяко $i = 1, \ldots, n$;
2. Ако $J_i^m : B^m \to B$ и $J_i^m(x_1, \ldots, x_m) = x_i$, за $i, m \in N$, $1 \leq i \leq m,$, то
$$J_i^m \in S\Theta;$$

3. Ако $\psi: B^m \to B$, $\psi \in S\Theta$ и $\psi_i: B^s \to B, \psi_i \in S\Theta$ за $i = 1, \dots, m$, и s-местната функция $\psi(\psi_1, \dots, \psi_m): B^s \to B$ е дефинирана като: $\psi(\psi_1, \dots, \psi_m)(x_1, \dots, x_s) = \psi(\psi_1(x_1, \dots, x_s), \dots, \psi_m(x_1, \dots, x_s))$, то

$$\psi(\psi_1, \dots, \psi_m) \in S\Theta$$

Или с други думи $S\Theta = \{\vartheta | \vartheta$ е получена от суперпозиция на $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}\}$.

Накрая дефинираме тоталното изображението $\boldsymbol{H : SF \to S\Theta}$ като:

1. $H(f_i) = \vartheta_i,$ за всяко $i = 1, \dots, n;$

2. $H(I_i^m) = J_i^m,$ където $i, m \in N,\ 1 \le i \le m;$

3. $H(f(g_1, \dots, g_m)) = H(f)(H(g_1), \dots, H(g_m));$

Лема4 При изображението H всяка k-местна функция от $S\Theta$ има k-местен първообраз от SF.

Док. Нека $\vartheta \in S\Theta$ и ще докажем верността на лемата с индукция по построението на ϑ:

- $\vartheta = \vartheta_i$ за някое $i \in N,\ 1 \le i \le n$, и тогава $H(f_i) = \vartheta_i = \vartheta;$

- $\vartheta = J_i^m$ за някои $i, m \in N,\ 1 \le i \le m$, и тогава $H(I_i^m) = J_i^m = \vartheta;$

- $\vartheta = \psi(\psi_1, \dots, \psi_m)$ където

  $$\psi: B^m \to B, \psi \in S\Theta \text{ и } \forall_{1 \le i \le m}(\psi_i: B^s \to B, \psi_i \in S\Theta),$$

  и тогава от И.П.

  1. $\exists_{g:N^m \to N}(g \in SF)(H(g) = \psi)$
  2. $\exists_{g_i:N^s \to N}(g_i \in SF)(H(g_i) = \psi_i),$ за $i = 1, \dots, m$

  $\Rightarrow H(g(g_1, \dots, g_m)) = H(g)(H(g_1), \dots, H(g_m)) = \psi(\psi_1, \dots, \psi_m) = \vartheta;$

С което лемата е доказана.

Лема5 За произволна функция $f\colon N^m \to N, f \in SF$ е изпълнено равенството
$$\alpha(f(x_1,\ldots,x_m)) = H(f)(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_m))$$
за произволни $x_1,\ldots,x_m \in N$.

Док. Ще извършим индукция по построението на f:

- Ако $f = f_i$ за някое $i \in N$, $1 \leq i \leq n$, то твърдението следва непосредствено от дефиницията за номерация.
- Ако $f = I_i^m$, за някои $i, m \in N$, $1 \leq i \leq m$, то $H(f)(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_m)) = \alpha(x_i) = \alpha(f(x_1,\ldots,x_m))$.
- Ako $f = g(g_1,\ldots,g_m)$, където
$$g\colon N^m \to N \ , g \in SF \text{ и } \forall_{i:1\leq i\leq m}(g_i\colon N^s \to N, g_i \in SF)$$
и за $g, g_1,\ldots,g_m$ твърдението в лемата е вярно, то
$\alpha(g(g_1(x_1,\ldots,x_s),\ldots,g_m(x_1,\ldots,x_s))) =$
$= H(g)(\alpha(g_1(x_1,\ldots,x_s)),\ldots,\alpha(g_m(x_1,\ldots,x_s))) =$
$= H(g)(H(g_1)(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_s)),\ldots,H(g_m)(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_s))) =$
$= H(g)(H(g_1),\ldots,H(g_m))(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_s)) =$
$= H(g(g_1,\ldots,g_m))(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_s)))$.

С което Лемата е доказана.

Теорема 5 *Множеството $S\Theta$ е ефективно относно номерацията $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$.*

Доказателство. Нека $\vartheta \in S\Theta$. От *Лема4* следва, че
$$\exists f(f \in SF)(\vartheta = H(f))$$
и тогава от *Лема5* получаваме:
$$\vartheta(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_k)) = H(f)(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_k)) = \alpha(f(x_1,\ldots,x_k)),$$
с което Теоремата е доказана.

