Семантика на езиците за програмиране - записки

Стефан Вътев[1]

15 януари 2020 г.

[1] stefanv@fmi.uni-sofia.bg

Съдържание

Глава 1

Области на Скот

[2, Глава 5]

В тази глава ще разгледаме понятията, които са ни нужни за дефинирането на понятието денотационна семантика на една програма.

1.1 Частични наредби

Бинарната релация $\sqsubseteq$ върху множеството A се нарича **частична наредба**, ако тя е:

На англ. *partial order*

- рефлексивна, т.е. $(\forall a \in A)[a \sqsubseteq a]$;
- транзитивна, т.е. $(\forall a, b, c \in A)[a \sqsubseteq b \,\&\, b \sqsubseteq c \implies a \sqsubseteq c]$;
- антисиметрична, т.е. $(\forall a, b \in A)[a \sqsubseteq b \,\&\, b \sqsubseteq a \implies a = b]$.

Една такава двойка $(A, \sqsubseteq)$ се нарича частично наредено множество.

Пример 1.1. Да означим

$$[\mathbb{N} \stackrel{\text{ч}}{\rightarrow} \mathbb{N}] \stackrel{\text{деф}}{=} \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ е частична функция}\}.$$

Дефинираме и релацията **включване** между две частични функции по следния начин:

$$f \subseteq g \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x \in \mathbb{N})[f(x) \text{ не е деф.} \vee \\ (f(x) \text{ е деф.} \,\&\, g(x) \text{ е деф.} \,\&\, f(x) = g(x))].$$

Да дефинираме също **графиката** на частичната функция f като

$$\mathtt{Graph}(f) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\langle x, y\rangle \mid f(x) = y\}.$$

Тогава лесно се съобразява, че

$$f \subseteq g \iff \mathtt{Graph}(f) \subseteq \mathtt{Graph}(g).$$

Съобразете, че двойката $([\mathbb{N} \stackrel{\text{ч}}{\rightarrow} \mathbb{N}], \subseteq)$ е частично наредено множество.

Казваме, че a_0 е **най-малък елемент** на частично нареденото множество $(A, \sqsubseteq)$, ако $(\forall a \in A)[a_0 \sqsubseteq a]$. Ако такъв елемент съществува, то той е единствен, защото релацията $\sqsubseteq$ е антисиметрична. **Неподвижна точка** на $f : A \to A$ е елемент $a \in A$, такъв че $f(a) = a$. За по-кратко монотонно-растящите редици от елементи на A,

$$a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq a_n \sqsubseteq \cdots ,$$

ще наричаме (растящи) **вериги**.

Един елемент b е **горна граница** на веригата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, ако $(\forall n)[a_n \sqsubseteq b]$. Един елемент b е **точна горна граница** на веригата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, ако са изпълнени свойствата:

- $(\forall n)[a_n \sqsubseteq b]$, т.е. b е горна граница;
- за всяка друга горна граница c е изпълнено, че $b \sqsubseteq c$, т.е. b е най-малкият елемент измежду всички горни граници на веригата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Обърнете внимание, че не всяка верига притежава точна горна граница. Обикновено точната горна граница на вергата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ще бележим като $\bigsqcup_n a_n$.

Определение 1.1. Наредена тройка от вида $\mathcal{A} = (A, \sqsubseteq, \perp)$ се нарича **област на Скот**, ако:

На англ. *Scott domain*

- $\sqsubseteq$ е бинарна релация върху A, която задава частична наредба.
- Всяка растяща верига $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ в A притежава точна горна граница $\bigsqcup_n a_n$.
- $\perp \in A$ е най-малкият елемент на A;

Интуицията зад израза $a \sqsubseteq b$ е, че b носи повече информация от a, без да противоречи на a.

В Хаскел $\perp$ се означава като `undefined`. Повече за денотационна семантика в Хаскел може да прочетете тук

Пример 1.2. Тройката

$$[\mathbb{N}^n \xrightarrow{\text{ч}} \mathbb{N}] \stackrel{\text{деф}}{=} (\, \mathcal{F}_n,\ \sqsubseteq,\ \emptyset^{(n)}\,)$$

е област на Скот, където:

- С $\mathcal{F}_n$ означаваме всички частични функции от $\mathbb{N}^n$ в $\mathbb{N}$.
- релацията „включване” между функции е дефинирана по следния начин:

$$f \sqsubseteq g \stackrel{\text{деф}}{\iff} \mathsf{Graph}(f) \subseteq \mathsf{Graph}(g).$$

- $\emptyset^{(n)}$ е функцията с празна дефиниционна област, т.е.

$$(\forall \bar{x} \in \mathbb{N}^n)[\neg!\emptyset^{(n)}(\bar{x})].$$

Пример 1.3. Да разгледаме няколко примера, които вече сме срещали.

- $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \subseteq, \emptyset)$ е област на Скот.
- $(\mathbb{N}, \leq, 0)$ не е е област на Скот.

- $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq, 0)$ е също област на Скот, където наредбата $\leq$ е зададена като

$$0 \leq 1 \leq \cdots \leq \infty.$$

- $(\{0,1\}^\star, \preceq, \varepsilon)$ не е област на Скот, където $\preceq$ е релацията префикс на две думи.

Пример 1.4. Да разгледаме множеството

$$Bin^\infty = \{\sigma \mid \sigma : \{0,1,2,\ldots,n-1\} \to \{0,1\} \;\&\; n \in \mathbb{N}\} \cup \{f \mid f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$$

съставено от всички крайни и безкрайни двоични низове.

- Да разгледаме релацията

$$\sigma \preceq \tau \iff |\sigma| \leq |\tau| \;\&\; (\forall i < |\sigma|)[\sigma(i) = \tau(i)],$$

  т.е. σ е префикс на τ.

- Да означим с ε единствения двоичен низ с дължина 0. С други думи, ε е празната функция.

Тогава $Bin^\infty = (Bin^\infty, \preceq, \varepsilon)$ е област на Скот.

Задача 1.1. Нека $(a_i)_{i=0}^\infty$ и $(b_i)_{i=0}^\infty$ са вериги в областта на Скот $\mathcal{A}$, за които е изпълнено, че $a_i \sqsubseteq b_i$ за всяко i. Докажете, че $\bigsqcup_i a_i \sqsubseteq \bigsqcup_i b_i$.

Задача 1.2. Нека $(a_i)_{i=0}^\infty$ е верига в областта на Скот $\mathcal{A}$ и нека k е естествено число. Докажете, че $\bigsqcup_i a_i = \bigsqcup_i a_{i+k}$.

1.2 Конструкции

Ще разгледаме няколко конструкции, с които ще видим как можем да строим по-сложни области на Скот.

1.2.1 Плоска област на Скот

Да фиксираме едно произволно непразно множество A и един елемент $\perp \not\in A$. Да означим $A_\perp = A \cup \{\perp\}$ и да разгледаме следната бинарна релация $\sqsubseteq$ върху $A_\perp$:

$$a \sqsubseteq b \iff a = \perp \;\vee\; a = b.$$

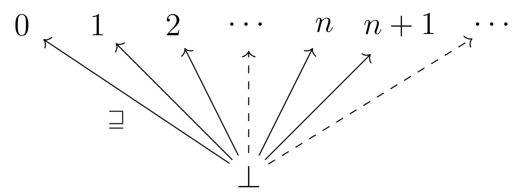
Лесно се съобразява, че $\sqsubseteq$ задава *частична наредба* върху $A_\perp$:

От деф. на $\sqsubseteq$ следва, че $\perp$ е най-малкият елемент

- *рефлексивност*: $a \sqsubseteq a$ за всяка $a \in A_\perp$;
- *транзитивност*: $a \sqsubseteq b \;\&\; b \sqsubseteq c \implies a \sqsubseteq c$ за всеки $a, b, c \in A_\perp$;
- *антисиметричност*: $a \sqsubseteq b \;\&\; b \sqsubseteq a \implies a = b$ за всеки $a, b \in A_\perp$.

Наредбата $(A_\perp, \sqsubseteq)$ ще наричаме **плоска наредба**. Тя ще играе важна роля в нашите разглеждания. Например, често ще разглеждаме плоската наредба $(\mathbb{N}_\perp, \sqsubseteq)$.

$\perp$ се нарича *bottom* елемент



Фигура 1.1: Графично представяне на плоската наредба $\sqsubseteq$ върху $\mathbb{N}_\perp$

Твърдение 1.1. Нека A е произволно множество и нека елементът $\perp \notin A$. Определяме наредената тройка $\mathcal{A}_\perp = (A_\perp, \sqsubseteq, \perp)$ като:

На англ. *flat domain*

- $A_\perp = A \cup \{\perp\}$;
- $\sqsubseteq$ задава *плоската наредба* върху $A_\perp$.

Тогава $\mathcal{A}_\perp$ е област на Скот, която ще наричаме **плоска област на Скот** за множеството A.

1.2.2 Крайно произведение

[7, стр. 125]

Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са области на Скот. Тогава $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \overset{\text{деф}}{=} (A \times B, \sqsubseteq, \perp)$, където

- $A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \,\&\, b \in B\}$;
- $\langle a, b\rangle \sqsubseteq \langle a', b'\rangle \iff a \sqsubseteq^{\mathcal{A}} a' \,\&\, b \sqsubseteq^{\mathcal{B}} b'$;
- $\perp = \langle \perp^{\mathcal{A}}, \perp^{\mathcal{B}}\rangle$.

Твърдение 1.2. Ако $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ са области на Скот, то $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ е област на Скот.

Упътване. Лесно се съобразява, че $\sqsubseteq$ е частична наредба и че $\perp$ е най-малкият елемент. Да разгледаме една верига $\{\langle a_i, b_i\rangle\}_{i=1}^\infty$ в $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Лесно се вижда, че

$$\bigsqcup_i \langle a_i, b_i\rangle = \langle \bigsqcup_i a_i, \bigsqcup_i b_i\rangle.$$

- За произволен елемент $\langle a_i, b_i\rangle$ от веригата е ясно, че $a_i \sqsubseteq^{\mathcal{A}} \bigsqcup_i a_i$ и $b_i \sqsubseteq^{\mathcal{B}} \bigsqcup_i b_i$. Следователно, $\langle \bigsqcup_i a_i, \bigsqcup_i b_i\rangle$ е горна граница на веригата.
- Нека $\langle c, d\rangle$ е горна граница на веригата, т.е. за всяко i, $a_i \sqsubseteq^{\mathcal{A}} c$ и $b_i \sqsubseteq^{\mathcal{B}} d$. Но тогава c е горна граница на веригата $(a_i)_{i=0}^\infty$ и следователно $\bigsqcup_i a_i \sqsubseteq^{\mathcal{A}} c$. Също така, d е горна граница на веригата $(b_i)_{i=0}^\infty$ и следователно $\bigsqcup_i b_i \sqsubseteq^{\mathcal{B}} d$. Заключаваме, че $\langle \bigsqcup_i a_i, \bigsqcup_i b_i\rangle \sqsubseteq \langle c, d\rangle$, т.е. $\langle \bigsqcup_i a_i, \bigsqcup_i b_i\rangle$ е точна горна граница на веригата.

$\square$

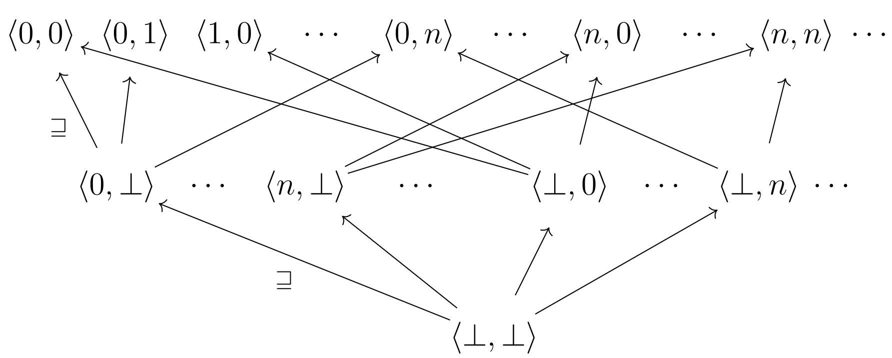
Нека $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, $n \geq 2$, са области на Скот. Дефинираме $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i = (A, \sqsubseteq, \perp)$ по следния начин:

- Ако $n = 2$, то $\prod_{i=1}^{2} \mathcal{A}_i \stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

- Ако $n > 2$, то $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \stackrel{\text{деф}}{=} (\prod_{i=1}^{n-1} \mathcal{A}_i) \times \mathcal{A}_n$.

Използвайки *Твърдение* 1.2, лесно се съобразява следното твърдение.

Твърдение 1.3. Ако $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, $n \geq 2$, са области на Скот, то $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$ е област на Скот.



Фигура 1.2: Графично представяне на част от $\sqsubseteq$ върху $\mathbb{N}_\perp^2$

Вижда се от *Фигура* 1.2, че всяка верига в $\mathbb{N}_\perp^2$ има дължина най-много 3. Лесно се съобразява, че всяка верига в $\mathbb{N}_\perp^k$ има дължина най-много $k+1$. Свойството, че всяка верига в $\mathbb{N}_\perp^k$ има само краен брой различни члена ще се окаже важно по-нататък. Сега ще въведем понятие, което описва това свойство в произволна област на Скот. $\mathbb{N}_\perp^k = \underbrace{\mathbb{N}_\perp \times \cdots \times \mathbb{N}_\perp}_{k}$

Нека $\mathcal{A}$ е област на Скот и да разгледаме една верига $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ в $\mathcal{A}$. Ще казваме, че $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ се **стабилизира**, ако съществува индекс n_0, за който

$$(\forall n \geq n_0)[a_{n_0} = a_n],$$

т.е.

$$a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq a_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq a_{n_0} = a_{n_0+1} = a_{n_0+2} = \cdots$$

От казаното по-горе следва, че всяка растяща верига в $\mathbb{N}_\perp^k$ се стабилизира.

Забележка 1.1. Едни от основните области на Скот, които ще разглеждаме при дефинирането на денотационната семантика ще бъдат $\mathbb{N}_\perp$ и $\mathbb{N}_\perp^k$.

1.3 Изображения в области на Скот

Нека $\mathcal{A}_i = (A_i, \sqsubseteq_i, \perp_i)$, за $i = 1, 2$, са области на Скот. Ще въведем няколко основни вида изображения между $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, които ще използваме често. След това ще разгледаме някои свойства на тези изображения и ще видим каква е връзката между тях.

- Всяка тотална функция от вида $f : A_1 \to A_2$ ще наричаме изображение между областите на Скот $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ и ще записваме $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$. Да въведем означението

  $$[\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2] \stackrel{\text{деф}}{=} (\{f \mid f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2\}, \sqsubseteq, \perp),$$

  където имаме следната релация между изображенията $f, g : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$:

  $$f \sqsubseteq g \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in \mathcal{A}_1)[f(a) \sqsubseteq_2 g(a)].$$

  Също така, изображението $\perp : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ е дефинирано като

  $$(\forall a \in \mathcal{A}_1)[\perp(a) = \perp_2].$$

На хаскел можем да дефинираме изображението $\perp$ по следния начин:

```
ghci> let bottom _ = undefined
```

Теорема 1.1. $[\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2]$ е област на Скот.

Доказателство. Нетривиалната част в доказателството е да проверим, че всяка верига $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ в $[\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2]$ притежава точна горна граница. Да разгледаме изображението $h : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$, където:

За по-кратко пишем $\bar{a}$ вместо $a_1, \ldots, a_n$

$$h(a) \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup\{f_i(a) \mid i \in \mathbb{N}\}. \quad (1.1)$$

Ще докажем, че h е тази точна горна граница.

Това задължително трябва да се провери, защото например множеството $\{\perp, 0, 3\}$ няма точна горна граница относно плоската наредба в $\mathbb{N}_\perp$

- Първо, трябва да се убедим, че дефиницията на h е „смислена”, т.е. h е тотална функция. Трябва да докажем, че за всяко $a \in \mathcal{A}_1$,

  $$\bigsqcup\{f_i(a) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

  съществува. Да фиксираме произволен елемент $a \in \mathcal{A}_1$. Получаваме следната верига в $\mathcal{A}_2$:

  $$f_0(a) \sqsubseteq f_1(a) \sqsubseteq f_2(a) \sqsubseteq \cdots$$

  Понеже $\mathcal{A}_2$ е област на Скот, то тази верига притежава точна горна граница в $\mathcal{A}_2$, която означачаваме като $\bigsqcup\{f_i(a) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Това означава, че $h(a)$ е тотална функция.

- Дотук имаме, че $h \in [\mathcal{A}_1 \ \to \ \mathcal{A}_2]$. Лесно се съобразява, че h е горна граница на веригата $(f_i)_{i=0}^{\infty}$, защото за всяки елемент $a \in \mathcal{A}_1$ и произволен индекс i,

$$f_i(a) \sqsubseteq \bigsqcup\{f_i(a)|i \in \mathbb{N}\} \stackrel{\text{деф}}{=} h(a).$$

- Сега остава да проверим, че h е точна горна граница, т.е. h е най-малката измежду всички горни граници на веригата $(f_i)_{i=0}^{\infty}$. Нека g е друга горна граница на $(f_i)_{i=0}^{\infty}$. Това означава, че за всеки индекс i, $f_i \sqsubseteq g$. Следователно, за фиксирано $a \in \mathcal{A}_1$, $g(a)$ е горна граница за веригата $(f_i(a))_{i=0}^{\infty}$. Тогава е ясно, че за разглеждания елемент a,

$$h(a) \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup\{f_i(a) \mid i \in \mathbb{N}\} \sqsubseteq g(a).$$

  Понеже елементът a е прозиволен, получаваме, че $h \sqsubseteq g$.

- Доказахме, че h е горна граница и че h е най-малката измежду всички горни граници. Заключваме, че h е *точна горна граница* на веригата $(f_i)_{i=0}^{\infty}$. С други думи,

$$h = \bigsqcup_i f_i.$$

Получаваме, че

$$(\bigsqcup_i f_i)(a) = \bigsqcup_i\{f_i(a)\}.$$

$\square$

Следствие 1.1. $[\mathbb{N}_{\perp}^n \ \to \ \mathbb{N}_{\perp}]$ е област на Скот.

1.3.1 Монотонни изображения

Да разгледаме областите на Скот $\mathcal{A}_1 = (A_1, \sqsubseteq_1, \perp_1)$ и $\mathcal{A}_2 = (A_2, \sqsubseteq_2, \perp_2)$. Едно изображение $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ се нарича **монотонно**, ако

$$(\forall a, a' \in \mathcal{A}_1)[a \sqsubseteq_1 a' \implies f(a) \sqsubseteq_2 f(a')].$$

Да въведем означението

$$[\mathcal{A}_1 \stackrel{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_2] \stackrel{\text{деф}}{=} (\{f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2 \mid f \text{ е мон. изобр.}\}, \sqsubseteq, \perp).$$

Теорема 1.2. $[\mathcal{A}_1 \stackrel{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_2]$ е област на Скот.

Упътване. Да фиксираме една верига $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ в $[\mathcal{A}_1 \stackrel{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_2]$. Трябва да докажем, че тази верига притежава точна горна граница, която е монотонно изображение. Да разгледаме същото изображение $h : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ както в доказателството на *Теорема* 1.1, като

$$h(a) \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup\{f_i(a) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Оттам знаем, че h е точна горна граница на веригата. Остава да докажем, че $h \in [\mathcal{A}_1 \stackrel{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_2]$. Нека $a \sqsubseteq b$. Тогава, за всеки индекс k, понеже f_k са монотонни изображения, получаваме следното:

$$f_k(a) \sqsubseteq f_k(b)$$

$$\sqsubseteq \bigsqcup\{f_i(b) \mid i \in \mathbb{N}\} \stackrel{\text{деф}}{=} h(b).$$

Това означава, че $h(b)$ е горна граница за веригата $(f_i(a))_{i=0}^{\infty}$. Заключаваме, че

$$\begin{aligned} h(a) &\stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup\{f_i(a) \mid i \in \mathbb{N}\} \\ &\sqsubseteq \bigsqcup\{f_i(b) \mid i \in \mathbb{N}\} \stackrel{\text{деф}}{=} h(b). \end{aligned}$$

□

Следствие 1.2. $[\mathbb{N}_\perp^n \stackrel{\text{м}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$ е област на Скот.

Удобно е да имаме следващото свойство на монотонните изображения като отделно твърдение за да можем да го използваме наготово по-късно.

Твърдение 1.4. Нека $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{м}}{\to} \mathcal{B}]$ и $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ е верига от елементи на $\mathcal{A}$. Тогава

$$\bigsqcup_i f(a_i) \sqsubseteq f(\bigsqcup_i a_i).$$

Доказателство. Понеже f е монотонно, то $(f(a_i))_{i=0}^{\infty}$ е верига от елементи на $\mathcal{B}$ и тя има точна горна граница. Достатъчно е да докажем, че $f(\bigsqcup_i a_i)$ е горна граница на веригата $(f(a_i))_{i=0}^{\infty}$. Но това е лесно. Понеже $a_i \sqsubseteq \bigsqcup_i a_i$ и f е монотонно, то веднага получаваме, че $f(a_i) \sqsubseteq f(\bigsqcup_i a_i)$. Заключаваме, че $\bigsqcup_i f(a_i) \sqsubseteq f(\bigsqcup_i a_i)$. □

1.3.2 Непрекъснати изображения

На англ. *continuous*

Едно изображение $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ се нарича **непрекъснато**, ако са изпълнени свойствата:

- f е монотонно изображение;
- при всеки избор на верига $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ в $\mathcal{A}_1$, то имаме равенството

$$f(\bigsqcup_i a_i) = \bigsqcup\{f(a_i) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Понеже $\mathcal{A}_1$ е област на Скот знаем, че $\bigsqcup_i a_i \in \mathcal{A}_1$

Понеже f е монотонно, то $(f(a_i))_{i=0}^{\infty}$ е верига.

$\bigsqcup_i f(a_i) \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup\{f(a_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$

Да означим

$$[\mathcal{A}_1 \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_2] \stackrel{\text{деф}}{=} (\{f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2 \mid f \text{ е непр. изобр.}\},\ \sqsubseteq,\ \perp).$$

Ясно е, че всяко непрекъснато изображение е монотонно. Ествено е да си зададем въпроса дали имаме и обратното включване. Оказва се, че в общия случай не е вярно, че всяко монотонно изображение е непрекъснато.

Твърдение 1.5. Съществува област на Скот $\mathcal{A}$, за която

$$[\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \subsetneqq [\mathcal{A} \stackrel{\text{м}}{\to} \mathcal{A}].$$

Упътване. Нека $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_\omega, b_0\}$. Да разгледаме областта на Скот $\mathcal{A} = (A, \sqsubseteq, a_0)$, където наредбата между елементите е следната:

$$a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq a_n \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq a_\omega \sqsubseteq b_0.$$

Нека $f(a_n) = a_{n+1}$, $f(a_\omega) = b_0$ и $f(b_0) = b_0$. Очевидно е, че f е монотонно изображение. Лесно се вижда, че f не е непрекъснато изображение, защото

$$f(\bigsqcup_n a_n) = f(a_\omega) = b_0,$$

но

$$\bigsqcup_n f(a_n) = \bigsqcup_n a_{n+1} = a_\omega.$$

$\square$

Сега да видим един важен за нас случай, при който имаме и обратното включване.

Твърдение 1.6. Ако всяка верига в $\mathcal{A}_1$ се *стабилизира*, то

$$[\mathcal{A}_1 \stackrel{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_2] \subseteq [\mathcal{A}_1 \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_2].$$

Упътване. Да разгледаме една верига $(a_i)_{i=0}^\infty$ в $\mathcal{A}_1$ и $f \in [\mathcal{A}_1 \stackrel{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_2]$. Ще докажем, че

$$f(\bigsqcup_i a_i) = \bigsqcup_i f(a_i).$$

(1) От *Твърдение* 1.4 веднага получаваме, че

$$\bigsqcup_i f(a_i) \sqsubseteq f(\bigsqcup_i a_i).$$

(2) За другата посока ще използваме свойството, че веригата $(a_i)_{i=0}^\infty$ се стабилизира. Нека n_0 е индекс, такъв че $(\forall k \geq n_0)[a_k = a_{n_0}]$. Това означава, че $\bigsqcup_i a_i = a_{n_0}$. Тогава

$$f(\bigsqcup_i a_i) = f(a_{n_0}) \sqsubseteq \bigsqcup_i f(a_i).$$

От (1) и (2) следва, че $f(\bigsqcup_i a_i) = \bigsqcup_i f(a_i)$. $\square$

Понеже всяка верига в $\mathbb{N}_\perp^n$ се *стабилизира*, то получаваме следното важно следствие.

Следствие 1.3. $[\mathbb{N}_\perp^n \stackrel{\text{м}}{\to} \mathbb{N}_\perp] = [\mathbb{N}_\perp^n \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$.

Понеже от *Следствие* 1.2 имаме, че монотонните изображения образуват област на Скот, то директно получаваме следната важна теорема.

Теорема 1.3. $[\mathbb{N}_\perp^n \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]$ е област на Скот.

1.4 Област на Скот от непрекъснати изображения

Следващата теорема е важна, защото с нейна помощ се доказват много свойства на непрекъснатите изображения от по-висок ред.

Теорема 1.4. Нека $\mathcal{A} = (A, \sqsubseteq, \perp)$ да бъде област на Скот и нека множеството [7, стр. 127] [2, стр. 178]

$$\{a_{m,n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

от елементи на A притежава свойството, че

$$n \leq n' \,\&\, m \leq m' \;\Rightarrow\; a_{n,m} \sqsubseteq a_{n',m'}.$$

Тогава са изпълнени равенствата

$$\bigsqcup_m (\bigsqcup_n a_{n,m}) = \bigsqcup_n (\bigsqcup_m a_{n,m}) = \bigsqcup_n a_{n,n}.$$

Доказателство. Първо ще въведем някои означения.

- Да фиксираме произволно m. Тогава множеството $\{a_{n,m} \mid n \in \mathbb{N}\}$ образува верига:

  $$a_{0,m} \sqsubseteq a_{1,m} \sqsubseteq a_{2,m} \sqsubseteq \cdots$$

  Следователно тя има точна горна граница $b_m \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup\{a_{n,m} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

  По дефиниция, всяка монотонно растяща редица в област на Скот притежава точна горна граница.

- Аналогично, при фиксирано n, множеството $\{a_{n,m} \mid m \in \mathbb{N}\}$ образува верига:

  $$a_{n,0} \sqsubseteq a_{n,1} \sqsubseteq a_{n,2} \sqsubseteq \ldots,$$

  която притежава точна горна граница $c_n \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup\{a_{n,m} \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Това означава, че трябва да докажем следното:

$$\bigsqcup_m b_m = \bigsqcup_n c_n = \bigsqcup_n a_{n,n}.$$

1) Първо да съобразим, че множеството $\{b_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ образува верига в $\mathcal{A}$ и следователно притежава точна горна граница $\bigsqcup_m b_m$. Нека да разгледаме произволни $m \leq m'$. Тогава

$$(\forall n)[a_{n,m} \sqsubseteq a_{n,m'} \sqsubseteq \bigsqcup_k a_{k,m'} = b_{m'}].$$

Следователно $b_{m'}$ е горна граница на веригата $(a_{n,m})_{n=0}^{\infty}$ и понеже b_m е точна горна граница на $(a_{n,m})_{n=0}^{\infty}$, то получаваме, че

$$b_m \sqsubseteq b_{m'}.$$

Това означава, че $(b_m)_{m=0}^{\infty}$ е верига в $\mathcal{A}$ и тя притежава точна горна граница $\bigsqcup_m b_m$.

2) С подобни разсъждения можем да докажем, че множеството $\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ образува верига в $\mathcal{A}$, която притежава точна горна граница $\bigsqcup_n c_n$.

3) Сега ще докажем, че

$$\bigsqcup_m b_m = \bigsqcup_n c_n.$$

Имаме, че

$$(\forall m)(\forall n)[a_{n,m} \sqsubseteq \bigsqcup_i a_{i,m} = b_m \sqsubseteq \bigsqcup_i b_i],$$

което е еквивалентно на

$$(\forall n)(\forall m)[a_{n,m} \sqsubseteq b_m \sqsubseteq \bigsqcup_i b_i].$$

Да фиксираме произволно n. Тогава $\bigsqcup_i b_i$ е горна граница на веригата $(a_{n,i})_{i=0}^{\infty}$. Следователно, $c_n = \bigsqcup_i a_{n,i} \sqsubseteq \bigsqcup_i b_i$. Така получаваме, че $\bigsqcup_i b_i$ е горна граница и на веригата $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ и тогава

$$\bigsqcup_n c_n \sqsubseteq \bigsqcup_i b_i.$$

С аналогични разсъждения можем да докажем също, че

$$\bigsqcup_m b_m \sqsubseteq \bigsqcup_n c_n.$$

Така доказахме, че

$$\bigsqcup_m b_m = \bigsqcup_n c_n.$$

4) Достатъчно е още да докажем, че

$$\bigsqcup_n a_{n,n} = \bigsqcup_n c_n.$$

Ясно е, че $a_{n,n}$ е елемент на веригата $(a_{n,m})_{m=0}^{\infty}$ и следователно $a_{n,n} \sqsubseteq \bigsqcup_m a_{n,m} = c_n \sqsubseteq \bigsqcup_n c_n$. Получаваме, че $\bigsqcup_n c_n$ е горна граница на веригата $(a_{n,n})_{n=0}^{\infty}$ и следователно $\bigsqcup_n a_{n,n} \sqsubseteq \bigsqcup_n c_n$.

За другата посока, да разгледаме произволен елемент $a_{n,m}$. Нека $k = \max\{n, m\}$. Ясно е, че $a_{n,m} \sqsubseteq a_{k,k} \sqsubseteq \bigsqcup_n a_{n,n}$. Следователно, $\bigsqcup_n a_{n,n}$ е горна граница на верига $(a_{m,n})_{m=0}^{\infty}$ и оттук получаваме, че за всяко n, $c_n \sqsubseteq \bigsqcup_n a_{n,n}$. Получаваме, че $\bigsqcup_n a_{n,n}$ е горна граница на веригата $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ и следователно $\bigsqcup_n c_n \sqsubseteq \bigsqcup_n a_{n,n}$.

С това доказателството на теоремата е завършено. $\square$

Лема 1.1. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са области на Скот. Нека $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ е верига от елементи на $[\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{B}]$. Да дефинираме изображението h на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ по следния начин

$$h(a) \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup\{f_k(a) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Изображението h е *непрекъснато* и е *точна горна граница* на веригата $(f_k)_{k=0}^{\infty}$, т.е. $h = \bigsqcup_k f_k$.

Ако $b_k = f_k(a)$, то $h(a)$ е точната горна граница на веригата $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ в $\mathcal{B}$

Доказателство. Доказателството, че h е точна горна граница на веригата $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ е лесно.

