Някои случаи, когато от локално наличие на свойства на функции следва глобално

Димитър Скордев

Факултет по математика и информатика
Софийски университет „Св. Климент Охридски“

skordev@fmi.uni-sofia.bg

Пролетна конференция на ФМИ
26 март 2016 г.

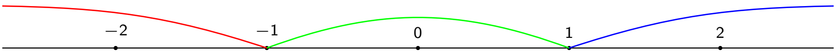
Уводен пример

Следното твърдение е друг изказ на лемата на Вайраух за снаждане на функции:

Твърдение 1

Винаги, когато c е изчислимо реално число и рестрикциите на една частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$ върху $[c, \infty)$ и върху $(-\infty, c]$ са изчислими, дадената функция също е изчислима

Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е $\lambda x.\operatorname{arctg} x$ и искаме да докажем, че f е изчислима. Можем да направим това, като последователно докажем, че са изчислими рестрикциите $f \restriction [-1, 1]$, $f \restriction [1, \infty)$, $f \restriction (-\infty, -1]$, и след това приложим твърдение 1 първо за $c = 1$ и функцията $f \restriction [-1, \infty)$, а след това за $c = -1$ и функцията f.



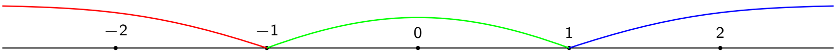
Уводен пример

Следното твърдение е друг изказ на лемата на Вайраух за снаждане на функции:

Твърдение 1

Винаги, когато c е изчислимо реално число и рестрикциите на една частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$ върху $[c, \infty)$ и върху $(-\infty, c]$ са изчислими, дадената функция също е изчислима

Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е $\lambda x.\operatorname{arctg} x$ и искаме да докажем, че f е изчислима. Можем да направим това, като последователно докажем, че са изчислими рестрикциите $f \restriction [-1, 1]$, $f \restriction [1, \infty)$, $f \restriction (-\infty, -1]$, и след това приложим твърдение 1 първо за $c = 1$ и функцията $f \restriction [-1, \infty)$, а след това за $c = -1$ и функцията f.



$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$

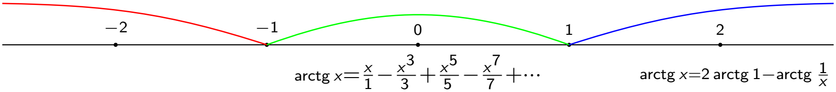
Уводен пример

Следното твърдение е друг изказ на лемата на Вайраух за снаждане на функции:

Твърдение 1

Винаги, когато c е изчислимо реално число и рестрикциите на една частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$ върху $[c, \infty)$ и върху $(-\infty, c]$ са изчислими, дадената функция също е изчислима

Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е $\lambda x.\operatorname{arctg} x$ и искаме да докажем, че f е изчислима. Можем да направим това, като последователно докажем, че са изчислими рестрикциите $f \restriction [-1, 1]$, $f \restriction [1, \infty)$, $f \restriction (-\infty, -1]$, и след това приложим твърдение 1 първо за $c = 1$ и функцията $f \restriction [-1, \infty)$, а след това за $c = -1$ и функцията f.



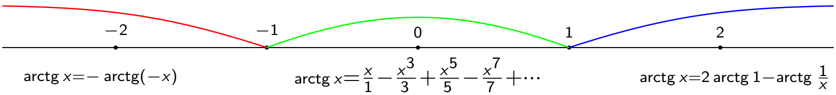
Уводен пример

Следното твърдение е друг изказ на лемата на Вайраух за снаждане на функции:

Твърдение 1

Винаги, когато c е изчислимо реално число и рестрикциите на една частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$ върху $[c, \infty)$ и върху $(-\infty, c]$ са изчислими, дадената функция също е изчислима

Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е $\lambda x.\operatorname{arctg} x$ и искаме да докажем, че f е изчислима. Можем да направим това, като последователно докажем, че са изчислими рестрикциите $f \restriction [-1, 1]$, $f \restriction [1, \infty)$, $f \restriction (-\infty, -1]$, и след това приложим твърдение 1 първо за $c = 1$ и функцията $f \restriction [-1, \infty)$, а след това за $c = -1$ и функцията f.

