Софийски Университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по Математика и Информатика

Дипломна работа
на тема

Метод на приоритета с безкрайни нарушения

Мария Иванова Соскова
ф.н. М-21565

Ръководител катедра Математическа Логика и Приложенията ѝ

Увод

Методът на приоритета възниква почти едновременно в работите на Фридберг и Мучник, където се решава положително проблемът на Пост за съществуване на две несравними Тюрингови степени, които съдържат полуразрешими множества. С годините този метод става много популярен и заедно с метода на форсинга се очертава като основно средство за конструиране на множества с особени алгоритмични свойства.

В работите на Сакс, Лахлан и др. методът се развива като се появяват метод на приоритета с безкрайни нарушения и "чудовищният" метод на приоритета.

В настоящата работа се излагат две приложения на метода на приоритета. В първото приложение се доказва теоремата на Лахлан за съществуване на минимална двойка от полуразрешими Тюрингови степени. Това доказателство не съдържа оригинален принос и е приведено защото е относително просто и илюстрира използването на дърво на стратегиите.

В основната част на работата се конструира 1-генерично множество, което не ограничава минимални двойки в полурешетката на номерационните степени. Тук се използва чудовищният метод на приоритета.

В своята работа [1] К. Купстейк изследва n-генеричните множества за всяко $n < \omega$. Тя показва, че всяко 2-генерично множество ограничава минимална двойка и анонсира, че съществува 1-генерично множество, което не ограничава минимална двойка. Нейното доказателство не се появява в научния печат. В работата [2] Б. Купер и др. показват, че всяко Δ^0_2 множество ограничава минимална двойка и конструират Σ^0_2 множество, което не ограничава минимална двойка. В същата работа авторите казват, че тяхната конструкция може да се използва за получаване на 1-генерично множество, което не ограничава минимална двойка. Първоначалната цел на тази работа бе следвайки конструкцията от [2] да построим 1-генерично множество с цитираните свойства. В процеса на работа се оказа, че доказателството в [2] съдържа някои съществени пропуски, което наложи съществени изменения в конструкцията. Така изменената конструкция трябваше значително да се модифицира за да се получи желаното 1-генерично множество. Да отбележим, че полученото 1-генерично множество се оказва Σ^0_2, откъдето следва, че изложеният тук резултат обобщава този от [2]. Поради тази причина ние решихме да не излагаме коректната версия на доказателството на резулта от [2] тук.

Благодарности. Настоящата работа е следствие на подготовката, която получих в магистърската програма "Логика и алгоритми" към катедрата по математическа логика и приложенията ѝ, Софийски Университет "Св. Кл. Охридски". Бих желала да изкажа най-искрената си

благодарност на всички сътрудници на катедрата за техния самоотвержен труд по провеждане на лекциите и семинарите, по време на които те показаха голяма научна ерудиция и успяха да демонстрират красотата на сериозната математика пред слушателите си.

Съдържание

Увод 1

Глава 1. Дърво на стратегиите 5
1. Низ, дърво 5
2. Целта на метода 5
3. Конструкцията 6
4. Означения 6

Глава 2. Съществуване на минимална двойка в $(D_T, \leq_T$ 9
1. Увод 9
2. Теорема на Лахлан 9
3. Изискванията 9
4. Стратегии 10
5. Конструкцията 12
6. Истинския път 12
7. Удовлетвореност на изискванията 13

Глава 3. Съществуване на генерично множество, което не ограничава минимална двойка 15
1. Изискванията 15
2. Дърво на стратегиите 16
3. Взаимодействие между стратегиите 17
4. Средата 19
5. Конструкция 20
6. Доказателство 25

Използвана литература 41

ГЛАВА 1

Дърво на стратегиите

В тази глава ще запознаем читателя с основните идеи на метода на приоритета с използване на дърво на стратегиите. Ще дефинираме и някои основни понятия от теория на изчислимостта и ще въведем някои означения, които ще използваме по- нататък в изложението.

1. Низ, дърво

Нека A е линенйно наредено множество. С A^* ще означаваме всички крайни и безкрайни редици от елементи на това множество. Елементите на A^* ще наричаме низове над A. Въвеждаме линейна наредба между низовете над A.

Дефиниция 1.1. Нека α и β са низове над множеството A.

(1) С $\varnothing$ ще означаваме празния низ.
(2) С $lh(\alpha)$ ще означаваме дължината на низа α.
(3) С $\alpha\hat{}\beta$ ще означаваме конкатенацията на двата низа α и β.
(4) Ще казваме, че: $\alpha \subseteq \beta$, ако съществува низ γ, такъв че $\beta = \alpha\hat{}\gamma$.
(5) Ще казваме, че: $\alpha <_L \beta$, ако съществува низ γ и елементи $k_1 \in A$ и $k_2 \in A$ такива, че $k_1 < k_2$ и $\gamma\hat{}k_1 \subseteq \alpha$ и $\gamma\hat{}k_2 \subseteq \beta$.
(6) Ще казваме, че: $\alpha \leq \beta$, ако $\alpha <_L \beta$ или $\alpha \subseteq \beta$.

Дефиниция 1.2. Дърво ще наричаме функция T, с област от стойности $\mathrm{Dom}(T) \subseteq A^*$, и област от стойности $\mathrm{Range}(T)$, за която е в сила:
Нека $\alpha \in A^*$ и $\beta \in A^*$. Ако $\alpha \subset \beta$ и $\beta \in \mathrm{Dom}(T)$, то $\alpha \in \mathrm{Dom}(T)$.

Забележете, че за всяко дърво T, $\varnothing \in \mathrm{Dom}(T)$. Празният низ $\varnothing$ ще наричаме корен на дървото.

Безкраен път в дървото T ще наричаме функцията $T \upharpoonright f$, където f е безкраен низ и за всяко естествено число n, $f \upharpoonright n \in \mathrm{Dom}(T)$.

2. Целта на метода

Методът се използва за построение на множества, които трябва да удовлетоврят някакво фиксирано множество от изисквания.

Нека D е множество от изисквания. Удовлеторяването на едно изискване обикновено води до нарушаване на друго. За да успеем да удовлетворим всички изисквания едновременно, трябва да изработим стратегия - която да ни казва как да постъпваме в различните случаи. За целта всяко изискване $R \in D$ има множество от изходи O_R. Интуитивно те ни дават възможност да "реагираме" по различен начин, в съотвецтвие с моментната среда. Има линейна наредба между всички възможни изходи: нека $O = \bigcup_{R \in D} O_R$, O е линейно наредено.

Дефиниция 1.3. Дърво на стратегиите ще наричаме изчислимо дърво T с $\mathrm{Dom}(T) \subseteq O^*$ и $\mathrm{Range}(T) = D$, за което са в сила следните условия:

(1) За всеки безкраен път $T \restriction f$ в дървото, $\mathrm{Range}(T \restriction f = D)$.
(2) Ако $\alpha \in \mathrm{Dom}(T)$ и $T(\alpha) = R$, то $\alpha\hat{\ }o \in \mathrm{Dom}(T)$ за всички $o \in O_R$.

Нека T е дърво на стратегиите и $\alpha \in \mathrm{Dom}(T)$. Ако $T(\alpha) = R$, то α наричаме R- стратегия. Всяка стратегия може да бъде оборудвана допълнително с различни параметри. В хода на конструкцията, ние посещаваме възлите на дървото и в зависимост от ситуацията променяме стойностите на параметрите на посетените възли.

3. Конструкцията

Конструкцията е на стъпки. На всяка стъпка строим апроксимация на търсеното множество. Как точно, зависи от конкретната задача. За целта "обикаляме" дървото на стратегиите: на стъпка s, строим низ δ_s с дължина s.

Ще казваме, че α е посетен на стъпка s, ако $\alpha \subseteq \delta_s$.

Обикновено строим и δ_s на стъпки. Започваме от корена на дървото: $\delta_s \restriction 0 = \varnothing$. Когато стигнем до стратегията $\delta_s \restriction n$, в зависимост от вида ѝ, предприемаме някакви действия, свързани с удовлетворяване на съответното ѝ изискване, на пример изменяме стойностите на параметрите. След това решаваме какъв ще е изходът o от стратегията $\delta_s \restriction n$. Тогава $\delta_s \restriction (n+1) = \delta_s \restriction n\hat{\ }o$.

Ще казваме, че α е с по- висок приоритет от β, ако $\alpha < \beta$. Когато строим δ_s считаме, че нарушаваме стратегиите, които имат по- нисък приоритет от δ_s, но запазваме стратегиите с по- висок приоритет.

Ключовият момент в конструкцията е наличието на така наречения "истински път". Това е фиксиран път $T \restriction f$ в дървото на стратегиите, за който са в сила следните две условия

(1)
$$\forall n \exists s_n \forall s > s_n (\delta_s \not<_L f \restriction n)$$

(2)
$$\forall n \overset{\infty}{\exists} s (f \restriction n \subseteq \delta_s)$$

Обикновено за да удовлетворим дадено изискване R е необходимо да посетим една конкретна R- стратегия безкрайно много пъти, без да я нарушаваме. Първото условие гарантира, че всяка стратегия по истинския път ще бъде нарушавана краен брой пъти. А второто условие гарантира, че на безкрайно много стъпки, ще посетим стратегиите по истинския път. Тъй като поискахме $\mathrm{Range}(T \restriction f) = D$, в крайна сметка всички изисквания ще бъдат удовлетворени.

4. Означения

Преди да пристъпим към илюстрация на метода, ще направим някои уговорки свързани с означенията.

(1) В хода на изложението ще си позволяваме да използваме израз от вида $A(x)$, като еквивалентен, на по- дългия: $\chi_A(x)$.

(2) Когато говорим за изчислими функции, под $\{e\}$ ще разбираме функцията, която се изчислява с програма с код e. $\{e\}_A$ - функцията, която се изчислява с програма с код e и с оракул $\chi(A)$.

Нека $\{e\}$, $\{e\}_s(x) = y$ означава $x < s$, $y < s$ и програмата завършва изчислението си за не повече от s стъпки при вход x и дава резултат y.

Нека $\{e\}^A$, $\{e\}_s^A(x) = y$ означава $x < s$, $y < s$ и програмата завършва изчислението си за не повече от s стъпки при вход x, дава резултат y и освен това всички обръщения към оракула, които са направени по време на изчислението са с аргумент, който е по- малък от s.

(3) Когато говорим за полуразрешимо множество W с W_s ще означаваме s- тата апроксимация на множеството W. Нека e е код на програма, която изчислява полухарактеристичната функция на W. Тогава $x \in W_s$ точно тогава, когато $\{e\}_s(x) = 1$.

(4) Ще казваме, че множеството A е тюрингово сводимо към множеството B и ще пишем $A <_T B$, ако χ_A е изчислима с програма, която използва оракул B.

(5) Ще казваме, че множеството A е номерационно сводимо към множеството B и ще пишем $A <_e B$, ако съществува полуразрешимо множество Θ, такова, че:

$$(x \in A) \Leftrightarrow \exists v(\langle x, v\rangle \in \Theta \wedge D_v \subseteq B)$$

Ние ще си позволим да пишем $\langle x, D_v\rangle \in \Theta$, като ще имаме предвид $\langle x, v\rangle \in \Theta$, където v е кода на крайното множество D_v.

(6) Минимална двойка по отношение на тюрингова сводимост наричаме такава двойка множества A и B, за които са в сила следните две условия:
   (а) $A \not\leq_T \emptyset$ и $B \not\leq_T \emptyset$.
   (б) Ако C е множество такова, че $C \leq_T A$ и $C \leq_T B$, то $C \leq_T \emptyset$.

(7) Минимална двойка по отношение на номерационна сводимост наричаме такава двойка множества Aи B, за които са в сила следните две условия:
   (а) $A \not\leq_e \emptyset$ и $B \not\leq_e \emptyset$.
   (б) Ако C е множество такова, че $C \leq_e A$ и $C \leq_e B$, то $C \leq_e \emptyset$.

(8) Крайна част ще наричаме крайна функция, която има дефиниционна област - начален интервал и област от стойности множеството $\{0, 1\}$. Обикновено отъждествяваме крайната част с низ над азбуката $\{0, 1\}$.

(9) Ще казваме че A е n-генерично множество, ако за всяко Σ_n^0 множество S е в сила:

$$\exists\tau \subseteq \chi_A(\tau \in S \vee \forall\mu \supseteq \tau(\mu \notin S))$$

Тук с τ и μ сме означили крайни части. Ако A е 1-генерично множество, ние ще наричаме A само генерично.

ГЛАВА 2

Съществуване на минимална двойка в $(D_T, \leq_T$

1. Увод

Първият резултат, който ще разгледаме е на Лахлан. Въпреки, че доказателството е известно, ние сме го включили в настоящата дипломна работа с цел да илюстрираме метода, над една по- проста задача и да подготвим читателя за сравнително по- трудния резултат в следващата глава. Иложението следва [3]

2. Теорема на Лахлан

Теорема 2.1. *Съществуват полуразрешими множества A и B, които образуват минимална двойка в D_t:*

(1) $\emptyset \lneqq_t A$, $\emptyset \lneqq_t B$
(2) *Ако съществува множество C такова, че $C \leq_t A$ и $C \leq_t B$, то $C \leq_t \emptyset$*

3. Изискванията

Ще строим полуразрешими множества A и B, които да удовлетворяват следните две групи изискване:

(1) Множествата A и B не са разрешими:
$P_{2e} : \{e\} \neq A$
$P_{2e+1} : \{e\} \neq A$
(2) Ако множество C е тюрингово сводимо едновременно и към A и към B, то C е разрешимо:
$N_{i,j}$: Ако $\{i\}^A = \{j\}^B = g$- тотална функция, то $g \leq_t \emptyset$
Ще преобразуваме изискванията $N_{i,j}$ в по- удобна форма. Нека фиксираме i и j и нека $\{i\}^A = \{j\}^B = g$. Нека $n_0 \in A \backslash B$. Без ограничение на общността можем да считаме, че такъв елемнт n_0 съществува, от конструкцията ще следва, че $A \neq B$. Нека:

$$\{e\}^X(a) \simeq \begin{cases} \{i\}^X(a) & \text{, ако } n_0 \in X \\ \{j\}^X(a) & \text{, ако } n_0 \notin X \end{cases}$$

Тогава ако е в сила N_e: $\{e\}^A = \{e\}^B = g$- тотална функция, то $g \leq_t \emptyset$, то в сила е и $N_{i,j}$: .
Ще разглеждаме изискванията P_{2e}, P_{2e+1} и N_e.

4. Стратегии

4.1. P - стратегии. Нека на стъпка s разглеждаме P_{2e} стратегия. За да удовлетворим изискването P_{2e} задаваме въпрос: съществува ли елемент $x = \langle x_1, 2e \rangle$ такъв, че $!\{e\}_s(x) = 0$. Ако отговорът е "да", казваме, че такова x е предизивкало внимание и добавяме x към A. Ще казваме, че P_{2e} е реализирало свидетел x. Само изискването P_{2e} добавя към A елементи от вида $x = \langle x_1, 2e \rangle$, където x_1 е естествено число. Да допуснем, че $\{e\} = \chi_A$. Тогава P_{2e} никога не е реализирало свидетел и в A няма нито един елемент от вида $x = \langle x_1, 2e \rangle$. Тогава за всяко $x = \langle x_1, 2e \rangle$ $(\chi_A)(x) = 0$, но $\{e\} = \chi_A$ и следователно $\exists s(\{e\}_s(x) = 0)$ - това е противоречие.

Аналогично можем да подходим и към P_{2e+1} стратегиите. Задаваме въпрос: съществува ли елемент $x = \langle x_1, 2e+1 \rangle$ такъв, че $!\{e\}_s(x) = 0$. Ако отговорът е "да", добавяме x в B. Ще казваме, че P_{2e+1} е реализирало свидетел x.