- Да разгледаме произволен елемент $a \in A$. Лесно се вижда, че понеже $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ е верига, то $(f_k(a))_{k=0}^{\infty}$ също е верига. Това е така, защото всяко непрекъснато изображение е също така и монотонно.

  $\bigsqcup_n f_n(a)$ е съкратен запис за $\bigsqcup\{f_n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

  Получаваме, че за всяко k, $f_k(a) \sqsubseteq^{\mathcal{B}} \bigsqcup_n f_n(a) \stackrel{\text{деф}}{=} h(a)$. Понеже това е вярно за произволно $a \in A$, $(\forall k)[f_k \sqsubseteq h]$, което означава, че h е горна граница на веригата.

- Да разгледаме произволно изображение g, което е горна граница на веригата $(f_k)_{k=0}^{\infty}$. За произволен елемент $a \in A$,

$$(\forall k)[f_k(a) \sqsubseteq^{\mathcal{B}} g(a)].$$

  Това означава, че $g(a)$ е горна граница на веригата $(f_k(a))_{k=0}^{\infty}$. Понеже $h(a) = \bigsqcup_k\{f_k(a)\}$ е точната горна граница на веригата $(f_k(a))_{k=0}^{\infty}$, то $h(a) \sqsubseteq^{\mathcal{B}} g(a)$. Оттук следва, че $h \sqsubseteq g$.

По-сложната част на доказателството е проверката, че h е непрекъснато изображение. Да вземем една монотонно растяща редица $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ от елементи на A. Ще докажем, че

За момента дори не е ясно дали $\{h(a_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ е верига в $\mathcal{B}$

$$h(\bigsqcup_k a_k) = \bigsqcup_k\{h(a_k)\}.$$

Нека $e_{n,m} \stackrel{\text{деф}}{=} f_n(a_m)$. Понеже всяко f_n е непрекъснато и следователно монотонно изображение, то имаме

$$n \leq n' \,\&\, m \leq m' \;\Rightarrow\; e_{n,m} \sqsubseteq^{\mathcal{B}} e_{n',m'}.$$

Следователно,

$$\begin{aligned}
h(\bigsqcup_m a_m) &= \bigsqcup_n(f_n(\bigsqcup_m a_m)) && \text{// от деф. на } h\\
&= \bigsqcup_n(\bigsqcup_m f_n(a_m)) && \text{// защото } f_n \text{ е непр.}\\
&= \bigsqcup_n(\bigsqcup_m e_{n,m}) = \bigsqcup_m(\bigsqcup_n e_{n,m}) && \text{// от \textit{Теорема} 1.4}
\end{aligned}$$

$$= \bigsqcup_m (\bigsqcup_n f_n(a_m)) \qquad // \text{ от деф. на } e_{n.m}$$
$$= \bigsqcup_m \{h(a_m)\}. \qquad // \text{ от деф. на } h$$

□

Да напомним, че релацията $\sqsubseteq$ между две изображения е дефинирана като

$$f \sqsubseteq g \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in A)[f(a) \sqsubseteq^{\mathcal{B}} g(a)].$$

Теорема 1.5. Ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са области на Скот, то $[\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{B}]$ е област на Скот.

Нека $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ и $\mathcal{A}$ са области на Скот и да разгледаме $f : \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}$. Казваме, че f е **непрекъснато изображение по i-тия аргумент**, ако за всяка верига $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ в $\mathcal{A}_i$, то

$$f(b_1, \dots, b_{i-1}, \bigsqcup_k a_k, b_{i+1}, \dots, b_n) = \bigsqcup_k f(b_1, \dots, b_{i-1}, a_k, b_{i+1}, \dots, b_n).$$

[2, стр. 184]

Твърдение 1.7. Нека $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ и $\mathcal{A}$ са области на Скот. Едно изображение

$$f : \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}$$

е непрекъснато точно тогава, когато f е непрекъснато по всеки от аргументите си.

Доказателство. За по-просто изложение, да разгледаме случая $n = 2$.

✍ Обобщете това твърдение за $n > 2$.

($\Rightarrow$) Лесно се съобразява, че ако f е непрекъснато изображение, то f е непрекъснато по всеки от аргументите си. Да видим например защо f е непрекъснато по първия аргумент. Да разгледаме веригата $(\langle a_i, b\rangle)_{i=0}^{\infty}$ от елементи на $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, за някое фиксирано b. Знаем, че $\bigsqcup_i \langle a_i, b\rangle = \langle \bigsqcup_i a_i, b\rangle$. Тогава

Формално погледнато, правилно е да пишем $f(\langle a, b\rangle)$ вместо $f(a, b)$.

$$f(\bigsqcup_i a_i, b) = f(\bigsqcup_i \langle a_i, b\rangle)$$
$$= \bigsqcup_i f(a_i, b) \qquad // \ f \text{ е непрекъснато.}$$

($\Leftarrow$) Нека сега f е непрекъснато по всеки от аргументите си. Ще докажем, че f е непрекъснато. Нека $\{\langle a_n, b_n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ е верига в $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Понеже от *Твърдение* 1.2 знаем, че

$$\bigsqcup_n \langle a_n, b_n\rangle = \langle \bigsqcup_n a_n, \bigsqcup_n b_n\rangle,$$

ще докажем, че

$$\bigsqcup_n f(a_n, b_n) = f(\bigsqcup_n a_n, \bigsqcup_n b_n).$$

Да положим $e_{n,m} = f(a_n, b_m)$. Понеже f е непрекъснато по всеки от аргументите си, лесно се вижда, че f е монотонно изображение по всеки от аргументите си. Следователно,

$$n \leq n' \,\&\, m \leq m' \;\Rightarrow\; e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}.$$

Получаваме, че

$$\begin{aligned}
\bigsqcup_n f(a_n, b_n) &= \bigsqcup_n e_{n,n} && \text{// от опр. на } e_{n,m}\\
&= \bigsqcup_n (\bigsqcup_m e_{n,m}) && \text{// от \textit{Теорема} 1.4}\\
&= \bigsqcup_n (\bigsqcup_m f(a_n, b_m)) && \text{// от опр. на } e_{n,m}\\
&= \bigsqcup_n f(a_n, \bigsqcup_m b_m) && \text{// } f \text{ е непр. по втория си аргумент}\\
&= f(\bigsqcup_n a_n, \bigsqcup_m b_m) && \text{// } f \text{ е непр. по първия си аргумент.}
\end{aligned}$$

□

1.5 Най-малки неподвижни точки

- Да фиксираме произволна област на Скот $\mathcal{A} = (A, \sqsubseteq, \perp)$ и да разгледаме едно изображение $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Казваме, че $a \in \mathcal{A}$ е **неподвижна точка** на f, ако $f(a) = a$.
- Казваме, че $a \in \mathcal{A}$ е **най-малката неподвижна точка** на f, ако:
  - a е неподвижна точка, т.е. $f(a) = a$;
  - за всяко $b \in \mathcal{A}$ със свойството, че $f(b) = b$ имаме $a \sqsubseteq b$.
  - Ще означаваме най-малката неподвижна точка на f като $\mathtt{lfp}(f)$.

least fixed point

Теорема 1.6 (Клини)**.** Нека $\mathcal{A}$ е област на Скот. Всяко $f \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{A}]$ притежава най-малка неподвижна точка.

Доказателство. Определяме монотонно растяща редица от елементи на $\mathcal{A}$ по следния начин:

В [8] се нарича теорема на Кнастер-Тарски. Според уикипедия е теорема на Клини

$$\begin{aligned}
a_0 &\overset{\text{деф}}{=} \perp && // = f^0(\perp)\\
a_{n+1} &\overset{\text{деф}}{=} f(a_n) && // = f^{n+1}(\perp).
\end{aligned}$$

Първо ще докажем с индукция по n, че $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ е верига. Ясно е, че $a_0 \sqsubseteq a_1$. Да приемем, че $a_n \sqsubseteq a_{n+1}$. Тогава, понеже всяко непрекъснато изображение е монотонно, то имаме, че

$$\underbrace{f(a_n)}_{a_{n+1}} \sqsubseteq \underbrace{f(a_{n+1})}_{a_{n+2}}.$$

Нека $a \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup_i a_i$. Тогава

$$\begin{aligned}
f(a) &= f(\bigsqcup_i a_i) && // \ a \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup_i a_i \\
&= \bigsqcup_i f(a_i) && // \ f \text{ е непрекъсната} \\
&= \bigsqcup_i a_{i+1} && // \ a_{i+1} = f(a_i) \\
&= \bigsqcup_i a_i && // \text{ защото } (a_i)_{i=0}^{\infty} \text{ е верига} \\
&= a.
\end{aligned}$$

Така доказахме, че a е *неподвижна точка* на f. Остана да видим, че е най-малката неподвижна точка на f.

Нека $b = f(b)$. С индукция по n ще докажем, $(\forall n)[a_n \sqsubseteq b]$.

- За $n = 0$ е очевидно.
- Да приемем, че $a_n \sqsubseteq b$. Тогава $a_{n+1} \stackrel{\text{деф}}{=} f(a_n) \sqsubseteq f(b) = b$, защото f е монотонно изображение.

Така доказахме, че b е горна граница на веригата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Заключаваме, че $a \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup_n a_n \sqsubseteq b$. Следователно, a е *най-малката неподвижна точка* на f, т.е. $a = \mathtt{lfp}(f)$. □

Задача 1.3. Покажете, че съществува област на Скот $\mathcal{A}$ и $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{м}}{\to} \mathcal{A}]$, което притежава най-малка неподвижна точка, но тя не е $\bigsqcup_n f^n(\perp^{\mathcal{A}})$.

Упътване. Да разгледаме $\mathcal{A} = (A, \sqsubseteq, a_0)$, където елементите на A са подредени по следния начин:

$$A = \{a_0 \sqsubset a_1 \sqsubset \cdots \sqsubset a_n \sqsubset \cdots \sqsubset a_\omega \sqsubset b\}.$$

т.е. A е съставена от веригата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ веднага следвана от елементите a_ω и b. Да обърнем внимание, че $\bigsqcup_n a_n = a_\omega$. Сега да разгледаме изображението $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, където за всяко n,

$$\begin{aligned}
f(a_n) &= a_{n+1} \\
f(a_\omega) &= b \\
f(b) &= b.
\end{aligned}$$

Лесно се вижда, че това изображение е монотонно. Обаче f не е непрекъснато изображение, защото $\bigsqcup_n a_n = a_\omega$, и тогава:

$$f(\bigsqcup_n a_n) = f(a_\omega) = b \neq a_\omega = \bigsqcup_n a_{n+1} = \bigsqcup_n \{f(a_n)\}.$$

Според дефиницията на изображението f, единствената неподвижна точка на f е елементът b. Това означава, че b е също и най-малката неподвижна точка. Това е пример за монотонно изображение, което не е непрекъснато, но притежава най-малка неподвижна точка, макар и тя да не е $\bigsqcup_n f^n(a_0)$. □

$f^n(a_0) = a_n$.

Пример 1.5. Да разгледаме следното изображение $\Gamma : [\mathbb{N} \xrightarrow{\text{ч}} \mathbb{N}] \to [\mathbb{N} \xrightarrow{\text{ч}} \mathbb{N}]$, където

$$\Gamma(f)(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ x + f(x-1), & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Първо да видим, че Γ е монотонно изображение. Нека $f \sqsubseteq g$. Трябва да докажем, че за всяко x, ако $\Gamma(f)(x) = y$, то $\Gamma(g)(x) = y$.

- Нека $x = 0$. Тогава $\Gamma(f)(0) = 0 = \Gamma(g)(0)$.
- Нека $x > 0$ и да приемем, че $\Gamma(f)(x) = x + f(x-1) = y$. Това означава, че $f(x-1) = z$, за някое z, и $x+z = y$. От $f \sqsubseteq g$ следва, че имаме също и $g(x-1) = z$. Тогава е ясно, че $\Gamma(g)(x) = x + g(x-1) = x + z = y$.

Разгледахме всички възможни случаи за естественото число x и видяхме, че за произволно x, ако $\Gamma(f)(x) = y$, то $\Gamma(g)(x) = y$. Заключаваме, че $\Gamma(f) \sqsubseteq \Gamma(g)$, т.е. Γ е монотонно изображение.

$\mathtt{Graph}(\Gamma(f)) \subseteq \mathtt{Graph}(\Gamma(g))$.

Нека сега да видим, че Γ е непрекъснато изображение. Да разгледаме произволна верига $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ от частични функции. Трябва да докажем, че

$$\Gamma(\bigsqcup_i f_i) = \bigsqcup_i \Gamma(f_i).$$

Щом Γ е монотонно, от *Твърдение* 1.4 вече знаем, че

$$\bigsqcup_i \Gamma(f_i) \sqsubseteq \Gamma(\bigsqcup_i f_i).$$

Остава да докажем обратната посока. И така, нека първо да вземем $x = 0$. Тогава $\Gamma(\bigsqcup_i f_i)(0) = 0$. От дефиницията от Γ знаем, че за всяко i, $\Gamma(f_i)(0) = 0$ и оттук $(\bigsqcup_i \Gamma(f_i))(0) = 0$. Следователно,

$$\Gamma(\bigsqcup_i f_i)(0) = 0 = (\bigsqcup_i \Gamma(f_i))(0).$$

Нека сега $x > 0$. Тогава

Да напомним, че $(\bigsqcup_i f_i)(u) = v$ точно тогава, когато съществува индекс i, за който $f_i(u) = v$.

$$\Gamma(\bigsqcup_i f_i)(x) = x + (\bigsqcup_i f_i)(x-1) = y.$$

Ясно е, че съществува z, за което $(\bigsqcup_i f_i)(x-1) = z$ и $x+z = y$. Знаем, че съществува индекс i, за който $f_i(x-1) = z$. Тогава, понеже $\Gamma(f_i)(x) = x + f_i(x-1) = x+z = y$, то следва, че $(\bigsqcup_i \Gamma(f_i))(x) = y$.

Сега вече можем да намерим $\mathtt{lfp}(\Gamma) = \bigsqcup_n \Gamma^n(\bot)$. Ще докажем, че

$$\mathtt{lfp}(\Gamma)(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

за всяко естествено число x. Нека за улеснение да означим $g_n = \Gamma^n(\bot)$. Ще докажем, че за всяко n,

$$g_n(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{x} i, & \text{ако } x < n \\ \text{не е деф.}, & \text{ако } x \geq n. \end{cases}$$

Ясно е, че $g_0 = \bot$, което може да се запише и така:

Да напомним, че $\Gamma^0(g) = g$ и $\Gamma^{n+1}(g) = \Gamma(\Gamma^n(g))$.

$$g_0(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{x} i, & \text{ако } x < 0 \\ \text{не е деф.}, & \text{ако } x \geq 0. \end{cases}$$

Да приемем, че нашето твърдение е изпълнено за g_n. Ще докажем, че то е изпълнено и за g_{n+1}. И така,

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= \Gamma(g_n)(x) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ x + g_n(x-1), & \text{ако } x > 0 \end{cases} \\ &\overset{\text{и.п.}}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ x + \sum_{i=1}^{x-1} i, & \text{ако } 0 \leq x - 1 < n \\ \text{не е деф.}, & \text{ако } x - 1 \geq n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0 \\ \sum_{i=1}^{x} i, & \text{ако } 1 \leq x < n+1 \\ \text{не е деф.}, & \text{ако } x \geq n+1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{i=1}^{x} i, & \text{ако } x < n+1 \\ \text{не е деф.}, & \text{ако } x \geq n+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Сега можем да заключим, че за всяко естествено число x,

$$g_{x+1}(x) = \sum_{i=1}^{x} i = \frac{x(x+1)}{2}.$$

Тогава

$$\texttt{lfp}(\Gamma)(x) = (\bigsqcup_i g_i)(x) = \frac{x(x+1)}{2}.$$

Твърдение 1.8. За всяко $f \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$ е изпълнено, че

$$(\forall a \in \texttt{Pref}(f))[\texttt{lfp}(f) \sqsubseteq a],$$

където

$$\texttt{Pref}(f) \overset{\text{деф}}{=} \{a \in \mathcal{A} \mid f(a) \sqsubseteq a\}$$

е множеството от всички преднеподвижни точки на f. Това означава, че $\texttt{lfp}(f)$ е най-малката преднеподвижна точка на f.

Доказателство. Знаем от Теоремата на Клини, че $\texttt{lfp}(f) = \bigsqcup_n f^n(\bot)$. Също така знаем, че $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ е верига, където за улеснение сме положили $b_n \overset{\text{деф}}{=} f^n(\bot)$. Ясно е също, че $\texttt{Pref}(f) \neq \emptyset$, защото $\texttt{lfp}(f) \in \texttt{Pref}(f)$. Да фиксираме прозиволен елемент $a \in \texttt{Pref}(f)$. С индукция по n ще докажем, че $b_n \sqsubseteq a$ за всяко n.

- За $n = 0$ е очевидно, защото тогава $b_0 \overset{\text{деф}}{=} \bot \sqsubseteq a$.

- Да приемем, че $b_n \sqsubseteq a$. Ще докажем, че $b_{n+1} \sqsubseteq a$. Но това е лесно.

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= f(b_n) && \text{// от деф. на } b_{n+1} \\ &\sqsubseteq f(a) && \text{// } b_n \sqsubseteq a \;\&\; f \text{ е мон.} \\ &\sqsubseteq a && \text{// } a \in \mathtt{Pref}(f). \end{aligned}$$

Така доказахме, че за всяко n, $b_n \sqsubseteq a$, откъдето следва, че a е горна граница за веригата $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, откъдето директно получаваме, че

$$\mathtt{lfp}(f) = \bigsqcup_n b_n \sqsubseteq a.$$

□

1.6 Оператор за най-малка неподвижна точка

Задача 1.4. Нека $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ е верига от елементи на $[\mathcal{A} \stackrel{\text{м}}{\to} \mathcal{A}]$. Докажете, че:

а) $(f_i^n)_{i=0}^{\infty}$ е верига за произволно n;

б) $(f_i^n)_{n=0}^{\infty}$ е верига за произволно i;

в) $(\bigsqcup_n f_i^n)_{i=0}^{\infty}$ е верига;

г) $(\bigsqcup_i f_i^n)_{n=0}^{\infty}$ е верига.

Теорема 1.7. Нека $\mathcal{A}$ е област на Скот и нека $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$. Тогава изображението $Y : [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \to \mathcal{A}$, определено като

$$Y(f) = \mathtt{lfp}(f),$$

е непрекъснато, т.е. $Y \in [[\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$.

Доказателството в [2, стр. 188] е малко по-различно.

Знаем от *Теорема* 1.6, че най-малката неподвижна точка на f е елемента $\bigsqcup_n f^n(\perp^{\mathcal{A}})$, т.е. $\mathtt{lfp}(f) = \bigsqcup_n f^n(\perp^{\mathcal{A}})$.

Доказателство. Нека да вземем една верига $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ от непрекъснати изображения. Нашата цел е да докажем, че

$$Y(\bigsqcup_n f_n) = \bigsqcup_n Y(f_n).$$

Да означим с h точната горна граница на $(f_n)_{n=0}^{\infty}$. Знаем, че $h(a) = \bigsqcup_n \{f_n(a)\}$, а от *Теорема* 1.5 знаем, че h е непрекъснато изображение.

Записът ще стане много тромав, ако вместо h използваме означението $\bigsqcup_n f_n$.

Твърдение 1.9. За всяко $k \geq 0$ и за всеки елемент $a \in \mathcal{A}$,

$$h^k(a) = \bigsqcup_n \{f_n^k(a)\}.$$

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по k, като случая $k = 0$ е ясен, защото $h^0(a) = f_n^0(a) = a$. Нека приемем, че твърдението е вярно за произволно k. Ще докажем, че твърдението е вярно за $k+1$.

$$\begin{aligned} h^{k+1}(a) &= h(h^k(a)) \\ &= h(\bigsqcup_n f_n^k(a)) && \text{// от инд. предположение} \\ &= \bigsqcup_n h(f_n^k(a)) && \text{// } h \text{ е непрекъснато изображение} \\ &= \bigsqcup_n(\bigsqcup_m f_m(f_n^k(a))). \end{aligned}$$

Да положим $b_n = f_n^k(a)$, за всяко n. Понеже $f_n \sqsubseteq f_{n'}$, лесно се съобразява, че за $n \leq n'$ имаме $b_n \sqsubseteq^{\mathcal{A}} b_{n'}$.

Сега да положим $e_{m,n} = f_m(b_n)$. Отново, понеже $(b_n)_{n=0}^\infty$ и $(f_m)_{m=0}^\infty$ са вериги, имаме

$$m \leq m' \;\&\; n \leq n' \;\Rightarrow\; e_{m,n} \sqsubseteq^{\mathcal{A}} e_{m',n'}.$$

Получаваме, че

$$\begin{aligned} h^{k+1}(a) &= \bigsqcup_n(\bigsqcup_m f_m(f_n^k(a))) && \text{// от горното равенство за } h^{k+1} \\ &= \bigsqcup_n(\bigsqcup_m e_{m,n}) && \text{// от определението на } e_{m,n} \\ &= \bigsqcup_n e_{n,n} && \text{// от \textit{Теорема} 1.4} \\ &= \bigsqcup_n f_n(f_n^k(a)) = \bigsqcup_n f_n^{k+1}(a) \end{aligned}$$

С това твърдението е доказано. □

Сега вече сме готови да докажем непрекъснатостта на Y. Имаме, че:

$$\begin{aligned} Y(\bigsqcup_n f_n) &= Y(h) && \text{// от опр. на } h \\ &= \bigsqcup_m h^m(\perp^{\mathcal{A}}) && \text{// от опр. на } Y \\ &= \bigsqcup_m(\bigsqcup_n f_n^m(\perp^{\mathcal{A}})) && \text{// от горното твърдение.} \end{aligned}$$

Да положим $e_{m,n} = f_n^m(\perp^{\mathcal{A}})$. Отново лесно се съобразява, че

$$m \leq m' \;\&\; n \leq n' \;\Rightarrow\; e_{m,n} \sqsubseteq^{\mathcal{A}} e_{m',n'}.$$

Получаваме, че

$$Y(\bigsqcup_n f_n) = \bigsqcup_m(\bigsqcup_n f_n^m(\perp^{\mathcal{A}})) \qquad \text{// от горното равенство}$$

$$= \bigsqcup_m (\bigsqcup_n e_{m,n}) \qquad // \text{ от опр. на } e_{m,n}$$

$$= \bigsqcup_n (\bigsqcup_m e_{m,n}) \qquad // \text{ от } \textit{Теорема } 1.4$$

$$= \bigsqcup_n (\bigsqcup_m f_n^m(\perp^{\mathcal{A}})) = \bigsqcup_n Y(f_n). \qquad // \text{ от опр. на } Y.$$

□

Добре е да погледнете това: https://en.wikibooks.org/wiki/Haskell/Fix_and_recursion

```
ghci> fact x = if x == 0 then 1 else x * fact(x-1)
ghci> fact 5
120
ghci> fix f = x where x = f x
ghci> :t f
fix :: (t -> t) -> t
ghci> fact' = fix \f x -> if x == 0 then 1 else x * f(x-1)
ghci> fact' 5
120
ghci> gamma f = \x -> if x == 0 then 1 else x * f(x-1)
ghci> :t gamma
(t -> t) -> t -> t
ghci> fact'' = fix gamma
ghci> fact'' 5
120
ghci> fix' f = x where x = f(f(f(x)))
ghci> fact''' = fix' gamma
ghci> fact''' 5
120
```

1.7 Изображения запазващи непрекъснатостта

Твърдение 1.10. Ако $f \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} B]$ и $g \in [\mathcal{B} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{C}]$, то $g \circ f \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{C}]$, където

$$(g \circ f)(a) \stackrel{\text{деф}}{=} g(f(a)).$$

Упътване. Нека $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ е верига в $\mathcal{A}$. Да обърнем внимание, че понеже $f \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{B}]$, то f е монотонно изображение и тогава $(f(a_i))_{i=0}^{\infty}$ е верига в $\mathcal{B}$. Тогава:

$$(g \circ f)(\bigsqcup_i a_i) = g(f(\bigsqcup_i a_i)) \qquad // \text{ от деф.}$$

$$= g(\bigsqcup_i f(a_i)) \qquad // \ f \text{ е непр.}$$

$$= \bigsqcup_i g(f(a_i)) \qquad // \ g \text{ е непр.}$$

□

Твърдение 1.11. Докажете, че изображението

$$\mathtt{comp} : [\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}] \times [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{B}] \to [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$$

е непрекъснато, където $\mathtt{comp}(f, g) = f \circ g$. С други думи, comp е елемент на областта на Скот

$$[[\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}] \times [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{B}] \overset{\text{н}}{\to} [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]].$$

Упътване. Използвайте *Твърдение* 1.7. □

Определение 1.2. Нека $\mathcal{A}$ е област на Скот. Дефинираме следното изображение

$$\mathtt{if} : \mathbb{N}_\perp \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \text{ където}$$
$$\mathtt{if}(b, a_1, a_2) = \begin{cases} a_1, & \text{ако } b \in \mathbb{N}^+ \\ a_2, & \text{ако } b = 0 \\ \perp, & \text{ако } b = \perp. \end{cases}$$

Задача 1.5. Докажете, че if е непрекъснато изображение, т.е.

$$\mathtt{if} \in [\mathbb{N}_\perp \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}].$$

Упътване. Докажете, че if е непрекъснато изображение по всеки от аргументите си поотделно. □

Определение 1.3. Нека $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ са области на Скот. Дефинираме изображението

$$\mathtt{eval} : [\mathcal{D} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{E}] \times \mathcal{D} \to \mathcal{E},$$

по следния начин:

$$\mathtt{eval}(f, d) \overset{\text{деф}}{=} f(d).$$

[2, стр. 186]

Задача 1.6. Докажете, че eval е непрекъснато изображение, т.е.

$$\mathtt{eval} \in [[\mathcal{D} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{E}] \times \mathcal{D} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{E}].$$

Доказателство. Според *Твърдение* 1.7, достатъчно е да докажем, че eval е непрекъснато изображение по всеки от двата си аргумента поотделно.

Първо, нека $(f_n)_{n=0}^\infty$ е верига от елементи на $[\mathcal{D} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{E}]$ и d е произволен елемент на $\mathcal{D}$. Тогава

$$\mathtt{eval}(\bigsqcup_n f_n, d) = (\bigsqcup_n f_n)(d) = \bigsqcup_n \{f_n(d)\} = \bigsqcup_n \mathtt{eval}(f_n, d),$$

т.е. изображението eval е непрекъснато по първия си аргумент.

Нека сега $(d_n)_{n=0}^\infty$ е верига от елементи на $\mathcal{D}$. Тогава за произволен елемент f на $[\mathcal{D} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{E}]$ получаваме, че

$$\mathtt{eval}(f, \bigsqcup_n d_n) = f(\bigsqcup_n d_n) = \bigsqcup_n \{f(d_n)\} = \bigsqcup_n \mathtt{eval}(f, d_n).$$

□

Определение 1.4. Нека $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ са области на Скот. Изображението

$$\mathtt{curry} : [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}] \to [\mathcal{A} \to [\mathcal{B} \to \mathcal{C}]],$$

е дефинирано като

$$\mathtt{curry}(f)(a)(b) \overset{\text{деф}}{=} f(a, b).$$

[2, стр. 187]

Твърдение 1.12. Ако f е непрекъснато изображение, то $\mathtt{curry}(f)$ е непрекъснато изображение, т.е. $\mathtt{curry}(f) \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} [\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]]$. Освен това,

$$\mathtt{curry} \in [[\mathcal{A} \times \mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}] \overset{\text{н}}{\to} [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} [\mathcal{B} \to \mathcal{C}]]].$$

Доказателство. Първо да фиксираме $f \in [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$ и $a \in \mathcal{A}$. Ще докажем, че $\mathtt{curry}(f)(a) \in [\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$. Нека фиксираме верига $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ от елементи на $\mathcal{B}$. Тогава

Ако означим $h \overset{\text{деф}}{=} \mathtt{curry}(f)(a)$, то трябва да докажем, че за произволна верига $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ в $\mathcal{B}$, $h(\bigsqcup_i b_i) = \bigsqcup_i \{h(b_i)\}$.

$$\begin{aligned}
\mathtt{curry}(f)(a)(\bigsqcup_i b_i) &\overset{\text{деф}}{=} f(a, \bigsqcup_i b_i) \\
&= \bigsqcup_i \{f(a, b_i)\} && \text{// } f \text{ е непр. по втория си аргумент} \\
&= \bigsqcup_i \{\mathtt{curry}(f)(a)(b_i)\}. && \text{// опр. на } \mathtt{curry}
\end{aligned}$$

Второ, сега пък за фиксирано $f \in [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$ трябва да докажем, че $\mathtt{curry}(f) \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} [\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]]$. За целта да разгледаме произволна верига $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ от елементи на $\mathcal{A}$. Трябва да докажем, че

$$\mathtt{curry}(f)(\bigsqcup_i a_i) = (\bigsqcup_i \mathtt{curry}(f))(a_i).$$

Също така, да напомним, че за произволен елемент $b \in \mathcal{B}$,

$$(\bigsqcup_i \{\mathtt{curry}(f)(a_i)\})(b) \overset{\text{деф}}{=} \bigsqcup_i \{\mathtt{curry}(f)(a_i)(b)\}. \tag{1.2}$$

Обърнете внимание, че $\mathtt{curry}(f)(a_i)$ образуват верига в $[\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$, откъдето следва, че $\bigsqcup_i \{\mathtt{curry}(f)(a_i)\}$ е добре дефиниран елемент.

Тогава

$$\begin{aligned}
\mathtt{curry}(f)(\bigsqcup_i a_i)(b) &= f(\bigsqcup_i a_i, b) && \text{// опр. на } \mathtt{curry} \\
&= \bigsqcup_i f(a_i, b) && \text{// } f \text{ е непр. по първия аргумент} \\
&= \bigsqcup_i \{\mathtt{curry}(f)(a_i)(b)\} && \text{// опр. на } \mathtt{curry} \\
&= (\bigsqcup_i \{\mathtt{curry}(f)(a_i)\})(b). && \text{// от (1.2)}
\end{aligned}$$

Заключаваме, че $\mathtt{curry}(f)(\bigsqcup_i a_i) = (\bigsqcup_i \mathtt{curry}(f))(a_i)$.