Очевидно и всяка константна функция е ефективна относно номерацията $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$. Тогава можем да си зададем въпроса дали има тотални функции, които са ефективни относно дадена номерация, но не са константни и от множеството $S\Theta$, или по точно дали може такива да не съществуват? Тогава дадената номерация би била "максимална"по отношение на броя на неефективните относно нея функции.

Тук е мястото да обърнем внимание, че в доказателството на Теорема 4 (изложено в [2]) се показва дори нещо повече. А именно, че функцията φ е изчислима по Московакис относно множеството $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$ точно тогава когато е константна или е от $S\Theta$. Тогава формално въвеждаме термина "максимална номерация"по следния начин:

Дефиниция. Тоталната ефективна номерация $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$ на структурата $\mathcal{D} = (B; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ наричаме ***максимална номерация***, ако е в сила импликацията:

$$\forall \vartheta (\vartheta \text{ е тотална и ефективна относно } \langle \alpha, \mathcal{B} \rangle\ ) \Rightarrow$$

$$\vartheta \text{ е изчислима по Московакис относно множеството} \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}.$$

Дефиниция. Тоталната ефективна номерация $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$ на структурата $\mathcal{D} = (B; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ наричаме k***-максимална номерация***, ако е в сила импликацията:

$$\forall \vartheta (\vartheta : B^k \to B \text{ е тотална ефективна относно } \langle \alpha, \mathcal{B} \rangle\ ) \Rightarrow$$

$$\vartheta \text{ е изчислима по Московакис относно множеството} \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}.$$

От Следствие 2 на Теорема 5, обаче, изглежда по реално да изкажем предположение за съществуването на максимална номерация от втория вид, отколкото да наложим значително по силното изискване за максимална номерация.

Хипотеза *Ако B е най-много изброимо множество, то всяка тотална структура $\mathcal{D} = (B; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ допуска k-максимална номерация, за произволно $k \in N$.*

3.2 Основен резултат

Преди да пристъпим към конкретния резултат ще докажем следната лема:

Лема6 Нека $\{p_1, \ldots, p_k\}$ и $\{n_1, \ldots, n_k\}$, $k \geq 3$ са две редици от числа (може и безкрайни), първата от които няма повтарящи се членове. Тогава е в сила поне едно от условията:

1. $(p_1 = n_1, p_2 = n_2, p_3 = n_3, \ldots)$, т.е. редиците съвпадат;

2. $(n_1 = n_2 = n_3 = \ldots)$, т.е. втората редица няма различни членове;

3. $\exists_{i,j \in N}(i \neq j \;\&\; n_i \notin \{n_j, p_i, p_j\})$;

Док. Да допуснем, че нито едно от трите условия на Лемата не е изпълнено и тогава Б.О.О. $n_1 \neq p_1$. От отрицанието на третото условие следва, че $\forall_{i,j \in N}(i \neq j \;\Rightarrow\; n_i \in \{n_j, p_i, p_j\})$
$\Longrightarrow n_1 \in \{n_2, p_1, p_2\}$, $n_1 \in \{n_3, p_1, p_3\}, \ldots$
$\Longrightarrow n_1 \in \{n_2, p_2\}$, $n_1 \in \{n_3, p_3\}, \ldots$, но $\{p_1, p_2, \ldots\}$ са различни
$\Longrightarrow n_1$ се различава с най-много едно от числата $\{n_2, n_3, \ldots\}$, но второто условие не е в сила
$\Longrightarrow n_1$ се различава с точно едно от числата $\{n_2, n_3, \ldots\}$ и нека $n_1 \neq n_2$
$\Longrightarrow n_1 = n_3$, а от $n_1 \in \{n_2, p_2\} \Rightarrow n_1 = p_2$.
Освен това $p_1 \neq p_3 \Rightarrow n_2 \notin \{n_1, p_1\}$ или $n_2 \notin \{n_1, p_3\}$
$\Longrightarrow n_2 \notin \{n_1, p_2, p_1\}$ или $n_2 \notin \{n_3, p_2, p_3\}$
$\Longrightarrow$ противоречие, дължащо се на допускането.
С което Лемата е доказана.

Теорема 6 *Нека B е най-много изброимо множество и структурата $\mathcal{D} = (B; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ е от едноместни тотални функции. Тогава $\mathcal{D}$ допуска 1-максимална номерация.*

Доказателство.