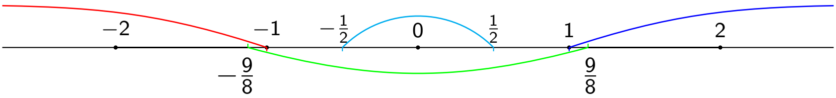


Модификация на уводния пример

Твърдение 2

Нека $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и f е частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$. Ако $f \restriction (a, \infty)$ и $f \restriction (-\infty, b)$ са изчислими, то f също е изчислима.

Доказателството за изчислимост в уводния пример не е задоволително от гледна точка на числените пресмятания. От тази гледна точка е за предпочитане например доказателство, при което последователно се установява изчислимостта напр. на рестрикциите $f \restriction \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $f \restriction \left(-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right)$, $f \restriction (1, \infty)$, $f \restriction (-\infty, -1)$ и след това се прилага твърдение 2 първо за $a = 1$, $b = \frac{9}{8}$ и функцията $f \restriction \left(-\frac{9}{8}, \infty\right)$, а след това за $a = -\frac{9}{8}$, $b = -1$ и функцията f.

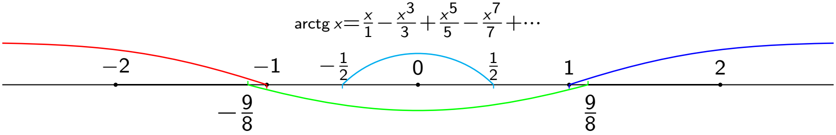


Модификация на уводния пример

Твърдение 2

Нека $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и f е частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$. Ако $f \upharpoonright (a, \infty)$ и $f \upharpoonright (-\infty, b)$ са изчислими, то f също е изчислима.

Доказателството за изчислимост в уводния пример не е задоволително от гледна точка на числените пресмятания. От тази гледна точка е за предпочитане например доказателство, при което последователно се установява изчислимостта напр. на рестрикциите $f \upharpoonright \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $f \upharpoonright \left(-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right)$, $f \upharpoonright (1, \infty)$, $f \upharpoonright (-\infty, -1)$ и след това се прилага твърдение 2 първо за $a = 1$, $b = \frac{9}{8}$ и функцията $f \upharpoonright \left(-\frac{9}{8}, \infty\right)$, а след това за $a = -\frac{9}{8}$, $b = -1$ и функцията f.

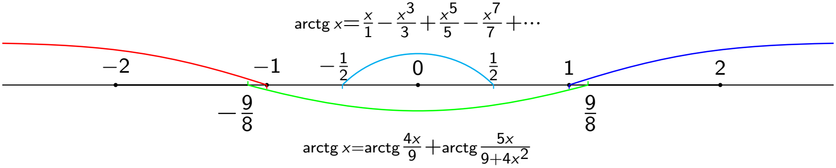


Модификация на уводния пример

Твърдение 2

Нека $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и f е частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$. Ако $f \restriction (a, \infty)$ и $f \restriction (-\infty, b)$ са изчислими, то f също е изчислима.

Доказателството за изчислимост в уводния пример не е задоволително от гледна точка на числените пресмятания. От тази гледна точка е за предпочитане например доказателство, при което последователно се установява изчислимостта напр. на рестрикциите $f \restriction \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $f \restriction \left(-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right)$, $f \restriction (1, \infty)$, $f \restriction (-\infty, -1)$ и след това се прилага твърдение 2 първо за $a = 1$, $b = \frac{9}{8}$ и функцията $f \restriction \left(-\frac{9}{8}, \infty\right)$, а след това за $a = -\frac{9}{8}$, $b = -1$ и функцията f.