Трето, остава да видим защо за произволна верига $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ от елементи на $[\mathcal{A} \times \mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$ е изпълнено, че

$$\mathtt{curry}(\bigsqcup_i f_i) = \bigsqcup_i \{\mathtt{curry}(f_i)\}.$$

За произволен елемент $a \in \mathcal{A}$ имаме, че

$$(\bigsqcup_i \mathtt{curry}(f_i))(a) = \bigsqcup_i \{\mathtt{curry}(f_i)(a)\}.$$

За произволен елемент $b \in \mathcal{B}$ имаме, че

Ако $h_i \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{curry}(f_i)(a)$, то е ясно, че $(\bigsqcup_i h_i)(b) = \bigsqcup_i \{h_i(b)\}$.

$$(\bigsqcup_i \mathtt{curry}(f_i)(a))(b) = \bigsqcup_i \{\mathtt{curry}(f_i)(a)(b)\}.$$

Комбинирайки предишните две равенства, получаваме, че за произволни $a \in \mathcal{A}$ и $b \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}
(\bigsqcup_i \mathtt{curry}(f_i))(a)(b) &= \bigsqcup_i \{\mathtt{curry}(f_i)(a)(b)\} \\
&= \bigsqcup_i \{f_i(a,b)\} && \text{// от опр. на } \mathtt{curry} \\
&= (\bigsqcup_i f_i)(a,b) \\
&= \mathtt{curry}(\bigsqcup_i f_i)(a)(b). && \text{// от опр. на } \mathtt{curry}
\end{aligned}$$

□

Определение 1.5. Нека $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ са области на Скот. Изображението

$$\mathtt{uncurry} : [[\mathcal{A} \to [\mathcal{B} \to \mathcal{C}]] \to [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}]],$$

е дефинирано като

$$\mathtt{uncurry}(f)(a,b) \stackrel{\text{деф}}{=} f(a)(b).$$

Задача 1.7. Докажете, че ако f е непрекъснато изображение, то $\mathtt{uncurry}(f)$ е непрекъснато изображение, т.е. $\mathtt{uncurry}(f) \in [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$. Освен това, докажете, че

$$\mathtt{uncurry} \in [[\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} [\mathcal{B} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]] \stackrel{\text{н}}{\to} [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]].$$

1.8 Най-малко решение на система от уравнения

Твърдение 1.13. Нека $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{B}]$ и $g \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$. Тогава $h \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{B} \times \mathcal{C}]$, където

$$h(a) \stackrel{\text{деф}}{=} \langle f(a), g(a) \rangle.$$

В такъв случай ще означаваме $h = f \times g$.

Доказателство. Нека $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ е верига в $\mathcal{A}$. Тогава:

$$h(\bigsqcup_i a_i) = \langle f(\bigsqcup_i a_i), g(\bigsqcup_i a_i) \rangle \qquad \text{// от деф.}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \bigsqcup_i f(a_i), \bigsqcup_i g(a_i) \rangle && \text{// } f \text{ и } g \text{ са непр.}\\
&= \bigsqcup_i \langle f(a_i), g(a_i) \rangle && \text{// от } \textit{Твърдение } 1.2\\
&= \bigsqcup_i h(a_i) && \text{// от деф.}
\end{aligned}
$$

□

Обърнете внимание на следващото твърдение, защото ще го използваме често по-късно. То представлява обобщение на предишната задача и има сходно доказателство.

Твърдение 1.14. Нека $f_i \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{B}_i]$, за $i = 1, \ldots, n$. Тогава

✍ Докажете сами!

$$
g \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i],
$$

където

$$
g(a) \overset{\text{деф}}{=} \langle f_1(a), f_2(a), \ldots, f_n(a) \rangle.
$$

В такъв случай ще означаваме $g = f_1 \times f_2 \cdots \times f_n$.

Нека $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ са области на Скот и да разгледаме изображенията

$$
f_i : \prod_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k \to \mathcal{A}_i,
$$

за $i = 1, \ldots, n$. Казваме, че $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ е **решение на системата**

$$
\bigstar = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = x_n, \end{cases}
$$

ако са в сила равенствата

$$
\begin{aligned}
& f_1(a_1, \ldots, a_n) = a_1 \\
& \vdots \\
& f_n(a_1, \ldots, a_n) = a_n.
\end{aligned}
$$

Казваме, че $\bar{a}$ е **най-малкото решение** на системата $\bigstar$, ако за всяко друго решение $\bar{b}$ е изпълнено, че $\bar{a} \sqsubseteq \bar{b}$.

Теорема 1.8. За произволни изображения $f_i \in [\prod_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{A}_i]$, за $i = 1, \dots, n$, системата

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 \\ &\vdots \\ &f_n(x_1, \dots, x_n) = x_n, \end{aligned}$$

притежава най-малко решение.

Доказателство. Първо да дефинираме както в *Твърдение* 1.14 непрекъснатото изображение

$$g \stackrel{\text{деф}}{=} f_1 \times \dots \times f_n : \prod_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k \to \prod_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k,$$

като

$$g(\bar{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} \langle f_1(\bar{a}), \dots, f_n(\bar{a}) \rangle.$$

От Теоремата на Клини знаем, че g притежава най-малка неподвижна точка $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Ще проверим, че $\bar{a}$ е най-малкото решение на системата.

- Понеже $\bar{a}$ е неподвижна точка на g, то

$$\begin{aligned} g(a_1, \dots, a_n) &= \langle f_1(\bar{a}), \dots, f_n(\bar{a}) \rangle && \text{// от деф. на } g \\ &= \langle a_1, \dots, a_n \rangle && \text{// } \bar{a} \text{ е неподвижна точка.} \end{aligned}$$

  Оттук директно следва, че $f_i(\bar{a}) = a_i$, за $i = 1, \dots, n$, и следователно $\bar{a}$ е решение на системата.

- Нека $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ е друго решение на системата, т.е. $f_i(\bar{b}) = b_i$, за $i = 1, \dots, n$. Тогава $g(\bar{b}) = \langle f_1(\bar{b}), \dots, f_n(\bar{b}) \rangle = \bar{b}$. Следователно $\bar{b}$ е неподвижна точна на g. Понеже $\bar{a} = \mathtt{lfp}(g)$, то $\bar{a} \sqsubseteq \bar{b}$.

Така достигнахме до извода, че $\bar{a}$ е най-малкото решение на системата. □

Забележка 1.2. Да разгледаме изображенията $f \in [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{A}]$, $g \in [\mathcal{B} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{B}]$ и системата

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \\ g(y) &= y. \end{aligned}$$

За да можем директно да се позовем на *Теорема* 1.8 и да твърдим, че тази система има най-малко решение, ние трябва да разгледаме следната модификация на системата:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \\ \hat{g}(x, y) &= y, \end{aligned}$$

където $\hat{g}(x, y) = g(y)$, т.е. добавяме един фиктивен аргумент, защото искаме всички изображения да имат равен брой аргументи.

Ще завършим този раздел с две твърдения, които ще улеснят нашите разсъждения при решаването на задачи.

Твърдение 1.15. Да разгледаме две изображения

$$f \in [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$$
$$g \in [\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{B}],$$

за които имаме системата от уравнения

$$\bigstar = \begin{cases} f(x,y) = x \\ g(y) = y. \end{cases}$$

Нека $b_0 = \mathtt{lfp}(g)$ и $a_0 = \mathtt{lfp}(\hat{f})$, където $\hat{f}(a) \overset{\text{деф}}{=} f(a, b_0)$. Тогава $\langle a_0, b_0 \rangle$ е най-малкото решение на системата $\bigstar$.

Доказателство.

- Първо, понеже $b_0 = \mathtt{lfp}(g)$, то очевидно $g(b_0) = b_0$. Освен това, $a_0 = \mathtt{lfp}(\hat{f})$, откъдето следва, че $a_0 = f(a_0, b_0)$. Ясно е, че $\langle a_0, b_0 \rangle$ е решение на системата $\bigstar$.
- Сега нека $\langle a, b \rangle$ е произволно решение на системата $\bigstar$. Да видим, че $\langle a_0, b_0 \rangle \sqsubseteq \langle a, b \rangle$.
  - Първо, ясно е, че $b = g(b)$. Понеже $b_0 = \mathtt{lfp}(g)$, то $b_0 \sqsubseteq b$.
  - Второ, ясно е, че

$$\begin{aligned} a &= f(a,b) && \text{// } a \text{ е решение на } \bigstar \\ &\sqsupseteq f(a, b_0) && \text{// } b \sqsupseteq b_0 \\ &= \hat{f}(a) && \text{// от деф.} \end{aligned}$$

  Получихме, че $a \in \mathtt{Pref}(\hat{f})$. От *Твърдение* 1.8 знаем, че

$$a_0 \overset{\text{деф}}{=} \mathtt{lfp}(\hat{f}) \sqsubseteq a.$$

  Заключваваме, че $\langle a_0, b_0 \rangle \sqsubseteq \langle a, b \rangle$.

□

Нещата започнаха да стават прекалено абстрактни, затова нека да видим един прост пример, който показва, че всъщност горното твърдение е близо до нашата интуиция.

Пример 1.6. Нека да разгледаме следната програма на езика `haskell`:

```
ghci> let g(x,y) = if x == 0 then 0 else g(x-1,y) + y
ghci> let f(x) = if x == 0 then 1 else g(x,f(x-1))
```

Лесно се съобразява, че всъщност

$$g(x, y) = x * y.$$

Това означава, че можем да пренапишем дефиницията на f по следния начин:

```
ghci> let f(x) = if x == 0 then 1 else x * f(x - 1)
```

Сега лесно се съобразява, че $f(x) = x!$, за $x \in \mathbb{N}$. Да не забравяме, че в haskell имаме и константата undefined. Това означава, че ако се ограничим до $\mathbb{N}_\perp$, то по горния начин сме дефинирали следните две функции:

$$f(x) = \begin{cases} x!, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases} \tag{1.3}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} x \cdot y, & \text{ако } x, y \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } \perp \in \{x, y\}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Ясно е, че тези функции са точни, а следователно и непрекъснати. Целта на *Глава* 2 е да формализираме разсъжданията, които направихме по-горе. Ще видим, че на тази програма можем да съпоставим система от *непрекъснати* изображения.

$x + \perp \stackrel{\text{деф}}{=} \perp$

В *Глава* 2 ще видим, че на всяка програма съпоставяме система от *непрекъснати* изображения. В конкретния пример можем директно да докажем, че Γ и Δ са непрекъснати изображения.

$$\Gamma(f, g)(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ g(x, f(x-1)), & x > 0 \\ \perp, & x = \perp \end{cases}$$

$$\Delta(g)(x, y) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ g(x-1, y) + y, & x > 0 \\ \perp, & x = \perp. \end{cases}$$

Да видим как можем да дефинираме тези изображения на haskell и как можем получим редицата от апроксимации на най-малките неподвижни точки по Теоремата на Клини.

```
ghci> let gamma(f, g)(x) = if x == 0 then 1 else g(x, f(x - 1))
ghci> let delta(g)(x, y) = if x == 0 then 0 else g(x - 1, y) + y
-- Започваме да строим редицата от апроксимации по Теоремата на Клини
ghci> let g1 = delta( \(x,y) -> undefined )
ghci> let g2 = delta(g1)
ghci> let g3 = delta(g2)
ghci> g3(2,4)
8
```

```
ghci> g3(3,4)
*** Exception: Prelude.undefined
-- Можем да подходим и по-мързеливо, като направо дефинираме безкрайния
-- списък от тези апроксимации.
ghci> let approx = (\(x,y) -> undefined):[delta(g) | g <- approx]
ghci> let g9 = approx !! 9
ghci> g9(8,100)
800
ghci> g9(9,100)
*** Exception: Prelude.undefined
-- най-малката неподвижна точка на delta
ghci> let psi(x) = (approx !! (x+1))(x)
```

Горният пример ни подсказва, че с индукция по k, можем да докажем, че ако имаме редицата

$$
\begin{aligned}
g_0 &= \perp^{(2)}\\
g_{k+1} &= \Delta(g_k),
\end{aligned}
$$

то, за произволнен индекс k, имаме

$$
g_k(x,y) = \begin{cases} x \cdot y, & \text{ако } x < k \text{ и } y \in \mathbb{N}\\ \perp, & \text{иначе.} \end{cases}
$$

Тогава с помощта на Теоремата на Клини можем да докажем, че

$$
\mathtt{lfp}(\Delta)(x,y) = \begin{cases} x \cdot y, & \text{ако } x, y \in \mathbb{N}\\ \perp, & \text{ако } \perp \in \{x,y\}. \end{cases}
$$

Нека сега да разгледаме изображението

$$
\hat{\Gamma}(f)(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(f, \mathtt{lfp}(\Delta))(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0\\ x \cdot f(x-1), & \text{ако } x > 0\\ \perp, & \text{ако } x = \perp. \end{cases}
$$

Нека отново да видим как можем да дефинираме това изображение на haskell и как можем получим редицата от апроксимации на най-малките неподвижни точки по Теоремата на Клини.

```
ghci> let gamma(f,g)(x) = if x == 0 then 1 else g(x,f(x-1))
ghci> let gamma'(f) = gamma(f, \(x, y) -> x * y)
ghci> :t gamma'
gamma' :: (a -> a) -> a -> a
ghci> let approx' = (\x -> undefined):[gamma'(f) | f <- approx']
ghci> let f9 = approx' !! 9
ghci> f9(8)
```

```
40320
ghci> f9(9)
*** Exception: Prelude.undefined
ghci> let phi(x) = (approx' !! (x+1))(x)
ghci> phi(8)     -- phi е най-малката неподвижна точка на gamma'
40320        -- лесно се съобразява, че phi(x) == x!
```

Горният пример ни подсказва, че с индукция по k, можем да докажем, че ако имаме редицата

$$\begin{aligned} f_0 &= \bot^{(1)} \\ f_{k+1} &= \hat{\Gamma}(f_k), \end{aligned}$$

то, за произволен индекс k, имаме

$$f_k(x) = \begin{cases} x!, & \text{ако } x < k \\ \bot, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отново по Теоремата на Клини,

$$\mathtt{lfp}(\hat{\Gamma})(x) = \begin{cases} x!, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \\ \bot, & \text{ако } x = \bot. \end{cases}$$

От *Твърдение* 1.15 знаем, че двойката $(\mathtt{lfp}(\hat{\Gamma})), \mathtt{lfp}(\Delta))$ е най-малкото решение на системата, което е точно двойката изображения (f, g) с дефиниции (1.3) и (1.4).

Твърдение 1.16. Да разгледаме изображенията $f \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{B}]$ и $g \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{A}]$ и системата:

$$\bigstar = \begin{cases} f(y) = x \\ g(y) = y. \end{cases}$$

Нека $a_0 = \mathtt{lfp}(g)$. Тогава най-малкото решение на системата $\bigstar$ е

$$\langle f(a_0), a_0 \rangle.$$

Доказателство.

- Лесно се съобразява, че $\langle f(a_0), a_0 \rangle$ е решение на системата $\bigstar$.
- Нека $\langle c, d \rangle$ е решение на системата $\bigstar$. Тогава $g(d) = d$ и понеже $a_0 = \mathtt{lfp}(g)$, то $a_0 \sqsubseteq d$. Освен това, $c = f(d) \sqsupseteq f(a_0)$. Получихме, че $\langle f(a_0), a_0 \rangle \sqsubseteq \langle c, d \rangle$.

Заключаваме, че $\langle f(a_0), a_0 \rangle$ е най-малкото решение на системата $\bigstar$. $\square$

Пример 1.7. Да разгледаме следната програма:

```
ghci> :{  -- използване на multiline дефиниции
ghci> let g(x, y, z) = if x == y + z then z
ghci|                   else if z == x + 1 then 0
ghci|                     else g(x, y, z + 1)
ghci| :}
ghci> let f(x, y) = g(x, y, 0)
```

Лесно се съобразява, че

$$g(x,y) = \begin{cases} x - y, & \text{ако } x \geq y \\ 0, & \text{ако } x < y. \end{cases}$$

Тази функция ще я означаваме като $x \dot{-} y$. На горната програма можем да съпоставим системата от непрекъснати изображения:

$$\Gamma(g)(x,y) = g(x,y,0)$$

$$\Delta(g)(x,y,z) = \begin{cases} z, & \text{ако } x = y + z \\ 0, & \text{ако } z = x + 1 \\ g(x,y,z+1), & \text{иначе и } x,y,z \in \mathbb{N} \\ \perp, & \perp \in \{x,y,z\}. \end{cases}$$

```
ghci> :{  -- Multiline
ghci> let delta(g)(x, y, z) = if x == y + z then z
ghci|                           else if z == x + 1 then 0
ghci|                             else g(x, y, z + 1)
ghci| :}
ghci> :t delta
delta :: ((t, t, t) -> t) -> (t, t, t) -> t
ghci> let approx = (\(x,y,z) -> undefined):[delta(g) | g <- approx]
ghci> let g9 = approx !! 9
ghci> g9(20,11,1)   -- 20-11 \in [1, 10)
9
ghci> g9(20,1,11)  -- 20-1 \in [11, 20)
19
ghci> g9(2,11,4)   -- 2+1 \not\in [4, 13)
*** Exception: Prelude.undefined
```

Горният пример ни подсказва, че с индукция по k, можем да докажем, че ако имаме редицата

$$g_0 = \perp^{(3)}$$
$$g_{k+1} = \Delta(g_k),$$

то, за произволно k, имаме

$$g_k(x,y,z) = \begin{cases} 0, & x+1 \in [z, z+k) \\ x-y, & x \geq y \,\&\, x-y \in [z, z+k) \\ \bot, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогава можем да приложим Теоремата на Клини и да докажем, че

$$\mathtt{lfp}(\Delta)(x,y,z) = \begin{cases} x \dot{-} y, & z \leq x+1 \\ \bot, & z > x+1 \text{ или } \bot \in \{x,y,z\}. \end{cases}$$

Тогава от *Твърдение* 1.16 следва, че

$$\mathtt{lfp}(\Gamma)(x,y) = \mathtt{lfp}(\Delta)(x,y,0) = \begin{cases} x \dot{-} y, & x,y \in \mathbb{N} \\ \bot, & \bot \in \{x,y\}. \end{cases}$$

Съобразете, че $\mathtt{lfp}(\Gamma) = \bigsqcup_k f_k$, където $f_k(x,y) = g_k(x,y,0)$.

1.9 Изоморфни области на Скот

Нека $\mathcal{A}_1 = (A_1, \sqsubseteq_1, \bot_1)$ и $\mathcal{A}_2 = (A_2, \sqsubseteq_2, \bot_2)$ са области на Скот. Ще казваме, че $\mathcal{A}_1$ е **изоморфна** на $\mathcal{A}_2$, което ще означаваме като

$$\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2,$$

ако съществува *биективна* функция $F : A_1 \to A_2$ със свойството:

$$(\forall a, b \in A_1)[\, a \sqsubseteq_1 b \iff F(a) \sqsubseteq_2 F(b)\,].$$

В такъв случай ще казваме, че F задава изоморфизъм между $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Когато искаме да означим, че $\mathcal{A}_1$ е изоморфна на $\mathcal{A}_2$ чрез F, то понякога ще пишем $\mathcal{A}_1 \cong_F \mathcal{A}_2$.

Задача 1.8. Докажете, че ако $\mathcal{A}_1 \cong_F \mathcal{A}_2$, то $F(\bot_1) = \bot_2$.

Твърдение 1.17. Ако $\mathcal{A}_1 \cong_F \mathcal{A}_2$, то $F \in [\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{A}_2]$.

Упътване. Да разгледаме произволна верига $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ от елементи на $\mathcal{A}_1$. Ще докажем, че

$$F(\bigsqcup_i a_i) = \bigsqcup_i F(a_i).$$

- Първо, от дефиницията веднага следва, че F е монотонно изображение, защото

$$a \sqsubseteq_1 b \implies F(a) \sqsubseteq_2 F(b).$$

  Това означава, че $(F(a_i))_{i=0}^{\infty}$ е монотонно растяща верига от елементи на $\mathcal{A}_2$. От *Твърдение* 1.4 получаваме, че

$$\bigsqcup_i F(a_i) \sqsubseteq_2 F(\bigsqcup_i a_i).$$

- За другата посока, нека $b \in \mathcal{A}_2$ е горна граница на веригата $(F(a_i))_{i=0}^{\infty}$, т.е.

$$(\forall i)[\, F(a_i) \sqsubseteq_2 b\,].$$

Ще докажем, че $F(\bigsqcup_i a_i) \sqsubseteq_2 b$. Понеже F е *върху* A_2, то съществува елемент $a \in A_1$, такъв че $F(a) = b$. Тогава:

$$\begin{aligned}
(\forall i)[\, F(a_i) \sqsubseteq_2 F(a)\,] &\implies (\forall i)[\, a_i \sqsubseteq_1 a\,] && \text{// } F \text{ е изоморфизъм}\\
&\implies \bigsqcup_i a_i \sqsubseteq_1 a && \text{// } a \text{ е горна граница}\\
&\implies F(\bigsqcup_i a_i) \sqsubseteq_1 F(a). && \text{// } F \text{ е изоморфизъм}
\end{aligned}$$

Понеже $b = F(a)$, заключаваме, че

$$F(\bigsqcup_i a_i) \sqsubseteq_2 b.$$

$\square$

Твърдение 1.18. Нека $f \in [\mathcal{A}_1 \overset{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_2]$ и $g \in [\mathcal{A}_2 \overset{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_1]$, като

- $f \circ g = \mathtt{id}_2$;
- $g \circ f = \mathtt{id}_1$.

$\mathtt{id}_i(a) \overset{\text{деф}}{=} a$ за вс. $a \in \mathcal{A}_i$

Тогава са изпълнени свойствата:

(1) $\mathcal{A}_1 \cong_f \mathcal{A}_2$;

(2) $\mathcal{A}_2 \cong_g \mathcal{A}_1$;

Твърдение 1.19. Нека $\mathcal{A}_1 \cong_F \mathcal{A}_2$. Тогава:

(1) $[\mathcal{A}_1 \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_1] \cong_G [\mathcal{A}_2 \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_2]$, където

$$G(f) \overset{\text{деф}}{=} F \circ f \circ F^{-1};$$

Графично това може да се изобрази така:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_1 \arrow[r, "f"] & \mathcal{A}_1 \arrow[d, "F"] \\
\mathcal{A}_2 \arrow[u, "F^{-1}"] \arrow[r, dashed, "G(f)"] & \mathcal{A}_2
\end{tikzcd}$$

(2) ако $f \in [\mathcal{A}_1 \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_1]$, то

$$F(\mathtt{lfp}(f)) = \mathtt{lfp}(G(f)).$$

Упътване. Ще докажем (1) като използвме *Твърдение* 1.18.

- Ще докажем, че G е монотонно изображение. Нека $f, h \in [\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{A}_1]$ и $f \sqsubseteq h$, т.е.
$$(\forall a \in \mathcal{A}_1)[\, f(a) \sqsubseteq_1 h(a)\,].$$
Ще докажем, че $G(f) \sqsubseteq G(h)$, т.е.
$$(\forall b \in \mathcal{A}_2)[\, G(f)(b) \sqsubseteq_1 G(h)(b)\,].$$
Да разгледаме произволен елемент $b \in \mathcal{A}_2$. Понеже F е биекция, то съществува елемент $a \in A_1$, такъв че $F(a) = b$, т.е. $F^{-1}(b) = a$. Тогава:
$$\begin{aligned}
G(f)(b) &\stackrel{\text{деф}}{=} F(f(F^{-1}(b))) && \\
&= F(f(a)) && /\!/\ F^{-1}(b) = a \\
&\sqsubseteq_2 F(h(a)) && /\!/\ f(a) \sqsubseteq h(a) \text{ и } F \text{ е изом.} \\
&= F(h(F^{-1}(b))) && /\!/\ F^{-1}(b) = a \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} G(h)(b).
\end{aligned}$$

- Нека $G(f) \sqsubseteq G(h)$. Ще докажем, че $f \sqsubseteq h$. За целта, нека $a \in A_1$. Понеже F е сюрективна, то съществува $b \in A_2$, за който $F^{-1}(b) = a$. Понеже
$$G(f) \stackrel{\text{деф}}{=} F \circ f \circ F^{-1} \sqsubseteq F \circ h \circ F^{-1} = G(h),$$
то получаваме, че
$$F(f(F^{-1}(b))) \sqsubseteq_2 F(h(F^{-1}(b))).$$
Оттук,
$$F(f(a)) \sqsubseteq_2 F(h(a)) \implies f(a) \sqsubseteq_1 h(a),$$
защото F е изоморфизъм.

Сега преминаваме към доказателството на (2). Да напомним, че за $f \in [\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{A}_1]$, означаваме
$$\begin{aligned}
f^0 &= \lambda x.\bot_1 \\
f^{n+1} &= f \circ f^n.
\end{aligned}$$

Понеже f е непрекъснато изображение е ясно, че $(f^n(\bot_1))_{n=0}^{\infty}$ е верига. Също така знаем, че
$$\mathtt{lfp}(f) = \bigsqcup_n f^n(\bot_1).$$
След аналогични разсъждения можем да съобразим, че
$$\mathtt{lfp}(G(f)) = \bigsqcup_n G(f)^n(\bot_2).$$
Първо ще докажем с индукция по n, че
$$(\forall n)[\, (G(f))^n = G(f^n)\,]. \tag{1.5}$$

- За $n = 0$ имаме, че за произволен елемент $b \in \mathcal{A}_2$,

$$\begin{aligned}
(G(f))^0(b) &\stackrel{\text{деф}}{=} \perp_2 \\
&= F(\perp_1) && // \ F \text{ е изом.} \\
&= F(f^0(F^{-1}(b))) && // \ f^0(F^{-1}(b)) \stackrel{\text{деф}}{=} \perp_1 \\
&= (F \circ f^0 \circ F^{-1})(b) \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} G(f^0)(b).
\end{aligned}$$

- Нека да приемем, че твърдението е вярно за n. Тогава за $n + 1$ имаме, че:

$$\begin{aligned}
(G(f))^{n+1} &\stackrel{\text{деф}}{=} G(f) \circ (G(f))^n \\
&= G(f) \circ G(f^n) && // \ \text{от И.П.} \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} (F \circ f \circ F^{-1}) \circ (F \circ f^n \circ F^{-1}) \\
&= F \circ f \circ (F^{-1} \circ F) \circ f^n \circ F^{-1} \\
&= F \circ f \circ f^n \circ F^{-1} && // \ F^{-1} \circ F = id \\
&= F \circ f^{n+1} \circ F^{-1} && // \ f \circ f^n = f^{n+1} \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} G(f^{n+1}).
\end{aligned}$$

Тогава:

$$\begin{aligned}
F(\mathtt{lfp}(f)) &= F(\bigsqcup_n f^n(\perp_1)) && // \ \mathtt{lfp}(f) = \bigsqcup_n f^n(\perp_1) \\
&= \bigsqcup_n F(f^n(\perp_1)) && // \ F \text{ е непр.} \\
&= \bigsqcup_n F(f^n(F^{-1}(\perp_2))) && // \ F^{-1}(\perp_2) = \perp_1 \\
&= \bigsqcup_n (F \circ f^n \circ F^{-1})(\perp_2) \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup_n G(f^n)(\perp_2) \\
&= \bigsqcup_n G(f)^n(\perp_2) && // \ \text{от } (1.5) \\
&= \mathtt{lfp}(G(f)).
\end{aligned}$$

□

Твърдение 1.20. За произволни области на Скот $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ е изпълнено, че

$$[\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} [\mathcal{B} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{C}]] \cong [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{C}].$$

Упътване. Докажете, че изображението

$$\texttt{curry} : [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}] \to [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} [\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]],$$

където

$$\texttt{curry}(f)(a)(b) \overset{\text{деф}}{=} f(a, b)$$

задава изоморфизъм. $\square$

Забележка 1.3. Когато на хаскел пишем типовата сигнатура на някоя функция като

```
f :: a -> b -> c
```

в действителност се има предвид следното

```
f :: a -> (b -> c)
```

На практика тези две задачи ни казват, че няма значение дали използваме *curried* или *uncurried* версията на една функция. На хаскел е по-удобно да използваме *curried* версията, защото като фиксираме първия аргумент на една функция получаваме нова функция наготово. Например,

```
ghci> let plus x y = x + y
ghci> :t plus
plus :: Num a => a -> a -> a
ghci> let plus1 = plus 1
ghci> :t plus1
plus1 :: Num a => a -> a
```

Всъщност, хаскел има функциите `curry` и `uncurry` вградени в стандартната библиотека:

```
ghci> :t curry
curry :: ((a, b) -> c) -> a -> b -> c
ghci> :t uncurry
uncurry :: (a -> b -> c) -> (a, b) -> c
```

Нека да дефинираме

$$\emptyset_\perp = (\{\perp\}, \sqsubseteq, \perp).$$

Задача 1.9. Докажете, че за произволна област на Скот $\mathcal{A}$ е изпълнено:

$$[\emptyset_\perp \to \mathcal{A}] \cong \mathcal{A}$$
$$[\mathcal{A} \to \emptyset_\perp] \cong \emptyset_\perp.$$

Задача 1.10. Докажете, че съществуват области на Скот $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, за които

$$[[\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{B}] \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}] \not\cong [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} [\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]].$$

Упътване. Нека изберем $\mathcal{A} = \mathcal{C} = \mathbb{N}_\perp$, а $\mathcal{B} = \emptyset_\perp$. Тогава

$$[[\mathbb{N}_\perp \overset{\text{н}}{\to} \emptyset_\perp] \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp] \cong [\emptyset_\perp \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp] \cong \mathbb{N}_\perp,$$

но

$$[\mathbb{N}_\perp \overset{\text{н}}{\to} [\emptyset_\perp \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]] \cong [\mathbb{N}_\perp \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp].$$

$\square$

1.10 Допълнителен материал

1.10.1 Регулярни езици

Да фиксираме азбуката $\Sigma = \{a_1, \dots, a_k\}$. Нека имаме и безкраен набор от променливи $X_0, X_1, \dots$. Дефинираме термовете над Σ като

$$\tau ::= \emptyset \mid \varepsilon \mid a_i \cdot X_j \mid \tau + \tau.$$

където $i = 1, \dots, k$, а X е променлива. За всеки терм $\tau[X_1, \dots, X_n]$ дефинираме оператора

$$[\![\tau]\!] : \mathcal{P}(\Sigma^\star)^n \to \mathcal{P}(\Sigma^\star)$$

по следния начин:

Тук за променливите използваме главни букви за да се сещаме, че те приемат стойности множества от думи.

- $[\![\emptyset]\!](L_1, \dots, L_n) = \emptyset$.
- $[\![\varepsilon]\!](L_1, \dots, L_n) = \{\varepsilon\}$.
- $[\![a_i \cdot X_j]\!](L_1, \dots, L_n) = \{a_i\} \cdot L_j$.
- $[\![\tau_1 + \tau_2]\!](L_1, \dots, L_n) = [\![\tau_1]\!](L_1, \dots, L_n) \cup [\![\tau_2]\!](L_1, \dots, L_n)$.