На пръв поглед такава стратегия върши работа. Но както ще видим по- късно, N_e стратегиите налагат някакви ограничения върху елементите, които могат да попаднат в A. По- точно на стъпка s, N_e- стратегия налага ограничение от вида $r(e, s)$: само елементи $x > r(e, s)$ могат да се добавят към A и B.

Ако изберем функцията на ограниченията r произволно може да се случи така: на всяка стъпка s да се появява елемент x, който да предизвиква внимание за P_{2e}, но заедно с това да расте и функцията на ограниченията, и да нямаме право да реализираме свидетеля x. Така P_{2e} никога няма да се задоволи.

Затова ще искаме допълнително ограничение за функцията r:

$$\forall e(lim_{inf_s} r(e, s) < \omega)$$

Дефиниция 2.2. $lim_{inf_s} r(e, s) = k \Leftrightarrow$

(1) $\overset{\infty}{\exists}\, s(r(e, s) = k)$
(2) $\forall l < k(\exists^{<\infty} s(r(e, s) = l))$

Нека проверим, че при така въведеното ограничение изискванията P_{2e} отново ще бъдат задоволени. Нека $r_e = lim_{inf_s} r(e, s)$. Да допуснем, че $\{e\} = \chi_A$. Тогава отново P_{2e} никога не е реализирало свидетел и в A няма нито един елемент от вида $x = \langle x_1, 2e \rangle$. Съществува елемент $x_0 > t_0$ такъв, че $(\chi_A)(x_0) = \{e\}(x_0) = 0$. Тогава съществува s_0, такава че за всички $s > s_0$, $\{e\}_s(x_0) = 0$. Нека $t_0 > s_0$ е такава, че $r(e, t_0) = r_0$. Тогава на стъпка t_0, x_0 ще се реализира.

4.2. N - стратегии. Първо ще разгледаме стратегията за задоволяване само на едно изискване - N_0.

Дефиниция 2.3.

$$l(e, s) = (\max\left\{x | \forall y < x(!\{e\}_s^{A_s}(y) \simeq !\{e\}_s^{B_s}(y))\right\}$$

Първото, което ни хрумва е да положим $r(e, s) = l(e, s)$. Тогава, ако $g = \{0\}^A = \{0\}^B$, то g е изчислима. За да сметнем $g(x)$, търсим най - малкото s такова, че $x < l(0, s)$. Тогава $g(x) = \{0\}_s^{A_s}(x)$. Проблемът е, че ако $\{0\}^A = \{0\}^B$, то $lim_{inf_s} r(0, s) = \omega$.

Дефиниция 2.4. Ще казваме, че s е 0- разширяваща стъпка, ако $s = 0$ или $l(0,s) > \max\{l(0,t)|t < s\}$

Тогава полагаме:

$$r(0,s) \simeq \begin{cases} 0 & \text{, ако } s \text{ е 0 - разширяваща} \\ \max\{t|t < s,\ t \text{ е 0 - разширяваща}\} & \text{, ако } s \text{ не е 0 - разширяваща} \end{cases}$$

Ще покажем, че $r(0,s)$ има краен lim_{inf}.

(1) $\{0\}^A = \{0\}^B$. Тогава с нарастване на s, нараства и $l(0,s)$ и ще има безброй много стъпки s, които ще са разширяващи. Тогава $lim_{inf_s} r(0,s) = 0$.
(2) $\{0\}^A \neq \{0\}^B$. Тогава нека x е най- малката им разлика. Има s_0 такава, че за всички стъпки $t > s_0$, $l(0,t) = x$. Тогава за всички $t > s_0$ ще имаме $r(0,t) = r(0,s_0)$ и следователно $lim_{inf_s} r(0,s) = r(0,s_0)$.

Сега да видим, дали при този избор на ограничаващата функция можем да задоволим N_0. Нека $\{0\}^A = \{0\}^B = g$ и g е тотална. За да сметнем $g(x)$, намираме най- малкото s такова, че $l(0,s) > x$. Такова s има, защото $l(0,s)$ нараства с нарастването на s.

Нека $\{0\}_s^{A_s}(x) = \{0\}_s^{B_s}(x) = y$ и $r(0,s) = r_x$.

(1) Ако $r(0,s) = 0$, тогава s е разширяваща стъпка и на стъпки $t : s < t < s_1$ имаме $r(0,t) = s$, където s_1 е следващата разширяваща стъпка. Следовтелно за такива стъпки t, за които $s < t < s_1$ изчислението се запазва : $\{0\}_t^{A_t}(x) = \{0\}_t^{B_t}(x) = y$. На стъпка s_1 можем да добавим само един елемент към само едно от двете множества. Така на стъпка s_1 имаме $\{0\}_{s_1}^{A_{s_1}}(x) = y$ или $\{0\}_{s_1}^{B_{s_1}}(x) = y$. За $t : s_1 < t < s_2$, където s_2 е следващото разширяващо състояние $r(0,t) = s_1 > s$ и отново $\{0\}_{s_1}^{A_{s_1}}(x) = y$ или $\{0\}_{s_1}^{B_{s_1}}(x) = y$. На стъпка s_2 имаме нарастване на $l(0,s_2)$ и следователно $\{0\}_{s_2}^{A_{s_2}}(x) = \{0\}_{s_2}^{B_{s_2}}(x) = y$. Така в крайна сметка получаваме $\{0\}^A(x) = \{0\}^B(x) = g(x) = y$.
(2) $r(0,s) \neq 0$ тогава $r(0,s) = s_0$, където $s_0 < s$ е предното разширяващо състояние. Имаме $x < l(0,s) < l(0,s_0)$, което противоречи с избора на s като първа стъпка, на която $x < l(0,s)$.

Изход от N_0 - стратегия на стъпка s ще бъде $r(0,s)$.

Обобщаването към повече стратегии е лесно.

Нека α е N_e стратегия. Ще казваме, че t е α- стъпка, ако α е посетен на стъпка t.

$$l(\alpha,s) = l(e,s))$$

$$m(\alpha,s) = \max\{l(\alpha,t)|t < s \text{ и } t \text{ е } \alpha \text{ стъпка}\}$$

Дефиниция 2.5. Една стъпка t наричаме α- разширяваща, ако $t = 0$ или $m(\alpha,t) < l(\alpha,t)$

$$r(\alpha, s) \simeq \begin{cases} 0 & \text{, ако } s \text{ е } \alpha\text{- разширяваща} \\ \max[t < s,\ t \text{ е } \alpha\text{- разширяваща}] & \text{, ако } s \text{ не е} \alpha\text{- разширяваща} \end{cases}$$

Забелязваме, че $r(\alpha, s)$ е дефинирана и за стъпки s, на които α не е посетен. Изход от стратегията α, посетена на стъпка s, ще бъде $o = \max(r(\beta, s)|\beta \leq \alpha)$.

5. Конструкцията

Дървото на стратегиите T има $\mathrm{Dom}(T) = \omega^*$. Възлите са му етикетирани с N_e изисквания, като $T(\alpha) = N_{lh(\alpha)}$. Така дефинирано T изпълнява условията които поискахме за дърво на стратегиите.

Както вече отбелязахме на всяка стъпка s строим A_s, B_s и низ δ_s над азбуката ω.

$A_0 = B_0 = \emptyset$, $\delta_0 = \varnothing$.

Нека сме построили A_s, B_s и δ_s. Нека освен това за всяко $e < s$ сме дефинирали $r(e, s)$

(1) Ще казваме, че P_{2e} предизивква внимание на стъпка s, ако $2e < s$ и:
  (а) Не съществува $x = \langle x_1, 2e\rangle$ такова, че $\{e\}_s(x) = 0$ и $x \in A_s$. С други думи P_{2e} още не е реализирало никой елемент.
  (б) Съществува $x = \langle x_1, 2e\rangle$ такова, че $\{e\}_s(x) = 0$ и $x > r(2e, s)$.

  Намираме най- малкото i такова, че P_i предизвиква внимание. Намираме най - малкото x, което предизвиква вниамние за P_i и удовлетворява второто условие. Ако никое P- изискване не предизвика внимание, полагаме $A_{s+1} = A_s$, $B_{s+1} = B_s$. Ако $i = 2e$, то $A_{s+1} = A_s \cup \{x\}$, $B_{s+1} = B_s$. Ако $i = 2e + 1$ - $A_{s+1} = A_s$, $B_{s+1} = B_s \cup \{x\}$

(2) Построяваме δ_{s+1}. С индукция, за всяко $n < s + 1$ ще определим $\delta_s(n)$.

  Нека сме определили $\delta_{s+1} \restriction n$. Тогава $\delta_{s+1}(n) = o$, където o е изходът от сратегията $\delta_{s+1} \restriction n$.

  $r(n + 1, s + 1) = o$, и от тук забелязваме, че r е монотонно растяща по първия си аргумент. Освен това, ако $\alpha < f \restriction n + 1$, то $r(\alpha, s + 1) \leq r(f \restriction n + 1, s + 1) = o$.

6. Истинския път

Лема 2.6. *Съществува безкраен низ от символи f над азбуката ω, за който са в сила следните условия:*

(1) $\forall n \exists s_n \forall s > s_n (\delta_s \not<_L f)$
(2) $\forall n \overset{\infty}{\exists} s_n (f \restriction n \subseteq \delta_s)$

Доказателство. Ще построим $f(n)$ с индукция по n.

Нека $n = 0$. Знаем, че на всяка стъпка s $\delta_s(0) = r(\varnothing, s)$. Ако s е $\varnothing$-разширяваща, то $\delta_s(0) = 0$. Иначе $\delta_s(0) = s_0$, където s_0 е най- голямата стъпка такава, че $s_0 < s$ и s_0 е $\varnothing$- разширяваща.

Ако $\{0\}^A = \{0\}^B$, тогава с нарастване на s нараства и $l(e, s)$. Следователно има безкрайно много стъпки s, които са $\varnothing$- разширяващи и за които $\delta_s(0) = 0$. Не е възможно да минем вляво от низът 0. Тогава полагаме $f(0) = 0$ и двете условия са изпълнени.

Ако $\{0\}^A \neq \{0\}^B$,то нека x е най - малката им разлика. Съществува стъпка s, такава че $l(0, s) = x$ и за всички стъпки $t > s$, $l(0, t) = x$. Тогава няма стъпки $t > s$, които са $\emptyset$- разширяващи и за всички $t > s$ е в сила $r(0, t) = r(0, s)$, $\delta_s(0) = r(0, s)$ и няма как да минем в ляво от този низ. Полагаме $f(0) = r(0, s)$ и двете условия са изпълнени.

Нека сме построили $f \upharpoonright n = f_n$ така, че да са в сила двете условия. Ще дефинираме $f(n)$.

Знаем, че f_n е с дължина n и е следователно N_n- стратегия

Ако $\{n\}^A = \{n\}^B$, тогава с нарастване на стъпката s, ще расте и $l(f_n, s) = l(n, s)$. Имаме безброй много стъпки, на които посещаваме f_n, следователно ще имаме безброй много f_n- разширяващи стъпки измежду тях. Полагаме $f(n) = 0$. За $s > s_n$,имаме $\delta_s \not<_L f_n$, а следователно и $\delta_s \not<_L f_{n+1} = f_n\hat{\ }0$. Така $t_{n+1} = t_n$. В сила са и двете условия.

Ако $\{n\}^A \neq \{n\}^B$,то нека x е най - малката им разлика. Съществува стъпка s', такава че $l(f_n, s') = x$ и за всички стъпки $t > s'$, $l(f_n, t) = x$. Тогава няма стъпки $t > s'$, които са f_n- разширяващи и за всички $t > s'$, на които е достъпен f_n е в сила $r(f_n, t) = \max(r(f_n, s'), f(n-1))$, $\delta_t(n) = \max(r(f_n, s'), f(n-1))$ и няма как да минем в ляво от този низ на стъпки $t > s_{n+1} = \max(s'.s_n)$. Полагаме $f(n) = \max(r(f_n, s'), f(n-1))$ и двете условия са изпълнени.

□

7. Удовлетвореност на изискванията

Лема 2.7. *Всяко изискване P_i се задоволява.*

Доказателство. Ако P_i предизвика внимание и реализира свидетел, то от второто условие, при което P_i предизвиква внимние, следва, че P_i е задоволено. От първото условие следва, че в такъв случай P_i никога повече няма да предизвика внимание. Да допуснем, че има изискване P_i, което не е задоволено и да вземем това с най - малък номер. Без огрзничение на общността $i = 2e$. $A = \{e\}$, и P_{2e} не е реализирало свидетел, следователно в A няма елементи от вида $x = \langle x_1, 2e\rangle$. Нека $x = \langle x_1, 2e\rangle$ е такъв, че $x > f(2e)$. $A(x) = 0$, следовтелно $\{e\}(x) = 0$, значи има стъпка s_1 такава, че $\{e\}_{s_1}(x) = 0$.

Нека s^* е стъпка толкова голяма, че:

(1) $s^* > s_1$
(2) Всички изисквания P_i с $i < 2e$, които някога предизвикват внимание, вече са предизвикали внимание.
(3) $s^* > s_{2e}$, където s_{2e} е стъпката от лемата за истинския път.
(4) На стъпка s^*, сме по посетили $f \upharpoonright (2e+1)$.

На стъпка $s^* + 1$, никое P_i с $i < 2e$ не предизвиква внимание, а P_{2e} предизвиква вниамние. Съгласно конструкцията елемент от вида $x' = \langle x'_1, 2e\rangle$ ще попадне в $A_{s+1} \subseteq A$. Стигнахме до противоречие, следователно всички P- изисквания са задововлени.

□

Лема 2.8. *Всяко N_e изискване е удовлетворено.*

Доказателство. Нека фиксираме e. И нека $\{e\}^A = \{e\}^B = g$ - тотална. Тогава с нарастване на s, нараства и $l(e,s)$ и има безброй много $f \restriction e$ - разширяващи стъпки. За да пресметнем $g(x)$, намираме стъпка s^* такава, че да са всила :

(1) $s^* > s_e$, където s_e е стъпката от лемата за истинския път
(2) Всички изисквания P_i с $i \leq e$, които някога предизвикват вниамние, вече са предизвикали внимание.
(3) $x < l(e, s^*)$.
(4) s^* е $f \restriction e$ разширяваща.

Тогава твърдим, че $g_x = \{e\}^{A_{s^*}}_{s^*}(x)$. Наистина $x < l(e, s^*)$ и следователно $\{e\}^{A_{s^*}}_{s^*}(x) = \{e\}^{B_{s^*}}_{s^*}(x) = y$. На всяка стъпка $t > s^*$ имаме $\{e\}^{A_{s^*}}_{s^*}(x) = y$ или $\{e\}^{B_{s^*}}_{s^*}(x) = y$. На стъпка s^* имаме и двете. Нека твърдението е вярно за $t \geq s^*$, да разглеаме стъпка $t+1$. Ако t не е $f \restriction e$ разширяваща, елементите които могат да попаднат в A и B са свидетели на изисквания P_i с $i > e$. Следовтелно те спазват изискването $r(i,t) \geq r(e,t) \geq s^*$. Тогава ако $\{e\}^{A_t}_t(x) = y$, то и $\{e\}^{A_{t+1}}_{t+1}(x) = y$, и съответно ако $\{e\}^{B_t}_t(x) = y$, то и $\{e\}^{B_{t+1}}_{t+1}(x) = y$. Ако t е $f \restriction e$ разширяваща, то на стъпка $l(e, s^*) \leq l(e,t)$ и следователно $\{e\}^{A_t}_t(x) = \{e\}^{B_t}_t(x) = y$. На стъпка $t+1$ добавяме един единствен елемент към едно от двете множества. Ако добавяме елемент към A, то $\{e\}^{B_{t+1}}_{t+1}(x) = y$. Ако добавяме елемент към B, то $\{e\}^{A_{t+1}}_{t+1}(x) = y$.