Основни етапи

- Нека $g_1, g_2, \ldots$ са всички едноместни тотални рекурсивни функции.

- От доказателството на Теорема 3 знаем, че структурата $\mathcal{D}$ допуска така наречената "стандартна номерация" $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$, в която $\alpha \supset \alpha^0$ и $\alpha^0 : N_0 \rightarrow B$ беше произволно избрана тотална сюрективна функция, подлежаща на целесъобразно конкретизиране.

- Нека $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ и $N_0 = \{p_1, p_2, \ldots\}$. Ще построим последователност от непресичащи се помежду си непразни множества $A_1, A_2, \ldots$, такива, че $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = N_0$ и тогава ще дефинираме α^0 като: $\alpha^{0-1}(b_i) = A_i$ за $\forall i \in N$.

- Множествата $A_1, A_2, \ldots$ ще строим на стъпки, като на s-тата стъпка ще осигуряваме, че ако за някоя тотална функция $\varphi : B \rightarrow B$ е в сила равенството:
$$\varphi(\alpha(x)) = \alpha(g_s(x)),$$
то φ е изчислима по Московакис относно $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$.

Преди това обаче да обърнем внимание на следния факт:

$$\forall_{p \in N} \exists_{j \in N, f \in SF} (p = f(p_j)) \qquad (*)$$

Наистина с индукция по височината на естественото число p

- Ако $h(p) = 0$, то $p \in N_0 \Rightarrow p = p_j$ за някое $j \in N$ и тогава $p = I_1^1(p_j)$.

- Ако $h(p) = m > 0$ и за всяко естествено число с височина по-малка от m твърдението е в сила, то ще покажем това и за числото p. От $h(p) > 0$
$\Longrightarrow \exists_{i, p' \in N} (1 \leq i \leq n)(p \in Range(f_i), p = f_i(p'))$
$\Longrightarrow h(p') = h(p) - 1 < m$ и от И.П.
$\Longrightarrow \exists_{j \in N, f' \in SF} (p' = f'(p_j))$
$\Longrightarrow p = f_i(p') = f_i(f'(p_j)) = (f_i(f'))(p_j)$, където $(f_i(f')) \in SF$.

Нека означим с $A_{i,s}, i, s \in N$ множеството от елементи на N_0 поместени в A_i в началото на s-тата стъпка и с $DEF_s, s \in N$ множеството от елементи на N_0 поместени в някое A_i в началото на s-тата стъпка, т.е.:

$$A_i = \bigcup_{s=1}^{\infty} A_{i,s} \;\text{ и }\; DEF_s = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{i,s}$$

и съответно $NDEF_s = N_0 \setminus DEF_s$.

Конструкция

Нека на s-тата стъпка $DEF_s = \{s_1, s_2, \ldots .s_r\},\ NDEF_s = \{k_1, k_2, \ldots\}$ и $H : SF \to S\Theta$ е съответствието от **3.1**. Имайки в предвид споменатото по-горе твърдение (*), въвеждаме означенията:

- $g_s(s_i) = h'_i(t_i),$ където $h'_i \in SF$ и $t_i \in N_0,$ за $\forall_{i\in N}(1 \leq i \leq r);$
- $g_s(k_i) = h''_i(n_i)$ където $h''_i \in SF$ и $n_i \in N_0,$ за $\forall_{i\in N};$
- $H(h'_i) = \chi'_i,$ където $\chi'_i \in S\Theta,$ за $\forall_{i\in N}(1 \leq i \leq r);$
- $H(h''_i) = \chi''_i,$ където $\chi''_i \in S\Theta,$ за $\forall_{i\in N};$

Като вземем в предвид и **Теорема 5**, получаваме нагледно:

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
 & s_1, & s_2, & \ldots & s_r & k_1, & k_2, & \ldots \\
g_s\!: & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & g_s(s_1), & g_s(s_2), & \ldots & g_s(s_r) & g_s(k_1), & g_s(k_2), & \ldots \\
 & \| & \| & & \| & \| & \| & \\
 & h'_1(t_1), & h'_2(t_2), & \ldots & h'_r(t_r) & h''_1(n_1), & h''_2(n_2), & \ldots \\
\alpha\!: & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & \chi'_1(\alpha(t_1)), & \chi'_2(\alpha(t_2)), & \ldots, & \chi'_r(\alpha(t_r)) & \chi''_1(\alpha(n_1)), & \chi''_2(\alpha(n_2)), & \ldots
\end{array}$$