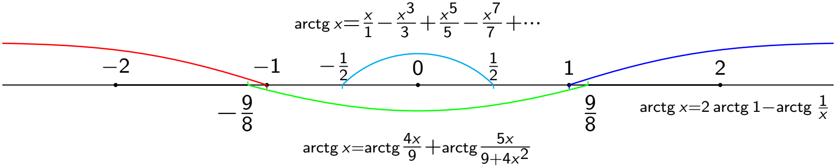


Модификация на уводния пример

Твърдение 2

Нека $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и f е частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$. Ако $f \upharpoonright (a, \infty)$ и $f \upharpoonright (-\infty, b)$ са изчислими, то f също е изчислима.

Доказателството за изчислимост в уводния пример не е задоволително от гледна точка на численитe пресмятания. От тази гледна точка е за предпочитане например доказателство, при което последователно се установява изчислимостта напр. на рестрикциите $f \upharpoonright \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $f \upharpoonright \left(-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right)$, $f \upharpoonright (1, \infty)$, $f \upharpoonright (-\infty, -1)$ и след това се прилага твърдение 2 първо за $a = 1$, $b = \frac{9}{8}$ и функцията $f \upharpoonright \left(-\frac{9}{8}, \infty\right)$, а след това за $a = -\frac{9}{8}$, $b = -1$ и функцията f.

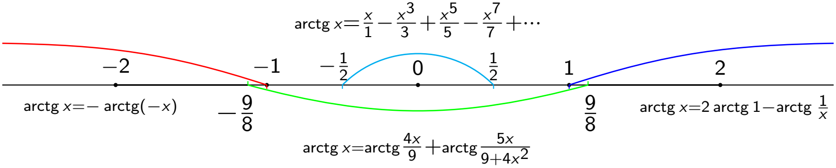


Модификация на уводния пример

Твърдение 2

Нека $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и f е частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$. Ако $f \restriction (a, \infty)$ и $f \restriction (-\infty, b)$ са изчислими, то f също е изчислима.

Доказателството за изчислимост в уводния пример не е задоволително от гледна точка на числените пресмятания. От тази гледна точка е за предпочитане например доказателство, при което последователно се установява изчислимостта напр. на рестрикциите $f \restriction \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $f \restriction \left(-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right)$, $f \restriction (1, \infty)$, $f \restriction (-\infty, -1)$ и след това се прилага твърдение 2 първо за $a = 1$, $b = \frac{9}{8}$ и функцията $f \restriction \left(-\frac{9}{8}, \infty\right)$, а след това за $a = -\frac{9}{8}$, $b = -1$ и функцията f.



Обобщение на уводния пример и модификацията му

Обобщение на уводния пример

Нека $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$ са изчислими реални числа и са в сила неравенствата $c_0 < c_1 < \cdots < c_{n-1} < c_n$. Ако рестрикцията на една частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$ върху всеки от интервалите

$$(-\infty, c_0], [c_1, c_2], \ldots, [c_{n-1}, c_n], [c_n, \infty)$$

е изчислима, то дадената функция също е изчислима.

Обобщение на модификацията на уводния пример

Нека $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n \in \mathbb{R}$, като при $i = 1, 2, \ldots, n$ са в сила неравенствата $a_i < b_i$, а при $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ – неравенствата $b_i > a_{i+1}$. Ако рестрикцията на една частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$ върху всеки от интервалите

$$(-\infty, b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_{n-1}, b_{n-1}), (a_n, b_n), (a_{n+1}, \infty)$$

е изчислима, то дадената функция също е изчислима.

Съвкупности от множества, позволяващи глобализация за даден клас от функции

Дефиниция 1

Нека $\mathbf{C}$ е даден клас от функции, а $\mathcal{A}$ е някоя съвкупност от множества. Ще казваме, че $\mathcal{A}$ *позволява глобализация за* $\mathbf{C}$, ако за всяка функция f с дефиниционна област $\bigcup \mathcal{A}$ е вярна импликацията

$$\forall A \in \mathcal{A}\,(f \restriction_A \in \mathbf{C}) \implies f \in \mathbf{C}. \tag{1}$$

Ще казваме, че $\mathcal{A}$ *напълно позволява глобализация за* $\mathbf{C}$, ако импликацията (1) е вярна за всяка функция f, чиято дефиниционна област се съдържа в $\bigcup \mathcal{A}$.