Тогава $\{e\}^A(x) = \{e\}^B(x) = y$. Ако допуснем, че $\{e\}^A(x) = \{e\}^B(x) \neq y$, то ще има достатъчно голяма стъпка t, на която $\{e\}^{A_t}_t(x) \neq y$ и $\{e\}^{B_t}_t(x) \neq y$, а ние доказахме, че това не се случва. Така g се оказа изислима. $\square$

ГЛАВА 3

Съществуване на генерично множество, което не ограничава минимална двойка

В тази глава ще разгледаме една по- сложна конструкция. Сложността личи например от множеството, което ще искаме да построим. В доказателството на теоремата на Лахлан построихме полуразрешими множества, докато тук ще строим истинско Σ_2 множество.

В своята работа [1], Купстейк доказва, че всяко 2-генерично множество ограничава минимална двойка. В същата работа тя заявява, че съществува 1-генерично множество, което не ограничава минимална двойка. Доказателство на това твърдение, не се появява до статията [2] на Б. Купер и др. В нея се твърди, че с метод подобен на този, с който е доказана теоремата за съществуване на Σ_2^0 множество, което не ограничава минимална двойка, може да се построи и търсеното генерично множество, което не ограничава минимална двойка. Тук ще представим подробно доказателство на това твърдение.

Теорема 3.1. *Съществува генерично множество A , което не ограничава минимална двойка в полурешетката на номерационните степени.*

1. Изискванията

Множеството A, което ще строим трябва да удовлетворява следните две групи изисквания:

(1) A е генерично, следователно за всяко полуразрешимо множество W ще имаме изискването:

$$G^W : \exists\tau \subseteq \chi_A(\tau \in W \vee \forall\mu \supseteq \tau(\mu \notin W)),$$

където с τ и μ сме означили крайни части.

С Req^G ще означим множеството от всевъзможните G^W изисквания.

(2) A не ограничава минимална двойка, следователно за всяко двойка полуразрешими множества Θ_0 и Θ_1 ще искаме:

$$R^{\Theta_0\Theta_1} : \Theta_0(A) = X - r.e. \vee \Theta_1(A) = Y - r.e.\vee$$

$$\vee\exists\Phi_0 - r.e.\Phi_1 - r.e.((\Phi_0(X) = \Phi_1(Y) = D) \wedge \forall W - r.e.(W \neq D))$$

С Req^R ще означим множеството от всевъзможните $R^{\Theta_0\Theta_1}$ изисквания.

Нека за всяко изискване $R^{\Theta_0\Theta_1}$ сме съпоставили $X = \Theta_0(A)$, $Y = \Theta_1(A)$ и полуразрешими множества Φ_0 и Φ_1. Тогава можем да изразим всяко изискване $R^{\Theta_0\Theta_1}$, като едновременно удовлетворяване на следните подизисквания S^W по всички полуразрешими множества W:

$S^W : (X - r.e \vee Y - r.e. \vee (\Phi_0(X) = \Phi_1(Y) = D \wedge \exists d(W(D) \neq D(d))))$

С $Req^S_{R^{\Theta_0\Theta_1}}$ ще означим множеството от всевъзможните S^W подизисквания на $R^{\Theta_0\Theta_1}$.

2. Дърво на стратегиите

Ще дадем общ план на действията, които ще извършваме, за да удовлетворим изискванията. После ще се спрем подробно на всеки вид стратегия. Както вече отбелязахме, ще строим дърво на стратегиите T, с $\mathrm{Dom}(T) = O^*$, където O е множеството от всевъзможните изходи от различните видове стратегии. За това първо трябва да си изясним какви са те и каква е наредбата между тях.

(1) Нека γ е G^W-стратегия. Действията, които извършва γ са следните:
   (а) γ избира крайна част λ_γ, по правила, които осигуряват съвместимост със стратегиите с по- висок приоритет.
   (б) Ако има крайна част μ, за която $\lambda_\gamma\hat{}\mu \in W$, то γ запомня най - късата такава крайна част - μ_γ, и има изход 0. Ако няма такава крайна част, $\mu_\gamma = \varnothing$, то изходът е 1. Наредбата на двата изхода е $0 < 1$. Стратегията е печеливша ако осигурим $\lambda_\gamma\hat{}\mu_\gamma \subseteq A$.

(2) Нека α е $R^{\Theta_0\Theta_1}$- стратегия. Тя е като майка стратегия за всички свои подстратегии - грижи се за правилната им работа. Считаме че на ниво α се строят множествата Φ_0 и Φ_1, които се използват в удовлетворяването на съответното изискване. Те са общи за всички подстратегии на α.

(3) Нека β е S^W- стратегия. Тя е подстратегия не една фиксирана $R^{\Theta_0\Theta_1}$- стратегия - α, като ще искаме $\alpha \subset \beta$. Действията които извършва β са следните:
   (а) Първо се опитва да направи множеството X полуразрешимо. За целта строи множество U, което да се окаже равно на X. На всяка стъпка добавя елементи към U и следи дали не се е получила грешка. Докато не се получи грешка има изход ∞_X.
   (б) Ако се е получила грешка, то някой елемент, за който сме сметнали, че ще се окаже в X, е излязъл извън X. Не можем да поправим грешката, защото искаме U да е полуразрешимо. Следователно към него можем само да добавяме, но не и да изваждаме елементи. В такъв случай се отказваме от желанието си да правим множеството X полуразрешимо, намираме най- малката грешка $k \in U \backslash X$ и съставяме множество E_k, което ще наричаме агитатор за k, със следното свойство: $k \in X \Leftrightarrow E_k \subseteq A$. Започваме да се опитваме да направим множеството Y полуразрешимо - като строим множество V_k, което искаме да се окаже равно на Y. Извършваме подобни действия, като едновременно с това следим,

дали агитатора за k все още има исканото свойство. Докато няма грешка в V_k имаме изход $\langle \infty_Y, k\rangle$.

(в) Ако намерим грешка и в V_k, избираме най- малката грешка $l \in V_k \backslash Y$ и съставяме множество F^k_l - агитатор за l със свойството: $l \in Y \Leftrightarrow F^k_l \subseteq A$. Сега сме в ситуация, в която имаме известен контрол над множествата X и Y. Когато поискаме можем да вкарваме и изкарваме k и l съответно от X и Y. Следователно ако имаме аксиоми $\langle d, \{k\}\rangle \in \Phi_0$ и $\langle d, \{l\}\rangle \in \Phi_1$, за някой елемент d, то можем да вкарваме и изкраваме d от D. Отказваме се да правим Y полуразрешимо и се обръщаме към построяване на разлика между W и D. Ако $d \in W\backslash D$ имаме изход $\langle l, k\rangle$. Ако $d \in D\backslash W$ имаме изход d_0.

Така възможните изходи от S^W- стратегиите са:

$$\infty_X < T_0 < T_1 < \cdots < T_k < \cdots < d_0,$$

където с T_k сме означили следната група изходи:

$$\langle \infty_Y, k\rangle < \langle 0, k\rangle < \langle 1, k\rangle < \cdots < \langle l, k\rangle \ < \ldots$$

Готови сме да дефинираме дървото на стратегиите. Това е изчислима функция T с $\mathrm{Dom}(T) = \{0, 1, \infty_X, \langle \infty_Y, k\rangle, \langle l, k\rangle, d_0 | k, l \in \mathbb{N}\}$ и $\mathrm{Range}(T) = \mathit{Req}^G \cup \mathit{Req}^R \cup (\bigcup_{R \in \mathit{Req}_R} \mathit{Req}^S_R)$, за която са в сила следните условия:

(1) За всеки път f в T имаме $\mathrm{Range}(T \restriction f) = \mathrm{Range}(T)$.
(2) Ако $\alpha \in \mathrm{Dom}(T)$ и $T(\alpha) \in \mathit{Req}^R$, то $\alpha\hat{\ }0 \in \mathrm{Dom}(T)$.
(3) Ако $\gamma \in \mathrm{Dom}(T)$ и $T(\gamma) \in \mathit{Req}^G$, то $\gamma\hat{\ }o \in \mathrm{Dom}(T)$, където $o \in \{0, 1\}$.
(4) Ако $\beta \in \mathrm{Dom}(T)$ и $T(\beta) \in \mathit{Req}^S_R$, то $\gamma\hat{\ }o \in \mathrm{Dom}(T)$, където $o \in \{\infty_X, \langle \infty_Y, k\rangle, \langle k, l\rangle, d_0 | k, l \in \mathbb{N}\}$.
(5) Ако $\alpha \in \mathrm{Dom}(T)$ е R-стратегия, то за всяко подизискване S^W има S^W-стратегия $\beta \in \mathrm{Dom}(T)$,подстратегия на α такава, че $\alpha \subset \beta$.
(6) Ако β е S^W-стратегия, подстратегия на α, то под $\beta\hat{\ }\infty_X$ и $\beta\hat{\ }\langle \infty_Y, k\rangle$ не се срещат други подстратегии на α.

Така на всяка стъпка s ще строим множество A_s – апроксимация на A и низ δ_s с дължина s. На всеки посетен възел $\delta \subseteq \delta_s$ с дължина $n \leq s$ ще съпоставяме множество A^n_s, като $A_s = A^s_s$. В крайна сметка множеството A се състои от тези елементи a, за които има стъпка t_a, такава че $\forall t > t_a(a \in A_t)$. Заедно с това на всяка стъпка s ще строим s-тата апроксимация на полуразрешимите множества (W, Θ_0, Θ_1), които сме срещнали до момента в конструкцията.

3. Взаимодействие между стратегиите

За да обясним необходимостта от някои определени елементи на средата на различните стратегии, ще ни се наложи да разгледаме някои конкретни ситуации, в които две стратегии си взаимодействат. За да можем да постигнем изобщо някаква организация между различните видове стратегии ще използваме глобален параметър - брояч b, чиято стойност във всеки момент ще е горна граница на използваните до момента елементи.

(1) Да разгледаме взаимодействието между една S^W-стратегия β и една G^W-стратегия γ. Интересните случаи са $\gamma \supseteq \beta\hat{}\infty_X$ и аналогичният му $\gamma \supseteq \beta\hat{}\langle\infty_Y, k\rangle$. Нека $\gamma \supseteq \beta\hat{}\infty_X$. Когато посещаваме β, добавяме елемент k към множеството U. За него има аксиома $\langle k, E'\rangle$ и в момента на посещение на β имаме $E' \subseteq A$. Възможно е още на същата стъпка γ да избере продължаващ низ μ_γ, който да извади извън A елемент от E'. Ако на тази стъпка няма друга аксиома за k в съответната апроксимация на Θ_0, получаваме грешка в U. Следващия път, когато посетим β, ще открием тази грешка, ще изберем агитатор за k и ще минем в дясно. На по- късен етап е възможно в Θ_0 да се появи нова аксиома за k. Тогава в U вече няма да има грешка и ще се върнем към опитите си да направим X полуразрешимо. Но тогава някоя нова G^W-стратегия $\gamma_1 \supseteq \gamma$ може да открие продължаващ низ μ_{γ_1} и да получим същата грешка k за U. Ако този процес продължи да се повтаря в този цикъл - ние все ще залагаме на това, че $X = U$, но в крайна сметка ще имаме $k \notin X - X \neq U$, и няма да сме удовлетворили изискването S^W. За целта трябва да осигурим някаква стабилност на елементите, които попадат в U. Така възниква идеята за прилагане на дадена аксиома. Когато прилагаме аксиома $\langle k, E'\rangle$ – променяме глобалния брояч b, така че да отчита и елементите на E' и се отказваме от някои стратегии, които биха могли да нарушат валидността на аксиомата. Процеса на отказване ще наричаме инициализация на стратегиите. Най- общо инициализация на дадена стратегия означава, че всички стойности на параметрите, които сме съпоставили на конкретната стратегия придобиват някакви отнапред фиксирани начални стойности. Първото, което ни хрумва, е да инициализираме всички стратегии $\delta \supseteq \beta\hat{}\infty_X$. Тогава избягваме появата на грешки изобщо. Но ако множеството X е безкрайно, никога няма да дадем шанс на тези стратегии $\delta \supseteq \beta\hat{}\infty_X$ да се удовлетворят, защото винаги ще се отказваме от тях при инициализиация. Разрешаването на този конфликт се крие в понятието локален приоритет. Всяка G^W- стратегия $\gamma \supseteq \beta\hat{}\infty_X$ ще има конкретен локален приоритет относно β. Когато прилагаме аксиома $\langle k, E'\rangle$, ще инициализираме само онези стратегии γ, които имат по- нисък локален приоритет от k. Така с нарастване на стъпката, ще нараства и големината на елементите, които попадат в U и ще нараства броят на G^W - стратегиите, които пазим при прилагане на съответните аксиоми. В крайна сметка всички стратегии ще имат възможност да удовлетворят съответните им изисквания.

(2) Сега ще разгледаме взаимодействието между две S^W стратегии β и β_1. Отново интересен случай е $\beta_1 \supseteq \beta\hat{}\infty_X$. И така нека $\beta_1 \supseteq \beta\hat{}\infty_X$, нека β_1 е подстратегия на α_1 и $\alpha_1 \subset \beta$. Както ще се види от конструкцията в множествата агитатори попадат само елементи, които на предното посещение на съответната S^W стратегия са били извън A. Възможно е β_1 да избере агитатори

E_{k_1} и $F^{k_1}_{l_1}$, които да извади извън A. При следващото посещение β да поиска да формира свои агитатори които да съдържат елементи от агитаторите E_{k_1} и $F^{k_1}_{l_1}$ на β_1, като с това да предизвика грешка в множествата $\Phi^{\alpha_1}_0$ и $\Phi^{\alpha_1}_1$. По- точно можем да загубим равенството $\Phi^{\alpha_1}_0(X) = \Phi^{\alpha_1}_1(Y)$. Разбира се, ако посетим β_1 отново - тя ще съумее да се справи със ситуацията и да поправи грешката. Но възможно е β_1 повече никога да не бъде посетена. Тогава грешката може да остане не поправена. За целта предприемаме две действия. Първо, избираме множествата агитатори по- внимателно: заедно с необходимите елементи за свойството на агитатора, добавяме и всички елементи на агитатори, които са били избрани и извън A на предишната стъпка. Така предотвратяваме възможността агитаторът на β да извади на пример само елементи от множеството E_{k_1} и с това да получим $d_1 \notin \Phi^{\alpha_1}_0(X)$ и $d_1 \in \Phi^{\alpha_1}_1(Y)$. Възможно е обаче на по - късна стъпка в съответните апроксимации на $\Theta^{\alpha_1}_0$ и $\Theta^{\alpha_1}_1$ да се появи нови аксиома, заради която някой от агитаторите да загуби исканото му свойство и отново да получим разлика в $\Phi^{\alpha_1}_0(X)$ и $\Phi^{\alpha_1}_1(Y)$. За това със стратегията α_1 ще свържем нов параметър - списъка $Watched_{\alpha_1}$, в който ще записваме необходимата информация за стратегията β_1, в момента, в който тя е загубила контрол над елементите на агитаторите си. Сега α_1 следи множествата $\Theta^{\alpha_1}_0$ и $\Theta^{\alpha_1}_1$ и предотвратява всякакви грешки.

4. Средата

Нека още веднъж се спрем на стратегиите по- отделно и фиксираме средата им - параметрите, които свързваме с тях.

(1) Нека γ е G^W-стратегия. λ_γ е крайна част, която се избира в съотвецтви със стратегиите с по- висок приоритет. μ_γ - е разширяваща крайна част. За опростяване на изложението ще въведем и допълнителен параметър χ_γ, който е конкатенацията на λ_γ и μ_γ.