Ako освен това

- $\{n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots\} = \{n_i \,|\, i \in N \,\&\, n_i \in DEF_s\}$
- $\{n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots\} = \{n_i \,|\, i \in N \,\&\, n_i \notin DEF_s\},$

то ще разгледаме три основни случая:

1. Ако $\{n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots\}$ е празното множество, то:

1.1 Ако $\exists_{i \neq j \in N}(\chi''_i(\alpha(n_i)) \neq \chi''_j(\alpha(n_j)))$, то включваме k_i и k_j в $A_{1,s}$
$\Longrightarrow A_{1,s+1} = A_{1,s} \cup \{k_i, k_j\}$.
$\Longrightarrow DEF_{s+1} = DEF_s \cup \{k_i, k_j\}$.

1.2 Ако $\chi''_1(\alpha(n_1)) = \chi''_2(\alpha(n_2)) = \ldots = b \in B$, то определяме тези измежду множествата $A_{1,s}, A_{2,s}, \ldots$, които не са празни: $A_{r_1,s}, A_{r_2,s}, \ldots, A_{r_l,s}$, и включваме в тях съответно $k_1, k_2, \ldots, k_l$
$\Longrightarrow A_{r_1,s+1} = A_{r_1,s} \cup \{k_1\}, \ldots, A_{r_l,s+1} = A_{r_l,s} \cup \{k_l\}$.
$\Longrightarrow DEF_{s+1} = DEF_s \cup \{k_1, \ldots, k_l\}$.

2. Ако $\{n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots\}$ е крайно, непразно множество с l елемента, то:
включваме $\{k_{j_1}, k_{j_2}, \ldots k_{j_l}\}$ в $A_{1,s}$
$\Longrightarrow A_{1,s+1} = A_{1,s} \cup \{k_{j_1}, k_{j_2}, \ldots k_{j_l}\}$.
$\Longrightarrow DEF_{s+1} = DEF_s \cup \{k_{j_1}, k_{j_2}, \ldots k_{j_l}\}$.
Така достигаме до случай **1.** и извършваме същите действия.

3. Ако $\{n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots\}$ е безкрайно множество, то:

3.1 Ако $\neg(\chi''_{j_1} \equiv \chi''_{j_2} \equiv \ldots)$, то Б.О.О. нека $\chi''_{j_1} \not\equiv \chi''_{j_2}$
$\Longrightarrow \exists_{q \in N}(\chi''_{j_1}(b_q) \neq \chi''_{j_2}(b_q))$
и тогава включваме $n_{j_1}, n_{j_2}, k_{j_1}, k_{j_2}$ в $A_{q,s}$
$\Longrightarrow A_{q,s+1} = A_{q,s} \cup \{n_{j_1}, n_{j_2}, k_{j_1}, k_{j_2}\}$.
$\Longrightarrow DEF_{s+1} = DEF_s \cup \{n_{j_1}, n_{j_2}, k_{j_1}, k_{j_2}\}$.

3.2 Ако $(\chi''_{j_1} \equiv \chi''_{j_2} \equiv \ldots \equiv \chi)$,то:

3.2.1 Ако $\{n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots\}$ е празното множество, то:

3.2.1.1 Ако $\chi \not\equiv const \Rightarrow \exists_{q_1 \neq q_2 \in N}(\chi(b_{q_1}) \neq \chi(b_{q_2}))$

3.2.1.1.1 Ако $(n_{j_1} = k_{j_1} \,\&\, n_{j_2} = k_{j_2} \,\&\, \ldots)$, то определяме тези измежду множествата $A_{1,s}, A_{2,s}, \ldots$, които не са празни: $A_{r_1,s}, A_{r_2,s}, \ldots, A_{r_l,s}$, и включваме в тях съответно $k_1, k_2, \ldots, k_l$
$\Longrightarrow A_{r_1,s+1} = A_{r_1,s} \cup \{k_1\}, \ldots, A_{r_l,s+1} = A_{r_l,s} \cup \{k_l\}$.
$\Longrightarrow DEF_{s+1} = DEF_s \cup \{k_1, \ldots, k_l\}$.