Задача 1.11. Докажете, че за всеки терм τ имаме, че $[\![\tau]\!]$ е непрекъснато изображение в областта на Скот $\mathcal{S} = (\mathcal{P}(\Sigma^\star), \subseteq, \emptyset)$.

Пример 1.8. Да разгледаме системата

$\tau_1[X_1, X_2] \equiv b \cdot X_1 + a \cdot X_2$

$\tau_2[X_1, X_2] \equiv \varepsilon$

$$\begin{aligned} X_1 &= b \cdot X_1 + a \cdot X_2 \\ X_2 &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Дефинираме непрекъснатия оператор

$$\Gamma : \mathcal{P}(\Sigma^\star)^2 \to \mathcal{P}(\Sigma^\star)^2,$$

където:

$$\Gamma(L_1, L_2) = ([\![\tau_1]\!](L_1, L_2), [\![\tau_2]\!](L_1, L_2)).$$

От Теоремата на Клини ние знам как можем да намерим най-малката неподвижна точка на Γ, която ще бъде и най-малкото решение на горната система.

- $(L_0, M_0) \stackrel{\text{деф}}{=} (\emptyset, \emptyset)$;
- $(L_1, M_1) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(L_0, M_0) = ([\![\tau_1]\!](L_0, M_0), [\![\tau_2]\!](L_0, M_0)) = (\emptyset, \varepsilon)$;
- $(L_2, M_2) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(L_1, M_1) = ([\![\tau_1]\!](L_1, M_1), [\![\tau_2]\!](L_1, M_1)) = (\{a\}, \varepsilon)$;
- $(L_3, M_3) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(L_2, M_2) = ([\![\tau_1]\!](L_2, M_2), [\![\tau_2]\!](L_2, M_2)) = (\{ba, a\}, \varepsilon)$;
- $(L_4, M_4) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(L_3, M_3) = ([\![\tau_1]\!](L_3, M_3), [\![\tau_2]\!](L_3, M_3)) = (\{bba, ba, a\}, \varepsilon)$;

- $(L_5, M_5) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(L_4, M_4) = ([\![\tau_1]\!](L_4, M_4), [\![\tau_2]\!](L_4, M_4)) = (\{bba, bba, ba, a\}, \varepsilon)$.

Лесно се съобразява, че $L_n = \{b^k a \mid k < n\}$. Тогава

$$\mathtt{lfp}(\Gamma) = (\bigcup_n L_n, \{\varepsilon\}) = (b^\star a, \{\varepsilon\}).$$

Задача 1.12. Докажете, че най-малкото решение на системата

$$\begin{aligned} X_1 &= a \cdot X_1 + b \cdot X_2 + \varepsilon \\ X_2 &= b \cdot X_2 + \varepsilon \end{aligned}$$

е двойката $(a^\star b^\star, b^\star)$.

Задача 1.13. Да разгледаме системата от непрекъснати оператори

$$\begin{aligned} &[\![\tau_1]\!](L_1, \dots, L_n) = L_1 \\ &\vdots \\ &[\![\tau_n]\!](L_1, \dots, L_n) = L_n. \end{aligned}$$

Знаем, че тя притежава най-малко решение $(\hat{L}_1, \dots, \hat{L}_n)$. Докажете, че всеки от езиците $\hat{L}_i$ е регулярен.

Докажете, че всеки регулярен език е елемент от най-малкото решение на някоя система от оператори от горния вид.

Да разгледаме програмата P

$$\begin{aligned} &X_1 = \tau_1[X_1, \dots, X_n] \\ &\vdots \\ &X_n = \tau_n[X_1, \dots, X_n]. \end{aligned}$$

1.10.2 Безконтекстни езици

Да фиксираме азбуката $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$. Да дефинираме термове от тип 1 като

$$\tau ::= X_i \mid a_j \mid \varepsilon \mid \emptyset \mid \tau_1 \cdot \tau_2 \mid (\tau_1 + \tau_2),$$

където $j = 1, \dots, n$, а X_i са изброимо безкрайна редица от променливи. За всеки терм $\tau[X_1, \dots, X_n]$ дефинираме оператора

$$[\![\tau]\!] : (\mathcal{P}(\Sigma^\star))^n \to \mathcal{P}(\Sigma^\star)$$

по следния начин:

- $[\![X_i]\!](L_1, \dots, L_n) = L_i$.
- $[\![a_j]\!](L_1, \dots, L_n) = \{a_j\}$.
- $[\![\varepsilon]\!](L_1, \dots, L_n) = \{\varepsilon\}$.

- $[\![\emptyset]\!](L_1, \ldots, L_n) = \emptyset$.
- $[\![\tau_1 \cdot \tau_2]\!](L_1, \ldots, L_n) = [\![\tau_1]\!](L_1, \ldots, L_n) \cdot [\![\tau_2]\!](L_1, \ldots, L_n)$.
- $[\![\tau_1 + \tau_2]\!](L_1, \ldots, L_n) = [\![\tau_1]\!](L_1, \ldots, L_n) \cup [\![\tau_2]\!](L_1, \ldots, L_n)$.

Задача 1.14. Докажете, че за всеки терм τ, $[\![\tau]\!]$ е непрекъснато изображение в областта на Скот $\mathcal{S} = (\mathcal{P}(\Sigma^\star), \subseteq, \emptyset)$.

Задача 1.15. Докажете, че $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathtt{lfp}([\![\tau]\!])$, където

$$\tau[X] \equiv \varepsilon + a \cdot X \cdot b.$$

С други думи, $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ е най-малкото решение на уравнението

$$X = a \cdot X \cdot b + \varepsilon.$$

Нека сега да разгледаме термовете $\tau_1[X_1, \ldots, X_n], \ldots, \tau_n[X_1, \ldots, X_n]$.

Задача 1.16. Да разгледаме системата от непрекъснати оператори

$$\begin{aligned}
&[\![\tau_1]\!](L_1, \ldots, L_n) = L_1 \\
&\vdots \\
&[\![\tau_n]\!](L_1, \ldots, L_n) = L_n.
\end{aligned}$$

Знаем, че тя притежава най-малко решение $(\hat{L}_1, \ldots, \hat{L}_n)$. Докажете, че всеки от езиците $\hat{L}_i$ е безконтекстен.

Докажете, че всеки безконтекстен език е елемент от най-малкото решение на някоя система от оператори от горния вид.

Задача 1.17. Да дефинираме термове от тип 2 като

Това е аналог на нормалната форма на Чомски

$$\tau ::= a_j \mid \varepsilon \mid \emptyset \mid X_i \cdot X_k \mid (\tau_1 + \tau_2),$$

където $j = 1, \ldots, n$, а X_i са изброимо безкрайна редица от променливи. Докажете горното твърдение, като замените термовете от тип 1 с тези от тип 2.

Пример 1.9. Да разгледаме системата

$$\begin{aligned}
X_1 &= X_3 \cdot X_2 + \varepsilon \\
X_2 &= X_1 \cdot X_4 \\
X_3 &= a \\
X_4 &= b.
\end{aligned}$$

Нека $(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3, \hat{L}_4)$ е най-малкото решение на системата. Докажете, че $\hat{L}_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\hat{L}_2 = \{a^n b^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\hat{L}_3 = \{a\}$ и $\hat{L}_4 = \{b\}$.

Глава 2

Езикът REC

В тази глава до голяма степен следваме [7, Глава 9].

2.1 Синтаксис

Основно следваме [7, Глава 9]

Ще разглеждаме един много прост език за функционално програмиране.

За разлика от [8], няма да въвеждаме термове от тип $\mathbf{Bool}$.

- константи $\mathtt{n}$, за всяко число $n \in \mathbb{N}$;
- изброимо много променливи от тип 0 (обектови променливи) $\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}, \dots$, евентуално с индекси;
- изброимо много променливи от тип 1 (или функционални променливи) $\mathtt{f}, \mathtt{g}, \mathtt{h}, \dots$, евентуално с индекси. Формално погледнато, трябва на всяка функционална променлива $\mathtt{f}$ да съпоставим число - брой аргументи, които приема. Нека да означим с $\#\mathtt{f}$ броя аргументи на $\mathtt{f}$. Обикновено броят аргументи на $\mathtt{f}$ ще е ясен от контекста.
- Термовете, които обикновено ще означаваме с τ, в езика **REC** имат следния синтаксис:

Константите не са числа! Константите са синтактични обекти, докато числата са семантични обекти.

Удобно е в нашия език още на синтактично ниво да правим разлика между двата типа променливи, които имаме в езика.

$$\tau ::= \mathtt{n} \mid \mathtt{x} \mid \tau + \tau \mid \tau \mathtt{==} \tau \mid \mathtt{if}\ \tau\ \mathtt{then}\ \tau\ \mathtt{else}\ \tau \mid \mathtt{f}(\underbrace{\tau, \dots, \tau}_{m}).$$

Тук $m = \#\mathtt{f}$

Граматиката е във форма на Бекус-Наур.

- Ще записваме $\tau[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]$, когато искаме да означим, че променливите на терма τ са *измежду* посочените.
- Ще наричаме един терм **функционален**, ако той не съдържа обектови променливи. Обикновено ще означаваме функционалните термове с μ, а произволни термове с τ.
- С $\tau[\mathtt{x}/\mu]$ ще означаваме терма получен от τ, в който всяко срещане на обектовата променлива $\mathtt{x}$ е заменена с функционалния терм μ. Можем да дадем формална дефиниция с индукция по построението на термовете:
  - Ако $\tau \equiv \mathtt{n}$, то $\mathtt{n}[\mathtt{x}/\mu] \equiv \mathtt{n}$.
  - Ако $\tau \equiv \mathtt{x}$, то $\mathtt{x}[\mathtt{x}/\mu] \equiv \mu$.
  - Ако $\tau \equiv \mathtt{y}$ и $\mathtt{y} \not\equiv \mathtt{x}$, то $\mathtt{y}[\mathtt{x}/\mu] \equiv \mathtt{y}$.

- Ако $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2$, то
$$\tau[x/\mu] \equiv \tau_1[x/\mu] + \tau_2[x/\mu].$$
- Ако $\tau \equiv \tau_1 \texttt{==} \tau_2$, то
$$\tau[x/\mu] \equiv \tau_1[x/\mu] \texttt{==} \tau_2[x/\mu].$$
- Ако $\tau \equiv \texttt{if } \tau_1 \texttt{ then } \tau_2 \texttt{ else } \tau_3$, то
$$\tau[x/\mu] = \texttt{if } \tau_1[x/\mu] \texttt{ then } \tau_2[x/\mu] \texttt{ else } \tau_3[x/\mu].$$
- Ако $\tau \equiv \texttt{f}(\tau_1, \dots, \tau_m)$, то
$$\tau[x/\mu] = \texttt{f}(\tau_1[x/\mu], \dots, \tau_m[x/\mu]).$$

Една **рекурсивна програма** P на езика **REC** има следния общ вид:

$$\texttt{P} = \begin{cases} \texttt{f}_1(\texttt{x}_1, \dots, \texttt{x}_{m_1}) = \tau_1[\texttt{x}_1, \dots, \texttt{x}_{m_1}, \texttt{f}_1, \dots, \texttt{f}_k] \\ \vdots \\ \texttt{f}_k(\texttt{x}_1, \dots, \texttt{x}_{m_k}) = \tau_k[\texttt{x}_1, \dots, \texttt{x}_{m_k}, \texttt{f}_1, \dots, \texttt{f}_k] \end{cases}$$

[7, стр. 141]

Една програма е просто текст със специален формат. Важният въпрос е каква функция (семантика) отговаря на този текст (синтаксис)

Може да си мислите, че $\texttt{f}_1$ е `main` функцията на нашата програма

В такъв случай казваме, че термът τ_i задава *дефиницията* на фунционалната променлива $\texttt{f}_i$.

Пример 2.1. Да разгледаме програмата P на езика **REC**:

```
h(x) = f(x, 1)
f(x,y) = if x == y then 0
            else f(x, y+1) + 1
```

Да положим

$$\tau_1[\texttt{x}, \texttt{h}, \texttt{f}] \stackrel{\text{деф}}{\equiv} \texttt{f}(\texttt{x}, 1)$$
$$\tau_2[\texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{h}, \texttt{f}] \stackrel{\text{деф}}{\equiv} \texttt{if x == y then 0 else f(x,y+1) + 1}.$$

Тогава програмата P приема следния вид:

$$\texttt{h}(\texttt{x}) = \tau_1[\texttt{x}, \texttt{h}, \texttt{f}]$$
$$\texttt{f}(\texttt{x}, \texttt{y}) = \tau_2[\texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{h}, \texttt{f}].$$

2.2 Денотационна семантика

2.2.1 Термални оператори

Нека първо да дефинираме следните *изображения*

$$\texttt{plus} : \mathbb{N}_\perp^2 \to \mathbb{N}_\perp, \text{ където}$$

$$\mathtt{plus}(a,b) = \begin{cases} a+b, & \text{ако } a,b \in \mathbb{N} \\ \bot, & \text{ако } \bot \in \{a,b\} \end{cases}$$

$\mathtt{eq} : \mathbb{N}_\bot^2 \to \mathbb{N}_\bot$, където

$$\mathtt{eq}(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{ако } a = b \;\&\; a,b \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{ако } a \neq b \;\&\; a,b \in \mathbb{N} \\ \bot, & \text{ако } \bot \in \{a,b\} \end{cases}$$

Спестяваме си труда от въвеждането на булевия тип променливи

Задача 2.1. Докажете, че изображенията plus, eq са непрекъснати.

Озн. $\mathbb{N}^+ \stackrel{\text{деф}}{=} \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Упътване. Понеже $[\mathbb{N}_\bot^n \stackrel{\text{м}}{\to} \mathbb{N}_\bot] = [\mathbb{N}_\bot^n \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\bot]$, достатъчно е да докажете, че изображенията са монотонни. □

[7, стр. 155]

За всеки терм $\tau[\mathtt{x}_1,\ldots,\mathtt{x}_n,\mathtt{f}_1,\ldots,\mathtt{f}_k]$, ще разгледаме изображението със сигнатура

$$[\![\tau]\!] : [\mathbb{N}_\bot^{m_1} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\bot] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\bot^{m_k} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\bot] \to [\mathbb{N}_\bot^n \to \mathbb{N}_\bot],$$

което ще дефинираме с индукция по построението на термовете. Изображенията от вида $[\![\tau]\!]$ ще наричаме **термални оператори**.

- ако $\tau \equiv \mathtt{c}$, за някоя константа, то

$$[\![\mathtt{c}]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} c.$$

- ако $\tau \equiv \mathtt{x}_i$, за някоя обектова променлива, то

$$[\![\mathtt{x}_i]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} a_i.$$

- ако $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2$, то

$$[\![\tau_1 + \tau_2]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{plus}([\![\tau_1]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}), [\![\tau_2]\!](\overline{\varphi})(\overline{a})).$$

Знаем, че изображенията plus, eq и if са непрекъснати.

- ако $\tau \equiv \tau_1 \;\mathtt{==}\; \tau_2$, то

$$[\![\tau_1 \;\mathtt{==}\; \tau_2]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{eq}([\![\tau_1]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}), [\![\tau_2]\!](\overline{\varphi})(\overline{a})).$$

За if вижте *Дефиниция* 1.2.

- ако $\tau \equiv \mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3$, то

$$[\![\mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{if}([\![\tau_1]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}), [\![\tau_2]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}), [\![\tau_3]\!](\overline{\varphi})(\overline{a})).$$

- ако $\tau \equiv \mathtt{f}_i(\tau_1,\ldots,\tau_{m_i})$, то

$$[\![\mathtt{f}_i(\tau_1,\ldots,\tau_{m_i})]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} \varphi_i([\![\tau_1]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}),\ldots,[\![\tau_{m_i}]\!](\overline{\varphi})(\overline{a})).$$

Термовете τ_j може да имат различен брой променливи. Ако се наложи, разширяваме ги с фиктивни променливи

Пример 2.2. Да разгледаме следния терм:

$$\tau[\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}] \stackrel{\text{деф}}{\equiv} \mathtt{if}\ \mathtt{x} == 5\ \mathtt{then}\ \mathtt{y}\ \mathtt{else}\ \mathtt{z}.$$

Да видим каква е негова стойност при произволни стойности $a, b, c \in \mathbb{N}_\perp$:

$$\llbracket\tau\rrbracket(a,b,c) = \begin{cases} \llbracket\mathtt{y}\rrbracket(a,b,c), & \text{ако } \llbracket x == 5\rrbracket(a,b,c) \in \mathbb{N}^+ \\ \llbracket\mathtt{z}\rrbracket(a,b,c), & \text{ако } \llbracket x == 5\rrbracket(a,b,c) = 0 \\ \perp, & \text{ако } \llbracket x == 5\rrbracket(a,b,c) = \perp \end{cases}$$
$$= \begin{cases} b, & \text{ако } a = 5 \\ c, & \text{ако } a \in \mathbb{N}\ \&\ a \neq 5 \\ \perp, & \text{ако } a = \perp. \end{cases}$$

Нека сега да видим следния пример на хаскел.

```
ghci> let f(x) = if x == undefined then 0 else 1
ghci> f(2)
*** Exception: Prelude.undefined
```

Това означава, че функцията на хаскел == е точна, т.е. не можем да сравняваме с $\perp$, което съответства на нашата денотационна семантика, т.е. функцията eq.

Лема 2.1 (Лема за замяната). Да разгледаме терма $\tau[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]$ и *функционалните* термове $\mu_1[\mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k], \dots, \mu_n[\mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]$. Тогава

$$\llbracket\tau[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]\rrbracket(\bar{\varphi}) = \llbracket\tau\rrbracket(\overline{\varphi})(\llbracket\mu_1\rrbracket(\bar{\varphi}), \dots, \llbracket\mu_n\rrbracket(\bar{\varphi}))$$

за произволни $\varphi_i \in [\mathbb{N}_\perp^{m_i} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]$, за $i = 1, \dots, k$.

Доказателство. Доказателството се провежда с *индукция по построението на терма* τ.

Понеже нямаме обектови променливи в $\mu_1, \dots, \mu_n$, то е очевидно как правим замяната.

Substitution Lemma, [7, стр. 149].

Това твърдение е без д-во в [8, стр. 188].

c е константа, докато $c \in \mathbb{N}_\perp$

- Нека да започнем с най-лесния случай. Нека $\tau \equiv \mathtt{c}$, за някоя константа. Тогава $\tau[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}] \equiv \mathtt{c}$. Това означава, че

$$\llbracket\tau[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]\rrbracket(\overline{\varphi}) = \llbracket\mathtt{c}\rrbracket(\overline{\varphi}) \stackrel{\text{деф}}{=} c.$$

  От друга страна, имаме също, че

$$\llbracket\mathtt{c}\rrbracket(\overline{\varphi})(\llbracket\mu_1\rrbracket(\overline{\varphi}), \dots, \llbracket\mu_n\rrbracket(\overline{\varphi})) \stackrel{\text{деф}}{=} c.$$

- Нека $\tau \equiv \mathtt{x}_i$. Тогава $\mathtt{x}_i[\overline{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] \equiv \mu_i$ и следователно

$$\llbracket\mathtt{x}_i[\overline{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]\rrbracket(\bar{\varphi}) = \llbracket\mu_i\rrbracket(\bar{\varphi}).$$

  От друга страна, по дефиниция на стойност на терм,

$$\llbracket\mathtt{x}_i\rrbracket(\overline{\varphi})(\llbracket\mu_1\rrbracket(\bar{\varphi}), \dots, \llbracket\mu_n\rrbracket(\overline{\varphi})) = \llbracket\mu_i\rrbracket(\bar{\varphi}).$$

- Нека $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2$. От **И.П.** имаме, че за $j = 1, 2$ е изпълнено следното:

$$\llbracket \tau_j[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] \rrbracket(\bar{\varphi}) = \llbracket \tau_j \rrbracket(\bar{\varphi})(\underbrace{\llbracket \mu_1 \rrbracket(\bar{\varphi})}_{b_1}, \dots, \underbrace{\llbracket \mu_n \rrbracket(\bar{\varphi})}_{b_n}).$$

  Тогава

$$\begin{aligned}
\llbracket \tau[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] \rrbracket(\bar{\varphi}) &= \llbracket \tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] + \tau_2[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] \rrbracket(\bar{\varphi}) \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{plus}(\llbracket \tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] \rrbracket(\bar{\varphi}), \llbracket \tau_2[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] \rrbracket(\bar{\varphi})) \\
&= \mathtt{plus}(\llbracket \tau_1 \rrbracket(\bar{\varphi})(b_1, \dots, b_n), \llbracket \tau_2 \rrbracket(\bar{\varphi})(b_1, \dots, b_n)) && \text{// от } \textbf{И.П.} \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \llbracket \tau \rrbracket(\bar{\varphi})(b_1, \dots, b_n) \\
&= \llbracket \tau \rrbracket(\bar{\varphi})(\llbracket \mu_1 \rrbracket(\bar{\varphi}), \dots, \llbracket \mu_n \rrbracket(\bar{\varphi})). && \text{// } b_j \stackrel{\text{деф}}{=} \llbracket \mu_j \rrbracket(\bar{\varphi})
\end{aligned}$$

✍ Докажете сами останалите два случая. Те не крият изненади.

- Нека $\tau \equiv \tau_1$ `==` τ_2.

- Нека $\tau \equiv$ `if` τ_0 `then` τ_1 `else` τ_2.

- Нека $\tau \equiv \mathtt{f}_i(\tau_1, \dots, \tau_{m_i})$. Имаме, че

$$\tau[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] \equiv \mathtt{f}_i(\tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}], \dots, \tau_{m_i}[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]). \tag{2.1}$$

  Нека за улеснение да означим $b_i \stackrel{\text{деф}}{=} \llbracket \mu_i \rrbracket(\bar{\varphi})$, за $i = 1, \dots, n$. Прилагаме **И.П.** за термовете $\tau_1, \dots, \tau_{m_i}$ и получаваме за $j = 1, \dots, m_i$,

$$\begin{aligned}
\llbracket \tau_j[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] \rrbracket(\bar{\varphi}) &= \llbracket \tau_j \rrbracket(\bar{\varphi})(\underbrace{\llbracket \mu_1 \rrbracket(\bar{\varphi})}_{b_1}, \dots, \underbrace{\llbracket \mu_n \rrbracket(\bar{\varphi})}_{b_n}) && \text{// от } \textbf{И.П.} \\
&= \llbracket \tau_j \rrbracket(\bar{\varphi})(b_1, \dots, b_n) && \text{// } b_i \stackrel{\text{деф}}{=} \llbracket \mu_i \rrbracket(\bar{\varphi}).
\end{aligned}$$

  Следователно,

$$\begin{aligned}
\llbracket \tau[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] \rrbracket(\bar{\varphi}) &= \llbracket \mathtt{f}_i(\tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}], \dots, \tau_{m_i}[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]) \rrbracket(\bar{\varphi}) && \text{// от (2.1)} \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \varphi_i(\llbracket \tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] \rrbracket(\bar{\varphi}), \dots, \llbracket \tau_{m_i}[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] \rrbracket(\bar{\varphi})) \\
&= \varphi_i(\llbracket \tau_1 \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b}), \dots, \llbracket \tau_{m_i} \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b})) && \text{// от } \textbf{И.П.} \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \llbracket \mathtt{f}_i(\tau_1, \dots, \tau_{m_i}) \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b}) \\
&= \llbracket \tau \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b}) && \text{// } \tau \equiv \mathtt{f}_i(\tau_1, \dots, \tau_{m_i}) \\
&= \llbracket \tau \rrbracket(\bar{\varphi})(\llbracket \mu_1 \rrbracket(\bar{\varphi}), \dots, \llbracket \mu_n \rrbracket(\bar{\varphi})) && \text{// } b_i \stackrel{\text{деф}}{=} \llbracket \mu_i \rrbracket(\bar{\varphi}).
\end{aligned}$$

□

Забележка 2.1. В частния случай, когато функционалните термове $\mu_1, \dots, \mu_n$ са константите $\mathsf{c}_1, \dots, \mathsf{c}_n$, получаваме, че

$$\llbracket \tau[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mathsf{c}}] \rrbracket(\bar{\varphi}) = \llbracket \tau \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{c}).$$

2.2.2 Непрекъснатост на термалните оператори

Забележка 2.2. В този раздел всички доказателства се провеждат с индукция по построението на термовете.

Твърдение 2.1. Да разгледаме един терм $\tau[\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \ldots, \mathtt{f}_k]$. Нека $\bar{a} \sqsubseteq \bar{b}$. Тогава

Озн. $\bar{a}_i = (a_i^1, \ldots, a_i^n)$

$$\llbracket \tau \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{a}) \sqsubseteq \llbracket \tau \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b}),$$

където $\varphi_i \in [\mathbb{N}_\perp^{m_i} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$, за $i = 1, \ldots, k$.

Упътване. Индукция по построението на терма τ.

- Нека $\tau \equiv \mathtt{c}$. Този случай е ясен.
- Нека $\tau \equiv \mathtt{x}_i$. Тогава

$$\begin{aligned}
\llbracket \tau \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{a}) &= \llbracket \mathtt{x}_i \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{a}) \\
&= a_i && \text{// стойност на терм} \\
&\sqsubseteq b_i && \text{// } \bar{a} \sqsubseteq \bar{b} \\
&= \llbracket \mathtt{x}_i \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b}) && \text{// стойност на терм} \\
&= \llbracket \tau \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b}).
\end{aligned}$$

- Нека $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2$. Тук ще използваме, че от **И.П.**, за $j = 1, 2$, имаме

$$\llbracket \tau_j \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{a}) \sqsubseteq \llbracket \tau_j \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b}). \tag{2.2}$$

  Освен това, понеже изображението `plus` е непрекъснато, то то е и монотонно.

$$\begin{aligned}
\llbracket \tau \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{a}) &= \llbracket \tau_1 + \tau_2 \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{a}) \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{plus}(\llbracket \tau_1 \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{a}), \llbracket \tau_2 \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{a})) \\
&\sqsubseteq \mathtt{plus}(\llbracket \tau_1 \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b}), \llbracket \tau_2 \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b})) && \text{// от (2.2) и мон.} \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \llbracket \tau_1 + \tau_2 \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b}).
\end{aligned}$$

✍ За домашно!

- Нека $\tau \equiv \tau_1 \mathtt{==} \tau_2$.
- Нека $\tau \equiv \mathtt{if}\ \tau_0\ \mathtt{then}\ \tau_1\ \mathtt{else}\ \tau_2$.
- Нека $\tau \equiv \mathtt{f}_i(\tau_1, \ldots, \tau_{m_i})$. Тук ще използваме, че от **И.П.**, за $j = 1, \ldots, m_i$, имаме

$$\llbracket \tau_j \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{a}) \sqsubseteq \llbracket \tau_j \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b}). \tag{2.3}$$

  Тогава

$$\begin{aligned}
\llbracket \tau \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{a}) &= \llbracket \mathtt{f}_i(\tau_1, \ldots, \tau_{m_i}) \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{a}) \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \varphi_i(\llbracket \tau_1 \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{a}), \ldots, \llbracket \tau_{m_i} \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{a})) \\
&\sqsubseteq \varphi_i(\llbracket \tau_1 \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b}), \ldots, \llbracket \tau_{m_i} \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b})) && \text{// от (2.3) и } \varphi_i \text{ е мон.} \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \llbracket \tau \rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b}).
\end{aligned}$$

□

Следствие 2.1. Да разгледаме един терм $\tau[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]$. Тогава за произволна верига $(\bar{a}_i)_{i=0}^{\infty}$ в $\mathbb{N}_\perp^n$,

$$[\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\bigsqcup_i \bar{a}_i) = \bigsqcup_i [\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\bar{a}_i),$$

където $\varphi_i \in [\mathbb{N}_\perp^{n_i} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]$, за $i = 1, \dots, k$.

Доказателство. Да разгледаме произволен терм τ и непрекъснати изображения $\overline{\varphi}$. От *Твърдение* 2.1 следва, че $[\![\tau]\!](\overline{\varphi}) \in [\mathbb{N}_\perp^n \xrightarrow{\text{м}} \mathbb{N}_\perp]$. Понеже всяка верига в $\mathbb{N}_\perp^n$ се стабилизира, то директно от *Твърдение* 1.6 следва, че $[\![\tau]\!](\overline{\varphi}) \in [\mathbb{N}_\perp^n \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]$, което означава, че за произволна верига $(\bar{a}_i)_{i=0}^{\infty}$,

$$[\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\bigsqcup_i \bar{a}_i) = \bigsqcup_i [\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\bar{a}_i).$$

□

Следствие 2.2. Да разгледаме произволен терм $\tau[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]$. Тогава за произволни $\varphi_i \in [\mathbb{N}^{m_i} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]$, за $i = 1, \dots k$, имаме, че

$$[\![\tau]\!](\bar{\varphi}) \in [\mathbb{N}_\perp^n \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp].$$

Щом термалните оператори Γ_τ са добре дефинирани, ще проверим, че са непрекъснати. Първата стъпка ще бъде проверката, че те са монотонни.

Лема 2.2. Нека $\mu[\mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]$ е *функционален* терм. Да разгледаме произволна верига $(\overline{\varphi}_r)_{r=0}^{\infty}$ от елементи на

Да напомним, че $m_i \stackrel{\text{деф}}{=} \#\mathtt{f}_i$

$$[\mathbb{N}_\perp^{m_1} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp] \times \dots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp].$$

Тогава $[\![\mu]\!]$ е непрекъснато изображение, т.е.

$$[\![\mu]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r) = \bigsqcup_r [\![\mu]\!](\overline{\varphi}_r).$$

Доказателство. Индукция по построението на терма μ.