При инициализиация на γ, $\chi_\gamma = \lambda_\gamma = \mu_\gamma = \varnothing$.. Инициализират се и всички стратегии δ такива, че $delta \supset \gamma$.

(2) Нека α е R-стратегия. Тя има единствен параметър - списъка $Watched_\alpha$, който съдържа записи със следната структура: $\langle \beta : \langle E_k, F^k_l, E\rangle, d\rangle$, където β е подстратегията на α, която е наблюдавана, E_k и F^k_l са агитаторите, E е допълнително множество, което има отношение към валидността на агитаторите, а d е свидетелят - елементът при който би могла да се появи грешка.

При инициализиация $Watched_\alpha = \emptyset$

(3) Нека β е S^W-стратегия. Този вид стратегии имат най - много параметри:

Една променлива $o-$ пази информация за това какъв е бил изходът от стратегията при последното ѝ посещение. Стъпката, на която β е бил посетен за последно се помни в $t-$.

Имаме множество U и съответно множество $\mathbb{U}$. За всеки елемент $k \in U$ има запис в $\mathbb{U}$ – аксиомата $\langle k, E'\rangle$, която считаме за валидна в момента. Имаме изчислима биекция $\sigma : \Gamma \to \mathbb{N}$, където

$\Gamma = \{\gamma - G^W$ стратегии $|\gamma \supseteq \beta\hat{}\infty_X\}$. $\gamma \supseteq \beta\hat{}\infty_X$ има локален приоритет $\sigma(\gamma)$ спрямо β.

Аналогично за всяко $k \in \mathbb{N}$ имаме двойки множества V_K и $\mathbb{V}_k$.За всеки елемент $l \in V_k$ има запис в $\mathbb{V}_k$ – аксиомата $\langle l, F' \rangle$, която считаме за валидна в момента. Имаме изчислима биекция $\sigma_k : \Gamma_k \to \mathbb{N}$, където $\Gamma_k = \{\gamma - G^W$ стратегии $|\gamma \supseteq \beta\hat{}\langle \infty_Y, k\rangle\}$. $\gamma \supseteq \beta\hat{}\langle \infty_Y, k\rangle$ има локален приоритет $\sigma_k(\gamma)$ спрямо β.

В някои моменти от конструкцията имаме агитатори E_k и F_l^k и свидетел d.

При инициализиация $o- = \infty_X$, $U = \emptyset$, за всяко k, $V_k = \emptyset$. Също $E_k = \emptyset$ и $F_l^k = \emptyset$ за всички $k \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}$. Свидетелят d става недефиниран.

5. Конструкция

Както вече отбелязахме, на всяка стъпка s строим множество A_s, низ δ_s с дължина s. Този процес е последователен - с индукция по n ще построим съответно $\delta_s \restriction n$, A_s^n, b_s^n и ще опишем как се променя средата на посетените възли на дървото.

В началото всички възли на дървото са инициализирани, $b_0 = 0$, $\delta_0 = \emptyset$.

Нека сме построили δ_s^n, A_s^n и b_s^n.

Стратегията δ_s^n изпълнява някакви действия и има изход o. Тогава $\delta_s^{n+1} = \delta_s^n\hat{}o$.

I. δ_s^n е G^W стратегия γ.
 $b_s^{n+1} = b_s^n$.
 (a) Ако γ е била инициализирана на някоя стъпка след последното ѝ посещение, $\lambda_\gamma = \varnothing$. Тогава дефинираме λ_γ така: λ_γ е низ с дължина $b_s^n + 1$ и

$$\lambda_\gamma(a) \simeq \begin{cases} 0 & \text{, ако } a \in E_s^\delta \\ 1 & \text{, иначе.} \end{cases}$$

 $b_s^{n+1} = b_s^{n+1} + 1$
 (б) Провери дали: $\exists\mu(\ \lambda_\gamma\hat{}\mu\ \in W\ )$. Ако отговорът е "НЕ", тогава: $\chi_\gamma = \lambda_\gamma$, $A_s^{n+1} = A_s^n$, всички елементи, за които $\chi_\gamma(a) = 1$ са ограничени от γ в A, изходът $o = 1$.
 Ако отговорът е "ДА", тогава $\mu_\gamma =$ най - малкото μ, такова че $\lambda_\gamma\hat{}\mu \in W$. $\chi_\gamma = \lambda_\gamma\hat{}\mu_\gamma$. $b_s^{n+1} = \max(b_s^{n+1}, lh(\chi_\gamma + 1))$. Всички $a \in \mathrm{Dom}(\chi_\gamma)$ и $\chi_\gamma(a) = 1$ са ограничени в A от γ. Всички $a \in \mathrm{Dom}(\chi_\gamma)$ и $a \geq lh(\lambda_\gamma)$ и $\chi_\gamma(a) = 0$ са ограничени извън A от γ. $A_s^{n+1} = A_s^{n+1} \setminus \{a|$ е ограничено извън A от $\gamma\}$, изходът $o = 0$.

II. δ_s^n е R стратегия α.

Тогава сканираме всички подстратегии β , за които има запис в списъка $Watched_\alpha$.

Нека $\langle \beta, E, E_k, F_l^k, d \rangle \in Watched_\alpha$. Провери дали има аксиома от вида $\langle k, E' \rangle \in \Theta_0$, такава че $E' \cap (E \cup E_k) = \emptyset$ или $\langle l, F' \rangle \in$

Θ_1, такава че $F' \cap (E \cup E_k \cup F_l^k) = \emptyset$. Ако има такава аксиома канцелирай d : $\Phi_0 = \Phi_0 \cup \langle d, \emptyset\rangle$, $\Phi_1 = \Phi_0 \cup \langle d, \emptyset\rangle$.

$A_s^{n+1} = A_s^n$, $o = 0$.

III. δ_s^n е S^W стратегия β, подстратегия на α .

Първо проверяваме, дали има запис за β в списъка $Watched_\alpha$ и изтриваме записа ако такъв има.

$b_s^{n+1} = b_s^n$

Изходът от стратегията δ_s^n зависи от това, какъв е бил той на предната стъпка $s-$, когато сме посетили β.

(1) Изходът $o-$ е $< l, k >$. Тогава имаме избрани агитатори - E_k и F_l^k и свидетел d. Проверяваме дали има аксиома от вида $\langle k, E'\rangle \in \Theta_0$, такава че $E' \cap (E \cup E_k) = \emptyset$

а. Ако има: Канцелираме d, $V_k = \emptyset$. Заменяме записа за k в $\mathbb{U}$ с $\langle k, E'\rangle$.

Прилагаме аксиомата $\langle k, E'\rangle$:

(А) $b_s^{n+1} = \max(b_s^{n+1}, \max(E') + 1)$

(Б) Инициализираме всички $\gamma \supseteq \beta\hat{\ }\infty_X$, които имат по- нисък локален приоритет от k.

Всички елемент $a \in E_k \cup F_l^k$ спират да бъдат ограничавани от β.

$A_s^{n+1} = A_s^n$, $o = \beta\hat{\ }\infty_X$

Ако няма:

Проверяваме дали има аксиома от вида $\langle l, F'\rangle \in \Theta_1$, такава че $F' \cap (E \cup E_k \cup F_l^k) = \emptyset$.

б. Ако има: Канцелираме d. Заменяме записа за l в $\mathbb{V}_k$ с $\langle l, F'\rangle$.

Прилагаме аксиомата $\langle l, F'\rangle$:

(А) $b_s^{n+1} = \max(b_s^{n+1}, \max(F') + 1)$

(Б) Инициализираме всички $\gamma \supseteq \beta\hat{\ } < \infty_Y, k >$, които имат по- нисък локален приоритет от $\langle l, k\rangle$.

Всички елемент $a \in F_l^k$ спират да бъдат ограничавани от β.

$A_s^{n+1} = A_s^n \backslash E_k$, $o = \beta\hat{\ } < \infty_Y, k >$

в. Ако няма:

Тогава агитаторите все още са валидни.

$A_s^{n+1} = A_s^n \backslash (E_k \cup F_l^k)$, $o = < l, k >$

(2) Изходът $o-$ е ∞_X

а. Нека k_0 е най- малкото $k \in X \backslash U$. Тук $X = \Theta_0^s(A_s^n)$. Ако има такова, то има и аксиома $\langle k_0, E'\rangle \in \Theta_0^s$ с $E' \subseteq A_s^n$. Тогава $U = U \cup \{k_0\}$ и $\mathbb{U} = \mathbb{U} \cup \{< k_0, E' >\}$.

б. Последователно сканираме елементите на U, докато изчерпим всички или срещнем елемент който предизвиква внимание.

Дефиниция 3.2. Ще казваме, че една аксиома $\langle k, E'\rangle \in \Theta_0$ е приложима, ако са в сила следните две условия:

1. $E' \cap E_s^\beta = \emptyset$

2. Нека Γ е множеството от теза a, които са ограничени извън A от G^W стратегии γ с $\gamma \subseteq \beta\hat{}\infty_X$, които са с по - висок приоритет от k.
Нека $Out1_s^\beta = \Gamma \backslash A_{s-}$.
Тогава $E' \cap Out1_s = \emptyset$.

Елемент $k \in U$ предизвиква внимание, ако за него няма приложима аксиома.
Нека в момента разглеждаме елементът $k \in U$.

А. Ако k не предизвиква внимание, намираме приложима аксиома за k - $\langle k, E' \rangle$, с минимален максимален елемент. Ако записа за k в $\mathbb{U}$ е различен, заменяме го с $\langle k, E' \rangle$. Ако аксиомата $\langle k, E' \rangle$ не е приложена, прилагаме я.
Ако никое k не предизвика внимание, то: $A_s^{n+1} = A_s^n$, $o = \infty_X$.

Б. Ако намерим някое k, което предизвиква внимание, извършваме следните действия:
1.Разглеждаме всички стратегии
$\beta' \in O_1 = \{\beta' | \beta' \supseteq \beta\hat{}\infty_X \bigwedge \beta'\hat{} < \infty_Y, k' > \subseteq \delta_{s-}\}$
β' е посетена на стъпка $s-$ и за нея е дефиниран агитатор $E_{k'}$. Тогава нека $E_{\beta'} = E_{\beta'}^\beta \cup E_k'$, където $E_{\beta'}^\beta = E_{s-}^{\beta'} \backslash E_{s-}^\beta$ - това са елементите, които са ограничени извън A от стратегии които се намират под β, но над β'.
2. Разглеждаме всички стратегии
$\beta' \in O_2 = \{\beta' | \beta' \supseteq \beta\hat{}\infty_X \bigwedge \beta'\hat{} < l', k' > \subseteq \delta_{s-}\}$
β' е посетена на стъпка $s-$ и за нея са дефинирани агитатори $E_{k'}$ и $F_{l'}^{k'}$ и свидетел d'. Тогава нека $E_{\beta'} = E_{\beta'}^\beta \cup E_{k'} \cup F_{l'}^{k'}$, където $E_{\beta'}^\beta = E_{s-}^{\beta'} \backslash E_{s-}^\beta$.
Добавяме към списъка $Watched_{\alpha'}$, на стратегията α' - надстратегията на β', следния запис:
$< \beta', E_{s-}^{\beta'}, E_{k'}, F_{l'}^{k'}, d' >$
Съставяме агитатор за k:
$E_k = (Out1_s \cup \bigcup_{\beta' \in O_1 \cup O_2} E_{\beta'}) \backslash E_s^\beta$
Всички елементи $a \in E_k$ обявяваме за ограничени извън A от β. $A_s^{n+1} = A_s^n \backslash E_k$ и $o = \langle \infty_Y, k \rangle$

(3) Изходът $o-$ е $\langle \infty_Y, k \rangle$.

а. Проверяваме дали има аксиома от вида $\langle k, E' \rangle \in \Theta_0$, такава че $E' \cap (E \cup E_k) = \emptyset$ Ако има: канцелираме d, $V_k = \emptyset$. Заменяме записа за k в $\mathbb{U}$ с $\langle k, E' \rangle$. Прилагаме аксиомата $\langle k, E' \rangle$. Всички елемент $a \in E_k \cup F_l^k$ спират да бъдат ограничавани от β.
$A_s^{n+1} = A_s^n$, $o = \infty_X$.

б. Нека l_0 е най- малкото $l \in Y \backslash V_k$. Тук $Y = \Theta_1^s(A_s^n \backslash E_k)$. Ако има такова, то има и аксиома $\langle l_0, F' \rangle \in \Theta_1^s$ с $F' \subseteq A_s^n$. $V_k = V_k \cup \{l_0\}$, $\mathbb{V}_k = \mathbb{V}_k. \cup \{\langle l_0, F' \rangle\}$.

в. Последователно сканираме елементите на V_k, докато изчерпим всички или срещнем елемент, който предизвиква внимание.

Дефиниция 3.3. Ще казваме, че една аксиома $\langle l, F' \rangle \in \Theta_1$ е приложима, ако са в сила следните три условия:
1. $F' \cap E_s^{\beta} = \emptyset$
2. $F' \cap E_k = \emptyset$
3. Нека Γ е множеството от теза a, които са ограничени извън A от G^W стратегии γ с $\gamma \subseteq \beta\hat{\ }\langle \infty_Y, k \rangle$, които са с по - висок приоритет от $\langle l, k \rangle$.
Нека $Out2_s^{\beta} = \Gamma \backslash A_{s-}$. Тогава $F' \cap Out2_s = \emptyset$.

Елемент $l \in V_k$ предизвиква внимание, ако за него няма приложима аксиома.
Нека в момента разглеждаме елементът $l \in V_k$.

А. Ако l не предизвиква внимание, намираме приложима аксиома за l - $\langle l, F' \rangle$, с минимален максимален елемент. Ако записа за l в $\mathbb{V}_k$ е различен, заменяме го с $\langle l, F' \rangle$. Ако аксиомата $\langle l, F' \rangle$ не е приложена, прилагаме я.
Ако никое l не предизвика внимание, то:
$A_s^{n+1} = A_s^n \backslash E_k$
$o = \langle \infty_Y, k \rangle$

Б. Ако намерим някое l, което предизвиква внимание, извършваме следните действия:
1.Разглеждаме всички стратегии
$\beta' \in O_1 = \{\beta' | \beta' \supseteq \beta\hat{\ }\langle \infty_Y, k \rangle \bigwedge \beta'\hat{\ } < \infty_Y, k' > \subseteq \delta_{s-}\}$
β' е посетена на стъпка $s-$ и за нея е дефиниран агитатор $E_{k'}$. Тогава нека $E_{\beta'} = E_{\beta'}^{\beta} \cup E_k'$, където $E_{\beta'}^{\beta} = E_{s-}^{\beta'} \backslash E_{s-}^{\beta}$ - това са елементите, които са ограничени извън A от стратегии които се намират под β, но над β'.
2.Разглеждаме всички стратегии
$\beta' \in O_2 = \{\beta' | \beta' \supseteq \beta\hat{\ }\infty_X \bigwedge \beta'\hat{\ } < l', k' > \subseteq \delta_{s-}\}$
β' е посетена на стъпка $s-$ и за нея са дефинирани агитатори $E_{k'}$ и $F_{l'}^{k'}$ и свидетел d'. Тогава нека $E_{\beta'} = E_{\beta'}^{\beta} \cup E_{k'} \cup F_{l'}^{k'}$, където $E_{\beta'}^{\beta} = E_{s-}^{\beta'} \backslash E_{s-}^{\beta}$.
Добавяме към списъка $Watched_{\alpha'}$, на стратегията α' - надстратегията на β', следния запис:
$< \beta', E_{s-}^{\beta'}, E_{k'}, F_{l'}^{k'}, d' >$
Съставяме агитатор за l:
$F_l^k = (Out2_s \cup \bigcup_{\beta' \in O_1 \cup O_2} E_{\beta'}) \backslash (E_s^{\beta} \cup E_k)$
Всички елементи $a \in (E_k \cup F_l^k)$ обявяваме за ограничени вътре в A от β.
Намираме най - малкото $d \notin L(\Phi_0)$. Това ще е свидетел за стратегията.
$\Phi_0 = \Phi_0 \cup \{\langle d, \{k\} \rangle\}$, $\Phi_1 = \Phi_1 \cup \{\langle d, \{l\} \rangle\}$.
$A_s^{n+1} = A_s^n$, $o = d_0$.