3.2.1.1.2 Ако $\neg(n_{j_1} = k_{j_1} \;\&\; n_{j_2} = k_{j_2} \;\&\; \ldots)$, то понеже $\{n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots\}$ е безкрайно множество
$\Longrightarrow \neg(n_{j_1} = n_{j_2} = \ldots)$ и от *Лемаб* Б.О.О.
$\Longrightarrow n_{j_1} \notin \{n_{j_2}, k_{j_1}, k_{j_2}\}$
и включваме n_{j_1} в $A_{q_1,s}$, а $n_{j_2}, k_{j_1}, k_{j_2}$ в $A_{q_2,s}$
$\Longrightarrow A_{q_1,s+1} = A_{q_1,s} \cup \{n_{j_1}\}, A_{q_2,s+1} = A_{q_2,s} \cup \{n_{j_2}, k_{j_1}, k_{j_2}\}$.
$\Longrightarrow DEF_{s+1} = DEF_s \cup \{n_{j_1}, n_{j_2}, k_{j_1}, k_{j_2}\}$.

3.2.1.2 Ако $\chi \equiv const$, то аналогично на по-горе определяме тези измежду множествата $A_{1,s}, A_{2,s}, \ldots$, които не са празни: $A_{r_1,s}, A_{r_2,s}, \ldots, A_{r_l,s}$, и включваме в тях съответно $k_1, k_2, \ldots, k_l$
$\Longrightarrow A_{r_1,s+1} = A_{r_1,s} \cup \{k_1\}, \ldots, A_{r_l,s+1} = A_{r_l,s} \cup \{k_l\}$.
$\Longrightarrow DEF_{s+1} = DEF_s \cup \{k_1, \ldots, k_l\}$.

3.2.2 Ако $\{n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots\} \neq \emptyset$, то:

3.2.2.1 Ако $\neg(\chi''_{i_1}(\alpha(n_{i_1})) = \chi''_{i_2}(\alpha(n_{i_2})) = \ldots)$, то Б.О.О. нека $\chi''_{i_1}(\alpha(n_{i_1})) \neq \chi''_{i_2}(\alpha(n_{i_2}))$ и тогава включваме k_{i_1} и k_{i_2} в $A_{1,s}$
$\Longrightarrow A_{1,s+1} = A_{1,s} \cup \{k_{i_1}, k_{i_2}\}$.
$\Longrightarrow DEF_{s+1} = DEF_s \cup \{k_{i_1}, k_{i_2}\}$.

3.2.2.2 Ако $\chi''_{i_1}(\alpha(n_{i_1})) = \chi''_{i_2}(\alpha(n_{i_2})) = \ldots = b \in B$, то:

3.2.2.2.1 Ако $\chi \not\equiv const$
$\Rightarrow \exists_{q_1 \neq q_2 \in N}(\chi(b_{q_1}) \neq \chi(b_{q_2})) \;\&\; \exists_{q \in N}(\chi(b_q) \neq b)$

3.2.2.2.1.1 Ако $(n_{j_1} = k_{j_1} \& n_{j_2} = k_{j_2} \& \ldots)$, то включваме k_{i_1} и k_{j_1} в $A_{q,s}$
$\Longrightarrow A_{q,s+1} = A_{q,s} \cup \{k_{i_1}, k_{j_1}\}$.
$\Longrightarrow DEF_{s+1} = DEF_s \cup \{k_{i_1}, k_{j_1}\}$.

3.2.2.2.1.2 Ако $\neg(n_{j_1} = k_{j_1} \;\&\; n_{j_2} = k_{j_2} \;\&\; \ldots)$, то понеже $\{n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots\}$ е безкрайно множество
$\Longrightarrow \neg(n_{j_1} = n_{j_2} = \ldots)$ и от *Лемаб* Б.О.О.
$\Longrightarrow n_{j_1} \notin \{n_{j_2}, k_{j_1}, k_{j_2}\}$
и включваме n_{j_1} в $A_{q_1,s}$, а $n_{j_2}, k_{j_1}, k_{j_2}$ в $A_{q_2,s}$
$\Longrightarrow A_{q_1,s+1} = A_{q_1,s} \cup \{n_{j_1}\}, A_{q_2,s+1} = A_{q_2,s} \cup \{n_{j_2}, k_{j_1}, k_{j_2}\}$.
$\Longrightarrow DEF_{s+1} = DEF_s \cup \{n_{j_1}, n_{j_2}, k_{j_1}, k_{j_2}\}$.