- Нека $\mu \equiv \mathtt{c}$. Този случай е очевиден.
- Нека $\mu \equiv \mu_1 + \mu_2$. Ще използваме, че `plus` е непрекъснато изображение.

$$\begin{aligned}
[\![\mu]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r) &\stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{plus}([\![\mu_1]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r), [\![\mu_2]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r)) \\
&= \mathtt{plus}(\bigsqcup_r [\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_r), \bigsqcup_r [\![\mu_2]\!](\overline{\varphi}_r)) && \text{// от И.П.} \\
&= \bigsqcup_r \mathtt{plus}([\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_r), [\![\mu_2]\!](\overline{\varphi}_r)) && \text{// } \mathtt{plus} \text{ е непр.} \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup_r [\![\mu]\!](\overline{\varphi}_r).
\end{aligned}$$

- Нека $\mu \equiv \mu_1$ `==` μ_2. Използвайте, че `eq` е непрекъснато изображение.
- Нека $\mu \equiv$ `if` μ_0 `then` μ_1 `else` μ_2. Използвайте *Задача* 2.1.
- Нека $\mu \equiv \mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})$. От И.П. знаем, че $[\![\mu_j]\!]$ са непрекъснати изображения за $j = 1, \ldots, m_i$ и следователно са монотонни. Тогава за произволни индекси $n \leq n'$ и $r \leq r'$ имаме, че $\overline{\varphi}_n \stackrel{\text{деф}}{=} (\varphi_n^1, \ldots, \varphi_n^k)$

$$\begin{aligned} \varphi_n^i([\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_r), \ldots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\varphi}_r)) &\sqsubseteq \varphi_n^i([\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_{r'}), \ldots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\varphi}_{r'})) \\ &\sqsubseteq \varphi_{n'}^i([\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_{r'}), \ldots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\varphi}_{r'})). \end{aligned}$$

Това означава, че ако положим

$$e_{n,r} \stackrel{\text{деф}}{=} \varphi_n^i([\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_r), \ldots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\varphi}_r)),$$

то

$$n \leq n' \,\&\, r \leq r' \implies e_{n,r} \sqsubseteq e_{n',r'}.$$

Сега можем да приложим *Теорема* 1.4, според която

$$\bigsqcup_n (\bigsqcup_r e_{n,r}) = \bigsqcup_n e_{n,n}. \tag{2.4}$$

Тогава

$$\begin{aligned} [\![\mu]\!](\bigsqcup_n \overline{\varphi}_n) &= [\![\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})]\!](\bigsqcup_n \overline{\varphi}_n) \\ &\stackrel{\text{деф}}{=} (\bigsqcup_n \varphi_n^i)([\![\mu_1]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r), \ldots, [\![\mu_{m_i}]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r)) \\ &= \bigsqcup_n \{\varphi_n^i([\![\mu_1]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r), \ldots, [\![\mu_{m_i}]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r))\} && \text{// от } \textit{Теорема } 1.2 \\ &= \bigsqcup_n \{\varphi_n^i(\bigsqcup_r [\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_r), \ldots, \bigsqcup_r [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\varphi}_r))\} && \text{// от И.П. за } \mu_j \\ &= \bigsqcup_n \{\bigsqcup_r \underbrace{\varphi_n^i([\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_r), \ldots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\varphi}_r))}_{e_{n,r}}\} && \text{// } \varphi_n^i \text{ е непр.} \\ &= \bigsqcup_n \underbrace{\varphi_n^i([\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_n), \ldots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\varphi}_n))}_{e_{n,n}} && \text{// от (2.4)} \\ &\stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup_n [\![\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})]\!](\overline{\varphi}_n) \\ &= \bigsqcup_n [\![\mu]\!](\overline{\varphi}_n). \end{aligned}$$

□

Следствие 2.3. Нека $\tau[\overline{\mathtt{x}}, \overline{\mathtt{f}}]$ е терм. Да разгледаме произволни елементи $\overline{a}$ на $\mathbb{N}_\perp^n$ и произволна верига $(\overline{\varphi}_r)_{r=0}^\infty$ от елементи на

$$[\mathbb{N}_\perp^{m_1} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp].$$

Тогава
$$[\![\tau]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r)(\overline{a}) = \bigsqcup_r [\![\tau]\!](\overline{\varphi}_r)(\overline{a}).$$

Доказателство.

$$\begin{aligned}
[\![\tau]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r)(\overline{a}) &= [\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mathtt{a}}]]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r) && \text{// от Лема за замяната}\\
&= \bigsqcup_r [\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mathtt{a}}]]\!](\overline{\varphi}_r) && \text{// от } \textit{Лема } 2.2\\
&= \bigsqcup_r [\![\tau]\!](\overline{\varphi}_r)(\overline{a}) && \text{// от Лема за замяната}
\end{aligned}$$

□

Вече имаме всичко необходимо за да се убедим, че термалните оператори са непрекъснати.

Теорема 2.1. За всеки терм $\tau[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]$, имаме, че
$$[\![\tau]\!] \in [[\mathbb{N}_\perp^{m_1} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp] \xrightarrow{\text{н}} [\mathbb{N}_\perp^{n} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]].$$

2.2.3 Предаване на параметрите по име

Нека е дадена една рекурсивна програма $\mathtt{P}[\bar{\mathtt{x}}, \bar{\mathtt{f}}]$, където:

Можем да си мислим, че $\mathtt{f}_1$ е нещо като `main` функция за програмата P.

$$\mathtt{P} = \begin{cases}
\mathtt{f}_1(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_1}) = \tau_1[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_1}, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]\\
\mathtt{f}_2(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_2}) = \tau_2[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_2}, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]\\
\vdots\\
\mathtt{f}_k(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_k}) = \tau_k[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_k}, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]
\end{cases}$$

Нека $\overline{\gamma} \in [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]$ е *най-малкото решение* на системата

В тази система неизвестните са $\varphi_1, \dots, \varphi_k$.

$$\begin{aligned}
&[\![\tau_1]\!](\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \varphi_1\\
&\vdots\\
&[\![\tau_k]\!](\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \varphi_k.
\end{aligned}$$

От Теоремата на Клини знаем, че такова най-малко решение съществува.

За дадената рекурсивна програма $\mathtt{P}[\bar{\mathtt{x}}, \bar{\mathtt{f}}]$, определяме **денотационната семантика с предаване на параметрите по име** като изображението $\mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!] \in [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]$, където:

$$\mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!](a_1, \dots, a_{m_1}) \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} \gamma_1(a_1, \dots, a_{m_1}), & \text{ако } \perp \notin \{a_1, \dots, a_{m_1}\} \\ \perp, & \text{ако } \perp \in \{a_1, \dots, a_{m_1}\}. \end{cases}$$

2.3 Операционна семантика

2.3.1 Предаване на параметрите по име

Това се нарича cost dynamics в [5, стр. 58].

Дефинираме релация $\Downarrow_P^\ell$, която ни казва как един функционален терм μ се свежда до константата a след ℓ на брой стъпки следвайки следните правила:

$$\frac{}{\mathtt{a} \Downarrow_P^0 \mathtt{a}} \ (\text{const})$$

$$\frac{\mu_1 \Downarrow_P^{\ell_1} \mathtt{a}_1 \quad \mu_2 \Downarrow_P^{\ell_2} \mathtt{a}_2 \quad a = \mathtt{plus}(a_1, a_2)}{\mu_1 + \mu_2 \Downarrow_P^{\ell_1+\ell_2+1} \mathtt{a}} \ (\text{plus})$$

$$\frac{\mu_1 \Downarrow_P^{\ell_1} \mathtt{a}_1 \quad \mu_2 \Downarrow_P^{\ell_2} \mathtt{a}_2 \quad a = \mathtt{eq}(a_1, a_2)}{\mu_1 \mathtt{==} \mu_2 \Downarrow_P^{\ell_1+\ell_2+1} \mathtt{a}} \ (\text{eq})$$

$$\frac{\mu_0 \Downarrow_P^{\ell_0} \mathtt{a}_0 \quad \mu_1 \Downarrow_P^{\ell_1} \mathtt{a}_1 \quad \mathtt{a}_0 \not\equiv \mathtt{0}}{\mathtt{if}\ \mu_0\ \mathtt{then}\ \mu_1\ \mathtt{else}\ \mu_2 \Downarrow_P^{\ell_0+\ell_1+1} \mathtt{a}_1} \ (\text{if}^+)$$

$$\frac{\mu_0 \Downarrow_P^{\ell_0} \mathtt{0} \quad \mu_2 \Downarrow_P^{\ell_2} \mathtt{a}_2}{\mathtt{if}\ \mu_0\ \mathtt{then}\ \mu_1\ \mathtt{else}\ \mu_2 \Downarrow_P^{\ell_0+\ell_2+1} \mathtt{a}_2} \ (\text{if}_0)$$

$$\frac{\tau_i[\mathtt{x}_1/\mu_1, \dots, \mathtt{x}_{m_i}/\mu_{m_i}] \Downarrow_P^{\ell} \mathtt{a}}{\mathtt{f}_i(\mu_1, \dots, \mu_{m_i}) \Downarrow_P^{\ell+1} \mathtt{a}} \ (\text{cbn})$$

Ще пишем $\mu \Downarrow_{\mathtt{P}} \mathtt{a}$, ако съществува ℓ, за което $\mu \Downarrow_{\mathtt{P}}^{\ell} \mathtt{a}$. Също така, понякога ще пишем $\mu \Downarrow_P^{<\ell} \mathtt{a}$, когато искаме да кажем, че μ се свежда до a след прилагане на по-малко от ℓ на брой правила от операционната семантика.

Лема 2.3. Докажете, че за всеки затворен терм μ, ако $\mu \Downarrow_P \mathtt{a}$ и $\mu \Downarrow_P \mathtt{a}'$, то $\mathtt{a} \equiv \mathtt{a}'$.

За фиксирана декларация P, нека за всеки *функционален* терм μ да дефинираме

$$\text{eval}_P[\![\mu]\!] \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} b, & \text{ако } \mu \Downarrow_P \mathtt{b} \\ \bot, & \text{ако } \mu \text{ няма извод до константа.} \end{cases}$$

Операционната семантика по име на рекурсивната програма $\mathtt{P}[\bar{\mathtt{x}}, \bar{\mathtt{f}}]$ представлява изображението

$$\mathcal{O}[\![\mathtt{P}]\!] \in [\mathbb{N}_\bot^{m_1} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\bot],$$

където

$$\mathcal{O}[\![\mathtt{P}]\!](a_1, \ldots, a_{m_1}) \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} \text{eval}_P[\![\mathtt{f}_1(\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_{m_1})]\!], & \text{ако } \bot \not\in \{a_1, \ldots, a_{m_1}\} \\ \bot, & \text{ако } \bot \in \{a_1, \ldots, a_{m_1}\} \end{cases}$$

за произволни $a_1, \ldots, a_{m_1} \in \mathbb{N}_\bot$.

Забележка 2.3. Всъщност ние все още няма как да знаем, че за всяка програма $\mathtt{P}$, $\mathcal{O}[\![\mathtt{P}]\!]$ е непрекъснато изображение. Този факт може да се докаже директно, но вместо това, ние ще видим, че $\mathcal{O}[\![\mathtt{P}]\!] = \mathcal{D}[\![\mathtt{P}]\!]$ и оттам ще получим непрекъснатостта на $\mathcal{O}[\![\mathtt{P}]\!]$, защото от дефиницията на $\mathcal{D}[\![\mathtt{P}]\!]$ е ясно, че то е непрекъснато изображение.

Пример 2.3. Нека за програмата $\mathtt{P}$:

```
f(x,y) = if x == y then 0 else 1 + f(x,y+1)
```

да разгледаме няколко извода с правилата на операционната семантика по име.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{3 \to_P 3}\,\text{(const)} \quad \dfrac{}{2 \to_P 2}\,\text{(const)}}{\texttt{3 == 2} \to_P 0}\,\text{(eq)}
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{1 \to_P 1}\,\text{(const)} \quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{3 \to_P 3}\,\text{(const)} \quad \dfrac{}{\texttt{2+1} \to_P 3}\,\text{(const)}}{\texttt{3 == 2 + 1} \to_P 1}\,\text{(eq)} \qquad \dfrac{}{0 \to_P 0}\,\text{(const)}}{\texttt{if 3 == 2+1 then 0 else 1+f(3,2+1+1)} \to_P 0}\,(\text{if}_{\mathbf{t}})}{\texttt{f(3,2+1)} \to_P 0}\,\text{(cbn)}}{\texttt{1 + f(3,2+1)} \to_P 1}\,\text{(plus)}
}{\texttt{if 3 == 2 then 0 else 1 + f(3,2+1)} \to_P 1}\,(\text{if}_{\mathbf{f}})
}{\texttt{f(3,2)} \to_P 1}\,\text{(cbn)}
$$

Фигура 2.1: Крайно дърво на извод започващо от функционалния терм f(3,2)

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{2 \to_P 2}\,\text{(const)} \quad \dfrac{}{3 \to_P 3}\,\text{(const)}}{\texttt{2 == 3} \to_P 0}\,\text{(eq)}
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{1 \to_P 1}\,\text{(const)} \quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{2 \to_P 2}\,\text{(const)} \quad \dfrac{\dfrac{}{3 \to_P 3}\,\text{(const)} \quad \dfrac{}{1 \to_P 1}\,\text{(const)}}{\texttt{3+1} \to_P 4}\,\text{(plus)}}{\texttt{2 == 3+1} \to_P 0}\,\text{(eq)} \qquad \dfrac{\vdots}{\texttt{1 + f(2,3+1+1)} \to_P \square}}{\texttt{if 2 == 3+1 then 0 else 1 + f(2,3+1+1)} \to_P \square}\,(\text{if}_{\mathbf{f}})}{\texttt{f(2,3+1)} \to_P \square}\,\text{(cbn)}}{\texttt{1+f(2,3+1)} \to_P \square}\,\text{(plus)}
}{\texttt{if 2 == 3 then 0 else 1 + f(2,3+1)} \to_P \square}\,(\text{if}_{\mathbf{f}})
}{\texttt{f(2,3)} \to_P \square}\,\text{(cbn)}
$$

Фигура 2.2: Част от безкрайното дърво на извод започващо от функционалния терм f(2,3)

2.3.2 Теорема за еквивалентност

Винаги с μ ще означаваме функционални термове; с τ - произволни термове

В [8, стр. 192], [7, стр. 157] доказателството е друго.

Тук използваме наготово *Твърдение* 1.14.

Твърдение 2.2. Да разгледаме една програма P. Нека $\mu[\mathtt{f}_1, \ldots, \mathtt{f}_n]$ е *функционален* терм. Тогава

$$\mathrm{eval}_P[\![\mu]\!] \sqsubseteq [\![\mu]\!](\bar{\gamma}),$$

където $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ е някоя неподвижна точка на непрекъснатия оператор

$$\Gamma \stackrel{\text{деф}}{=} [\![\tau_1]\!] \times \cdots \times [\![\tau_n]\!],$$

който съответства на програмата P.

За това твърдение не е необходимо $\bar{\gamma}$ да бъде най-малката неподвижна точка на Γ, а просто решение. Само за другата посока ще е важно да е най-малкото решение.

Доказателство. Ако от терма μ *няма извод* до елемент на $\mathbb{N}_\perp$, то по дефиниция $\mathrm{eval}_P[\![\mu]\!] = \perp$ и в този случай е очевидно, че

$$\mathrm{eval}_P[\![\mu]\!] \sqsubseteq [\![\mu]\!](\bar{\gamma}).$$

Интересният случай е когато от терма μ *има извод* до число. Тогава ще докажем, че за произволен функционален терм μ и число a,

$$\mu \Downarrow_P \mathtt{a} \implies [\![\mu]\!](\bar{\gamma}) = a. \tag{2.5}$$

Доказателството на (2.5) ще проведем с индукция по дължината ℓ на извода $\mu \Downarrow_P^\ell a$.

Константата a има стойност числото a.

Нека изводът има дължина 0. Понеже μ е функционален терм, според правилата на операционната семантика, единствената възможност е $\mu \equiv \mathtt{a}$. Тогава е очевидно, че $[\![\mu]\!](\bar{\gamma}) = a$. Ясно е, че в този случай,

$$\mathtt{a} \Downarrow_P^0 \mathtt{a} \implies [\![\mathtt{a}]\!](\bar{\gamma}) = a.$$

Нака имаме следното индукционно предположение:

$$\mu \Downarrow_P^{<\ell} \mathtt{a} \implies [\![\mu]\!](\bar{\gamma}) = a. \tag{2.6}$$

Ще докажем, че

$$\mu \Downarrow_P^\ell \mathtt{a} \implies [\![\mu]\!](\bar{\gamma}) = a.$$

Трябва да разгледаме различни случаи в зависимост от вида на функционалния терм μ.

- Да разгледаме случая, когато $\mu \equiv \mu_1 + \mu_2$. Нека $\mu_1 + \mu_2 \Downarrow_P^\ell \mathtt{a}$. Според правилата за извод в операционната семантика по име, имаме следната ситуация:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\mu_1 \Downarrow_P^{\ell_1} \mathtt{a}_1} \qquad \dfrac{\vdots}{\mu_2 \Downarrow_P^{\ell_2} \mathtt{a}_2}}{\mu_1 + \mu_2 \Downarrow_P^{\ell_1+\ell_2+1} \mathtt{a}} \ \text{правило (plus)}$$

  където $a = \mathtt{plus}(a_1, a_2)$. Ясно е, че изводите на $\mu_1 \Downarrow_P^{<\ell} \mathtt{a}_1$ и $\mu_2 \Downarrow_P^{<\ell} \mathtt{a}_2$. Следователно можем да приложим **И.П.** за μ_1 и μ_2, откъдето получаваме, че

$$\mu_1 \Downarrow_P^{<\ell} \mathtt{a}_1 \implies [\![\mu_1]\!](\bar{\gamma}) = \mathtt{a}_1$$

$$\mu_2 \Downarrow_P^{<\ell} \mathtt{a}_2 \implies [\![\mu_2]\!](\overline{\gamma}) = \mathtt{a}_2.$$

Тогава получаваме, че ако $\mu_1 + \mu_2 \Downarrow_P^{\ell} \mathtt{a}$, то

$$\begin{aligned}[\![\mu_1 + \mu_2]\!](\overline{\gamma}) &\overset{\text{деф}}{=} \mathtt{plus}([\![\mu_1]\!](\overline{\gamma}), [\![\mu_2]\!](\overline{\gamma}))\\ &= \mathtt{plus}(a_1, a_2)\\ &= a.\end{aligned}$$

- Случаят, когато $\mu \equiv \mu_1$ `==` μ_2 е лесен.
- Случаят, когато $\mu \equiv$ `if` μ_0 `then` μ_1 `else` μ_2, е лесен.
- Нека имаме функционалния терм $\mu \equiv \mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})$ и $\mu \Downarrow_P^{\ell} a$. Според правилата за извод в операционната семантика по име, имаме следната ситуация:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\tau_i[\mathtt{x}_1/\mu_1, \ldots, \mathtt{x}_{m_i}/\mu_{m_i}] \Downarrow_P^{\ell-1} \mathtt{a}}}{\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i}) \Downarrow_P^{\ell} \mathtt{a}} \text{ правило (cbn)}$$

От **И.П.** имаме, че

$$\tau_i[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}] \Downarrow_P^{<\ell} \mathtt{a} \implies [\![\tau_i[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!](\overline{\gamma}) = a.$$

Понеже знаем, че $\tau_i[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}] \Downarrow_P^{<\ell} \mathtt{a}$, то $[\![\tau_i[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!](\overline{\gamma}) = a$. Лесно се съобразява, че:

Озн. $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Единствено в този случай се използва, че $\overline{\gamma}$ е решение на системата от оператори, като не е задължително да е най-малкото решение.

$$\begin{aligned}[\![\tau_i[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!](\overline{\gamma}) &= [\![\tau_i]\!](\overline{\gamma})([\![\mu_1]\!](\overline{\gamma}), \ldots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\gamma})) && \text{// Лема за замяната}\\ &= \gamma_i([\![\mu_1]\!](\overline{\gamma}), \ldots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\gamma})) && \text{// } \gamma_i = [\![\tau_i]\!](\overline{\gamma})\\ &\overset{\text{деф}}{=} [\![\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})]\!](\overline{\gamma}). && \text{// стойност на терм}\end{aligned}$$

Обединявайки всичко, което знаем, получаваме:

$$\begin{aligned}\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i}) \Downarrow_P^{\ell} \mathtt{a} &\implies \tau_i[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}] \Downarrow_P^{<\ell} \mathtt{a} && \text{// правило (cbn)}\\ &\implies [\![\tau_i[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!](\overline{\gamma}) = a && \text{// \textbf{И.П.}}\\ &\implies [\![\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})]\!](\overline{\gamma}) = a.\end{aligned}$$

С това доказателството на (2.5) е завършено. □

Следствие 2.4. За всяка рекурсивна програма P на езика **REC** имаме, че

$$\mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!] \sqsubseteq \mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!].$$

Доказателство. Нека $\overline{\gamma}$ е най-малкото решение на системата от непрекъснати оператори, която съответства на програмата P. Тогава

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!](a_1,\dots,a_{m_1}) &\stackrel{\text{деф}}{=} \text{eval}_P[\![\mathtt{f}_1(\mathtt{a}_1,\dots,\mathtt{a}_{m_1})]\!] \\
&\sqsubseteq [\![\mathtt{f}_1(\mathtt{a}_1,\dots,\mathtt{a}_{m_1})]\!](\overline{\gamma}) && \textit{// Твърдение 2.2} \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \gamma_1([\![\mathtt{a}_1]\!](\overline{\gamma}),\dots,[\![\mathtt{a}_{m_1}]\!](\overline{\gamma})) && \text{// стойност на терм} \\
&= \gamma_1(a_1,\dots,a_{m_1}) && \text{// } [\![\mathtt{a}_i]\!](\overline{\gamma}) = a_i \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!](a_1,\dots,a_{m_1}).
\end{aligned}$$

□

Така получихме едната посока на теоремата за еквивалентност. Сега преминаваме към доказателството на другата посока.

Нека сега $\overline{\gamma} = (\gamma_1,\dots,\gamma_k)$ е най-малкото решение на системата от оператори, която съответства на програма P за денотационната семантика по име. Да напомним, че това означава, че $\overline{\gamma} = \bigsqcup_r \overline{\gamma}_r$, където $\overline{\gamma}_0 = (\bot,\dots,\bot)$ и за всяко r,

$$\begin{aligned}
\gamma^i_{r+1} &= \Gamma_{\tau_i}(\overline{\gamma}_r) \\
\overline{\gamma}_r &= (\gamma^1_r,\dots,\gamma^k_r).
\end{aligned}$$

✍ Съобразете защо не можем да докажем по-простото твърдение, че за всеки функционален терм μ и всяко r, $[\![\mu]\!](\overline{\gamma}_r) \sqsubseteq \text{eval}_P[\![\mu]\!]$.

Твърдение 2.3. Да разгледаме една програма P в езика **REC**, като $\overline{\gamma} = \bigsqcup_r \overline{\gamma}_r$ е най-малкото решение на системата от оператори за P. Тогава за произволен терм $\tau[\mathtt{x}_1,\dots,\mathtt{x}_n,\mathtt{f}_1,\dots,\mathtt{f}_k]$ и произволни функционални термове

$$\mu_1[\mathtt{f}_1,\dots,\mathtt{f}_k],\dots,\mu_n[\mathtt{f}_1\dots,\mathtt{f}_k],$$

и всяко r, е изпълнено, че:

$$[\![\tau]\!](\overline{\gamma}_r)(\text{eval}_P[\![\mu_1]\!],\dots,\text{eval}_P[\![\mu_n]\!]) \sqsubseteq \text{eval}_P[\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!].$$

Доказателство. За произволно естествено число r, нека твърдението $\mathtt{Include}(r)$ да гласи следното:

„за произволен терм $\tau[\mathtt{x}_1,\dots,\mathtt{x}_n,\mathtt{f}_1,\dots,\mathtt{f}_k]$ и произволни функционални термове $\mu_1[\mathtt{f}_1,\dots,\mathtt{f}_k],\dots,\mu_n[\mathtt{f}_1\dots,\mathtt{f}_k]$, е изпълнено, че:

$$[\![\tau]\!](\overline{\gamma}_r)(\text{eval}_P[\![\mu_1]\!],\dots,\text{eval}_P[\![\mu_n]\!]) \sqsubseteq \text{eval}_P[\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!].\text{"}$$

Трябва да докажем, че $\mathtt{Include}(r)$ е изпълнено за всяко r. Това ще направим с индукция по r.

- Първо ще докажем $\mathtt{Include}(0)$. Това ще направим с индукция по построението на терма τ. Да разгледаме произволни функционални термове μ_i и за улеснение да положим $a_i \stackrel{\text{деф}}{=} \text{eval}_P[\![\mu_i]\!]$.

  - Нека $\tau \equiv \mathtt{c}$. Тогава:

$$\begin{aligned}
[\![\mathtt{c}]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a}) &\stackrel{\text{деф}}{=} c \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \text{eval}_P[\![\mathtt{c}]\!] && \text{// правило (1)} \\
&= \text{eval}_P[\![\mathtt{c}[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!].
\end{aligned}$$

– Нека $\tau \equiv \mathtt{x}_i$. Тогава:

$$\begin{aligned} [\![\mathtt{x}_i]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a}) &\overset{\text{деф}}{=} a_i \\ &= \mathrm{eval}_P[\![\mu_i]\!] && // \ a_i \overset{\text{деф}}{=} \mathrm{eval}_P[\![\mu_i]\!] \\ &= \mathrm{eval}_P[\![\mathtt{x}_i[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!]. \end{aligned}$$

– Нека $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2$. В този случай, τ е съставен от по-простите термове τ_1 и τ_2. От **И.П.** за τ_1 и τ_2 следва, че за $i = 1, 2$ е изпълнено следното:

$$[\![\tau_i]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a}) \sqsubseteq \mathrm{eval}_P[\![\tau_i[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!]. \tag{2.7}$$

Да напомним, че изображението `plus` е непрекъснато, откъдето следва, че също така е монотонно. Тогава:

$$\begin{aligned} [\![\tau_1 + \tau_2]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a}) &\overset{\text{деф}}{=} \mathtt{plus}([\![\tau_1]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a}), [\![\tau_2]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a})) \\ &\sqsubseteq \mathtt{plus}(\mathrm{eval}_P[\![\tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!], \mathrm{eval}_P[\![\tau_2[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!]) && // \text{ от } (2.7) \\ &= \mathrm{eval}_P[\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!] && // \text{ правило } (2_+) \end{aligned}$$

✍ Тези два случая са за домашно!

– Нека $\tau \equiv \tau_1 == \tau_2$.

– Нека $\tau \equiv \mathtt{if}\ \tau_0\ \mathtt{then}\ \tau_1\ \mathtt{else}\ \tau_2$.

– Нека $\tau \equiv \mathtt{f}_i(\rho_1, \ldots, \rho_{m_i})$. Тогава

$$\begin{aligned} [\![\tau]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a}) &\overset{\text{деф}}{=} \gamma_0^i([\![\rho_1]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a}), \ldots, [\![\rho_{m_i}]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a})) \\ &= \bot && // \ \gamma_0^i(\overline{x}) \overset{\text{деф}}{=} \bot \\ &\sqsubseteq \mathrm{eval}_P[\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!]. \end{aligned}$$

Така доказахме, че $\mathtt{Include}(0)$ е изпълнено.

• Нека $r > 0$. Да приемем, че $\mathtt{Include}(r-1)$ е изпълнено. Ще докажем $\mathtt{Include}(r)$ отново с индукция по построението на термовете. Единственият случай, който заслужава внимание е

$$\tau \equiv \mathtt{f}_i(\rho_1, \ldots, \rho_{m_i}).$$

✍ Разгледайте сами останалите случаи за τ и се убедете, че те наистина се доказват по същия начин както при $r = 0$.

Доказателствата на всички останали случаи за τ протичат по абсолютно същия начин както при $r = 0$.

Понеже термът τ е построен с помощта на термовете ρ_j, за $j = 1, \ldots, m_i$, можем да приложим **И.П.** за тях и да получим, че

$$\begin{aligned} [\![\rho_j]\!](\overline{\gamma}_r)(\underbrace{\mathrm{eval}_P[\![\mu_1]\!]}_{a_1}, \ldots, \underbrace{\mathrm{eval}_P[\![\mu_n]\!]}_{a_n}) &= \underbrace{[\![\rho_j]\!](\overline{\gamma}_r)(a_1, \ldots, a_n)}_{b_j} \\ &\sqsubseteq \underbrace{\mathrm{eval}_P[\![\rho_j[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!]}_{c_j}. && // \text{ от } \textbf{И.П.} \end{aligned}$$

Обърнете внимание, че ρ_j' са функционални термове

Нека за наше улеснение да положим $\rho'_j \stackrel{\text{деф}}{=} \rho[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]$. Това означава, че до момента имаме следното:

$$[\![\tau_i]\!](\overline{\varphi})(\underbrace{[\![\rho_1]\!](\overline{\gamma}_r)(\overline{a})}_{b_1}, \dots, \underbrace{[\![\rho_{m_i}]\!](\overline{\gamma}_r)(\overline{a})}_{b_{m_i}}) \sqsubseteq [\![\tau_i]\!](\overline{\varphi})(\underbrace{\mathrm{eval}_P[\![\rho'_1]\!]}_{c_1}, \dots, \underbrace{\mathrm{eval}_P[\![\rho'_{m_i}]\!]}_{c_{m_i}}),$$

за произволни непрекъснати изображения $\overline{\varphi}$.

Като обединим всичко от по-горе, получаваме следното:

$$\begin{aligned}
[\![\tau]\!](\overline{\gamma}_r)(\overline{a}) &= [\![\mathtt{f}_i(\rho_1, \dots, \rho_{m_i})]\!](\overline{\gamma}_r)(\overline{a}) \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \gamma_r^i(\underbrace{[\![\rho_1]\!](\overline{\gamma}_r)(\overline{a})}_{b_1}, \dots, \underbrace{[\![\rho_{m_i}]\!](\overline{\gamma}_r)(\overline{a})}_{b_{m_i}}) \\
&= \gamma_r^i(b_1, \dots, b_{m_i}) \\
&\sqsubseteq \gamma_r^i(c_1, \dots, c_{m_i}) && //\ \gamma_r^i \text{ е непр. и следователно мон.} \\
&= [\![\tau_i]\!](\overline{\gamma}_{r-1})(c_1, \dots, c_{m_i}) && //\ \gamma_r^i \stackrel{\text{деф}}{=} [\![\tau_i]\!](\overline{\gamma}_{r-1}) \\
&= [\![\tau_i]\!](\overline{\gamma}_{r-1})(\underbrace{\mathrm{eval}_P[\![\rho'_1]\!]}_{c_1}, \dots, \underbrace{\mathrm{eval}_P[\![\rho'_{m_i}]\!]}_{c_{m_i}}) && //\ c_i = \mathrm{eval}_P[\![\rho'_i]\!] \\
&\sqsubseteq \mathrm{eval}_P[\![\tau_i[\mathtt{x}_1/\rho'_1, \dots, \mathtt{x}_{m_i}/\rho'_{m_i}]]\!] && //\ \text{от } \mathtt{Include}(r-1) \\
&= \mathrm{eval}_P[\![\mathtt{f}_i(\rho'_1, \dots, \rho'_{m_i})]\!] && //\ \text{от правило (4)} \\
&= \mathrm{eval}_P[\![\mathtt{f}_i(\rho_1[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}], \dots, \rho_{m_i}[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}])]\!] && //\ \rho'_j \stackrel{\text{деф}}{=} \rho[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}] \\
&= \mathrm{eval}_P[\![\mathtt{f}_i(\rho_1, \dots, \rho_{m_i})[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!] && //\ \text{правила за замяна} \\
&= \mathrm{eval}_P[\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!].
\end{aligned}$$

Заключаваме, че

$$[\![\tau]\!](\overline{\gamma}_r)(\underbrace{\mathrm{eval}_P[\![\mu_1]\!]}_{a_1}, \dots, \underbrace{\mathrm{eval}_P[\![\mu_n]\!]}_{a_n}) \sqsubseteq \mathrm{eval}_P[\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!].$$

Така доказахме $\mathtt{Include}(r)$.