(4) Изходът $o-$ е d_0. На Проверяваме дали свидетелят за стратегията не се е появил в полуразрешимото множество - обект на стратегията, т.е дали: $d \in W$.
Ако отговорът е "ДА" извършваме последовтелно следните действия . Обявяваме всички елементи $a \in (E_k \cup F_l^k)$ за ограничени извън A. $A_s^{n+1} = A_s^n \backslash (E_k \cup F_l^k)$,$o = \langle l, k \rangle$.
Ако отговорът е "НЕ":
$A_s^{n+1} = A_s^n$, $o = d_0$.

6. Доказателство

Доказателството на теоремата е разделено на няколко групи леми. Първата група леми се отнася за конструкцията. Лемите от тази група са по- скоро факти, които помагат на читателя да добие по- ясна представа за самата конструкция.

Втората група леми се отнасят за ограниченията – дава се ясна идея как се променят ограниченията върху елементите на различните стъпки.

Третата група аксиоми е за агитаторите. Целта ѝ е да покаже, че така дефинирани агитаторите наистина имат свойствата, които заявихме в началото.

Следва група аксиоми за истинския път. И накрая – съществените леми, в които доказваме, че ограниченията наистина са задоволени.

6.1. Леми за конструкцията.

Лема 3.4. *За инициализацията Нека δ е инициализиран на стъпка s. Нека $\delta' \supset \delta$. Тогава δ' също и инициализиран на стъпка s.*

Доказателство. δ може да бъде инициализиран по две причини:

1.$\delta_s < \delta$. Но тогава $\delta_s < \delta < \delta'$ и следователно δ' също е инициализиран на стъпка s

2.Съществува γ - G^W стратегия такава, че $\gamma \subseteq \delta$ и γ е инициализирана на стъпка s. Но тогава $\gamma \subseteq \delta \subseteq \delta'$ и следователно δ' също ще е инициализирана на стъпка s.

□

Лема 3.5. *Нека β е посетен и избира агитатор Ag на стъпка s. Тогава $Ag \cap A_{s-} = \emptyset$*

Доказателство. Допускаме, че съществува $a \in Ag \cap A_{s-}$.

Съгласно конструкция $a \notin Out_1$ (релативно Out_2).

1. Ако избираме агитатор за някое $k \in U$, то $a \in E_{\beta'}$, където $\beta' \in O_1$. Тогава $a \in E^{\beta}_{\beta'} \subseteq E^{\beta'}_{s-} \subseteq \overline{A}_{s-}$ или $a \in E_{k'} \subseteq \overline{A}_{s-}$. Окончателно $a \in \overline{A}_{s-}$.

2. Ако избираме агитатор за $l \in V_k$, то $a \in E_{\beta'}$, където $\beta' \in O_2$. Тогава $a \in E^{\beta}_{\beta'} \subseteq E^{\beta'}_{s-} \subseteq \overline{A}_{s-}$ или $a \in E_{k'} \subseteq \overline{A}_{s-}$ или $a \in F^{k'}_{l'} \subseteq \overline{A}_{s-}$. Окончателно $a \in \overline{A}_{s-}$

□

Лема 3.6. *Нека β е посетен и избира агитатор Ag на стъпка s. Тогава елементите на Ag са ограничени извън A от някоя G^W стратегия $\gamma \supset \beta$ на някоя стъпка $s_0 < s$.*

Доказателство. Допускаме противното. Нека s е най- малката стъпка, на която някоя стратегия β избира агитатор Ag, който съдържа елемент a и a не е ограничен извън A от никоя G^W стратегия $\gamma \supset \beta$. Съгласно конструкцията отново $a \notin Out_1$ (релативно Out_2), защото тези множества се състоят само от елементи ограничен извън A от G^W стратегии $\gamma \supset \beta$.

Тогава $a \in E_{\beta'}$, където $\beta' \in O_1$ (релативно O_2).

Ако $a \in E^{\beta}_{\beta'} \subseteq E^{\beta'}_{s-}$, то a е извадено извън A от някоя стратегия $\delta \supseteq \beta$

1. $\delta = \beta$. Елементът a е бил ограничен от β на стъпка $s-$. Ако β избира E_k, то на стъпка $s-$ не е ограничавал никакви елементи и няма

как a да е бил ограничен от β на стъпка $s-$. Тогава β избира F_l^k и $a \in E_k$. Съгласно дефиницията на агитатор F_l^k имаме, че $F_l^k \cap E_k = \emptyset$. Следователно този случай е невъзможен.

2.$\delta \supset \beta$. Ако δ е G^W стратегия, това противоречи на допускането.

Остава δ да е S^W стратегия, защото R стратегиите не изваждат елементи от A. Тогава a принадлежи на някой агитатор на δ, който е избран на стъпка $s' < s$. Съгласно избора на стъпка s, условието на лемата е в сила за агитатора на δ,избран на стъпка s' и следователно има $\gamma - G^W$ стратегия, която ограничава a на стъпка $s_0 < s' < s$ и $\gamma \supset \delta \supset \beta$.

Ако $a \in E_{k'} \cup F_{l'}^{k'}$, където $F_{l'}^{k'} = \emptyset$ ако $\beta' \in O_1$, разсъждението е подобно: a принадлежи на някой агитатор на β', който е избран на стъпка $s' < s$. Съгласно избора на стъпка s, условието на лемата е в сила за агитатора на β',избран на стъпка s' и следователно има $\gamma - G^W$ стратегия, която ограничава a на стъпка $s_0 < s' < s$ и $\gamma \supset \beta' \supset \beta$.

$\square$

6.2. Леми за ограниченията.

Лема 3.7. *За запазване на ограниченията Нека δ е посетен на стъпки s_1 и s_2. Нека δ не е инициализиран на никоя стъпка $t : s_1 < t \leq s_2$. Тогава $E^\delta_{s_1} = E^\delta_{s_2}$.*

Доказателство. Ще направим доказателството с индукция по дължината на δ.

1.Ако δ има дължина 0, то $\delta = \varnothing$ и $E^\delta_{s_1} = E^\delta_{s_2} = \emptyset$

2.Нека твърдението е в сила за δ с дължина n. Ще докажем, че то е в сила и за $\delta \wedge o$.

Нека $\delta_1 = \delta \wedge o$ е посетен на стъпки s_1 и s_2 и не е инициализиран на никоя стъпка t такава, че $s_1 < t \leq s_2$. Съгласно конструкцията и лемата за инициализацията, δ също е посетен на стъпки s_1 и s_2 и не е инициализиран на никоя стъпка t такава, че $s_1 < t \leq s_2$. По индукционното предположение за него имаме $E^\delta_{s_1} = E^\delta_{s_2}$.

Имаме следните случаи:

Случай 1. δ е R стратегия. Тогава $E^\delta_{s_1} = E^{\delta_1}_{s_1}$ и $E^\delta_{s_2} = E^{\delta_1}_{s_2}$

Случай 2. δ е G^W стратегия

а. $o = 0$. Тогава $E^{\delta_1}_{s_1} = E^\delta_{s_1} \cup \{a | a \geq lh(\lambda^{s_1}_\delta) \bigwedge \chi^{s_1}_\delta(a) = 0\}$ и $E^{\delta_1}_{s_2} = E^{\delta_1}_{s_2} \cup \{a | a \geq lh(\lambda^{s_2}_\delta) \bigwedge \chi^{s_2}_\delta(a) = 0\}$. Понеже δ не е инициализиран на стъпки t такава, че $s_1 < t \leq s_2$ и следователно $\chi^{s_1}_\delta = \chi^{s_2}_\delta$, имаме и $E^{\delta_1}_{s_1} = E^{\delta_1}_{s_2}$.

б. $o = 1$. Тогава $E^\delta_{s_1} = E^{\delta_1}_{s_1}$ и $E^\delta_{s_2} = E^{\delta_1}_{s_2}$, защото δ ограничава елементи извън A само ако има изход $o = 0$.

Случай 3. δ е S^W стратегия.

а. $o = \infty_X$ или $o = d_0$. Тогава отново $E^\delta_{s_1} = E^{\delta_1}_{s_1}$ и $E^\delta_{s_2} = E^{\delta_1}_{s_2}$

б. $o = \langle \infty_Y, k \rangle$. Тогава $E^{\delta_1}_{s_1} = E^\delta_{s_1} \cup (E_k)_{s_1}$ и $E^{\delta_1}_{s_2} = E^\delta_{s_2} \cup (E_k)_{s_2}$. Ако допуснем, че $(E_k)_{s_1} \neq (E_k)_{s_2}$, то на някоя стъпка t такава, че $s_1 < t \leq s_2$ сме имали изход $o = \infty_X$. Но $\infty_X <_L \langle \infty_Y, k \rangle$ и следователно δ_1 е инициализиран на стъпка t . Това противоречи на условието.

в. $o = \langle l, k\rangle$. Тогава $E^{\delta_1}_{s_1} = E^{\delta}_{s_1} \cup (E_k)_{s_1} \cup (F^k_l)_{s_1}$ и $E^{\delta_1}_{s_2} = E^{\delta}_{s_2} \cup (E_k)_{s_2} \cup (F^k_l)_{s_2}$. Ако допуснем, че $(E_k)_{s_1} \neq (E_k)_{s_2}$, то на някоя стъпка t такава, че $s_1 < t \leq s_2$ сме имали изход $o = \infty_X$. Но $\infty_X <_L \langle l, k\rangle$ и следователно на стъпка t δ_1 е инициализиран. Това противоречи на условието. Ако допуснем, че $(F^k_l)_{s_1} \neq (F^k_l)_{s_2}$, то на някоя стъпка t такава, че $s_1 < t \leq s_2$ сме имали изход $o = \langle \infty_Y, k\rangle$. Но $\langle \infty_Y, k\rangle <_L \langle l, k\rangle$ и следователно на стъпка t δ_1 е инициализиран. Това противоречи на условието.

□

Следствие 3.8. *Нека β е посетен и избира агитатор Ag на стъпка s. Тогава елементите на Ag са ограничени извън A от някоя δ, такава че $\beta \subset \delta \subseteq \delta_{t-}$*

Доказателство. Нека $a \in Ag$. Тогава $a \in \overline{A}_{s-}$ и следователно е ограничена извън A от някоя стратегия $\delta \subset \delta_{s-}$. Но съгласно конструкцията $Ag \cap E^{\beta}_s = \emptyset$. Забелязваме, че β не е инициализирана на стъпка s. Иначе щяхме да имаме единствен елемент $k_0 \in U$, за който щеше да има приложима аксиома. Следователно $E^{\beta}_{s-} = E^{\beta}_s$ и $\delta \not\subset \beta$.

Ако $\delta = \beta$,то елементът a е бил ограничен от β на стъпка $s-$. Ако β избира E_k на стъпка s, то на стъпка $s-$ не е ограничавал никакви елементи и няма как a да е бил ограничен от β на стъпка $s-$. Тогава β избира F^k_l и $a \in E_k$. Агитаторът E_k не се е променил на стъпка s, защото не сме имали изход ∞_X. Съгласно дефиницията на агитатор F^k_l имаме, че $F^k_l \cap E_k = \emptyset$.

Така получихме, че $\delta \supset \beta$.

□

Следват три леми за спазване на ограниченията.

Лема 3.9. *Нека на стъпка s посещаваме δ и $a \in E^{\delta}_s$. Тогава δ не може да ограничи a на стъпка s.*

Доказателство. 1. Нека δ е G^W стратегия. Нека $s_0 \leq s$ е стъпката на която е посетен δ след последна инициализация. Съгласно лемата за запазване на ограниченията $E^{\delta}_{s_0} = E^{\delta}_s$ и следователно $a \in E^{\delta}_{s_0}$. Тогава $a < lh(\lambda_\delta)$ и $\chi_\delta(a) = 0$. δ не ограничава a.

2. Нека δ е S^W стратегия. Тогава δ ограничава елементи, които принадлежат на някой агитатор Ag. Нека $s_0 \leq s$ е стъпката на която е посетен δ и е избран агитатора Ag. Съгласно лемата за запазване на ограниченията $E^{\delta}_{s_0} = E^{\delta}_s$ и следователно $a \in E^{\delta}_{s_0}$. Съгласно конструкцията $Ag \cap E^{\delta}_{s_0} = \emptyset$. Следователно δ не ограничава a.

□

Лема 3.10. *Нека на стъпка s посещаваме δ и $a \in F^{\delta}_s$. Тогава δ не може да ограничи a извън A на стъпка s.*

Доказателство. Нека a е ограничено в A от δ_1 на стъпка $s1 \leq s$. Нека s_2 е първата стъпка след s_1 , на която δ е достъпен. Ще покажем, че s_2 е първа стъпка след инициализация, на която е достъпен δ.

1. $\delta_1 <_L \delta$. Тогава δ е инициализиран на стъпка s_1.
2. $\delta_1 \subset \delta$.

а. δ_1 е G^W стратегия.

Ако δ_1 избира λ на стъпка s_1, то s_1 е първа стъпка след инициализиация, на която е достъпен δ_1. По лемата за инициализацията δ е инизиализиран на стъпката, на която е инициализиран δ_1, а по конструкция δ не е достъпен на никоя стъпка, на която не е достъпен δ_1.

Ако δ_1 избира μ_δ на стъпка s_1, то $\delta \supseteq \delta_1 \wedge 0$ и за пръв път след инициализацията на δ_1 са достъпни стратегиите в поддървото на $\delta_1 \wedge 0$.

б. δ_1 е G^w стратегия и $\delta \supseteq \delta_1 \wedge d_0$, само тогава δ_1 ограничава елементи в A. Тогава на стъпка s_1- имаме $o- = \langle \infty_Y, k\rangle$. $\langle \infty_Y, k\rangle <_L d_0$ и следователно δ е инициализиран на стъпка s_1-.

Тогава ако δ е G^W стратегия, δ избира λ_δ след стъпка s_1 и следователно $a < lh(\lambda_\delta)$, δ не може да ограничи a извън A.

Ако δ е S^W стратегия, и допуснем, че δ ограничава a извън A, то a попада в някой агитатор Ag. Елементите на агитатора са ограничени извън A от G^W стратегии $\gamma \supset \delta$. Те също са инициализирани, когато δ е инициализиран. Следователно избират своята λ_γ след стъпка s_1 и не могат да ограничат a извън A.

$\square$

Лема 3.11. $\forall s \forall \delta (E_s^\delta \cap F_s^\delta = \emptyset)$

Доказателство. Допускаме противното: $\exists s \exists \delta (E_s^\delta \cap F_s^\delta \neq \emptyset)$ ДА вземем най- малката стъпка s и най - малкото δ ,за които е в сила допускането. Нека $a \in E_s^\delta \cap F_s^\delta$. a е ограничено извън A от $\delta_1 \subset \delta$. a е ограничено извън A от $\delta_2 < \delta$. Ще разгледаме възможното разположение на δ_1 и δ_2.

От конструкцията следва $\delta_1 \neq \delta_2$. 1. $\delta_1 < \delta_2$. Тогава $\delta_1 \subset \delta_2$.