3.2.2.2.2 Ако $\chi \equiv const$, то:

3.2.2.2.2.1 Ако $\chi \not\equiv \widehat{b} \Rightarrow \exists_{q\in N}(\chi(b_q) \neq b)$
и включваме $n_{j_1}, k_{i_1}, k_{j_1}$ в $A_{q,s}$
$\Longrightarrow A_{q,s+1} = A_{q,s} \cup \{n_{j_1}, k_{i_1}, k_{j_1}\}$
$\Longrightarrow DEF_{s+1} = DEF_s \cup \{n_{j_1}, k_{i_1}, k_{j_1}\}$

3.2.2.2.2.2 Ако $\chi \equiv \widehat{b}$, то определяме тези измежду множествата $A_{1,s}, A_{2,s}, \ldots$, които не са празни: $A_{r_1,s}, A_{r_2,s}, \ldots, A_{r_l,s}$, и включваме в тях съответно $k_1, k_2, \ldots, k_l$
$\Longrightarrow A_{r_1,s+1} = A_{r_1,s} \cup \{k_1\}, \ldots, A_{r_l,s+1} = A_{r_l,s} \cup \{k_l\}$.
$\Longrightarrow DEF_{s+1} = DEF_s \cup \{k_1, \ldots, k_l\}$.

Накрая, за да си осигурим сюрективност, след всяка стъпка s избираме $m = \mu_{i\in N}(A_{i,s} = \emptyset)$, $k_l = \mu_{k_l \in NDEF_s}(k_l \notin DEF_{s+1})$ и включваме k_l в $A_{m,s}$ $\Longrightarrow A_{m,s+1} = \{k_l\}$ и $DEF_{s+1} := DEF_{s+1} \cup \{k_l\}$.

С това конструкцията на α^0 е завършена и номерацията $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$ е конкретизирана.

Коректност

Остава да покажем, че ако тоталната функция φ е ефективна относно построената номерация $\langle \alpha, \mathcal{B} \rangle$,т.е

$$\varphi(\alpha(x)) = \alpha(g(x)), \text{ за някоя частично рекурсивна функция } g,$$

то φ е изчислима по Московакис относно $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$.

Нека $g_1, g_2, \ldots$ са всички едноместни тотални рекурсивни функции и g е частично рекурсивна функция, за която:

$$\varphi(\alpha(x)) = \alpha(g(x)), \text{ за } \forall x \in N,$$

но φ е тотална функция $\Rightarrow g$ е тотална функция $\Rightarrow \exists_{s\in N}(g \equiv g_s)$.

Разглеждаме s-тата стъпка или по-точно случаите, в които може да сме попаднали:

1. Ако $\{n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots\}$ е празното множество

1.1 Ако $\chi''_i(\alpha(n_i)) \neq \chi''_j(\alpha(n_j))$
$\Longrightarrow \alpha(k_i) = \alpha(k_j) = b_1$

$$\Longrightarrow \varphi(b_1) = \begin{cases} \varphi(\alpha(k_i)) = \alpha(g_s(k_i)) = \chi''_i(\alpha(n_i)) \\ \varphi(\alpha(k_j)) = \alpha(g_s(k_j)) = \chi''_j(\alpha(n_j)) \end{cases} \neq$$

$\Longrightarrow$ този случай е невъзможен.

1.2 Ако $\chi''_1(\alpha(n_1)) = \chi''_2(\alpha(n_2)) = \ldots = b \in B$
Нека $e \in B$ е произволно и понеже α^0 е сюрекция
$\Longrightarrow \exists_{q \in N_0}(\alpha(q) = e)$ и от конструкцията на α^0 в този случай, "покриваща" множеството $\{s_1, \ldots, s_r\}$
$\Longrightarrow \exists_{t \in N}(\alpha(q) = \alpha(k_t))$
$\Longrightarrow \varphi(e) = \varphi(\alpha(k_t)) = \alpha(g_s(k_t)) = \chi''_t(\alpha(n_t)) = b$
$\Longrightarrow \varphi \equiv const$
$\Longrightarrow \varphi$ е изчислима по Московакис

2. Ако $\{n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots\}$ е крайно, непразно множество , то тук свеждаме разсъжденията до случай **1.**

3. Ако $\{n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots\}$ е безкрайно множество.

3.1 Ако $\neg(\chi''_{j_1} \equiv \chi''_{j_2} \equiv \ldots)$
$\Longrightarrow \chi''_{j_1}(b_q) \neq \chi''_{j_2}(b_q)$ и $\alpha(n_{j_1}) = \alpha(n_{j_2}) = \alpha(k_{j_1}) = \alpha(k_{j_2}) = b_q$

$$\Longrightarrow \varphi(b_q) = \begin{cases} \varphi(\alpha(k_{j_1})) = \alpha(g_s(k_{j_1})) = \chi''_{j_1}(\alpha(n_{j_1})) = \chi''_{j_1}(b_q) \\ \varphi(\alpha(k_{j_2})) = \alpha(g_s(k_{j_2})) = \chi''_{j_2}(\alpha(n_{j_2})) = \chi''_{j_2}(b_q) \end{cases} \neq$$

$\Longrightarrow$ този случай е невъзможен.