Най-накрая заключаваме, че $(\forall r)\mathtt{Include}(r)$. □

Следствие 2.5. Нека μ е функционален терм. Тогава $\mathrm{eval}_P[\![\mu]\!]$ е горна граница на веригата $([\![\mu]\!](\overline{\gamma}_r))_{r=0}^{\infty}$.

Лема 2.4. За всяка рекурсивна програма P, произволен *функционален* терм μ,

$$[\![\mu]\!](\overline{\gamma}) \sqsubseteq \mathrm{eval}_P[\![\mu]\!],$$

където $\overline{\gamma} = \mathtt{lfp}(\Gamma)$, а

$$\Gamma = [\![\tau_0]\!] \times [\![\tau_2]\!] \times \cdots \times [\![\tau_k]\!]$$

е операторът, който съответства на програмата P.

Уплътване.

$$\begin{aligned}
[\![\mu]\!](\overline{\gamma}) &= [\![\mu]\!](\bigsqcup_r \overline{\gamma}_r) && //\ \overline{\gamma} = \bigsqcup_r \overline{\gamma}_r\\
&= \bigsqcup_r [\![\mu]\!](\overline{\gamma}_r) && //\ \text{от } \textit{Лема } 2.2\\
&\sqsubseteq \mathrm{eval}_P[\![\mu]\!]. && //\ \text{от } \textit{Следствие } 2.5
\end{aligned}$$

□

Теорема 2.2. За всяка рекурсивна програма P на езика **REC** е изпълнено:

$$\mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!] = \mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!].$$

Доказателство. Ние вече знаем от *Следствие* 2.4, че

Озн. $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ е най-малкото решение на системата от оператори съответстващи на програмата P

$$\mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!] \sqsubseteq \mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!].$$

Остава да докажем обратната посока, а именно

$$\mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!] \sqsubseteq \mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!].$$

За произволни числа $\overline{a}$, имаме следните връзки:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!](\overline{a}) &\stackrel{\text{деф}}{=} \gamma_1(\overline{a})\\
&= [\![\tau_1]\!](\overline{\gamma})(\overline{a}) && //\ \gamma_1 \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma_{\tau_1}(\overline{\gamma})\\
&= [\![\tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mathtt{a}}]]\!](\overline{\gamma}) && //\ \text{Лема за замяната}\\
&\sqsubseteq \mathrm{eval}_P[\![\tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mathtt{a}}]]\!] && //\ \textit{Твърдение } 2.3\\
&= \mathrm{eval}_P[\![\mathtt{f}_1(\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_{m_1})]\!] && //\ \text{правило (4) на опер. сем.}\\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!](\overline{a}).
\end{aligned}$$

□

Глава 3

Езикът PCF

3.1 Синтаксис

Plotkin's language PCF is often called the *E. coli* of programming languages, the subject of countless studies of language concept.

Тази глава се оповава основно на [5, Глава 19] и [3].

- Типове
$$\mathtt{a} ::= \mathtt{nat} \mid \mathtt{a} \to \mathtt{a}.$$
Когато пишем $\mathtt{a} \to \mathtt{b} \to \mathtt{c}$, то имаме предвид, че $\mathtt{a} \to (\mathtt{b} \to \mathtt{c})$.

- Изрази
$$\tau ::= \mathtt{n} \mid \mathtt{x} \mid \tau + \tau \mid \tau \mathtt{==} \tau \mid \mathtt{if}\ \tau\ \mathtt{then}\ \tau\ \mathtt{else}\ \tau \mid \tau\tau \mid \lambda\, \mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\,.\,\tau \mid \mathtt{fix}(\tau).$$
Ще означаваме съвкупоността от всички изрази с $\mathcal{E}$, а съвкупността от всички променливи с $\mathcal{V}$. Да обърнем внимание, че не всички изрази са „смислени". Например, $\lambda\, \mathtt{x}\ :\ \mathtt{nat}\,.\,\mathtt{xx}$ не е ясно какво означава.

  Понеже тук вече имам свободни и свързани променливи, трябва да дефинираме точно какво означава това.
$$\mathtt{fv} : \mathcal{E} \to \mathcal{P}(\mathcal{V})$$
Ще дефинираме функцията $\mathtt{fv}$ със структурна индукция по построението на термовете.

  - $\mathtt{fv}(\mathtt{n}) = \emptyset$;
  - $\mathtt{fv}(\mathtt{x}) = \{\mathtt{x}\}$;
  - $\mathtt{fv}(\tau_1 + \tau_2) = \mathtt{fv}(\tau_1 \mathtt{==} \tau_2) = \mathtt{fv}(\tau_1\tau_2) = \mathtt{fv}(\tau_1) \cup \mathtt{fv}(\tau_2)$;
  - $\mathtt{fv}(\mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3) = \mathtt{fv}(\tau_1) \cup \mathtt{fv}(\tau_2) \cup \mathtt{fv}(\tau_3)$;
  - $\mathtt{fv}(\lambda\, \mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\,.\,\tau) = \mathtt{fv}(\tau) \setminus \{x\}$.
  - $\mathtt{fv}(\mathtt{fix}(\tau)) = \mathtt{fv}(\tau)$;

  Ще казваме, че един израз τ е **затворен**, ако $\mathtt{fv}(\tau) = \emptyset$. В противен случай, ще казваме, че изразът е **отворен**.

Стойносттите понякога се наричат и канонични форми.

- Ще казваме, че един израз е **стойност**, ако той е затворен терм, съставен по следния начин:
$$\mathtt{v} ::= \mathtt{n} \mid \lambda\, \mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\,.\,\mu.$$

С други думи, стойносттите са затворени термове, в които не е възможно да се правят повече опростявания. Например, `5 + 6` не е стойност, защото може да се опрости до 11, но $\lambda\,\mathtt{x} : \mathtt{nat}\,.\,5{+}6$ е стойност.

С $\tau\{\mathtt{x}/\rho\}$ ще означаваме изразът получен от τ, в който всяко *свободно* срещане на променливата x е заменена с израза ρ. Можем да дадем формална дефиниция с индукция по построението на изразите:

- Ако τ е константата n, то $\tau\{\mathtt{x}/\rho\}$ е израза n.
- Ако τ е променливата x, то $\tau\{\mathtt{x}/\rho\}$ е израза ρ.
- Ако τ е променливата y, където y не е променливата x, то $\tau\{\mathtt{x}/\rho\}$ е израза y.
- Ако τ е израза $\tau_1 + \tau_2$, то $\tau\{\mathtt{x}/y\}$ е израза
$$\tau_1\{\mathtt{x}/\rho\} + \tau_2\{\mathtt{x}/\rho\}.$$
- Ако τ е израза $\tau_1 == \tau_2$, то $\tau\{\mathtt{x}/\rho\}$ е израза
$$\tau_1\{\mathtt{x}/\rho\} == \tau_2\{\mathtt{x}/\rho\}.$$
- Ако τ е израза $\mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3$, то $\tau\{\mathtt{x}/\rho\}$ е израза
$$\mathtt{if}\ \tau_1\{\mathtt{x}/\rho\}\ \mathtt{then}\ \tau_2\{\mathtt{x}/\rho\}\ \mathtt{else}\ \tau_3\{\mathtt{x}/\rho\}.$$
- Ако τ е израза $\lambda\,\mathtt{x} : \mathtt{a}\,.\,\tau'$, то $\tau\{\mathtt{x}/\rho\}$ е израза τ;
- Ако τ е израза $\lambda\,\mathtt{y} : \mathtt{a}\,.\,\tau'$ и y е променлива различна от x, то $\tau\{\mathtt{x}/\rho\}$ е израза
$$\lambda\,\mathtt{y} : \mathtt{a}\,.\,\tau'\{\mathtt{x}/\rho\}.$$

Нека τ е израза $\lambda\,\mathtt{x} : \mathtt{a}\,.\,\mathtt{x{+}y}$. Обърнете внимание, че $\tau\{\mathtt{y}/\mathtt{x}\}$ е израза $\lambda\,\mathtt{x} : \mathtt{a}\,.\,\mathtt{x{+}x}$, т.е. тук получаваме израз, който „смислово” е доста различен от първоначалния израз τ. Проблемът се състои в това, че някоя свободна променлива на ρ може да попадне под обхвата на някоя свързана променлива на τ.

Сега ще дефинираме бинарна релация между изрази, която ще наричаме α-еквивалентност. Интуитивно, всеки два α-еквивалентни израза трябва да бъдат смислово неотличими. Това е най-малката релация $\equiv$ между изрази, за която са изпълнени свойствата:

В тази дефиниция единствено последният случай е интересен. Например,

$$(\lambda\,\mathtt{x} : \mathtt{a}\,.\,\mathtt{x{+}z})\mathtt{x} \equiv (\lambda\,\mathtt{y} : \mathtt{a}\,.\,\mathtt{y{+}z})\mathtt{x},$$

но

$$(\lambda\,\mathtt{x} : \mathtt{a}\,.\,\mathtt{x{+}y})\mathtt{x} \not\equiv (\lambda\,\mathtt{y} : \mathtt{a}\,.\,\mathtt{x{+}y})\mathtt{x}.$$

- $\mathtt{x} \equiv \mathtt{x}$;
- $\mathtt{n} \equiv \mathtt{n}$;
- ако $\tau_1 \equiv \rho_1$ и $\tau_2 \equiv \rho_2$, то имаме, че
$$\tau_1 + \tau_2 \equiv \rho_1 + \rho_2,$$
$$\tau_1 == \tau_2 \equiv \rho_1 == \rho_2,$$
$$\tau_1\tau_2 \equiv \rho_1\rho_2;$$

- ако $\tau_1 \equiv \rho_1$, $\tau_2 \equiv \rho_2$ и $\tau_3 \equiv \rho_3$, то

$$\texttt{if}\ \tau_1\ \texttt{then}\ \tau_2\ \texttt{else}\ \tau_3 \equiv \texttt{if}\ \rho_1\ \texttt{then}\ \rho_2\ \texttt{else}\ \rho_3;$$

- ако $\tau \equiv \rho$, то $\texttt{fix}(\tau) \equiv \texttt{fix}(\rho)$;
- ако $\tau\{\texttt{x}/\texttt{z}\} \equiv \rho\{\texttt{y}/\texttt{z}\}$, където $\texttt{z} \notin \texttt{var}(\tau) \cup \texttt{var}(\rho)$, то

$$\lambda\,\texttt{x : a}\,.\,\tau \equiv \lambda\,\texttt{y : a}\,.\,\rho.$$

PCF терм е клас на еквивалентност от PCF изрази относно релацията α-еквивалентност.

Сега искаме $\tau[\texttt{x}/\rho]$ да означава изразът получен от израза τ, в който всяко *свободно* срещане на променливата x е заменена с израза ρ. Тук имаме потенциален проблем. Искаме да направим тази замяна по такъв начин, че свободни променливи на ρ да не попаднат под обхвата на свързани променливи от τ. За да направим това, операцията $[\texttt{x}/\rho]$ трябва да работи не върху отделни изрази, а върху термове. Можем да дадем формална дефиниция с индукция по построението на термовете:

- Ако $\tau \equiv \texttt{n}$, то $\tau[\texttt{x}/\rho] \equiv \texttt{n}$.
- Ако $\tau \equiv \texttt{x}$, то $\tau[\texttt{x}/\rho] \equiv \rho$.
- Ако $\tau \equiv \texttt{y}$ и y е променлива различна от x, то $\tau[\texttt{x}/\rho] \equiv \texttt{y}$.
- Ако $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2$, то
$$\tau[\texttt{x}/y] \equiv \tau_1[\texttt{x}/\rho] + \tau_2[\texttt{x}/\rho].$$
- Ако $\tau \equiv \tau_1 \texttt{==} \tau_2$, то
$$\tau[\texttt{x}/\rho] \equiv \tau_1[\texttt{x}/\rho] \texttt{==} \tau_2[\texttt{x}/\rho].$$
- Ако $\tau \equiv \texttt{if}\ \tau_1\ \texttt{then}\ \tau_2\ \texttt{else}\ \tau_3$, то
$$\tau[\texttt{x}/\rho] \equiv \texttt{if}\ \tau_1[\texttt{x}/\rho]\ \texttt{then}\ \tau_2[\texttt{x}/\rho]\ \texttt{else}\ \tau_3[\texttt{x}/\rho].$$
- Ако $\tau \equiv \lambda\,\texttt{y : a}\,.\,\tau'$, то
$$\tau[\texttt{x}/\rho] \equiv \lambda\,\texttt{z : a}\,.\,(\tau'[\texttt{y}/\texttt{z}][\texttt{x}/\rho]),$$
където $\texttt{z} \notin \texttt{fv}(\tau') \cup \texttt{fv}(\rho) \cup \{\texttt{x}\}$.

В тази дефиниция отново единствено последният случай е интересен. Обърнете внимание, че според него заместването на x с ρ дава като резултат безкрайно много изрази, всички от които са α-еквивалентни, т.е. ако работим на ниво термове операцията е добре дефинирана.

Това означава, че няма значение дали ще говорим за $\lambda\,\texttt{x : a}\,.\,\texttt{x+y}$ или за $\lambda\,\texttt{y : a}\,.\,\texttt{y+z}$. Тези два израза описват един и същи терм.

3.2 Добре типизирани термове

Типовите контексти представляват крайни редици от двойки от вида $\mathtt{x} \ : \ \mathtt{a}$, т.е.

$$\Gamma ::= \emptyset \mid \Gamma, \mathtt{x} \ : \ \mathtt{a}.$$

Обикновено ще означаваме типовите контексти с главните гръцки $\Gamma, \Delta, \ldots$. На един типов контекст Γ може да се гледа и като на *крайна* функция приемаща като аргумент променлива и връщаща тип. Ние искаме да работим само с коректно типизирани термове. Например, не е ясно какво означава терма $\mathtt{1 \ + \ }\lambda\,\mathtt{x \ : \ nat}\,.\,\mathtt{x}$, защото трябва да съберем число и функция - два обекта от различен тип. Ако в изразите имаме свободни променливи, то дали един израз е коректно типизиран ще зависи от типовия контекст. Сега ще дефинираме релация $\Gamma \vdash \tau \ : \ \mathtt{a}$, която ще ни казва, че термът τ, относно типовият контекст Γ, е добре типизиран и има тип $\mathtt{a}$.

Γ също се нарича и type environment.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathtt{n} : \mathtt{nat}}\ \text{(const)}$$

$$\frac{\mathtt{x} \in \mathtt{dom}(\Gamma) \qquad \Gamma(\mathtt{x}) = \mathtt{a}}{\Gamma \vdash \mathtt{x} : \mathtt{a}}\ \text{(var)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau_1 : \mathtt{nat} \qquad \Gamma \vdash \tau_2 : \mathtt{nat}}{\Gamma \vdash \tau_1 + \tau_2 : \mathtt{nat}}\ \text{(plus)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau_1 : \mathtt{nat} \qquad \Gamma \vdash \tau_2 : \mathtt{nat}}{\Gamma \vdash \tau_1 \mathtt{==} \tau_2 : \mathtt{nat}}\ \text{(eq)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau_1 : \mathtt{nat} \qquad \Gamma \vdash \tau_2 : \mathtt{a} \qquad \Gamma \vdash \tau_3 : \mathtt{a}}{\Gamma \vdash \mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3 : \mathtt{a}}\ \text{(if)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau_1 : \mathtt{a} \to \mathtt{b} \qquad \Gamma \vdash \tau_2 : \mathtt{a}}{\Gamma \vdash \tau_1 \tau_2 : \mathtt{b}}\ \text{(app)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau : \mathtt{a} \to \mathtt{a}}{\Gamma \vdash \mathtt{fix}(\tau) : \mathtt{a}}\ \text{(fix)}$$

$$\frac{\mathtt{x} \notin \mathtt{dom}(\Gamma) \qquad \Gamma, \mathtt{x} \ : \ \mathtt{a} \vdash \tau : \mathtt{b}}{\Gamma \vdash \lambda \mathtt{x} \ : \ \mathtt{a}\,.\,\tau : \mathtt{a} \to \mathtt{b}}\ \text{(lambda)}$$

Ако имаме затворен израз τ, то ще пишем $\tau \ : \ \mathtt{a}$ вместо $\emptyset \vdash \tau \ : \ \mathtt{a}$. Да положим

$$\text{PCF}_{\mathtt{a}} \stackrel{\text{деф}}{=} \{\tau \text{ е затворен терм} \mid \emptyset \vdash \tau \ : \ \mathtt{a}\}.$$

Твърдение 3.1. Ако $\Gamma \vdash \tau \ : \ \mathtt{a}$, то $\mathtt{fv}(\tau) \subseteq \mathtt{dom}(\Gamma)$.

Твърдение 3.2. Ако $\Gamma \vdash \tau \ : \ \mathtt{a}$ и $\Gamma \vdash \tau \ : \ \mathtt{b}$, то $\mathtt{a} = \mathtt{b}$.

Следствие 3.1. Всеки затворен терм има най-много един тип.

[6, стр. 104]

Задача 3.1. Докажете или опровергайте дали е възможно да съществува типов контекст Γ и тип $\mathtt{a}$, такива че

$$\Gamma \vdash \mathtt{xx} \ : \ \mathtt{a}.$$

3.3 Операционна семантика с предаване на параметрите по име

За затворен терм τ : $\mathtt{a}$ и стойност $\mathtt{v}$: $\mathtt{a}$, дефинираме релацията $\tau \Downarrow^{\ell}_{\mathtt{a}} \mathtt{v}$ по следния начин.

Да напомним, че с $\mathtt{v}$ означаваме стойности, които биват или константи или затворени термове от вида $\lambda\, \mathtt{x} : \mathtt{a}\,.\,\mu$.

$$\frac{\mathtt{v} : \mathtt{a}}{\mathtt{v} \Downarrow^{0}_{\mathtt{a}} \mathtt{v}}\ (\text{val})$$

$$\frac{\tau_1 \Downarrow^{\ell_1}_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}_1 \qquad \tau_2 \Downarrow^{\ell_2}_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}_2 \qquad n = \mathtt{eq}(n_1, n_2)}{\tau_1 \texttt{ == } \tau_2 \Downarrow^{\ell_1+\ell_2+1}_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}}\ (\text{eq})$$

$$\frac{\tau_1 \Downarrow^{\ell_1}_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}_1 \qquad \tau_2 \Downarrow^{\ell_2}_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}_2 \qquad n = n_1 + n_2}{\tau_1 \texttt{ + } \tau_2 \Downarrow^{\ell_1+\ell_2+1}_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}}\ (\text{plus})$$

$$\frac{\tau_1 \Downarrow^{\ell_1}_{\mathtt{nat}} \mathtt{0} \qquad \tau_3 \Downarrow^{\ell_2}_{\mathtt{a}} \mathtt{v}}{\mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3 \Downarrow^{\ell_1+\ell_2+1}_{\mathtt{a}} \mathtt{v}}\ (\text{if}_0)$$

$$\frac{\tau_1 \Downarrow^{\ell_1}_{\mathtt{nat}} \mathtt{n} \qquad \tau_2 \Downarrow^{\ell_2}_{\mathtt{a}} \mathtt{v} \qquad \mathtt{n} \not\equiv \mathtt{0}}{\mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3 \Downarrow^{\ell_1+\ell_2+1}_{\mathtt{a}} \mathtt{v}}\ (\text{if}^+)$$

$$\frac{\tau_1 \Downarrow^{\ell_1}_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} \lambda\, \mathtt{x} : \mathtt{a}\,.\,\tau_1' \qquad \tau_1'[x/\tau_2] \Downarrow^{\ell_2}_{\mathtt{b}} \mathtt{v}}{\tau_1\tau_2 \Downarrow^{\ell_1+\ell_2+1}_{\mathtt{b}} \mathtt{v}}\ (\text{cbn})$$

$$\frac{\tau\, \mathtt{fix}(\tau) \Downarrow^{\ell}_{\mathtt{a}} \mathtt{v}}{\mathtt{fix}(\tau) \Downarrow^{\ell+1}_{\mathtt{a}} \mathtt{v}}\ (\text{fix})$$

- Ще пишем $\tau \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v}$, ако съществува ℓ, за което $\tau \Downarrow^{\ell}_{\mathtt{a}} \mathtt{v}$.
- Също така, ще пишем $\tau \not\Downarrow_{\mathtt{a}}$, ако не съществува стойност $\mathtt{v}$, за която $\tau \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v}$.

Лема 3.1. За произволен затворен терм τ и стойности $\mathtt{v}$ и $\mathtt{u}$,

$$\tau \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v} \,\&\, \tau \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{u} \implies \mathtt{v} \equiv \mathtt{u}.$$

Пример 3.1. Нека $\mathtt{a} = \mathtt{nat} \to (\mathtt{nat} \to \mathtt{nat})$ и

$\tau \equiv \mathtt{fix}(\lambda\, \mathtt{f} : \mathtt{a}\,.\,\lambda\, \mathtt{x} : \mathtt{nat}\,.\,\lambda\, \mathtt{y} : \mathtt{nat}\,.\,\mathtt{if}\ \mathtt{y}\ \texttt{==}\ \mathtt{0}\ \mathtt{then}\ \mathtt{0}\ \mathtt{else}\ \mathtt{x}\ \texttt{+ (f x (y-1))}).$

Лесно се вижда, че

$$\tau : \mathtt{nat} \to (\mathtt{nat} \to \mathtt{nat}).$$

Също така за всяко n и k, ако $m = n + k$, то

$$\tau\, \mathtt{n}\, \mathtt{k} \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{m}.$$

Нека сега

$\rho \equiv \lambda\, \mathtt{g} : \mathtt{a}\,.\,\mathtt{fix}(\lambda \mathtt{f} : \mathtt{nat} \to \mathtt{nat}\,.\,\lambda\, \mathtt{x} : \mathtt{nat}\,.\,\mathtt{if}\ \mathtt{x}\ \texttt{==}\ \mathtt{0}\ \mathtt{then}\ \mathtt{1}\ \mathtt{else}\ \mathtt{g}\ \texttt{x f(x-1)}).$

Лесно се вижда, че

$$\rho : \mathtt{a} \to (\mathtt{nat} \to \mathtt{nat}).$$

Също така, за всяко n, ако $k = n!$, то

$$\rho\, \tau\, \mathtt{n} \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{k}.$$

Можем да напишем директно горния пример и на хаскел:

```
> fix f = f (fix f)
> times = fix(\f x y -> if y == 0 then 0 else x + (f x (y-1)))
> times 2 3
6
> fct = \g -> fix(\f x -> if x == 0 then 1 else g x (f (x-1)))
> fact = fct times
> fact 5
120
```

3.4 Денотационна семантика с предаване на параметрите по име

Семантиката на всеки тип ще бъде област на Скот както следва:

$$[\![\mathtt{nat}]\!] \stackrel{\text{деф}}{=} \mathbb{N}_\perp$$
$$[\![\mathtt{a} \to \mathtt{b}]\!] \stackrel{\text{деф}}{=} [[\![\mathtt{a}]\!] \xrightarrow{\text{н}} [\![\mathtt{b}]\!]].$$

За един типов контекст Γ, дефинираме $[\![\Gamma]\!]$ по следния начин:

Да напомним, че

$$\emptyset_\perp = (\{\perp\}, \sqsubseteq, \perp).$$

- Ако $\Gamma = \emptyset$, то $[\![\Gamma]\!] = \emptyset_\perp$;
- Ако $\Gamma = \Gamma', \mathtt{x}:\mathtt{a}$, то $[\![\Gamma]\!] = [\![\Gamma']\!] \times [\![\mathtt{a}]\!]$.

От Раздел 1.2.2 знаем, че $[\![\Gamma]\!]$ е област на Скот.

Например, ако $\Gamma = \mathtt{x}_1 : \mathtt{a}_1,\ \mathtt{x}_2 : \mathtt{a}_2,\ \mathtt{x}_3 : \mathtt{a}_3$, то

$$[\![\Gamma]\!] = ([\![\mathtt{a}_1]\!] \times [\![\mathtt{a}_2]\!]) \times [\![\mathtt{a}_3]\!].$$

Сега трябва да дефинираме семантика на термовете. За всеки терм, за който $\mathtt{fv}(\tau) \subseteq \mathtt{dom}(\Gamma)$ и за произволни $\overline{u} \in [\![\Gamma]\!]$, дефинираме неговата стойност $[\![\tau]\!]_\Gamma(\overline{u})$ по следния начин:

- Нека $\tau \equiv \mathtt{n}$. Тогава
$$[\![\mathtt{n}]\!]_\Gamma(\overline{u}) \stackrel{\text{деф}}{=} n.$$
- Нека $\tau \equiv \mathtt{x}_i$. Тогава
$$[\![\mathtt{x}_i]\!]_\Gamma(\overline{u}) \stackrel{\text{деф}}{=} u_i.$$

За $\mathtt{plus}$ вижте Раздел 2.2.1.

- Нека $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2$. Тогава
$$[\![\tau_1 + \tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u}) \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{plus}([\![\tau_1]\!]_\Gamma(\overline{u}), [\![\tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u})).$$

За $\mathtt{eq}$ вижте Раздел 2.2.1.

- Нека $\tau \equiv \tau_1 \mathtt{==} \tau_2$. Тогава
$$[\![\tau_1 \mathtt{==} \tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u}) \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{eq}([\![\tau_1]\!]_\Gamma(\overline{u}), [\![\tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u})).$$

За $\mathtt{if}$ вижте *Дефиниция* 1.2.

- Нека $\tau \equiv \mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3$. Тогава
$$[\![\mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3]\!]_\Gamma(\overline{u}) \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{if}([\![\tau_1]\!]_\Gamma(\overline{u}), [\![\tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u}), [\![\tau_3]\!]_\Gamma(\overline{u})).$$

За $\mathtt{eval}$ вижте *Дефиниция* 1.3.

- Нека $\tau \equiv \tau_1\tau_2$. Тогава
$$[\![\tau_1\tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u}) \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{eval}([\![\tau_1]\!]_\Gamma(\overline{u}), [\![\tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u})).$$

За $\mathtt{lfp}$ вижте Раздел 1.5.

- Нека $\tau \equiv \mathtt{fix}(\tau')$. Тогава
$$[\![\mathtt{fix}(\tau')]\!]_\Gamma(\overline{u}) \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{lfp}([\![\tau']\!]_\Gamma(\overline{u})).$$

За $\mathtt{curry}$ вижте *Дефиниция* 1.4.

- Нека $\tau \equiv \lambda\,\mathtt{y} : \mathtt{b}\,.\,\tau'$, като $\mathtt{y} \notin \mathtt{dom}(\Gamma)$. Нека $\Gamma' \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma, \mathtt{y} : \mathtt{b}$. Тогава

$$[\![\lambda\,\mathtt{y} : \mathtt{b}\,.\,\tau']\!]_\Gamma(\overline{u}) \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{curry}([\![\tau']\!]_{\Gamma'})(\overline{u}).$$

Забележка 3.1. За $\Gamma = \emptyset$, ще пишем $[\![\tau]\!]$ вместо $[\![\tau]\!]_\emptyset$.

Не е ясно дали винаги горните дефиниции имат смисъл. Сега ще докажем, че винаги, когато един терм е добре типизиран, то горната дефиниция има смисъл.

Лема 3.2. Ако $\Gamma \vdash \tau : \mathtt{a}$, то $[\![\tau]\!]_\Gamma \in [[\![\Gamma]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{a}]\!]]$.

Доказателство. Доказателството протича с индукция по построението на термовете като съществено използваме *Твърдение* 1.10 според което, ако $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{B}]$ и $g \in [\mathcal{B} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$, то $g \circ f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$.

Изображението $f \times g$ е дефинирано в *Твърдение* 1.13.

- Нека $\tau \equiv \mathtt{n}$. Щом $\Gamma \vdash \tau : \mathtt{a}$, то по правилата за типизиране следва, че $\mathtt{a} = \mathtt{nat}$. Сега лесно се съобразява, че изображението $[\![\mathtt{n}]\!]_\Gamma \in [[\![\Gamma]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{nat}]\!]]$, където $[\![\mathtt{n}]\!]_\Gamma(\overline{u}) = n$. Това е така, защото за всяка верига $(\overline{u}_i)_{i=0}^\infty$ от елементи на $[\![\Gamma]\!]$,

$$[\![\mathtt{n}]\!]_\Gamma(\bigsqcup_i \overline{u}_i) = n = \bigsqcup_i \{[\![\mathtt{n}]\!](\overline{u}_i)\}.$$

- Нека $\tau \equiv \mathtt{x}_i$. Щом $\Gamma \vdash \tau : \mathtt{a}$, то по правилата за типизиране следва, че $\mathtt{a} = \mathtt{a}_i$. Сега лесно се съобразява, че изображението $[\![\mathtt{n}]\!]_\Gamma \in [[\![\Gamma]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{a}_i]\!]]$, където $[\![\mathtt{n}]\!]_\Gamma(\overline{u}) = u_i$. Това е така, защото за всяка верига $(\overline{u}_n)_{n=0}^\infty$ от елементи на $[\![\Gamma]\!]$,

$\overline{u}_k = (u_{1,k}, \dots, u_{n,k})$.

$$[\![\mathtt{x}_i]\!]_\Gamma(\bigsqcup_n \overline{u}_n) = \bigsqcup_n u_{i,n} = \bigsqcup_i \{[\![\mathtt{x}_i]\!](\overline{u}_n)\}.$$

- Нека $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2$. Щом $\Gamma \vdash \tau : \mathtt{a}$, то по правилата за типизиране следва, че $\mathtt{a} = \mathtt{nat}$, а също и $\Gamma \vdash \tau_1 : \mathtt{nat}$ и $\Gamma \vdash \tau_2 : \mathtt{nat}$. От И.П. имаме, че

$$[\![\tau_1]\!]_\Gamma \in [[\![\Gamma]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{nat}]\!]];$$
$$[\![\tau_2]\!]_\Gamma \in [[\![\Gamma]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{nat}]\!]].$$

Това означава, че $([\![\tau_1]\!] \times [\![\tau_2]\!]) \in [[\![\Gamma]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{nat}]\!] \times [\![\mathtt{nat}]\!]]$. Тогава имаме следното равенство

$$[\![\tau_1 + \tau_2]\!]_\Gamma = \mathtt{plus} \circ ([\![\tau_1]\!] \times [\![\tau_2]\!]) \in [[\![\Gamma]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{a}]\!]],$$

Използваме, че композиция на непрекъснати изображения е непрекъснато изображение.