Нека $\exists \delta' (\delta_1 \subset \delta' \bigwedge \delta' \subset \delta \bigwedge \delta' \subseteq \delta_2)$ Нека a е ограничено от δ_2 за пръв път след последната инициализация на δ_2 на стъпка s_2. Тогава δ' не се инициализира на стъпки t такива, че $s_2 < t \leq s$. Следователно $E_{s_2}^{\delta'} = E_s^{\delta'}$. Но $E_{s_2}^{\delta_2} \supseteq E_{s_2}^{\delta'}$ и следователно $a \in E_{s_2}^{\delta_2}$. Тогава δ_2 не може да ограничи a.

Ако $\neg \exists \delta'$ с посоченото горе свойство, тогава $\delta_1 \subset \delta_1 \wedge o_1 \subseteq \delta_2$ и $\delta_1 \subset \delta_1 \wedge o_2 \subseteq \delta$ и $o_1 <_L o_2$. Ако δ_1 е G^W стратегия, то $o_2 = 1$ и δ_1 не ограничава елементи извън A на стъпка s.

Ако δ_1 е S^W стратегия, то a принадлежи на някой агитатор Ag. Нека той е избран на стъпка t. Тогава a е ограничен от някоя стратегия σ такава, че $\sigma \subset \delta_1$ на стъпка $t-$.

Ако допуснем $t \leq t_2$, то $o_1 = d_0$. Иначе $a \in E_{s_2}^{\delta_2}$ и не може а бъде ограничено от δ_2. Но тогава o_2 не може да бъде дефинирано в съответствие с изискването $o_1 <_L o_2$. Следователно $t_2 < t$ и $t_2 \leq t-$. Ако $t_2 = t-$, то $\delta_2 \subseteq \delta_{t-}$. Ако допуснем $\delta_2 \subset \sigma$, то $a \in F_{t-}^\sigma$. Ако допуснем $\delta_2 \supset \sigma$, то $a \in E_{t-}^{\delta_2}$. Остава $t_2 < t-$. Тогава пак ще разгледам различните разположение на σ и δ_2. Ако $\sigma > \delta_2$, то $a \in F_{t-}^\sigma$ и σ не може да ограничи a извън A. Ако $\sigma <_L$, то δ_2 е инициализиран на стъпка $t-$ - но това противоречи на избора на t_2. Ако $\sigma \subset \delta_2$, то $a \in E_{s_2}^{\delta_2}$ и δ_2 не може да ограничи a.

$\square$

6.3. Леми за агитаторите.

Лема 3.12. *1. Нека β е посетен на стъпка t_0 и избира агитатор E_k за k. Нека $\forall t > t_0(\beta \wedge \infty_X$ не се инциализира и не е достъпен). Тогава ако $E_k \subseteq A$, то $k \in X$.*

2. Нека β е посетен на стъпка t_0 и избира агитатор F_l^k за k. Нека $\forall t > t_0(\beta \wedge \langle\infty_Y, k\rangle$ не се инциализира и не е достъпен). Тогава ако $F_l^k \subseteq A$, то $l \in Y$.

Доказателство. 1. След като на стъпка t_0 избираме агитатор за k, то $k \in U$ и $o_{t_0}- = \infty_X$. Тогава на стъпка t_0- сме инициализирали всички възли δ такива, че $\beta\hat{}\infty_X <_L \delta$. На стъпка t_0 инициализираме всички δ, $\beta <_L \delta$, а възлите δ' такива, че $\beta \wedge \infty_X <_L \delta'$ и $\beta \subset \delta'$ не са достъпни след инициализацията им на стъпка t_0-, преди отново да е посетен β на t_0. Нека записа за k в $\mathbb{U}$ е $< k, E' >$. $< k, E' >$ е приложена най - късно на стъпка t_0. Следователно всички възли δ такива , че $\beta \wedge \infty_X <_L \delta$ не могат да ограничат извън A елементи от E'. Да допуснем, че $E' \not\subseteq A$. Нека $a \in E' \cap overline(A)$. a е извадено от A на безброй много стъпки t. Да разгледаме първата стъпка t_1 след t_0, на която $a \notin A_{t_1}$. Нека δ ограничава a извън A на стъпка t_1. Знаем, че $\beta \wedge \infty_X \not<_L \delta$.

1. $\delta \supseteq \beta \wedge \infty_X$. Тогава δ не е достъпен на стъпка $t_1 > t_0$.

2. $\delta <_L \beta \wedge \infty_X$. Тогава $\beta \wedge \infty_X$ се инициализира на стъпка t_1, но това противоречи на условието.

3. $\delta = \beta$. Тогава $a \in E_k$, а $E_k \subset A$.

4. $\delta \subset \beta$.

Ако δ е G^W стратегия, то $\delta \wedge 0$ е достъпен на t_1 . Ако $\delta \wedge 0 \subseteq \beta$, тогава δ не е инициализиран на стъпки t, такива че $t_0- < t < t_1$. Следователно $a \in E^{\beta}_{t_0-}$ и $a \notin E'$. Ако $\delta \wedge 1 \subseteq \beta$. Тогава β се е инициализиран на стъпка t_1 - противоречие.

Ако δ е S^W стратегия, то a попада в някой агитатор Ag, които е изваден от A на стъпка t_1. Нека $s \leq t_1$ е стъпката , на която е избран Ag. Тогава $a \notin A_{s-}$. Съгласно избора на t_1, $s- \leq t_0$. Дори $s- < t_0$, защото ако $a \notin A_{t_0}$, то $a \in E_k \subseteq A$. Тогава $s \leq t_0$. Ако $\delta \wedge \langle\infty_Y, k\rangle \subseteq \beta$ или $\delta \wedge \langle l, k\rangle \subseteq \beta$, то $s \leq t_0-$. Наистина: ако $s = t0$, то на стъпка $s- \geq t_0-$ сме имали изход от δ, който е в ляво от β и сме инициализирали β. Няма как такъв случай β да избира агитатор на стъпка t_0 - която е първа след инициализация. Тогава $a \in E^{\beta}_{t_0-}$ и $a \notin E'$. Ако $\delta \wedge d_0 \subseteq \beta$, то β е инициализиран на стъпка t_1, а ако $\delta \wedge \infty_X \subseteq \beta$, то β не е достъпен на стъпки $t \geq s$, в частност β не е достъпен на стъпка t_0.

2. Втората част от лемата се доказва аналогично:

След като на стъпка t_0 избираме агитатор за l, то $l \in V_k$ и $o_{t_0}- = \langle\infty_Y, k\rangle$. Тогава на стъпка t_0- сме инициализирали всички възли δ такива, че $\beta \wedge \langle\infty_Y, k\rangle <_L \delta$. На стъпка t_0 инициализираме всички δ, $\beta <_L \delta$, а възлите δ' такива, че $\beta \wedge \langle\infty_Y, k\rangle <_L < delta'$ и $\beta \subset \delta'$ не са достъпни след инициализацията им на стъпка t_0-, преди отново да е посетен β на t_0. Нека записа за l в $\mathbb{V}_k$ е $< l, F' >$. $< l, F' >$ е приложена най - късно на стъпка t_0. Следователно всички възли δ такива , че $\beta \wedge \langle\infty_Y, k\rangle <_L \delta$ не могат да ограничат извън A елементи от F'. Да допуснем, че $F' \not\subseteq A$. Нека $a \in F' \cap overline(A)$. a е извадено от A на безброй много стъпки

t. Да разгледаме първата стъпка t_1 след t_0, на която $a \notin A_{t_1}$. Нека δ ограничава a извън A на стъпка t_1. Знаем, че $\beta \wedge \langle \infty_Y, k\rangle \not<_L \delta$.

1. $\delta \supseteq \beta \wedge \langle \infty_Y, k\rangle$. Тогава δ не е достъпен на стъпка $t_1 > t_0$.

2. $\delta <_L \beta \wedge \langle \infty_Y, k\rangle$. Тогава $\beta \wedge \langle \infty_Y, k\rangle$ се инициализира на стъпка t_1, но това противоречи на условието.

3. $\delta = \beta$. Тогава $a \in E_k \cup F_l^k$. $E_k \cap F' = \emptyset$, защото E_k вече е бил избран на стъпка t_0-, на която $< l, F' >$ е приложима. $F_l^k \subseteq A$.

4. $\delta \subset \beta$.

Ако δ е G^W стратегия, то $\delta \wedge 0$ е достъпен на t_1 . Ако $\delta \wedge 0 \subseteq \beta$, тогава δ не е инициализиран на стъпки t, такива че $t_0- < t_1$. Следователно $a \in E_{t_0-}^{\beta}$ и $a \notin F'$. Ако $\delta \wedge 0 \subseteq \beta$. Тогава β се е инициализиран на стъпка t_1 - противоречие.

Ако δ е S^W стратегия, то a попада в някой агитатор Ag, който е изваден от A на стъпка t_1. Нека $s \leq t_1$ е стъпката , на която е избран Ag. Тогава $a \notin A_{s-}$. Съгласно избора на t_1, $s- \leq t_0$. Дори $s- < t_0$, защото ако $a \notin A_{t_0}$, то $a \in F_l^k \subseteq A$ или $a \in E_k$, а $E_k \cap F' = \emptyset$. Тогава $s \leq t_0$. Ако $\delta \wedge \langle \infty_Y, k\rangle \subseteq \beta$ или $\delta \wedge \langle l, k\rangle \subseteq \beta$, то $s \leq t_0-$. Наистина: ако $s = t0$, то на стъпка $s- \geq t_0-$ сме имали изход от δ, който е в ляво от β и сме инициализирали β. Няма как такъв случай β да избира агитатор на стъпка t_0 - която е първа след инициализация. Тогава $a \in E_{t_0-}^{\beta}$ и $a \notin F'$. Ако $\delta \wedge d_0 \subseteq \beta$, то β е инициализиран на стъпка t_1, а ако $\delta \wedge \infty_X \subseteq \beta$, то β не е достъпен на стъпки $t \geq s$, в частност β не е достъпен на стъпка t_0.

$\square$

Лема 3.13. *Нека $\beta \wedge \langle l, k\rangle$ е достъпен на стъпка t_0. Нека β не се инициализира и не е достъпен на стъпки $t > t_0$. Тогава ако $(E_k \cup F_l^k) \not\subset A$, то $(E_k \cup F_l^k \cup E_{t_0}^{\beta}) \cap A = \emptyset$.*

Доказателство. Нека $(E_k \cup F_l^k) \not\subset A$. Нека $a \in E_k \cup F_l^k$, то a е ограничено извън A от някоя G^W стратегия $\gamma \supset \beta$. На стъпки $t > t_0$ γ не е достъпен, следователно ако $a \notin A_t$, то a е ограничено извън A от някоя S^W стратегия $\delta \supset \beta$.

Нека a е извадено на стъпка $t > t_0$ от β_1. Тогава a принадлежи на някой агитатор на β_1 - Ag_1. Нека той е избран на стъпка t_1. Ако допуснем, че $t \leq t_0$, то β не е достъпен на стъпки $s \geq t$, в частност β не е достъпен на стъпка t_0. Следователно $t_0 < t_1$. $a \notin A_{t_1-}$ и $t_1- \geq t_0$. Ако $t_1- = t_0$, то $E_k \cup F_l^k \subseteq Ag_1$. Ако $t_1- > t_0$, то има друга стратегия β_2 такава, че $\beta_1 \subset \beta_2 \subset \beta$ и a принадлежи на неин агитатор Ag_2. С аналогични разсъждения получаваме една монотонно намаляваща редица от стъпки $t_1 > t_2 > \dots$, която е ограничена от t_0. Следователно тя е крайна.

Така винаги, когато $a \notin A_t$, имаме крайна редица от S^W стратегии $\beta_1 \subset \beta_2 \subset \dots \subset \beta$, и съответна монотонна редица от агитаторите им $Ag_1 \supset Ag_2 \supset \dots \supset (E_k \cup F_l^k)$, като Ag_1 е ограничен извън A на стъпка t. Следователно ако $a \notin A_t$ и $t > t_0$, то $(E_k \cup F_l^k) \cup A_t = \emptyset$ и в крайна сметка $(E_k \cup F_l^k) \cup A = \emptyset$.

Да допуснем сега, че $b \in E_{t_0}^{\beta} \cup A \neq \emptyset$.Тогава има някоя стъпка t_b такава, че $b \in A_t$ за всички $t > t_b$. Нека t' е такава, че $(E_k \cup F_l^k) \cup A_t = \emptyset$ и $t' > t_b$. Тогава има редица от S^W стратегии $\beta_1 \subset \beta_2 \subset \dots \subset \beta_n \subset \beta$ и съответна редица $Ag_1 \supset Ag_2 \supset \cdots \supset (E_k \cup F_l^k)$ от агитаторите им. Съгласно лемата за запазване на ограниченията можем да представим $E_{t_0}^{\beta}$ по следния начин :

$E_{t_0}^{\beta} = E_{t'}^{\beta_1} \cup (E_{\beta_2}^{\beta_1})_{t_2} \cup \cdots \cup (E_{\beta}^{\beta_n})_{t_0}$

Ако $b \in (E_{\beta_2}^{\beta_1})_{t_2} \cup \cdots \cup (E_{\beta}^{\beta_n})_{t_0}$, то $b \in Ag_1$ и следователно $b \notin A_{t'}$. Ако $b \in E_t^{\beta_1}$, то $b \notin A_{t'}$. Така достигнахме до противоречие. Следователно $E_{t_0}^{\beta} \cup A = \emptyset$.

□

Лема 3.14. *Нека $\beta \wedge d_0$ е достъпен на стъпка t_0. Нека $\beta \wedge d_0$ не се инициализира на стъпки $t > t_0$ Тогава $(E_k \cup F_l^k) \subset A$.*

Доказателство. Нека $a \in E_k \cup F_l^k$. Тогава a е ограничено извън A от някоя G^W стратегия $\gamma \supset \beta$, по- точно $\gamma \supseteq \beta \wedge \infty_X$ или $\gamma \supseteq \beta \wedge \langle \infty_Y, k \rangle$. Тогава γ не е достъпна на стъпки $t > t_0$. Да допуснем, че $a \notin A$. Ако $a \notin A_t$, то a е извадена от A_t от някоя S^W стратегия δ на стъпка t. Нека t_1 най - малката стъпка след t_0 такава че $a \notin A_{t_1}$. Тогава на стъпка t_1 a попада в агитатор Ag_1 на някоя S^W стратегия β_1. Нека Ag_1 е избран на стъпка $t_2 \leq t_1$. Ако $t_2 \leq t_0$, то β не е достъпен на $t \geq t_2$, в частност и на стъпка t_0. Тогава $t_2 > t_0$ и $a \notin A_{t_2-}$. Съгласно избора на t_1 и $t_2- < t_1$ получаваме $t_2- = t_0$. Но това е абсурдно , защото на стъпка t_0 е бил достъпен $\beta \wedge d_0$ и $a \in (E_k \cup F_l^k) \subset A_{t_0}$.

□

6.4. Истински път. Ще дефинираме истинския път в дървото от стратегии и ще го означим с f. Едновременно с дефиницията ще покажем, че:

$\forall n \overset{\infty}{\exists} t(f \restriction n \subseteq \delta_t)$

Дефиницията на истинския път е с индукция по n.

Дефиниция 3.15. 1. $f \restriction 0 = \varnothing$ - $\forall t(\varnothing \subseteq \delta_t)$

2. Нека сме дефинирали $f \restriction n$ и нека за него е в сила твърдението. Ще дефинираме $f \restriction n+1 = f \restriction n\hat{\ }o$, където o е изходът от стратегията $f \restriction n$

I. Ако $f \restriction n$ е R стратегия, то $o = 0$. Винаги когато посетим $f \restriction n$, посещаваме и $f \restriction (n+1)$.