Пример 1

Ако $\mathbf{C}$ е класът на изчислимите частични функции от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$, а $\mathcal{A}$ е съвкупността от интервали, разгледана в обобщението на уводния пример или в обобщението на модификацията му, то $\mathcal{A}$ напълно позволява глобализация за $\mathbf{C}$.

Други примери

Пример 2 (лема 4.4.1 от дисертацията на Иван Георгиев)

Нека $\mathcal{F}$ е клас от функции в $\mathbb{N}$, който удовлетворява предположението в споменатата лема, c е $\mathcal{F}$-изчислимо реално число, **C** е класът на равномерно $\mathcal{F}$-изчислимите частични функции от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$, дефинирани в точката c. Тогава $\{(-\infty, c], [c, \infty)\}$ напълно позволява глобализация за **C**.

Пример 3 (позволена глобализация, но не напълно)

Нека $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$, където $A_1 \setminus A_2 \neq \varnothing$, $A_2 \setminus A_1 \neq \varnothing$, $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, и нека **C** се състои от константните частични изображения на $A_1 \cup A_2$ в себе си. Тогава $\mathcal{A}$ позволява глобализация за **C**, но не напълно.

Пример 4 (тривиално наличие на пълна позволеност)

Ако **C** е класът на едноместните частично рекурсивни функции, то всяка крайна съвкупност от множества напълно позволява глобализация за **C**.

Кратко описание на основното в доклада

За някои видове класове от функции ще бъдат формулирани неочевидни резултати в сходен дух за пълна позволеност на глобализация в случая на крайна съвкупност $\mathcal{A}$.Всеки от резултатите дава достатъчно условие, което е необходимо поне при доста слаби предположения и изисква при всеки избор на подсъвкупност $\mathcal{K}$ на $\mathcal{A}$ множеството

$$\bigcup\mathcal{K}\setminus\bigcup(\mathcal{A}\setminus\mathcal{K})$$

да бъде отделимо от множеството

$$\bigcup(\mathcal{A}\setminus\mathcal{K})\setminus\bigcup\mathcal{K}$$

чрез множество от даден специален вид. Отделимостта е в смисъл на следната дефиниция:

Дефиниция 2

Ще казваме, че едно множество H *отделя* дадено множество P от дадено множество Q, ако $H\supseteq P$ и $H\cap Q=\varnothing$.

Глобализация за класа на n-местните потенциално частично рекурсивни функции

При дадено n нека **C** е класът на всички такива функции.

Теорема 1

Една крайна съвкупност $\mathcal{A}$ от подмножества на $\mathbb{N}^n$ напълно позволява глобализация за **C** точно тогава, когато за всяка подсъвкупност $\mathcal{K}$ на $\mathcal{A}$ някое р. н. подмножество на $\mathbb{N}^n$ отделя $\bigcup\mathcal{K} \setminus \bigcup(\mathcal{A} \setminus \mathcal{K})$ от $\bigcup(\mathcal{A} \setminus \mathcal{K}) \setminus \bigcup\mathcal{K}$.

Следствие 1

Всяка крайна съвкупност от рекурсивно номеруеми подмножества на $\mathbb{N}^n$ напълно позволява глобализация за **C**.

Следствие $\overline{1}$

Всяка крайна съвкупност от допълнения на рекурсивно номеруеми подмножества на $\mathbb{N}^n$ напълно позволява глобализация за **C**.