защото за произволни $\overline{u} \in [\![\Gamma]\!]$,

$$\begin{aligned}(\mathtt{plus} \circ ([\![\tau_1]\!] \times [\![\tau_2]\!]))(\overline{u}) &= \mathtt{plus}(([\![\tau_1]\!] \times [\![\tau_2]\!])(\overline{u}))\\ &= \mathtt{plus}([\![\tau_1]\!]_\Gamma(\overline{u}), [\![\tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u}))\\ &\stackrel{\text{деф}}{=} [\![\tau]\!]_\Gamma(\overline{u}).\end{aligned}$$

- Нека $\tau \equiv \tau_1 == \tau_2$. Съобразете сами, че

$$[\![\tau_1 == \tau_2]\!]_\Gamma = \mathtt{eq} \circ ([\![\tau_1]\!]_\Gamma \times [\![\tau_2]\!]_\Gamma) \in [[\![\Gamma]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{a}]\!]].$$

- Нека $\tau \equiv \mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3$. Съобразете сами, че

$$[\![\mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3]\!]_\Gamma = \mathtt{if} \circ ([\![\tau_1]\!]_\Gamma \times [\![\tau_2]\!]_\Gamma \times [\![\tau_3]\!]_\Gamma) \in [[\![\Gamma]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{a}]\!]].$$

- Нека $\tau \equiv \tau_1\tau_2$. Щом $\Gamma \vdash \tau_1\tau_2 : \mathtt{a}$, то от правилата за типизиране следва, че

$$\begin{aligned}&\Gamma \vdash \tau_1 : \mathtt{b} \to \mathtt{a}\\ &\Gamma \vdash \tau_2 : \mathtt{b}.\end{aligned}$$

  От И.П. за τ_1 и τ_2 знаем, че

$$\begin{aligned}&[\![\tau_1]\!]_\Gamma \in [[\![\Gamma]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [[\![\mathtt{b}]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{a}]\!]]]\\ &[\![\tau_2]\!]_\Gamma \in [[\![\Gamma]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{b}]\!]]\end{aligned}$$

  Оттук получаваме, че за произволни $\overline{u} \in [\![\Gamma]\!]$,

$$\begin{aligned}&[\![\tau_1]\!]_\Gamma(\overline{u}) \in [[\![\mathtt{b}]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{a}]\!]]\\ &[\![\tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u}) \in [\![\mathtt{b}]\!].\end{aligned}$$

  Тогава

$$[\![\tau_1\tau_2]\!]_\Gamma = \mathtt{eval} \circ ([\![\tau_1]\!]_\Gamma \times [\![\tau_2]\!]_\Gamma) \in [[\![\Gamma]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{a}]\!]],$$

  защото за произволни $\overline{u} \in [\![\Gamma]\!]$,

$$\begin{aligned}(\mathtt{eval} \circ [\![\tau_1]\!]_\Gamma \times [\![\tau_2]\!]_\Gamma)(\overline{u}) &= \mathtt{eval}(([\![\tau_1]\!]_\Gamma \times [\![\tau_2]\!]_\Gamma)(\overline{u}))\\ &= \mathtt{eval}([\![\tau_1]\!]_\Gamma(\overline{u}), [\![\tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u}))\\ &\stackrel{\text{деф}}{=} [\![\tau_1\tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u}).\end{aligned}$$

- Нека сега $\tau \equiv \mathtt{fix}(\tau')$. Понеже $\Gamma \vdash \mathtt{fix}(\tau') : \mathtt{a}$, то от правилата за типизиране имаме, че $\Gamma \vdash \tau' : \mathtt{a} \to \mathtt{a}$. От И.П. знаем, че

$$[\![\tau']\!]_\Gamma \in [[\![\Gamma]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [[\![\mathtt{a}]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{a}]\!]]].$$

  Това означава, че за произволни $\overline{u} \in [\![\Gamma]\!]$,

$$[\![\tau']\!]_\Gamma(\overline{u}) \in [[\![\mathtt{a}]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{a}]\!]].$$

  Следователно $[\![\tau']\!]_\Gamma(\overline{u})$ е изображение, което според *Теорема* 1.6 притежава най-малка неподвижна точка. Тогава

  Непрекъснатото изображението Y е дефинирано *Теорема* 1.7.

$$[\![\mathtt{fix}(\tau')]\!]_\Gamma = Y \circ [\![\tau']\!]_\Gamma \in [[\![\Gamma]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{a}]\!]],$$

  защото за произволни $\overline{u} \in [\![\Gamma]\!]$,

$$\begin{aligned}(Y \circ [\![\tau']\!]_\Gamma)(\overline{u}) &= Y([\![\tau']\!]_\Gamma(\overline{u}))\\ &= \mathtt{lfp}([\![\tau']\!]_\Gamma(\overline{u}))\\ &\stackrel{\text{деф}}{=} [\![\mathtt{fix}(\tau')]\!]_\Gamma(\overline{u}).\end{aligned}$$

- Нека $\tau \equiv \lambda\, \mathtt{y} : \mathtt{b} \,.\, \tau'$, като $\mathtt{y} \notin \mathtt{dom}(\Gamma)$. Щом $\Gamma \vdash \lambda\, \mathtt{y} : \mathtt{b} \,.\, \tau' : \mathtt{a}$, то от правилата за типизиране следва, че $\mathtt{a} = \mathtt{b} \to \mathtt{c}$ и
$$\Gamma, \mathtt{y} : \mathtt{b} \vdash \tau' : \mathtt{c}.$$
Нека $\Gamma' = \Gamma, \mathtt{y} : \mathtt{b}$. Тогава $[\![\Gamma']\!] = [\![\Gamma]\!] \times [\![\mathtt{b}]\!]$, а от И.П. имаме, че
$$[\![\tau']\!]_{\Gamma'} \in [[\![\Gamma]\!] \times [\![\mathtt{b}]\!] \overset{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{c}]\!]].$$
Тогава от *Твърдение* 1.12 следва, че
$$[\![\lambda\, \mathtt{y} : \mathtt{b} \,.\, \tau]\!]_\Gamma \overset{\text{деф}}{=} \mathtt{curry}([\![\tau']\!]_{\Gamma'}) \in [[\![\Gamma]\!] \overset{\text{н}}{\to} [[\![\mathtt{b}]\!] \overset{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{c}]\!]]].$$

$\square$

Забележка 3.2. В случая $\Gamma = \emptyset$, формално погледнато, $[\![\tau]\!]_\emptyset \in [\emptyset_\perp \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$, за някоя област на Скот $\mathcal{A}$. Но ние знаем, че $[\emptyset_\perp \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \cong \mathcal{A}$. Следователно, можем да считаме, че $[\![\tau]\!] \in \mathcal{A}$. В противен случай, трябва винаги да пишем $[\![\tau]\!](\perp)(a)$ вместо $[\![\tau]\!](a)$.

Твърдение 3.3. Нека имаме следните типови контексти:

Ясно е, че това твърдение се обобщава за произволна пермутация на индекстите $1, \ldots, n$.

$$\Gamma = \mathtt{x}_1 : \mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{x}_i : \mathtt{a}_i, \ldots, \mathtt{x}_j : \mathtt{a}_j, \ldots, \mathtt{x}_n : \mathtt{a}_n;$$
$$\Delta = \mathtt{x}_1 : \mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{x}_j : \mathtt{a}_j, \ldots, \mathtt{x}_i : \mathtt{a}_i, \ldots, \mathtt{x}_n : \mathtt{a}_n,$$

т.е. Δ се получава от Γ като разменим местата на i-тата и j-тата двойка. Тогава за всеки терм τ, такъв че $\Gamma \vdash \tau : \mathtt{a}$, е изпълнено, че за всеки $(u_1, \ldots, u_n) \in [\![\Gamma]\!]$,
$$[\![\tau]\!]_\Gamma(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = [\![\tau]\!]_\Delta(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n).$$

Упътване. Индукция по построението на терма τ. $\square$

Лема 3.3 (Лема за замяната)**.** Нека Γ е типов контекст, τ и ρ са термове, и
$$\Gamma \vdash \rho : \mathtt{a}$$
$$\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a} \vdash \tau : \mathtt{b}.$$
Тогава

1) $\Gamma \vdash \tau[\mathtt{x}/\rho] : \mathtt{b}$;

2) за всяко $\overline{u} \in [\![\Gamma]\!]$,
$$[\![\tau[\mathtt{x}/\rho]]\!]_\Gamma(\overline{u}) = [\![\tau]\!]_{\Gamma'}(\overline{u}, [\![\rho]\!]_\Gamma(\overline{u})),$$
където $\Gamma' = \Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a}$.

Защо да не взема ρ да бъде затворен терм ?

Доказателство. Индукция по построението на термовете.

- Нека $\tau \equiv \mathtt{x}_i$, където $\mathtt{x}_i \not\equiv \mathtt{x}$.
- Нека $\tau \equiv \mathtt{x}$.
- Нека $\tau \equiv \mathtt{n}$.
- Нека $\tau \equiv \mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3$.
- Нека $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2$.
- Нека $\tau \equiv \tau_1 \mathtt{==} \tau_2$.
- Нека $\tau \equiv \tau_1\tau_2$. Тук първата част е лесна. Понеже имаме, че

$$\frac{\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a} \vdash \tau_1 : \mathtt{c} \to \mathtt{b} \qquad \Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a} \vdash \tau_2 : \mathtt{c}}{\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a} \vdash \tau_1\tau_2 : \mathtt{b}}$$

то можем да приложим И.П. за да получим, че

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \rho : \mathtt{a} \qquad \Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a} \vdash \tau_1 : \mathtt{c} \to \mathtt{b}}{\Gamma \vdash \tau_1[\mathtt{x}/\rho] : \mathtt{b}}\,(\text{И.П.}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \rho : \mathtt{a} \qquad \Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a} \vdash \tau_2 : \mathtt{c} \to \mathtt{b}}{\Gamma \vdash \tau_2[\mathtt{x}/\rho] : \mathtt{c}}\,(\text{И.П.})}{\dfrac{\Gamma \vdash \tau_1[\mathtt{x}/\rho](\tau_2[\mathtt{x}/\rho]) : \mathtt{c}}{\Gamma \vdash \tau[\mathtt{x}/\rho] : \mathtt{c}}\,(\text{правила на замяна})}\,(\text{app})$$

Втората част също е лесна.

$$\begin{aligned}
\llbracket\tau_1\tau_2\rrbracket_{\Gamma'}(\overline{u}, \llbracket\rho\rrbracket_\Gamma(\overline{u})) &\stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{eval}(\llbracket\tau_1\rrbracket_{\Gamma'}(\overline{u}, \llbracket\rho\rrbracket_\Gamma(\overline{u})), \llbracket\tau_2\rrbracket_{\Gamma'}(\overline{u}, \llbracket\rho\rrbracket_\Gamma(\overline{u}))) && \text{// \textit{Дефиниция} 1.3}\\
&= \mathtt{eval}(\llbracket\tau_1[\mathtt{x}/\rho]\rrbracket_\Gamma(\overline{u}), \llbracket\tau_2[\mathtt{x}/\rho]\rrbracket_\Gamma(\overline{u})) && \text{// И.П.}\\
&= \llbracket\tau_1[\mathtt{x}/\rho](\tau_2[\mathtt{x}/\rho])\rrbracket_\Gamma(\overline{u})\\
&= \llbracket\tau[\mathtt{x}/\rho]\rrbracket_\Gamma(\overline{u})
\end{aligned}$$

- Нека $\tau \equiv \mathtt{fix}(\tau')$. Първо трябва да докажем, че $\Gamma \vdash \tau[\mathtt{x}/\rho] : \mathtt{b}$. От правилата за типизиране е ясно, че

$$\frac{\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a} \vdash \tau' : \mathtt{b} \to \mathtt{b}}{\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a} \vdash \mathtt{fix}(\tau') : \mathtt{b}}\,(\text{fix})$$

Сега можем да приложим И.П. за терма τ'. Получаваме, че

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \rho : \mathtt{a} \qquad \Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a} \vdash \tau' : \mathtt{b} \to \mathtt{b}}{\Gamma \vdash \tau'[\mathtt{x}/\rho] : \mathtt{b} \to \mathtt{b}}\,(\text{И.П.})}{\Gamma \vdash \mathtt{fix}(\tau'[\mathtt{x}/\rho]) : \mathtt{b}}\,(\text{fix})$$

Понеже $\mathtt{fix}(\tau'[\mathtt{x}/\rho]) \equiv \mathtt{fix}(\tau')[\mathtt{x}/\rho]$, то заключаваме, че

$$\Gamma \vdash \tau[\mathtt{x}/\rho] : \mathtt{b}.$$

Тук е важно, че $[\![\Delta]\!] = [\![\Gamma]\!] \times [\![\mathtt{a}_n]\!]$

- Нека $\tau \equiv \lambda\,\mathtt{y} : \mathtt{c}\,.\,\tau'$, където $\mathtt{y} \notin \mathtt{dom}(\Gamma) \cup \{\mathtt{x}\}$. Първо трябва да докажем, че $\Gamma \vdash \tau[\mathtt{x}/\rho] : \mathtt{b}$.

  От правилата за типизиране е ясно, че щом $\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a} \vdash \tau : \mathtt{b}$, то $\mathtt{b} = \mathtt{c} \to \mathtt{d}$ за някой тип $\mathtt{d}$ и

$$\dfrac{\mathtt{y} \notin \mathtt{dom}(\Gamma) \cup \{\mathtt{x}\} \qquad \Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a}, \mathtt{y} : \mathtt{c} \vdash \tau' : \mathtt{d}}{\Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a} \vdash \lambda\,\mathtt{y} : \mathtt{c}\,.\,\tau' : \mathtt{c} \to \mathtt{d}}\ \text{(lambda)}$$

  Това означава, че можем да използваме И.П. за терма τ' и така получаваме, че

$$\dfrac{\mathtt{y} \notin \mathtt{dom}(\Gamma) \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \rho : \mathtt{a}}{\Gamma, \mathtt{y} : \mathtt{c} \vdash \rho : \mathtt{a}} \qquad \Gamma, \mathtt{y} : \mathtt{c}, \mathtt{x} : \mathtt{a} \vdash \tau' : \mathtt{d}}{\Gamma, \mathtt{y} : \mathtt{c} \vdash \tau'[\mathtt{x}/\rho] : \mathtt{d}}\ \text{(И.П.)}}{\Gamma \vdash \lambda\,\mathtt{y} : \mathtt{c}\,.\,\tau'[\mathtt{x}/\rho] : \mathtt{c} \to \mathtt{d}}\ \text{(lambda)}$$

  Накрая, понеже $\tau[\mathtt{x}/\rho] \equiv \lambda\,\mathtt{y} : \mathtt{c}\,.\,\tau'[\mathtt{x}/\rho]$, то заключаваме, че

$$\Gamma \vdash \tau[\mathtt{x}/\rho] : \mathtt{b}.$$

  Нека $\Delta \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma, \mathtt{y} : \mathtt{c}$. Понеже имаме, че $\Delta \vdash \tau'[\mathtt{x}/\rho] : \mathtt{d}$, то можем да приложим И.П. за τ' и така получаваме, че за всяко $\overline{u}, v \in [\![\Delta]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathtt{curry}([\![\tau'[\mathtt{x}/\rho]]\!]_\Delta)(\overline{u})(v) &\stackrel{\text{деф}}{=} [\![\tau'[\mathtt{x}/\rho]]\!]_\Delta(\overline{u}, v) && \textit{// Дефиниция 1.4}\\
&\stackrel{\text{И.П.}}{=} [\![\tau']\!]_{\Delta'}(\overline{u}, v, [\![\rho]\!]_\Delta(\overline{u}, v)) && \text{// } \Delta' \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma, \mathtt{y} : \mathtt{c}, \mathtt{x} : \mathtt{a}\\
&= [\![\tau']\!]_{\Delta'}(\overline{u}, v, [\![\rho]\!]_\Gamma(\overline{u})) && \text{// } \mathtt{fv}(\rho) \subseteq \mathtt{dom}(\Gamma)\\
&= [\![\tau']\!]_{\Delta''}(\overline{u}, [\![\rho]\!]_\Gamma(\overline{u}), v) && \text{// } \Delta'' \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a}, \mathtt{y} : \mathtt{c}\\
&= \mathtt{curry}([\![\tau']\!]_{\Delta''})(\overline{u}, [\![\rho]\!]_\Gamma(\overline{u}))(v)\\
&= [\![\lambda\,\mathtt{y} : \mathtt{c}\,.\,\tau']\!]_{\Gamma'}(\overline{u}, [\![\rho]\!]_\Gamma(\overline{u}))(v). && \text{// } \Gamma' \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma, \mathtt{x} : \mathtt{a}
\end{aligned}$$

  Така получихме, че

$$\begin{aligned}
[\![\lambda\,\mathtt{y} : \mathtt{c}\,.\,\tau'[\mathtt{x}/\rho]]\!]_\Gamma(\overline{u}) &\stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{curry}([\![\tau'[\mathtt{x}/\rho]]\!]_\Delta)(\overline{u})\\
&= [\![\lambda\,\mathtt{y} : \mathtt{c}\,.\,\tau']\!]_{\Gamma'}(\overline{u}, [\![\rho]\!]_\Gamma(\overline{u})).
\end{aligned}$$

$\square$

3.5 Коректност

Понеже вече имаме дефинирани операционна и денотационна семантика на термовете, следващата стъпка е да разгледаме каква е връзката между тях. В този раздел ще докажем едната (по-лесната) посока.

Теорема 3.1 (Теорема за коректност). За всеки затворен терм $\tau : \mathtt{b}$ и стойност $\mathtt{v}$, е изпълнено:

$$\tau \Downarrow_{\mathtt{b}} \mathtt{v} \implies [\![\tau]\!] = [\![\mathtt{v}]\!] \in [\![\mathtt{b}]\!].$$

Доказателство. Индукция по дължината ℓ на извода $\Downarrow^{\ell}_{\mathtt{b}}$ за всеки тип $\mathtt{b}$. Нека $\ell = 0$. Имаме два случая.

- Нека $\tau \equiv \mathtt{n}$. Ясно е, че $\mathtt{b} = \mathtt{nat}$ и от правилата на операционната семантика имаме, че:

$$\frac{}{\tau \Downarrow^{0}_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}}\,\text{(val)}$$

  От дефиницията на семантика на терм, директно получаваме, че $[\![\tau]\!] = n = [\![\mathtt{n}]\!]$.

- Нека $\tau \equiv \lambda\, \mathtt{x} : \mathtt{c} \,.\, \tau'$. Тогава $\mathtt{b} = \mathtt{a} \to \mathtt{c}$ и от правилата на операционната семантика имаме, че:

$$\frac{}{\tau \Downarrow^{0}_{\mathtt{a}\to\mathtt{c}} \tau}\,\text{(val)}$$

  Ясно е, че $[\![\tau]\!] = [\![\tau]\!] \in [\![b]\!]$.

Така доказахме, че

$$\tau \Downarrow^{0}_{\mathtt{b}} \mathtt{v} \implies [\![\tau]\!] = [\![\mathtt{v}]\!] \in [\![\mathtt{b}]\!].$$

Нека сега $\ell > 0$ и да приемем, че имаме следното индукционно предположение:

$$\tau \Downarrow^{<\ell}_{\mathtt{b}} \mathtt{v} \implies [\![\tau]\!] = [\![\mathtt{v}]\!] \in [\![\mathtt{b}]\!].$$

Ще докажем, че

$$\tau \Downarrow^{\ell}_{\mathtt{b}} \mathtt{v} \implies [\![\tau]\!] = [\![\mathtt{v}]\!] \in [\![\mathtt{b}]\!].$$

- Нека $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2$. Тогава от правилата на операционната семантика имаме, че:

$$\frac{\tau_1 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}_1 \qquad \tau_2 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}_2}{\tau_1 + \tau_2 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n},}\,\text{(plus)}$$

където $n = n_1 + n_2$. От И.П. получаваме, че

$$\begin{aligned}
[\![\tau_1]\!] &= [\![\mathtt{n}_1]\!] = n_1 \\
[\![\tau_2]\!] &= [\![\mathtt{n}_2]\!] = n_2.
\end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned}
[\![\tau_1 + \tau_2]\!] &= \mathtt{plus}([\![\tau_1]\!], [\![\tau_2]\!]) && \text{// от деф.} \\
&= n_1 + n_2 && \text{// от И.П.} \\
&= n.
\end{aligned}$$

- Случаят $\tau \equiv \tau_1 \mathtt{==} \tau_2$ е аналогичен.
- Нека $\tau \equiv \mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3$. Тогава от правилата на операционната семантика имаме, че:

$$\frac{\tau_1 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}_1 \qquad \tau_2 \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v}_2}{\mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3 \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v}_2,}\ (\mathrm{if}^+)$$

където $n_1 > 0$. Тогава от И.П. получаваме, че:

$$\begin{aligned}
[\![\tau_1]\!] &= n_1 \\
[\![\tau_2]\!] &= [\![\mathtt{v}_2]\!].
\end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned}
[\![\mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3]\!] &= \mathtt{if}([\![\tau_1]\!], [\![\tau_2]\!], [\![\tau_3]\!]) \\
&= \mathtt{if}(n_1, [\![\tau_2]\!], [\![\tau_3]\!]) && \text{// от И.П.} \\
&= [\![\tau_2]\!] && \text{// от деф. на } \mathtt{if} \\
&= [\![\mathtt{v}_2]\!]. && \text{// от И.П.}
\end{aligned}$$

Случаят, когато $n_1 = 0$ е аналогичен.

- Нека $\tau \equiv \tau_1\tau_2$. Тогава от правилата на операционната семантика имаме, че:

$$\frac{\tau_1 \Downarrow_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} \lambda\,\mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\,.\,\tau_1' \qquad \tau_1'[x/\tau_2] \Downarrow_{\mathtt{b}} \mathtt{v}}{\tau_1\tau_2 \Downarrow_{\mathtt{b}} \mathtt{v}}\ (\mathrm{cbn})$$

Тогава от И.П. получаваме, че:

$$\begin{aligned}
[\![\tau_1]\!] &= [\![\lambda\,\mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\,.\,\tau_1']\!] \in [[\![\mathtt{a}]\!] \xrightarrow{\text{н}} [\![\mathtt{b}]\!]] \\
[\![\tau_1'[\mathtt{x}/\tau_2]]\!] &= [\![\mathtt{v}]\!] \in [\![\mathtt{b}]\!].
\end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned}
[\![\tau_1\tau_2]\!] &= \mathtt{eval}([\![\tau_1]\!], [\![\tau_2]\!]) && \text{// от деф.} \\
&= [\![\tau_1]\!]([\![\tau_2]\!]) && \text{// } [\![\tau_1]\!] \in [[\![\mathtt{a}]\!] \xrightarrow{\text{н}} [\![\mathtt{b}]\!]] \\
&= [\![\lambda\,\mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\,.\,\tau_1']\!]([\![\tau_2]\!]) && \text{// от И.П.} \\
&= [\![\tau_1']\!]_\Gamma([\![\tau_2]\!]) && \text{// } \Gamma \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{x}\ :\ \mathtt{a} \\
&= [\![\tau_1'[\mathtt{x}/\tau_2]]\!] && \text{// от Лема за замяната} \\
&= [\![\mathtt{v}]\!] && \text{// от И.П.}
\end{aligned}$$

- Нека $\tau \equiv \texttt{fix}(\tau')$. Тогава от правилата на операционната семантика имаме, че:

$$\frac{\tau'\,\texttt{fix}(\tau') \Downarrow_{\texttt{a}} \texttt{v}}{\texttt{fix}(\tau') \Downarrow_{\texttt{a}} \texttt{v}}\ \text{(fix)}$$

  Тогава от И.П. имаме, че:

$$[\![\tau'\,\texttt{fix}(\tau')]\!] = [\![\texttt{v}]\!].$$

  Тогава

$$\begin{aligned}
[\![\tau]\!] &= \texttt{lfp}([\![\tau']\!]) \\
&= [\![\tau']\!](\texttt{lfp}([\![\tau']\!])) \\
&= [\![\tau']\!]([\![\texttt{fix}(\tau')]\!]) \\
&= [\![\tau'\texttt{fix}(\tau')]\!] \\
&= [\![\texttt{v}]\!]. && \text{// от И.П.}
\end{aligned}$$

$\square$

3.6 Адекватност

Adequacy ???

Нашата цел в този раздел е да докажем следната теорема.

Теорема 3.2 (Теорема за адекватност). За всеки затворен терм $\tau : \mathtt{nat}$,

$$[\![\tau]\!] = n \neq \bot \implies \tau \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}.$$

Тук n е число, а $\mathtt{n}$ е константа.

Оказва се, че доказателството на тази теорема не е леко. Ще започнем като дефинираме за всеки тип $\mathtt{a}$ релацията $\lhd_{\mathtt{a}} \subseteq [\![\mathtt{a}]\!] \times \mathrm{PCF}_{\mathtt{a}}$ с индукция по построението на типовете.

Съобразете, че теоремата за адекватност на практика гласи, че $[\![\tau]\!] \lhd_{\mathtt{nat}} \tau$.

- Нека $\mathtt{a} = \mathtt{nat}$. Тогава дефинираме

$$n \lhd_{\mathtt{nat}} \tau \iff (n \neq \bot^{[\![\mathtt{nat}]\!]} \implies \tau \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}).$$

- Нека $\mathtt{a} = \mathtt{b} \to \mathtt{c}$. Тогава дефинираме

$$f \lhd_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}} \tau \iff (\forall e \in [\![\mathtt{b}]\!])(\forall \mu \in \mathrm{PCF}_{\mathtt{b}})[\, e \lhd_{\mathtt{b}} \mu \implies f(e) \lhd_{\mathtt{c}} \tau(\mu)\,].$$

- Нека $\Gamma = \mathtt{x}_1 : \mathtt{a}_1, \dots, \mathtt{x}_n : \mathtt{a}_n$. Тогава дефинираме

$$(u_1, \dots, u_n) \lhd_{\Gamma} (\tau_1, \dots, \tau_n) \iff u_1 \lhd_{\mathtt{a}_1} \tau_1 \,\&\, \cdots \,\&\, u_n \lhd_{\mathtt{a}_n} \tau_n.$$

[4, стр. 197]

Лема 3.4. Нека $\tau : \mathtt{a}$. Тогава:

1) $\bot^{[\![\mathtt{a}]\!]} \lhd_{\mathtt{a}} \tau$;

2) $D = \{d \in [\![\mathtt{a}]\!] \mid d \lhd_{\mathtt{a}} \tau\}$ е непрекъснато свойство в областта на Скот $[\![\mathtt{a}]\!]$;

Не ми трябва $u \sqsubseteq d$.

3) Ако $d \lhd_{\mathtt{a}} \tau$ и $(\forall \mathtt{v})[\tau \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v} \implies \rho \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v}]$, то $d \lhd_{\mathtt{a}} \rho$.

Доказателство. Индукция по построението на типовете $\mathtt{a}$. Първо, нека $\mathtt{a} = \mathtt{nat}$ и да фиксираме произволен терм $\tau : \mathtt{nat}$.

Да напомним, че $[\![\mathtt{nat}]\!] \stackrel{\text{деф}}{=} \mathbb{N}_\bot$.

1) По тривиални съображения имаме, че

$$\bot^{[\![\mathtt{nat}]\!]} \lhd_{\mathtt{nat}} \tau.$$

2) Нека $(d_i)_{i=0}^{\infty}$ е верига от елементи на $\mathbb{N}_\bot$ и за всяко i, $d_i \lhd_{\mathtt{nat}} \tau$. Ако за всяко i, $d_i = \bot$, то $\bigsqcup_i d_i = \bot^{[\![\mathtt{nat}]\!]}$ и следователно $\bigsqcup_i d_i \lhd_{\mathtt{nat}} \tau$. Ако съществува i_0, за което $d_{i_0} = n \neq \bot$, то е ясно, че за всяко $i > i_0$, $d_i = n$. Оттук следва, че $\bigsqcup_i d_i = n = d_{i_0}$. Понеже $d_{i_0} \lhd_{\mathtt{nat}} \tau$, то директно следва, че $\bigsqcup_i d_i \lhd_{\mathtt{nat}} \tau$.

3) Нека $d \lhd_{\mathtt{nat}} \tau$ и $(\forall \mathtt{v})[\tau \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{v} \implies \rho \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{v}]$. Понеже $\sqsubseteq$ е плоската наредба в $\mathbb{N}_\bot$, то имаме два случая. Ако $d = \bot^{[\![\mathtt{nat}]\!]}$, то е ясно от 1), че $d \lhd_{\mathtt{nat}} \rho$. Нека сега $d \neq \bot^{[\![\mathtt{nat}]\!]}$. Понеже $d \lhd_{\mathtt{nat}} \tau$, то $\tau \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{d}$. Оттук следва, че $\rho \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{d}$. Заключаваме, че $d \lhd_{\mathtt{nat}} \rho$.

Второ, ека $\mathtt{a} = \mathtt{b} \to \mathtt{c}$ и да фиксираме произволен терм $\tau : \mathtt{b} \to \mathtt{c}$.

Да напомним, че

$$[\![\mathtt{b} \to \mathtt{c}]\!] \stackrel{\text{деф}}{=} [[\![\mathtt{b}]\!] \xrightarrow{\text{н}} [\![\mathtt{c}]\!]].$$

1) Тук имаме, че $\perp^{[\![\mathtt{a}]\!]} \in [[\![\mathtt{b}]\!] \xrightarrow{\text{н}} [\![\mathtt{c}]\!]]$ е изображение, за което $\perp^{[\![\mathtt{a}]\!]}(e) = \perp^{[\![\mathtt{c}]\!]}$ за всеки елемент $e \in [\![\mathtt{b}]\!]$. Нека $e \lhd_{\mathtt{b}} \mu$, където $\mu : \mathtt{b}$. От правилата за типизиране е ясно, че $\tau(\mu) : \mathtt{c}$. Сега от И.П. е ясно, че $\perp^{[\![\mathtt{a}]\!]}(e) = \perp^{[\![\mathtt{c}]\!]} \lhd_{\mathtt{c}} \tau(\mu)$.

2) Нека $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ е верига от елементи на $[[\![\mathtt{b}]\!] \xrightarrow{\text{н}} [\![\mathtt{c}]\!]]$, за които е изпълнено, че $f_i \lhd_{\mathtt{a}} \tau$. Трябва да докажем, че $\bigsqcup_i f_i \lhd_{\mathtt{a}} \tau$, т.е. за произволни $e \in [\![\mathtt{b}]\!]$ и произволни $\mu : \mathtt{b}$, за които $e \lhd_{\mathtt{b}} \mu$, то $(\bigsqcup_i f)(e) \lhd_{\mathtt{c}} \tau(\mu)$. Но ние знаем, че $(\bigsqcup_i f)(e) = \bigsqcup_i \{f_i(e)\}$. Щом $f_i \lhd_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}} \tau$, то за разглежданите e и μ имаме, че $f_i(e) \lhd_{\mathtt{c}} \tau(\mu)$. Ние знаем, че $(f_i(e))_{i=0}^{\infty}$ е верига и от И.П. следва, че $\bigsqcup_i \{f_i(e)\} \lhd_{\mathtt{c}} \tau(\mu)$.