3.2 Ако $(\chi''_{j_1} \equiv \chi''_{j_2} \equiv \ldots \equiv \chi)$

3.2.1 Ако $\{n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots\}$ е празното множество, то:

3.2.1.1 Ако $\chi \not\equiv const \Longrightarrow \chi(b_{q_1}) \neq \chi(b_{q_2})$

3.2.1.1.1 Ако $(n_{j_1} = k_{j_1} \,\&\, n_{j_2} = k_{j_2} \,\&\, \ldots)$

Нека $e \in B$ е произволно и понеже α^0 е сюрекция

$\Longrightarrow \exists_{q \in N_0}(\alpha(q) = e)$

и от конструкцията на α^0 в този случай

$\Longrightarrow \exists_{l \in N}(\alpha(q) = \alpha(k_{j_l}))$

$\Longrightarrow \varphi(e){=}\varphi(\alpha(k_{j_l})){=}\alpha(g_s(k_{j_l})){=}\chi''_{j_l}(\alpha(n_{j_l})){=}\chi(\alpha(k_{j_l})){=}\,\chi(e)$

$\Longrightarrow \varphi \equiv \chi \in S\Theta$

$\Longrightarrow \varphi$ е изчислима по Московакис

3.2.1.1.2 Ако $\neg(n_{j_1}{=}k_{j_1} \,\&\, n_{j_2}{=}k_{j_2} \,\&\, \ldots)$

$\Longrightarrow \chi(b_{q_1}){\neq}\chi(b_{q_2})$ и $\alpha(n_{j_1}){=}b_{q_1}, \alpha(n_{j_2}){=}\alpha(k_{j_1}){=}\alpha(k_{j_2}){=}\,b_{q_2}$

$$\Longrightarrow \varphi(b_{q_2}){=}\begin{cases} \nearrow \varphi(\alpha(k_{j_1})) = \alpha(g_s(k_{j_1})) = \chi''_{j_1}(\alpha(n_{j_1})) = \chi(b_{q_1}) \searrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\neq \\ \searrow \varphi(\alpha(k_{j_2})) = \alpha(g_s(k_{j_2})) = \chi''_{j_2}(\alpha(n_{j_2})) = \chi(b_{q_2}) \nearrow \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ този случай е невъзможен.

3.2.1.2 Ако $\chi \equiv const$

Нека $e \in B$ е произволно и аналогично на по-горе

$\Longrightarrow \exists_{q \in N_0}(\alpha(q) = e)$

и от конструкцията на α^0 в този случай

$\Longrightarrow \exists_{t \in N}(\alpha(q) = \alpha(k_t))$

$\Longrightarrow \varphi(e){=}\varphi(\alpha(k_t)){=}\alpha(g_s(k_t)){=}\chi''_t(\alpha(n_t)){=}\chi(\alpha(n_t))$

$\Longrightarrow \varphi \equiv const$

$\Longrightarrow \varphi$ е изчислима по Московакис

3.2.2 Ако $\{n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots\} \neq \emptyset$, то:

3.2.2.1 Ако $\chi''_{i_1}(\alpha(n_{i_1})) \neq \chi''_{i_2}(\alpha(n_{i_2}))$

$\Longrightarrow \alpha(k_{i_1}) = \alpha(k_{i_2}) = b_1$

$$\Longrightarrow \varphi(b_1){=}\begin{cases} \nearrow \varphi(\alpha(k_{i_1})) = \alpha(g_s(k_{i_1})) = \chi''_{i_1}(\alpha(n_{i_1})) \searrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\neq \\ \searrow \varphi(\alpha(k_{i_2})) = \alpha(g_s(k_{i_2})) = \chi''_{i_2}(\alpha(n_{i_2})) \nearrow \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ този случай е невъзможен.