II. Ако $f \restriction n$ е G^W стратегия, то възможните изходи са два - 0 и 1. По принципа на Дирихле, тъй като безброй много пъти посещаваме $f \restriction n$ поне един от двата изхода ще имаме безброй много пъти. Тогава, ако:

$$\overset{\infty}{\exists} t(f \restriction n\hat{\ }0 \subseteq \delta_t)$$

то $o = 0$. Иначе $f \restriction n\hat{\ }0$ се посещава само краен брой пъти и съществува t_0, такова че $\forall t > t_0(f \restriction n \subseteq \delta_t \Rightarrow f \restriction n\hat{\ }1 \subseteq \delta_t$. Тогава $o = 1$.

III. Ако $f \restriction n$ е S^W стратегия, то:

(а) Ако:

$$\overset{\infty}{\exists} t(f \restriction n\hat{\ }\infty_X \subseteq \delta_t)$$

то $o = \infty_X$. Иначе съществува t_1, такова че $\forall t > t_1(f \restriction n \subseteq \delta_t \Rightarrow f \restriction n\hat{\ }\infty_X \not\subseteq \delta_t$. На стъпка t_1 $f \restriction n$ е избрала агитатор E_k и е имала изход $\langle\infty_Y, k\rangle$. Тогава за стъпки по - големи от t_1 , възможните изходи са измежду $\langle\infty_Y, k\rangle$, $anglk$ за някое естествено l и d_0.Следователно

$$\forall t > t_1(f \restriction n \subseteq \delta_t \Rightarrow (f \restriction n\hat{\ }\langle\infty_Y, k\rangle \subseteq \delta_t) \bigvee \exists l(f \restriction n\hat{\ }\langle l, k\rangle \subseteq \delta_t) \bigvee f \restriction n\hat{\ }d_0 \subseteq \delta_t)$$

Ако:

$$\overset{\infty}{\exists} t(f \restriction n\hat{\ }\langle\infty_Y, k\rangle \subseteq \delta_t)$$

То $o = \langle\infty_Y, k\rangle$.

Иначе съществува $t_2 \geq t_1$, такова че $\forall t > t_2(f \restriction n \subseteq \delta_t \Rightarrow (f \restriction n\hat{\ }\infty_X \not\subseteq \delta_t \bigwedge f \restriction n\hat{\ }\langle\infty_Y, k\rangle \not\subseteq \delta_t)$. Тогава на стъпка t_2 $f \restriction$ избира втори агитатор F_l^k и има изход d_0. За стъпки $t > t_2$ възможните изходи са d_0 и $\langle l, k\rangle$.

$$\forall t > t_2(f \restriction n \subseteq \delta_t \Rightarrow (f \restriction n\hat{\ }\langle l, k\rangle \subseteq \delta_t \vee f \restriction n\hat{\ }d_0 \subseteq \delta_t))$$

.

При това, ако на някоя стъпка $t_3 > t_2$ имаме изход $\langle l, k\rangle$, то на всички стъпки $t \geq t_3$, ще имаме този изход, защото от $\langle l, k\rangle$, не можем да се върнем в d_0 без да минем през $\langle\infty_Y, k\rangle$ или ∞_X.

(б) Ако никога няма изхода $\langle l, k\rangle$, т.е.:

$$\forall t > t_2(f \restriction n \subseteq \delta_t \Rightarrow f \restriction n\hat{\ }d_0 \subseteq \delta_t)$$

, то $o = d_0$.

(ц) Иначе съществува t_3, такова че:

$$\forall t > t_3 (f \restriction n \subseteq \delta_t \Rightarrow f \restriction n\hat{}\langle l, k\rangle \subseteq \delta_t)$$

. Тогава $o = \langle l, k\rangle$.

За да докажем, че истинския път спира да се инициализира трябва да направим две стъпки. Първо ще докажем лема за най- лявост на истински път. След това ще разгледаме въпроса колко пъти може една S^W стратегия да инициализира една G^W стратегия в така наречената лема за стабилност.

Лема 3.16. $\forall n \exists t_n \forall t > t_n (f \restriction n \not<_L \delta_t)$

Доказателство. Доказателството е с индукция по n:

1. Случаят $n = 0$ е тривиален, защото $\forall t (f \restriction 0 = \varnothing \not<_L \delta_t)$

2. Нека твърдението е в сила за n и нека t_n е стъпка такава, че $\forall t > t_n (f \restriction n \not<_L \delta_t)$. Тогава ако на някоя стъпка $t > t_n$ е в сила $\delta_t <_L f \restriction (n+1) = f \restriction n\hat{}o$, то имаме изход o' от $f \restriction n$, за който $o' <_L o$. Това не е възможно ако $f \restriction n$ е R стратегия, защото тя има единствен изход.

(1) Ако $f \restriction n$ е G^W стратегия, то $o' = 0$ и $o = 1$. Съгласно дефиницията на истинския път съществува t_0, такова че $\forall t > t_0 (f \restriction n \subseteq \delta_t \Rightarrow f \restriction n\hat{}1 \subseteq \delta_t$. Тогава нека $t_{n+1} = max\{t_n, t_0\}$.

(2) Ако $f \restriction n$ е S^W стратегия, то има ме няколко възможности:
   а. $o' = \infty_X$. Тогава съгласно дефиницията на истинския път съществува t_1, такова че $\forall t > t_1 (f \restriction n \subseteq \delta_t \Rightarrow f \restriction n\hat{}\infty_X \not\subseteq \delta_t$. Тогава нека $t_{n+1} = max\{t_n, t_0\}$.
   б. $o' \in T_{k'}$ за някое k'. Тогава $o \in T_k \cup d_0$, за някое k и $k' \leq k$
   - Ако $o \in T_k$ и $k' < k$, то съществува t_1, такова че $\forall t > t_1 (f \restriction n \subseteq \delta_t \Rightarrow f \restriction n\hat{}o \subseteq \delta_t \bigwedge o \in T_k \cup d_0$. Тогава нека $t_{n+1} = max\{t_n, t_1\}$.
   - Ако $k = k'$ и $o' = \langle \infty_Y, k\rangle$,то $o = \langle l, k\rangle$ или $o = d_0$ и знаем, че съществува t_2, такова че $\forall t > t_2 (f \restriction n \subseteq \delta_t \Rightarrow (f \restriction n\hat{}\langle l, k\rangle \subseteq \delta_t \vee f \restriction n\hat{}d_0 \subseteq \delta_t)$. Нека $t_{n+1} = max\{t_n, t_2\}$.
   - Ако $k = k'$ и $o' = \langle l, k\rangle$,то $o = d_0$ и знаем, че съществува t_2, такова че $\forall t > t_2 (f \restriction n \subseteq \delta_t \Rightarrow f \restriction n\hat{}d_0 \subseteq \delta_t)$. Нека $t_{n+1} = max\{t_n, t_2\}$.

□

Лема 3.17. *За всяка*

$$strategi\emptyset$$

е в сила:

1.Ако $\beta\hat{}\infty_X \subseteq f$, то за всяко $k \in U$ съществува аксиома $\langle k, E'\rangle \in \Theta_0$ и стъпка t_k, такива, че ако $t > t_k$ и β е достъпен на стъпка t и $o- = \infty_X$, то $\langle k, E'\rangle$ е приложима за k и следователно k не предизвиква внимание. За такава аксиома $\langle k, E'\rangle$ е в сила $E' \subseteq A$.

2.Ако $\beta\hat{}\langle \infty_Y, k\rangle \subseteq f$, то за всяко $l \in V_k$ съществува аксиома $\langle l, F'\rangle \in \Theta_1$ и стъпка t_l, такива, че ако $t > t_l$ и β е достъпен на стъпка t и $o- = \langle \infty_Y, k\rangle$, то $\langle l, F'\rangle$ е приложима за l и следователно l не предизвиква внимание. За такава аксиома $\langle l, F'\rangle$ е в сила $F' \subseteq A$.

Доказателство. Да допуснем противното. И нека $\beta \subseteq f$ е най - малката стратегия, за която твърдението не е вярно.

1. $\beta\hat{}\infty_X \subseteq f$ и $k \in U_\beta$ е най - малкият елемент, такива че, k предизвиква внимание безброй много пъти.

Нека

$$\Gamma = \left\{\gamma \supseteq \beta\hat{}\infty_X | \gamma \text{ е } G^W \text{стратегия с по - висок приоритет от } k\right\}$$

$\Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma | \gamma \text{има постоянен низ } \chi_\gamma \text{ за стъпки } t > t_\gamma\}$, $\Gamma_2 = \Gamma \backslash \Gamma_1$.

Забележка: Ако $f <_L \gamma$, то $\gamma \in \Gamma_2$.

Ако $\gamma \in \Gamma_2$, то дължината на λ_γ расте неограничено с нарастване на номера на стъпката, т.е. $\forall n \exists t_n \forall t > t_n (lh((\lambda_\gamma)_t) > n)$

Избираме стъпка t толкова голяма, че:

(1) За всяка S^W стратегия β' такава, че $\beta' \subset \beta$, елементите на $U_{\beta'}$ и на $V_{k'}$,където $k' \in \mathbb{N}$, които имат по - висок локален приоритет от $\gamma \in \Gamma$, вече не предизвикват внимание. За тези елементи вече има съответна аксиома, която винаги е приложима, и всички аксиома и с по - малък елемент, които се прилагат на някоя стъпка от конструкцията, вече са приложени. Съгласно избора на β като най- малката стратегия, за която твърдението не е в сила, можем да изберем t по този начин.
(2) За всички елементи $m \in U$, такива че $m \leq k$, имаме $min(U)_t$.
(3) Всички елементи $m < k$, вече не предизвикват внимание на стъпки $s > t$. Съгласно избора на k като най- малък елемент от U, който предизвиква внимание повече от краен брой пъти можем да изберем t по този начин.
(4) Нека $M = max\{lh\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ Нека t_M е стъпката, за която е в сила $\forall s > t_M (\delta_s \not<_L f \upharpoonright M)$ от теоремата за най- лявост. Тогава $t > t_M$.
(5) За всички стратегии $\gamma \in \Gamma_1$, $t > t_\gamma$

Съгласно избора на t и по- точно изискванията с номер 1 и 4 имаме, че на стъпки $s > t$, β не се инициализира.

Нека $t_1 > t$ и $f \upharpoonright M$ е достъпен на стъпка t_1. Съгласно дефиницията на истинския път и факта, че $\forall n \overset{\infty}{\exists} t(f \upharpoonright n \subseteq \delta_t)$, такава стъпка t_1 съществува.

Нека t_1+ е следващата стъпка, на която е достъпен β. Имаме предходен изход $o- = \infty_X$. Съгласно конструкцията последователно проверяваме елементите на U и променяме съответно записите им в $\mathbb{U}$. Елементите $m < k$ вече не предизвикват внимание. Възможно е k да предизвика внимание.

(1) Ако k не предизвиква внимание, то за аксиомата $\langle k, E' \rangle$, записана в $\mathbb{U}$ имаме:
  (а) $E' \cap E^\beta_{t_1+} = \emptyset$
  (б) $E' \cap \{a | a \text{ е ограничено извън } A \text{ от стратегии } \gamma \in \Gamma_1\}$
  $\cap \{a | a \text{ е ограничено от стратегия } \delta \subseteq f \upharpoonright M \text{ на стъпка } t_1\} = \emptyset$
(2) Ако k предизвиква внимание на стъпка t_1+, то съставяме агитатор E_k и минаваме вдясно от истинския път. Нека t_2 е следващата стъпка, на която е достъпен $\beta\hat{}\infty_X$. Съгласно конструкцията на тази стъпка сме намерили аксиома $\langle k, E'' \rangle$, за която отново са изпълнени

(а) $E' \cap E^{\beta}_{t_1+} = \emptyset$, защото β е достъпен на стъпки t_1+ и t_2, не е инициализиран на стъпки $s : t_1+ < s \leq t_2$ и съгласно лемата за запазване на ограниченията $E^{\beta}_{t_1+} = E^{\beta}_{t_2}$.

(б) $E' \cap \{a|a$ е ограничено извън A от стратегии $\gamma \in \Gamma_1\}$ $\cap \{a|a$ е ограничено от стратегия $\delta \subseteq f \restriction M$ на стъпка $t_1\} = \emptyset$, защото $\{a|a$ е ограничено извън A от стратегии $\gamma \in \Gamma_1\}$ $\cap \{a|a$ е ограничено от стратегия $\delta \subseteq f \restriction M$ на стъпка $t_1\} \subseteq E_k$ и $E_k \cap E'' = \emptyset$.

.

И в двата случая имаме аксиома за k - $\langle k, E''' \rangle$, за която са в сила (а) и (б). Можем да изберем стъпка t_3 такава, че за всички $\gamma \in \Gamma_2$ да е в сила $lh(\gamma) > max(E''')$.

Нека $s > max(t_3, t_2, t_1+)$ Ще покажем, че $E''' \in A_s$

Да допуснем, че $E''' \not\subseteq A_s$. Тогава има $a \in E'''$, което е ограничено извън A от някоя G^W стратегия γ.

Ако $\gamma \subset \beta$, то $\gamma\hat{\ }0 \subseteq \delta_s$ и съгласно избора на $s > t > t_M$, $\gamma\hat{\ }0 \subset f$. Понеже γ не е инициализирана на стъпки $t' > t_1$, то $a \in E^{\beta}_{t_1+}$ и не може да бъде от E'''.

Ако $\gamma \notin \Gamma$, то γ не ограничава елементи от E''', защото $\langle k, E''' \rangle$ е приложена на някоя стъпка $t' < s$.

Ако $\gamma \in \Gamma$, и $f <_L \gamma$, то $\gamma \in \Gamma_2$ и $lh(\lambda_\gamma > max(E'''))$, следователно γ не ограничава извън A елементи от E'''.

Ако $\gamma \subseteq f$, то съгласно избора на t, елементите, които ограничава γ са постоянни, и не принадлежат на E'''.

Остава случаят $\gamma \in \Gamma_1$ и $\gamma <_L f$.

Ако $a \notin A_{t_1}$, то $a \in Out_1$ съгласно (б) $a \notin E'''$

Ще покажем, че ако $a \in A_{t_1}$, то не може да бъде изваден от A на по - късна стъпка. Да допуснем, че $a \notin A_{s'}$ за някоя стъпка $s' > t_1$ и нека сме избрали най-малката такава стъпка s'. a е елемент ограничаван от $\gamma <_L f$, тя вече не е достъпна и не може да извади a от A. Никоя друга G^W стратегия не може да ограничи a извън A, защото всяка G^W стратегия ограничава собствени елементи извън A. Ако допуснем, че a попада в някой агитатор на S^W стратегия β' на стъпка s'. То трябва $a \notin A_{s'-}$. Съгласно избора на s', $s'- \leq t_1$. Но $a \in A_{t_1}$, следователно $s'- < t_1$. Тогава $\beta' \not\subseteq f$, но $\gamma \supset \beta'$, следователно не е възможно $f <_L \beta'$. Остава $\beta' <_L f$, но тогава β' не е достъпен на стъпка s'.

Нека $s > t_3$ е стъпка, на която е достъпен β и имаме $o- = \infty_X$. Съгласно доказаното $E''' \subseteq A_{s'-}$. Следователно $\langle k, E''' \rangle$ е приложима и k не предизвиква внимание. Тогава $t_k = t_3+$ - стъпката на която е достъпен β след t_3.

2. $\beta\hat{\ }\langle \infty_Y, k \rangle \subseteq f$ и $l \in V_k$ е най - малкият елемент, такива че, l предизвиква внимание безброй много пъти, доказателството е аналогично.

□

Следствие 3.18.

$$\forall n \exists t^*_n (f \restriction n \textit{ е достъпен на стъпка } t^*_n \bigwedge \forall t > t^*_n (f \restriction n \textit{ не се инициализира на стъпка } t))$$

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по n.