Доказателство на теорема 1

($\Longleftarrow$) Нека за всяка подсъвкупност $\mathcal{K}$ на $\mathcal{A}$ някое р. н. подмножество $H_{\mathcal{K}}$ на $\mathbb{N}^n$ отделя $\bigcup\mathcal{K} \setminus \bigcup(\mathcal{A} \setminus \mathcal{K})$ от $\bigcup(\mathcal{A} \setminus \mathcal{K}) \setminus \bigcup\mathcal{K}$. Нека f е такава функция, че $\mathrm{dom}(f) \subseteq \bigcup\mathcal{A}$ и за всяко $A \in \mathcal{A}$ $f\upharpoonright_A$ е рестрикция на някоя n-местна ч. р. ф. φ_A. Полагаме $E = \{(x, y) \,|\, \exists\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}(x \in H_{\mathcal{K}} \ \&\ \forall A \in \mathcal{K}(\varphi_A(x) = y))\}$. Понеже E е р. н. множество, съществува такава n-местна ч. р. ф. φ, че $\forall x(\exists y((x, y) \in E) \implies x \in \mathrm{dom}(\varphi) \ \&\ (x, \varphi(x)) \in E)$. Доказва се, че за всяко $x \in \mathrm{dom}(f)$ и всяко y е в сила еквивалентността $f(x) = y \iff (x, y) \in E$. Оттук следва, че f е рестрикция на φ.

($\Longrightarrow$) Нека $\mathcal{A}$ силно позволява глобализация за $\mathbf{C}$, а $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$. Разглеждаме частична функция f от $\mathbb{N}^n$ към $\{0, 1\}$, за която $f^{-1}(0) = \bigcup\mathcal{K} \setminus \bigcup(\mathcal{A} \setminus \mathcal{K})$ и $f^{-1}(1) = \bigcup(\mathcal{A} \setminus \mathcal{K}) \setminus \bigcup\mathcal{K}$. Тогава $\mathrm{dom}(f) \subseteq \bigcup\mathcal{A}$ и се проверява, че за всяко $A \in \mathcal{A}$ функцията $f\upharpoonright_A$ е константа и значи принадлежи на $\mathbf{C}$. Ако φ е ч. р. продължение на f, то $\varphi^{-1}(0)$ е р. н. множество, отделящо $\bigcup\mathcal{K} \setminus \bigcup(\mathcal{A} \setminus \mathcal{K})$ от $\bigcup(\mathcal{A} \setminus \mathcal{K}) \setminus \bigcup\mathcal{K}$.

Глобализация за класа на непрекъснатите частични функции от едно топологично пространство в друго

Нека **X** и **Y** са топологични пространства с носители X и Y, а **C** е класът на непрекъснатите частични функции от **X** към **Y**.

Теорема 2

Нека $\mathcal{A}$ е крайна съвкупност от подмножества на X. Ако за всяка подсъвкупност $\mathcal{K}$ на $\mathcal{A}$ някое отворено множество на **X** отделя $\bigcup\mathcal{K} \setminus \bigcup(\mathcal{A} \setminus \mathcal{K})$ от $\bigcup(\mathcal{A} \setminus \mathcal{K}) \setminus \bigcup\mathcal{K}$, то $\mathcal{A}$ напълно позволява глобализация за **C**. В случай че в **Y** съществува отворено множество, различно от $\varnothing$ и Y, в сила е и обратното.

Следствие 2 (непосредствено очевидно)

Всяка крайна съвкупност от отворени множества на **X** напълно позволява глобализация за **C**.

Следствие $\overline{2}$

Всяка крайна съвкупност от затворени множества на **X** напълно позволява глобализация за **C**.

Изчислимост относно редици от множества

Дефиниция 3

Ако $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ е редица от множества, за всяко $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$ полагаме $\mathcal{U}^{-1}(x) = \{k \in \mathbb{N} \,|\, x \in U_k\}$. Тоталните номерации на множеството $\mathcal{U}^{-1}(x)$ ще наричаме *$\mathcal{U}$-имена* на x. Ще казваме, че елементът x е *$\mathcal{U}$-изчислим*, ако множеството $\mathcal{U}^{-1}(x)$ е р. н.

Ако $\mathcal{U}$ е база на T_0-топологично пространство, тази изчислимост съвпада със съответната обичайно разглеждана за такива пространства).

Дефиниция 4

Ако $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\mathcal{V} = \{V_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ са редици от множества, една частична функция f от $\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$ към $\bigcup_{l=0}^{\infty} V_l$ ще наричаме *$(\mathcal{U}, \mathcal{V})$-изчислима*, ако съществува рекурсивен оператор, който за всяко $x \in \mathrm{dom}(f)$ преобразува $\mathcal{U}$-имената на x в $\mathcal{V}$-имена на $f(x)$.