3.2.2.2 Ако $\chi''_{i_1}(\alpha(n_{i_1})) = \chi''_{i_2}(\alpha(n_{i_2})) = \ldots = b \in B$, то:

3.2.2.2.1 Ако $\chi \not\equiv const \Rightarrow \chi(b_{q_1}) \neq \chi(b_{q_2})$ & $\chi(b_q) \neq b$

3.2.2.2.1.1 Ако $(n_{j_1} = k_{j_1}$ & $n_{j_2} = k_{j_2}$ & $\ldots)$

$\Longrightarrow \alpha(k_{i_1}) = \alpha(k_{j_1}) = \alpha(n_{j_1}) = b_q$

$$\Longrightarrow \varphi(b_q) = \begin{cases} \nearrow \varphi(\alpha(k_{i_1})) = \alpha(g_s(k_{i_1})) = \chi''_{i_1}(\alpha(n_{i_1})) = \quad b \searrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq \\ \searrow \varphi(\alpha(k_{j_1})) = \alpha(g_s(k_{j_1})) = \chi''_{j_1}(\alpha(n_{j_1})) = \chi(b_q) \nearrow \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ този случай е невъзможен.

3.2.2.2.1.2 Ако $\neg(n_{j_1} = k_{j_1}$ & $n_{j_2} = k_{j_2}$ & $\ldots)$

$\Longrightarrow \alpha(n_{j_1}) = b_{q_1}, \alpha(n_{j_2}) = \alpha(k_{j_1}) = \alpha(k_{j_2}) = b_{q_2}$

$$\Longrightarrow \varphi(b_{q_2}) = \begin{cases} \nearrow \varphi(\alpha(k_{j_1})) = \alpha(g_s(k_{j_1})) = \chi''_{j_1}(\alpha(n_{j_1})) = \chi(b_{q_1}) \searrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq \\ \searrow \varphi(\alpha(k_{j_2})) = \alpha(g_s(k_{j_2})) = \chi''_{j_2}(\alpha(n_{j_2})) = \chi(b_{q_2}) \nearrow \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ този случай е невъзможен.

3.2.2.2.2 Ако $\chi \equiv const$, то:

3.2.2.2.2.1 Ако $\chi \not\equiv \widehat{b} \Rightarrow \chi(b_q) \neq b$

$\Longrightarrow \alpha(k_{i_1}) = \alpha(k_{j_1}) = \alpha(n_{j_1}) = b_q$

$$\Longrightarrow \varphi(b_q) = \begin{cases} \nearrow \varphi(\alpha(k_{i_1})) = \alpha(g_s(k_{i_1})) = \chi''_{i_1}(\alpha(n_{i_1})) = \quad b \searrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq \\ \searrow \varphi(\alpha(k_{j_1})) = \alpha(g_s(k_{j_1})) = \chi''_{j_1}(\alpha(n_{j_1})) = \chi(b_q) \nearrow \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ този случай е невъзможен.

3.2.2.2.2.2 Ако $\chi \equiv \widehat{b}$
Нека $e \in B$ е произволно и аналогично на по-горе
$\Longrightarrow \exists_{q \in N_0}(\alpha(q) = e)$
и от конструкцията на α^0 в този случаи
$\Longrightarrow \exists_{t \in N}(\alpha(q) = \alpha(k_t))$
$\Longrightarrow \exists_{l \in N}(\alpha(q) = \alpha(k_{j_l})$ или $\alpha(q) = \alpha(k_{i_l}))$
$\Longrightarrow \varphi(e) = \varphi(\alpha(k_t)) = \alpha(g_s(k_t)) = \chi''_t(\alpha(n_t)) =$

$$= \begin{cases} \nearrow \ \chi''_{j_l}(\alpha(n_{j_l})) = \chi(\alpha(n_{j_l})) = b \\ \searrow \ \chi''_{i_l}(\alpha(n_{i_l})) = b \end{cases}$$

$\Longrightarrow \varphi \equiv const$
$\Longrightarrow \varphi$ е изчислима по Московакис.

С това доказателството на Теоремата е завършено.

Литература

[1] А.В.Дичев, *Изчислимост в смисъл на Московакис и връзката и с частична рекурсивност посредством номерации*, Сердика **7** (1981), 117-130.

[2] А.В.Дичев, *За една хипотеза на Д.Скордев,* Алгебра и логика **24**, 4, (1985), 379-391.

[3] А.В.Дичев, *On the effective enumerations of partial structures,* Ann. Univ. Sofia **83** (1989), 29-37

[4] A.A.Soskova,I.N.Soskov, *Effective enumerations of abstract structures,* Heything'88:Mathematical Logic, ed.P.Petkov, Plenum Press, New York and London, 1989

[5] И.Н.Сосков, *Изчислимост в частични алгебрични системи. Дисертация за присъждане на научна степен кандидат на математическите науки,* СУ, София, 1983