При $n = 0$ твърдението е тривиално, защото $f \upharpoonright 0 = \varnothing$ никога не се инициализира и е достъпен на всяка стъпка. $t^*_0 = 0$.

Нека $f \upharpoonright n$ е достъпен на стъпка t^*_n и не се инициализира на стъпки $t > t^*_n$.

Ако $f \upharpoonright (n+1)$ е R стратегия или S^W стратегия, то нека t^*_{n+1} е първата стъпка след $max(t^*_n, t_{n+1})$, където t_n е стъпката от лема за най- лявост, на която е достъпен $f \upharpoonright n+1$. $f \upharpoonright (n+1)$ не се инициализира на стъпки $t > t^*_{n+1}$.

Ако $f \upharpoonright (n+1)$ е G^W стратегия. Тогава t^*_{n+1} избираме така, че да е в сила

(1) $t^*_{n+1} > t^*_n$
(2) $t^*_{n+1} > t_{n+1}$, където t_{n+1} е стъпката от лемата за най- лявост.
(3) За всяка S^W стратегия β с $\beta\hat{\ }\infty_X \subseteq f \upharpoonright (n+1)$, за всеки елемент $k \in U_\beta$ с по - висок приоритет от $f \upharpoonright (n+1)$, имаме приложима аксиома $\langle k, E'\rangle$ която е приложима винаги след стъпка t_k. Има краен брой аксиоми с минимален максимален елемент по- малък от $max(E')$. Нека t^*_{n+1} е толкова голяма, че всички аксиоми с минимален максимален елемент по- малък от $max(E')$, които някога биват прилагани, вече са приложени.
(4) За всяка S^W стратегия β с $\beta\hat{\ }\langle\infty_Y, k\rangle \subseteq f \upharpoonright (n+1)$, за всеки елемент $l \in (V_k)_\beta$ такъв, че $\langle l, k\rangle$ е с по - висок приоритет от $f \upharpoonright (n+1)$, имаме приложима аксиома $\langle l, F'\rangle$ която е приложима винаги след стъпка t_l. Има краен брой аксиоми с минимален максимален елемент по- малък от $max(F')$. Нека t^*_{n+1} е толкова голяма, че всички аксиоми с минимален максимален елемент по- малък от $max(F')$, които някога биват прилагани, вече са приложени.
(5) $f \upharpoonright (n+1)$ е достъпен на стъпка t^*_{n+1}.

□

6.5. Удовлетвореност на изискванията.

Лема 3.19. *Всяко R изискване е удовлетворено.*

Доказателство. Да разгледаме едно R изискване. Нека α е стратегията по истинския път, която се грижи за това изискване. Доказателството на лемата е разделено на следните три случаи:

(1) За всички S^W стратегии β, които са подстратегии на α е в сила

$$\beta \subset f \Rightarrow (\exists k \exists l(\beta\hat{\ }\langle l,k\rangle \subset f) \vee \beta\hat{\ }d_0 \subset f)$$

(2) За всички S^W стратегии β, които са подстратегии на α е в сила

$$\beta \subset f \Rightarrow \beta\hat{\ }\infty_X \subset f$$

(3) За всички S^W стратегии β, които са подстратегии на α е в сила

$$\beta \subset f \Rightarrow \exists k(\beta\hat{\ }\langle \infty_Y, k\rangle \subset f)$$

Ще разгледаме всеки от случаите по отделно.

(1) Ще докажем, че в такъв случай $\Phi_0^\alpha(X) = \Phi_0^\alpha(Y)$.

Съгласно построението на Φ_0 и Φ_1, достатъчно е да докажем равенство за всевъзможните свидетели d_β на подстратегиите на α.

Ако d_β е канцелиран на някоя стъпка, то имаме $\langle d, \emptyset\rangle \in \Phi_0 \cap \Phi_1$ и следователно $\Phi_0^\alpha(X)(d_\beta) = \Phi_1^\alpha(Y)d_\beta = 1$.

Нека β е подстратегия на α. Ще разгледаме възможните разположения на β спрямо истинския път.

(а) $f <_L \beta$. Тогава нека d_β е избран на стъпка t_1. $f \restriction lh(\beta)$ е достопен на безброй много стъпки, следователно има стъпка $t_2 > t_1$, на която е достъпен . На тази стъпка β е инициализира и d_β е канцелиран.

(б) $\beta <_L f$. Нека t е последната стъпка, на която β е бил достъпен. Ако β е инициализиран на някоя стъпка $t' > t$, то d_β е канцелиран. Иначе ако $\beta\hat{\ }\infty_X \subseteq \delta_t$ или $\beta\hat{\ }\langle\infty_Y, k\rangle \subseteq \delta_t$, то всички свидетели, които β е избирал са канцелирани.

Ако $\beta\hat{\ }\langle l,k\rangle \subseteq \delta_t$, имаме свидетел d_β и съответни агитатори E_k и F_l^k. За β е в сила условието от втората лема за агитаторите и следователно $(E_k \cup F_l^k) \not\subseteq A$, то $(E_k \cup F_l^k \cup E_t^\beta) \cap A = \emptyset$. Ако $(E_k \cup F_l^k) \subseteq A$, то съгласно първата лема за агитаторите $k \in X$ и $l \in Y$ следователно $\Phi_0^\alpha(X)(d_\beta) = \Phi_1^\alpha(Y)d_\beta = 1$.

Ако $(E_k \cup F_l^k \cup E_{t_0}^\beta) \cap A = \emptyset$, то от доказателството на втората лема за агитаторите следва, че β е записан в списъка $Watched_\alpha$.

Ако допуснем че $k \in X$, то съществува аксиома $\langle k, E'\rangle \in \Theta_0$, за която $E' \subseteq A$ и следователно $E' \cap (E_k \cup E_t^\beta)$. Тя се е появила в Θ_0^s на стъпка s. $\alpha \subset f$ е достъпен на стъпка $s' > s$. Съгласно конструкцията α ще види аксиомата и ще канцелира d_β.

Ако допуснем че $k \notin X$,но $l \in Y$ то съществува аксиома $\langle l, F'\rangle \in \Theta_!$, за която $F' \subseteq A$ и следователно $F' \cap (E_k \cup F_l^k \cup E_t^\beta)$. Тя се е появила в Θ_1^s на стъпка s. $\alpha \subset f$ е достъпен на стъпка $s' > s$. Съгласно конструкцията α ще види аксиомата и ще канцелира d_β.

Ако $k \notin X$ и $l \notin Y$, то $\Phi_0^\alpha(X)(d_\beta) = \Phi_1^\alpha(Y)d_\beta = 0$

(ц) Ако $\beta\hat{\ }d_0 \subseteq f$. Нека разгледаме стъпка $t > t_{lh(\beta)^*}$ и такава, че $\forall t' > t(\beta \subset \delta_{t'} \Rightarrow \beta\hat{\ }d_0 \subseteq \delta_{t'})$. Имаме избран свидетел d_β и агитатори E_k и F_l^k, които са постоянни.
Тогава в сила е условието на третата лема за агитаторите и следователно $(E_k \cup F_l^k) \subseteq A$. Тогава $\Phi_0^\alpha(X)(d_\beta) = \Phi_1^\alpha(Y)d_\beta = 1$

(д) Ако $\beta\hat{\ }\langle k, l\rangle \subseteq f$. Нека разгледаме стъпка $t > t_{lh(\beta)^*}$ и такава, че $\forall t' > t(\beta \subset \delta_{t'} \Rightarrow \beta\hat{\ }\langle l, k\rangle \subseteq \delta_{t'})$. Имаме избран свидетел d_β и агитатори E_k и F_l^k, които са постоянни. Имаме и постоянно множество от ограничени елементи E^β. На всяка стъпка $s > t$, на която е достъпен β, $E_k \cup F_l^k$ са извадено от A_s. $E_s^\beta = E^\beta$ също е изваден от A_s. β е достъпен на безброй много стъпки, следователно $(E_k \cup F_l^k \cup E^\beta) \cap A = \emptyset$. Ще покажем, че $\Phi_0^\alpha(X)(d_\beta) = \Phi_1^\alpha(Y)d_\beta = 0$.
Да допуснем, че $\Phi_0^\alpha(X)(d_\beta) = 1$, тогава има аксиома $\langle k, E'\rangle \in \Theta_0$, за която $E' \subseteq A$ и следователно $E' \cap (E_k \cup F_l^k \cup E^\beta) = \emptyset$. Тогава тя се появява в $\Theta_0^{s_1}$ на стъпка $s_1 > t$. Съгласно конструкцията на стъпка $s > s_1$ на която е достъпен β ще имаме изход ∞_X, но това противоречи на избора на t.
Да допуснем, че $\Phi_1^\alpha(Y)(d_\beta) = 1$, тогава има аксиома $\langle l, F'\rangle \in \Theta_1$, за която $F' \subseteq A$ и следователно $F' \cap (E_k \cup F_l^k \cup E^\beta) = \emptyset$. Тогава тя се появява в $\Theta_1^{s_2}$ на стъпка $s_2 > t$. Съгласно конструкцията на стъпка $s > s_2$ на която е достъпен β ще имаме изход $\langle \infty_Y, k\rangle$, но това противоречи на избора на t.

Сега ще покажем, че всяко подизискване на R е удовлетворено. Да фиксираме едно такова подизискване - S^W и нека β е S^W подстратегията на α, която се намира по истинския път. Нека $\Phi_0^\alpha(X) = \Phi_1^\alpha(Y) = D$.

Нека $\beta\hat{\ }\langle l, k\rangle$.Нека разгледаме стъпка $t > t_{lh(\beta)^*}$ и такава, че $\forall t' > t(\beta \subset \delta_{t'} \Rightarrow \beta\hat{\ }\langle l, k\rangle \subseteq \delta_{t'})$. На стъпка t' имаме фиксиран свидетел d_β. Съгласно доказаното $D(d_\beta) = 0$. А съгласно конструкцията $W(d_\beta) = 1$. Следователно $D \neq W$.

Нека $\beta\hat{\ }d_0$.Нека разгледаме стъпка $t > t_{lh(\beta)^*}$ и такава, че $\forall t' > t(\beta \subset \delta_{t'} \Rightarrow \beta\hat{\ }d_0 \subseteq \delta_{t'})$. На стъпка t' имаме фиксиран свидетел d_β. Съгласно доказаното $D(d_\beta) = 1$. А съгласно конструкцията $W(d_\beta) = 0$, иначе щеше да има стъпка $s > t'$, такава че $d_\beta \in W_s$ и на следващата стъпка $s' > s$, на която е достъпен β, щяхме да имаме изход $\langle l, k\rangle$, което противоречи на избора на t. Следователно $D \neq W$.

(2) Има стратегия β, подстратегия на α, за която $\beta\hat{\ }\infty_X \subseteq f$. Ще покажем в този случай, че $U_\beta = X$ и следователно X е полуразрешимо. Да допуснем, че има елемент $k \in X \backslash U$, и да разгледаме най - малкия такъв. Нека t е стъпка, толкова голяма, че $t > t^*_{lh(\beta)+1}$, всички елементи, които са по - малки от k и някога попадат в U, вече са в U. Нека $t_1 > t$ и е такава, че $\beta\hat{\ }\infty_X$ е достъпен на стъпка t_1, нека t_2 е следващата стъпка, на която е достъпен β, съгласно конструкцията и по - точно точка $III-2-a$ най - късно на стъпка t_2 ще имаме $k \in U$.

Съгласно лемата за стабилността, за всеки елемент $k \in U$ има приложима аксиома $\langle k, E' \rangle$, за която $E' \subseteq A$, следователно $k \in X$ и $U \subseteq X$. Окончателно $X = U$.

(3) Има стратегия β, подстратегия на α, за която $\beta\hat{}\langle \infty_Y, k \rangle \subseteq f$. Ще покажем в този случай, че $(V_k)_\beta = Y$ и следователно Y е полуразрешимо. Да допуснем, че има елемент $l \in Y \backslash V_k$, и да разгледаме най - малкият такъв. Нека t е стъпка, толкова голяма, че $t > t^*_{lh(\beta)+1}$, всички елементи, които са по - малки от l и някога попадат в V_k, вече са в V_k. Нека $t_1 > t$ и е такава, че $\beta\hat{}\langle \infty_Y, k \rangle$ е достъпен на стъпка t_1, нека t_2 е следващата стъпка, на която е достъпен β, съгласно конструкцията и по - точно точка $III-3-a$ най - късно на стъпка t_2 ще имаме $l \in V_k$.

Съгласно лемата за стабилността, за всеки елемент $l \in V_k$ има приложима аксиома $\langle l, F' \rangle$, за която $F' \subseteq A$, следователно $l \in F$ и $V_k \subseteq Y$. Окончателно $Y = V_k$.

□

Лема 3.20. *Всяко G^W изискване е удовлетворено.*

Доказателство. Нека разгледаме едно G^W изискване и нека γ е G^W стратегията, която е по истинския път. За всяка стъпка $t > t^*_{lh(\gamma)}$, γ не се инициализира, и следователно има постоянен низ χ_γ. От лемата за запазване на ограниченията имаме $\forall t > t^*_{lh(\gamma)}(\gamma \subseteq \delta_t \Rightarrow E^\gamma_t = E_\gamma)$. Тогава винаги когато е достъпен γ на стъпки $t > t^*_{lh(\gamma)}$, ако $\lambda_\gamma(a) = 0$, то $a \in E^\gamma_t$ и $a \notin A_t$. Ако $a \geq lh(\lambda_\gamma)$ и $\chi_\gamma(a) = 0$ отново винаги когато е достъпен γ на стъпки $t > t^*_{lh(\gamma)}$, то $a \notin A_t$. Това се случва на безброй много стъпки и следователно, ако $\chi_\gamma(a) = 0$, то $a \notin A$.

Нека $\chi_\gamma(a) = 1$. Да допуснем, че $a \notin A_t$, за някое $t > t^*_{lh(\gamma)}$. Тогава a е извадено от $\delta \subseteq \delta_t$. Ако $\gamma < \delta$, то $a \in F^\delta_t$ и δ не може да извади a. Ако $\delta <_L \gamma$, то δ не е достъпен на стъпка t. ясно е, че $\delta \neq \gamma$, следователно остава $\delta \subset \gamma$. Нека o е изходът от стратегията δ на стъпка t. $\delta\hat{}o \not<_L \gamma$, защото γ не се инициализира на стъпка t. Ако $\delta\hat{}o \subseteq \gamma$, то за $\delta\hat{}o$ имаме $E^{\delta\hat{}o}_{t^*_\gamma} \neq E^{\delta\hat{}o}_t$, съгласно лемата за запазване на ограниченията $\delta\hat{}o$ е инициализиран на някоя стъпка след t. Но тогава по лемата за инициализацията γ също е инизиализиаран на тази стъпка - противоречие. Ако $\gamma <_L \delta\hat{}o$, то имаме $a \in E^{\delta\hat{}o}_t \cap F^{\delta\hat{}o}_t$, което противоречи с третата лема за спазване на ограниченията.

Така , ако γ е по истинския път и има постоянен низ χ_γ, $\chi_\gamma \subseteq \chi_A$.

(1) Ако $\gamma\hat{}1 \subseteq f$, то $\chi_\gamma = \lambda_\gamma \subseteq \chi_A$ и няма разширение на χ_γ, което да попада в W.
(2) Ако $\gamma\hat{}0 \subseteq f$, то $\chi_\gamma \in W$.

□

Използвана литература

1. K. Copestake, *1-genericity in the enumeration degrees*, J. Symbolic Logic **53** (1988), 878–887.
2. S. B. Cooper, Andrea Sorbi, Angsheng Li and Yue Yang, *Bounding and nonbounding minimal pairs in the enumeration degrees*, to appear in the J. Symbolic Logic.
3. R. I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1987.