Ако $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ са бази на T_0-топологични пространства, тази изчислимост съвпада с обичайно разглежданата.

Две допълнителни дефиниции

Дефиниция 5

Нека $D_0, D_1, D_2, \ldots$ е стандартната номерация на множеството на крайните подмножества на $\mathbb{N}$. За всяка редица от множества $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ дефинираме редицата $\hat{\mathcal{U}} = \{\hat{U}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, като полагаме $\hat{U}_m = \bigcap_{k\in D_m} U_k$ и приемаме, че $\bigcap_{k\in\varnothing} U_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$.

Забележка 1. За всяко $m \in \mathbb{N}$ и всяко $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$ е в сила еквивалентността $x \in \hat{U}_m \iff D_m \subseteq \mathcal{U}^{-1}(x)$.

Дефиниция 6

За всяка редица от множества $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ множествата от вида $\bigcup_{k\in S} U_k$, където S е р. н. подмножество на $\mathbb{N}$, ще наричаме *ефективни $\mathcal{U}$-обединения*.

Забележка 2. Ефективните $\mathcal{U}$-обединения са също и ефективни $\hat{\mathcal{U}}$-обединения. Ако операцията сечение на два члена на $\mathcal{U}$ е изчислима в един естествен смисъл, то е вярно и обратното.

Глобализация за класа на $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$-изчислимите функции

Нека $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\mathcal{V} = \{V_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ са редици от множества, а **C** е класът на $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$-изчислимите функции от $\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$ към $\bigcup_{l=0}^{\infty} V_l$.

Теорема 3

Нека $\mathcal{A}$ е крайна съвкупност от подмножества на $\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$. Ако за всяка подсъвкупност $\mathcal{K}$ на $\mathcal{A}$ някое ефективно $\hat{\mathcal{U}}$-обединение отделя $\bigcup\mathcal{K} \setminus \bigcup(\mathcal{A} \setminus \mathcal{K})$ от $\bigcup(\mathcal{A} \setminus \mathcal{K}) \setminus \bigcup\mathcal{K}$, то съвкупността $\mathcal{A}$ напълно позволява глобализация за **C**. В случай че за някои естествени числа l_1 и l_2 всяко от множествата V_{l_1} и $V_{l_2} \setminus V_{l_1}$ съдържа $\mathcal{V}$-изчислим елемент, в сила е и обратното.

Следствие 3

Всяка крайна съвкупност от ефективни $\hat{\mathcal{U}}$-обединения напълно позволява глобализация за **C**.

Следствие $\overline{3}$

Всяка крайна съвкупност от допълнения на ефективни $\hat{\mathcal{U}}$-обединения до $\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$ напълно позволява глобализация за **C**.

Приложение към изчислимостта на реални функции

Следствие 4

Нека n е дадено положително цяло число, а $\mathcal{A}$ е такава крайна съвкупност от подмножества на $\mathbb{R}^n$, че всяко от тях е ефективно отворено или всяко от тях има ефективно отворено допълнение. Ако за една частична функция f от $\bigcup \mathcal{A}$ към $\mathbb{R}$ рестрикциите $f \restriction A$, където $A \in \mathcal{A}$, са изчислими, то f също е изчислима.

Пример 5

Нека $n \geq 2$. Ако за една частична функция f от $\mathbb{R}^n$ към $\mathbb{R}$ функциите $f \restriction \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_1 \leq x_2\}$ и $f \restriction \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_1 \geq x_2\}$ са изчислими, то f също е изчислима. В частност изчислима е

$$\mathrm{cases}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} x_3, & \text{ако } x_1 < x_2 \text{ или } x_3 = x_4, \\ x_4, & \text{ако } x_1 > x_2 \text{ или } x_3 = x_4, \end{cases}$$

разглеждана от Ескардо (M. H. Escardó. *Effective and sequential definition by cases on the reals via infinite signed-digit numerals.* Electron. Notes Theor. Comput. Sci. **13** (1998), 53–68).

Добавка

Дефиниция 7

Нека **C** и **D** са дадени класове от функции, а $\mathcal{A}$ е някоя съвкупност от множества. Ще казваме, че $\mathcal{A}$ *позволява глобализация за* **C** *в рамките на* **D**, ако за всяка функция f от **D** е вярна импликацията $\forall A \in \mathcal{A}\,(f\restriction_A \in \mathbf{C}) \implies f \in \mathbf{C}$.

Пример 6

$\mathcal{A}$ позволява глобализация за **C** $\iff \mathcal{A}$ позволява глобализация за **C** в рамките на $\{f \mid f$ е функция и $\mathrm{dom}(f) = \bigcup \mathcal{A}\}$; $\mathcal{A}$ напълно позволява глобализация за **C** $\iff \mathcal{A}$ позволява глобализация за **C** в рамките на $\{f \mid f$ е функция и $\mathrm{dom}(f) \subseteq \bigcup \mathcal{A}\}$.

Пример 7 (лема 4.4.3 от дисертацията на Иван Георгиев)

Нека $\mathcal{F}$ е както в лемата, c е $\mathcal{F}$-изчислимо реално число, **C** и **D** се състоят съответно от частичните функции от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$, които са равномерно $\mathcal{F}$-изчислими, и от онези, които са дефинирани и непрекъснати в c и имат там $\mathcal{F}$-изчислима стойност. Тогава $\{(-\infty, c), (c, \infty)\}$ позволява глобализация за **C** в рамките на **D**.

Благодаря за вниманието!

Допълнителна информация

Klaus Weihrauch. *Computable Analysis. An Introduction*. Berlin/Heidelberg, Springer-Verlag, 2000

На стр. 112

Lemma 4.3.5 (join of functions). Let $f1, f2 :\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be computable real functions and let $c \in \mathbb{R}$ be a computable real number. Then the function $f :\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, defined by

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{if } x < c, \\ f_2(x) & \text{if } x > c, \\ f_1(c) & \text{if } x = c \text{ and } f_1(c) = f_2(c), \\ \mathrm{div} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

is computable.

Дисертацията на Иван Георгиев

Иван Димитров Георгиев.
Субрекурсивна изчислимост в анализа.
Дисертация за присъждане на образователна и научна степен „доктор“. Софийски университет „Св. Климент Охридски“, 2015.

http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/theses/ivan-georgiev-phd-thesis.pdf

От дисертацията на Иван Георгиев (1)

От стр. 76

Дефиниция 4.3.4. Един клас от функции $\mathcal{F}$ е *удобен*, ако $\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$ е затворен относно суперпозиция.

От стр. 86

Лема 4.4.1. Нека $\mathcal{F}$ е удобен клас и $\theta : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ е реална функция. Нека c е $\mathcal{F}$-изчислимо реално число, такова че $c \in D$ и рестрикциите на θ до множествата $D \cap (-\infty, c]$ и $D \cap [c, +\infty)$ са равномерно $\mathcal{F}$-изчислими. Тогава θ е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима върху цялата си дефиниционна област.

От дисертацията на Иван Георгиев (2)

От стр. 70

Дефиниция 4.2.13. Класът от функции $\mathcal{F}$ изпълнява условието за мажориране, ако за всяко естествено число m и функция $f \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{F}$ съществува функция $\tilde{f} \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{F}$, която мажорира f и е монотонно растяща по отношение на всичките си аргументи.

От стр. 89

Лема 4.4.3 (за едноточково разширение). Нека $\mathcal{F}$ е удобен клас, удовлетворяващ условието за мажориране, и $\theta : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ е реална функция. Нека c е $\mathcal{F}$-изчислимо реално число, такова че $c \in D$, $\theta(c)$ също е $\mathcal{F}$-изчислимо и θ е непрекъсната в c. Нека рестрикциите на θ до $D \cap (-\infty, c)$ и до $D \cap (c, +\infty)$ са равномерно $\mathcal{F}$-изчислими. Тогава θ е равномерно $\mathcal{F}$-изчислима върху цялата си дефиниционна област.