3) Нека $f \lhd_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}} \tau$ и $\tau \Downarrow_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}} \mathtt{v} \implies \rho \Downarrow_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}} \mathtt{v}$. Ще докажем, че $f \lhd_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}} \rho$. За целта, нека $e \in [\![\mathtt{b}]\!]$, $\mu : \mathtt{b}$ и $e \lhd_{\mathtt{b}} \mu$. Ще докажем, че $f(e) \lhd_{\mathtt{c}} \rho(\mu)$. За момента знаем само, че $f(e) \lhd_{\mathtt{c}} \tau(\mu)$. Понеже имаме следното правило в операционната семантика:

Имаме по условие, че

$$\tau \Downarrow_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}} \mathtt{v} \implies \rho \Downarrow_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}} \mathtt{v},$$

а тук $\mathtt{v} \equiv \lambda\, \mathtt{x} : \mathtt{b}\,.\, \tau'$.

$$\frac{\tau \Downarrow_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}} \lambda\, \mathtt{x} : \mathtt{b}\,.\, \tau' \qquad \tau'[\mathtt{x}/\mu] \Downarrow_{\mathtt{c}} \mathtt{v}'}{\tau(\mu) \Downarrow_{\mathtt{c}} \mathtt{v}'}\ \text{(app)}$$

то получаваме, че

$$\frac{\rho \Downarrow_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}} \lambda\, \mathtt{x} : \mathtt{b}\,.\, \tau' \qquad \tau'[\mathtt{x}/\mu] \Downarrow_{\mathtt{c}} \mathtt{v}'}{\rho(\mu) \Downarrow_{\mathtt{c}} \mathtt{v}'}\ \text{(app)}$$

Оттук следва, че

$$(\forall \mathtt{v}')[\tau(\mu) \Downarrow_{\mathtt{c}} \mathtt{v}' \implies \rho(\mu) \Downarrow_{\mathtt{c}} \mathtt{v}'].$$

Сега от И.П. директно следва, че $f(e) \lhd_{\mathtt{c}} \rho(\mu)$.

□

За да докажем, че $[\![\tau]\!] \lhd_{\mathtt{nat}} \tau$, то трябва да докажем, че за всеки тип $\mathtt{a}$ и всеки $\tau \in \mathtt{PCF}_{\mathtt{a}}$ $[\![\tau]\!] \lhd_{\mathtt{a}} \tau$ с индукция по построението на термовете. Тук обаче имаме проблем. Ако $\tau \equiv \lambda\, \mathtt{y} : \mathtt{b}\,.\, \tau_1$, то трябва да използваме индукционно предположение за τ_1, в който вече има свободна променлива $\mathtt{y}$. Поради тази причина, ние трябва да разгледаме едно по-общо твърдение.

Лема 3.5 (Фундаментално свойство на $\lhd_{\mathtt{a}}$). Нека $\Gamma = \mathtt{x}_1 : \mathtt{a}_1, \dots, \mathtt{x}_n : \mathtt{a}_n$. Тогава

$$\frac{\Gamma \vdash \tau : \mathtt{a} \qquad (u_1, \dots, u_n) \lhd_{\Gamma} (\mu_1, \dots, \mu_n)}{[\![\tau]\!]_{\Gamma}(\overline{u}) \lhd_{\mathtt{a}} \tau[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]}$$

Доказателство. Индукция по построението на термовете.

- Нека $\tau \equiv \mathtt{n}$. Тук директно от дефиницията на релацията $\lhd_{\mathtt{nat}}$ имаме, че

$$n \lhd_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}.$$

- Нека $\tau \equiv \mathtt{x}_i$. Този случай също е много лесен. Имаме, че $\tau[\overline{x}/\overline{\mu}] \equiv \mu_i$ и $[\![\tau]\!]_\Gamma(\overline{u}) = u_i$. Тогава, понеже $(u_1, \ldots, u_n) \lhd_\Gamma (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, то директно получаваме, че

$$[\![\tau]\!]_\Gamma(\overline{u}) \lhd_{\mathtt{a}} \tau[\overline{x}/\overline{\mu}].$$

- Нека $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2$. Тогава $\mathtt{a} = \mathtt{nat}$. Имаме също, че

$$\begin{aligned} &\tau[\overline{x}/\overline{\mu}] \equiv \tau_1[\overline{x}/\overline{\mu}] + \tau_2[\overline{x}/\overline{\mu}]; \\ &[\![\tau]\!]_\Gamma(\overline{u}) = \mathtt{plus}(\underbrace{[\![\tau_1]\!]_\Gamma(\overline{u})}_{n_1}, \underbrace{[\![\tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u})}_{n_2}) = n. \end{aligned}$$

  Можем да приемем, че $n \neq \bot$, защото в противен случай този случай е тривиален заради дефиницията на $\lhd_{\mathtt{nat}}$. От И.П. имаме, че $[\![\tau_1]\!]_\Gamma(\overline{u}) \lhd_{\mathtt{nat}} \tau_1[\overline{x}/\overline{\mu}]$ и $[\![\tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u}) \lhd_{\mathtt{nat}} \tau_2[\overline{x}/\overline{\mu}]$. Това означава, че $\tau_1[\overline{x}/\overline{\mu}] \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}_1$ и $\tau_2[\overline{x}/\overline{\mu}] \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}_2$. От правилата на операционната семантика е ясно, че $\tau[\overline{x}/\overline{\mu}] \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}$ и следователно

$$[\![\tau]\!]_\Gamma(\overline{u}) \lhd_{\mathtt{a}} \tau[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}].$$

- Нека $\tau \equiv \tau_1 \mathtt{==} \tau_2$.

- Нека $\tau \equiv \mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3$.

- Нека $\tau \equiv \tau_1\tau_2$. От правилата за типизиране имаме, че

$$\frac{\Gamma \vdash \tau_1 : \mathtt{b} \to \mathtt{a} \qquad \Gamma \vdash \tau_2 : \mathtt{b}}{\Gamma \vdash \tau_1\tau_2 : \mathtt{a}}$$

  Да напомним, че

$$[\![\tau_1\tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u}) \overset{\text{деф}}{=} \mathtt{eval}([\![\tau_1]\!]_\Gamma(\overline{u}), [\![\tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u})).$$

  От И.П. имаме следното:

$$\begin{aligned} &[\![\tau_1]\!]_\Gamma(\overline{u}) \lhd_{\mathtt{b}\to\mathtt{a}} \tau_1[\overline{x}/\overline{\mu}]; \\ &[\![\tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u}) \lhd_{\mathtt{b}} \tau_2[\overline{x}/\overline{\mu}]. \end{aligned}$$

  Тогава директно следва, че

$$\mathtt{eval}([\![\tau_1]\!]_\Gamma(\overline{u}), [\![\tau_2]\!]_\Gamma(\overline{u})) \lhd_{\mathtt{a}} \tau_1[\overline{x}/\overline{\mu}](\tau_2[\overline{x}/\overline{\mu}])$$

- Нека $\tau = \lambda\, \mathtt{y} : \mathtt{b}\,.\, \tau'$. Тогава от правилата за типизиране следва, че $\mathtt{a} = \mathtt{b} \to \mathtt{c}$ и $\Gamma' \vdash \tau' : \mathtt{c}$, където $\Gamma' = \Gamma, \mathtt{y} : \mathtt{b}$. Да напомним, че

$$[\![\tau]\!]_\Gamma(\overline{u}) \overset{\text{деф}}{=} \mathtt{curry}([\![\tau']\!]_{\Gamma'})(\overline{u}) \in [[\![\mathtt{b}]\!] \overset{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{c}]\!]].$$

  Да положим $f \overset{\text{деф}}{=} [\![\tau]\!]_\Gamma(\overline{u})$. Тогава $f(e) = [\![\tau']\!](\overline{u}, e)$.

  Трябва да докажем, че $f \lhd_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}} \tau[\overline{x}/\overline{\mu}]$. Това означава, че за произволни $e \in [\![\mathtt{b}]\!]$ и $\rho : \mathtt{b}$, за които $e \lhd_{\mathtt{b}} \rho$, трябва да докажем, че $f(e) \lhd_{\mathtt{c}} \tau[\overline{x}/\overline{\mu}](\rho)$. Имаме, че

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma' \vdash \tau' : \mathtt{c} \qquad (u_1, \dots, u_n, e) \lhd_{\Gamma'} (\mu_1, \dots, \mu_n, \rho)}{[\![\tau']\!](\overline{u}, e) \lhd_{\mathtt{c}} \tau'[\overline{x}/\overline{\mu}][y/\rho]}\ (\text{И.П.})}{f(e) \lhd_{\mathtt{c}} \tau'[\overline{x}/\overline{\mu}][y/\rho]}$$

От правилата на операционната семантика имаме следното:

$$\cfrac{\cfrac{\emptyset \vdash \rho : \mathtt{b} \qquad \tau'[\overline{x}/\overline{\mu}][y/\rho] \Downarrow_{\mathtt{c}} \mathtt{v}}{(\lambda\, \mathtt{y}\ :\ \mathtt{b}\,.\, \tau'[\overline{x}/\overline{\mu}])(\rho) \Downarrow_{\mathtt{c}} \mathtt{v}}}{\tau[\overline{x}/\overline{\mu}](\rho) \Downarrow_{\mathtt{c}} \mathtt{v}}$$

От 3) на *Лема* 3.4 веднага заключаваме, че $f(e) \lhd_{\mathtt{c}} \tau[\overline{x}/\overline{\mu}](\rho)$.

- Нека $\tau \equiv \mathtt{fix}(\tau')$. Тогава от правилата за типизиране имаме, че $\Gamma \vdash \tau' : \mathtt{a} \to \mathtt{a}$. От И.П., приложено за τ', имаме, че

$$[\![\tau']\!](\overline{u}) \lhd_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} \tau'[\overline{x}/\overline{\mu}].$$

Нека за улеснение да положим $f \stackrel{\text{деф}}{=} [\![\tau']\!](\overline{u}) \in [[\![\mathtt{a}]\!] \stackrel{\text{н}}{\to} [\![\mathtt{a}]\!]]$. Да напомним, че

$$[\![\mathtt{fix}(\tau')]\!]_{\Gamma}(\overline{u}) = \mathtt{lfp}(f)$$

От 2) на *Лема* 3.4 знаем, че

$$D = \{d \in [\![\mathtt{a}]\!] \mid d \lhd_{\mathtt{a}} \mathtt{fix}(\tau'[\overline{x}/\overline{\mu}])\}$$

е непрекъснато свойство. Целта ни е да докажем, че $\mathtt{lfp}(f) \in D$. Ще направим това като приложим правилото на Скот. Да напомним, че

$$\cfrac{\bot^{[\![\mathtt{a}]\!]} \in D \qquad d \in D \implies f(d) \in D}{\mathtt{lfp}(f) \in D}$$

Понеже от 1) на *Лема* 3.4 имаме, че $\bot^{[\![\mathtt{a}]\!]} \in D$, то нека вземем произволен елемент $d \in D$. Ще докажем, че $f(d) \in D$.

Понеже $f \lhd_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} \tau'[\overline{x}/\overline{\mu}]$, то за произволно $e \lhd_{\mathtt{a}} \rho$ е изпълнено, че $f(e) \lhd_{\mathtt{a}} \tau'[\overline{x}/\overline{\mu}](\rho)$. Нека изберем $\rho = \mathtt{fix}(\tau'[\overline{x}/\overline{\mu}])$. Щом $d \in D$, то $d \lhd_{\mathtt{a}} \rho$ и следователно

$$f(d) \lhd_{\mathtt{a}} \tau'[\overline{x}/\overline{\mu}](\underbrace{\mathtt{fix}(\tau'[\overline{x}/\overline{\mu}])}_{\rho}).$$

От правилата на операционната семантика имаме, че:

$$\cfrac{\tau'[\overline{x}/\overline{\mu}](\mathtt{fix}(\tau'[\overline{x}/\overline{\mu}])) \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v}}{\mathtt{fix}(\tau'[\overline{x}/\overline{\mu}]) \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v}}\ (\text{fix})$$

Тогава от 3) на *Лема* 3.4 следва, че

$$f(d) \lhd_{\mathtt{a}} \mathtt{fix}(\tau'[\overline{x}/\overline{\mu}]).$$

Така доказахме, че $f(d) \in D$. Заключаваме, че $\mathtt{lfp}(f) \in d$, т.е.

$$[\![\mathtt{fix}(\tau')]\!]_{\Gamma}(\overline{u}) \lhd_{\mathtt{a}} \mathtt{fix}(\tau'[\overline{x}/\overline{\mu}])$$

□

Следствие 3.2. За всеки тип a,

$$\tau \in \mathrm{PCF}_{\mathtt{a}} \implies [\![\tau]\!] \lhd_{\mathtt{a}} \tau.$$

Вече на практика доказахме теоремата за адекватност.

Теорема 3.3 (Теорема за адекватност)**.** За всеки затворен терм $\tau : \mathtt{nat}$,

$$[\![\tau]\!] = n \neq \bot \implies \tau \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}.$$

Доказателство. Да разгледаме произволен затворен терм $\tau : \mathtt{nat}$. Нека $[\![\tau]\!] = n \neq \bot$. От *Следствие* 3.2 имаме, че $[\![\tau]\!] \lhd_{\mathtt{nat}} \tau$. Тогава от дефиницията на $\lhd_{\mathtt{nat}}$ получаваме, че $\tau \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}$. □

Следствие 3.3. За всеки $\tau \in \mathrm{PCF}_{\mathtt{nat}}$,

$$\tau \not\Downarrow_{\mathtt{nat}} \implies [\![\tau]\!] = \bot^{[\![\mathtt{nat}]\!]}.$$

Но както видяхме в Пример **??** не можем да обобщим тази импликация за по-високи типове. Това означава, че нашата семантика не е напълно „добра” в смисъл, че $\bot^{[\![\mathtt{a}]\!]}$ елементът не отговаря на нашата интуиция за безкрайно изчисление за всеки тип a.

3.7 Контексти

[4, стр. 179]

[5, Глава 48]

$$\mathcal{C} ::= - \mid \mathtt{n} \mid \mathtt{x} \mid \mathcal{C} + \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \mathbin{\mathtt{==}} \mathcal{C} \mid \mathtt{if}\ \mathcal{C}\ \mathtt{then}\ \mathcal{C}\ \mathtt{else}\ \mathcal{C} \mid \mathcal{C}\mathcal{C} \mid \lambda\,\mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\,.\,\mathcal{C} \mid \mathtt{fix}(\mathcal{C}).$$

Контекстите са на практика изрази, като позволяваме да имат специална свободна променлива, която означаваме с $-$. За краткост, вместо $\mathcal{C}[\texttt{-}/\tau]$ ще пишем $\mathcal{C}[\tau]$.

Интуитивно, контекстите са програмни фрагменти. Не са пълни програми, защото имат празни места означени с $-$.

Да напомним, че с $\equiv$ означаваме релацията α-еквивалентност.

Твърдение 3.4. Ако $\tau \equiv \tau'$, то $\mathcal{C}[\tau] \equiv \mathcal{C}[\tau']$.

Упътване. Индукция по построението на контекстите. □

Определение 3.1. За затворени термове τ_1 и τ_2, дефинираме $\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a}$, ако

1) $\emptyset \vdash \tau_1 : \mathtt{a}$ и $\emptyset \vdash \tau_2 : \mathtt{a}$

2) За *всички* контексти $C[-]$, за които $\emptyset \vdash C[\tau_1] : \mathtt{nat}$ и $\emptyset \vdash C[\tau_2] : \mathtt{nat}$, то

$$C[\tau_1] \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n} \implies C[\tau_2] \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}.$$

Ще пишем $\tau_1 \cong_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a}$, ако $\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a}$ и $\tau_2 \leq_{ctx} \tau_1 : \mathtt{a}$.

Някои наричат тази релация observational equivalence. Тук наричаме релацията contextual equivalence.

Two phrases of a programming language are contextually equivalent if any occurrences of the first phrase in a complete program can be replaced by the second phrase without affecting the observable results of executing the program. This kind of program equivalence is also known as operational, or observational equivalence.

Практически, ако имаме два терма, които са контекстно еквивалентни, то можем да заменим единия с другия в произволна програма, без да има видими разлики на ниво изпълнение на програмата. Това представлява опит да се формализира математически практиката за тестване на програми. Проблемът е, че с този формализъм е трудно да се работи, защото в дефиницията имаме квантор за всеобщност относно всички контексти (програмни фрагменти).

Твърдение 3.5. За произволни затворени термове τ_1 и τ_2 е изпълнено, че:

(1) $\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{nat} \implies (\forall \mathtt{n})[\tau_1 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n} \implies \tau_2 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}]$.

(2) $\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{b} \to \mathtt{c} \implies (\forall \rho \in \mathrm{PCF}_{\mathtt{b}})[\tau_1\rho \leq_{ctx} \tau_2\rho : \mathtt{c}]$.

Упътване.

(1) Просто вземете контекст $\mathcal{C} \stackrel{\text{деф}}{=} -$. Ясно, че $\mathcal{C}[\tau_i] \equiv \tau_i$.

(2) Да фиксираме произволен терм $\rho \in \mathrm{PCF}_{\mathtt{b}}$. Да разгледаме произволен контекст $\mathcal{C}[-]$, за който $\mathcal{C}[\tau_1\rho]$ и $\mathcal{C}[\tau_2\rho]$ са затворени термове от тип $\mathtt{nat}$. Разглеждаме контекста $\mathcal{C}' \stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{C}\{\texttt{-}/-\rho\}$, т.е. заменяме $-$ с $-\rho$ в контекста. Лесно се съобразява, че

$$\mathcal{C}'[\tau_i] \equiv \mathcal{C}[\tau_i\rho].$$

Понеже $\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{b} \to \mathtt{c}$, то за контекста $\mathcal{C}'$ имаме, че

$$\mathcal{C}'[\tau_1] \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n} \implies \mathcal{C}'[\tau_2] \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}.$$

Оттук веднага следва, че

$$\mathcal{C}[\tau_1\rho] \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n} \implies \mathcal{C}[\tau_2\rho] \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}.$$

$\square$

Твърдение 3.6. За произволни затворени термове τ_1 и τ_2 е изпълнено, че:

$$\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a} \iff (\forall \rho \in \mathrm{PCF}_{\mathtt{a}\to\mathtt{nat}})[\, \rho\tau_1 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n} \implies \rho\tau_2 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}\,].$$

Упътване. За $(\Rightarrow)$, при даден терм $\rho \in \mathrm{PCF}_{\mathtt{a}\to\mathtt{nat}}$, просто вземете контекст $\mathcal{C} = \rho -$. За $(\Leftarrow)$, нека имаме контекст $\mathcal{C}[-]$. Нека $\mathtt{z}$ е променлива, която не се среща в $\mathcal{C}[-]$. Разгледайте $\rho \stackrel{\text{деф}}{=} \lambda\, \mathtt{z} : \mathtt{a}\,.\, \mathcal{C}\{\text{-}/\mathtt{z}\}$. Тогава, понеже τ_i са затворени термове, то $\mathcal{C}\{\text{-}/\tau_i\} \equiv \rho\tau_i$. $\square$

Твърдение 3.7. За произволни затворени термове τ_1 и τ_2 от тип $\mathtt{a}$,

$$(d \lhd_{\mathtt{a}} \tau_1 \;\&\; \tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a}) \implies d \lhd_{\mathtt{a}} \tau_2.$$

Доказателство. Индукция по построението на типовете $\mathtt{a}$. Нека $\mathtt{a} = \mathtt{nat}$. Нека $d \neq \bot$, защото е ясно, че $\bot \lhd_{\mathtt{nat}} \tau_2$. Понеже $d \lhd_{\mathtt{nat}} \tau_1$, то $\tau_1 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{d}$. Понеже $\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{nat}$, то $\tau_2 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{d}$. Заключаваме, че $d \lhd_{\mathtt{nat}} \tau_2$.

Нека $\mathtt{a} = \mathtt{b} \to \mathtt{c}$. Нека $d \lhd_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}} \tau_1$ и $\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{b} \to \mathtt{c}$. Трябва да докажем, че $d \lhd_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}} \tau_2$. Нека $u \in [\![\mathtt{b}]\!]$ и $\rho \in \mathrm{PCF}_{\mathtt{b}}$, за които $u \lhd_{\mathtt{b}} \rho$. Трябва да докажем, че $d(u) \lhd_{\mathtt{c}} \tau_2\rho$. От $d \lhd_{\mathtt{b}\to\mathtt{c}} \tau_1$ имаме, че $d(u) \lhd_{\mathtt{c}} \tau_1\rho$. От (2) на *Твърдение* 3.5 имаме, че $\tau_1\rho \leq_{ctx} \tau_2\rho : \mathtt{c}$. От И.П. заключаваме, че $d(u) \leq_{\mathtt{c}} \tau_2\rho$. $\square$

Твърдение 3.8. За произволни затворени термове τ_1 и τ_2,

$$\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a} \iff [\![\tau_1]\!] \lhd_{\mathtt{a}} \tau_2.$$

Доказателство. $(\Rightarrow)$ Нека $\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a}$. От (3) на *Лема* 3.4 имаме, че

$$[\![\tau_1]\!] \lhd_{\mathtt{a}} \tau_1.$$

Тогава от предишното твърдение директно следва, че $[\![\tau_1]\!] \leq_{\mathtt{a}} \tau_2$.

$(\Leftarrow)$ Нека сега $[\![\tau_1]\!] \lhd_{\mathtt{a}} \tau_2$. Тук ще използваме характеризацията на $\leq_{ctx}$ от *Твърдение* 3.6. Да разгледаме произволен терм $\rho \in \mathrm{PCF}_{\mathtt{a}\to\mathtt{nat}}$. Отново от (3) на *Лема* 3.4 имаме, че $[\![\rho]\!] \lhd_{\mathtt{a}\to\mathtt{nat}} \rho$. Тогава от дефиницията на релацията $\lhd_{\mathtt{a}\to\mathtt{nat}}$ следва, че:

$$[\![\rho\tau_1]\!] = [\![\rho]\!]([\![\tau_1]\!]) \lhd_{\mathtt{nat}} \rho\tau_2.$$

Тогава:

$$\begin{aligned} \rho\tau_1 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n} &\implies [\![\rho\tau_1]\!] = n && \text{// Теорема за коректност} \\ &\implies \rho\tau_2 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}. && \text{// } [\![\rho\tau_1]\!] \lhd_{\mathtt{nat}} \rho\tau_2 \end{aligned}$$

Заключаваме, че $\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a}$. $\square$

Твърдение 3.9. За произволни затворени термове τ_1 и τ_2 е изпълнено, че:

(1) $\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{nat} \iff (\forall \mathtt{n})[\tau_1 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n} \implies \tau_2 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}]$;

(2) $\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a} \to \mathtt{b} \iff (\forall \rho \in \mathrm{PCF}_{\mathtt{a}})[\, \tau_1\rho \leq_{ctx} \tau_2\rho : \mathtt{b}\,]$.

Доказателство.

(1) Посоката ($\Rightarrow$) следва директно от *Твърдение* 3.5. За посоката ($\Leftarrow$), понеже

$$\begin{aligned} [\![\tau_1]\!] = [\![\mathtt{n}]\!] &\implies \tau_1 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n} && \text{// Теорема за адекватност} \\ &\implies \tau_2 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}, && \text{// от условието} \end{aligned}$$

то получаваме, че $[\![\tau_1]\!] \lhd_{\mathtt{nat}} \tau_2$. Тогава от предишното твърдение директно имаме, че $\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{nat}$.

(2) Посоката ($\Rightarrow$) следва директно от дефиницията на $\leq_{ctx}$. За посоката ($\Leftarrow$), според предишното твърдение, достатъчно е да докажем, че $[\![\tau_1]\!] \lhd_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} \tau_2$. Нека $u \in [\![\mathtt{a}]\!]$ и $\rho \in \mathrm{PCF}_{\mathtt{a}}$, за които $u \lhd_{\mathtt{a}} \rho$. Ще докажем, че $[\![\tau_1]\!](u) \lhd_{\mathtt{b}} \tau_2\rho$. Понеже $[\![\tau_1]\!] \lhd_{\mathtt{a}\to\mathtt{b}} \tau_1$, то $[\![\tau_1]\!](u) \lhd_{\mathtt{b}} \tau_1\rho$. Но понеже $\tau_1\rho \leq_{ctx} \tau_2\rho : \mathtt{b}$, то от *Твърдение* 3.7 следва, че $[\![\tau_1]\!](u) \lhd_{\mathtt{b}} \tau_2\rho$.

□

Естсвено е да се запитаме дали можем да разширим (1) на *Твърдение* 3.9 за по-сложни от $\mathtt{nat}$ типове $\mathtt{a}$, т.е. възможно ли е

$$\tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a} \iff (\forall \mathtt{v} : \mathtt{a})[\tau_1 \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v} \implies \tau_2 \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v}]?$$

Първо ще видим, че винаги имаме импликацията ($\Leftarrow$), но по-късно ще видим, че дори за типа $\mathtt{a} = \mathtt{nat} \to \mathtt{nat}$ нямаме импликация ($\Rightarrow$).

Твърдение 3.10. Докажете, че за всеки два затворени терма $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{PCF}_{\mathtt{a}}$,

$$(\forall \mathtt{v} : \mathtt{a})[\tau_1 \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v} \implies \tau_2 \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v}] \implies \tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a}.$$

Упътване. Според *Твърдение* 3.8, достатъчно е да докажем, че $[\![\tau_1]\!] \lhd_{\mathtt{a}} \tau_2$. Но това е лесно. От условието имаме, че $(\forall \mathtt{v} : \mathtt{a})[\tau_1 \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v} \implies \tau_2 \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v}]$. Знаем, че $[\![\tau_1]\!] \lhd_{\mathtt{a}} \tau_1$. Тогава от (3) на *Лема* 3.4 следва, че $[\![\tau_1]\!] \lhd_{\mathtt{a}} \tau_2$. □

Твърдение 3.11. За произволни затворени термове τ_1, τ_2 от тип $\mathtt{a}$,

$$[\![\tau_1]\!] \sqsubseteq [\![\tau_2]\!] \implies \tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a}.$$

Доказателство. Според *Твърдение* 3.6, достатъчно е да докажем, че за произволен терм $\rho \in \mathrm{PCF}_{\mathtt{a}\to\mathtt{nat}}$, $\rho\tau_1 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n} \implies \rho\tau_2 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}$.

$$\begin{aligned} \rho\tau_1 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n} &\implies [\![\rho\tau_1]\!] = [\![\mathtt{n}]\!] && \text{// Теорема за коректност} \\ &\implies [\![\rho]\!]([\![\tau_1]\!]) = [\![\mathtt{n}]\!] && \text{// Лема за замяната} \\ &\implies [\![\rho]\!]([\![\tau_2]\!]) = [\![\mathtt{n}]\!] && \text{// монотонност на } [\![\rho]\!] \\ &\implies [\![\rho\tau_2]\!] = [\![\mathtt{n}]\!] && \text{// Лема за замяната} \\ &\implies \rho\tau_2 \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}. && \text{// Теорема за адекватност} \end{aligned}$$

□

Теорема 3.4. За всички затворени термове τ_1 и τ_2 от тип a е изпълнено, че:

(1) $(\forall \mathtt{v} : \mathtt{a})[\tau_1 \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v} \iff \tau_2 \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v}] \implies \tau_1 \cong_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a}$;

(2) $[\![\tau_1]\!] = [\![\tau_2]\!] \implies \tau_1 \cong_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a}$.

От *Твърдение* 3.9 и от теоремата за адекватност имаме и обратните импликации за типа nat. За съжаление, ще видим, че нямаме обратните импликации. За произволен тип a, да означим затворения терм

$$\Omega_{\mathtt{a}} \overset{\text{деф}}{=} \mathtt{fix}(\lambda\, \mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\, .\, \mathtt{x}).$$

Задача 3.2. Докажете, че:

(1) $\emptyset \vdash \Omega_{\mathtt{a}} : \mathtt{a}$ и $\emptyset \vdash \lambda\, \mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\, .\, \Omega_{\mathtt{a}} : \mathtt{a} \to \mathtt{a}$;

(2) $\Omega_{\mathtt{a}} \not\Downarrow_{\mathtt{a}}$ и $\lambda\, \mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\, .\, \Omega_{\mathtt{a}} \Downarrow_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} \lambda\, \mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\, .\, \Omega_{\mathtt{a}}$;

(3) $[\![\Omega_{\mathtt{a}}]\!] = \bot^{[\![\mathtt{a}]\!]}$ и $[\![\lambda\, \mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\, .\, \Omega_{\mathtt{a}}]\!] = [\![\Omega_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}}]\!] = \bot^{[\![\mathtt{a}\to\mathtt{a}]\!]}$.

Упътване. За (2), да допуснем, че $\Omega_{\mathtt{a}} \Downarrow_{\mathtt{a}} \mathtt{v}$ и нека фиксираме ℓ да бъде най-малкия брой стъпки, за които $\Omega_{\mathtt{a}} \Downarrow_{\mathtt{a}}^{\ell} \mathtt{v}$. Но тогава

$$\dfrac{\dfrac{\lambda\, \mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\, .\, \mathtt{x} \Downarrow^0_{\mathtt{a}\to\mathtt{a}} \lambda\, \mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\, .\, \mathtt{x} \qquad \dfrac{\Omega_{\mathtt{a}} \Downarrow^{\ell-2}_{\mathtt{a}} \mathtt{v}}{\mathtt{x}[\mathtt{x}/\mathtt{fix}(\lambda\, \mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\, .\, \mathtt{x})] \Downarrow^{\ell-2}_{\mathtt{a}} \mathtt{v}}}{(\lambda\, \mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\, .\, \mathtt{x})\mathtt{fix}(\lambda\, \mathtt{x}\ :\ \mathtt{a}\, .\, \mathtt{x}) \Downarrow^{\ell-1}_{\mathtt{a}} \mathtt{v}}\,\text{(cbn)}}{\Omega_{\mathtt{a}} \Downarrow^{\ell}_{\mathtt{a}} \mathtt{v}}\,\text{(fix)}$$

Получихме, че $\Omega_{\mathtt{a}} \Downarrow^{\ell-2}_{\mathtt{a}} \mathtt{v}$, което е противоречие с минималността на ℓ. □

Нека сега разгледаме затворените термове

$$\tau_1 \overset{\text{деф}}{=} \lambda\, \mathtt{x}\ :\ \mathtt{nat}\, .\, \Omega_{\mathtt{nat}};$$
$$\tau_2 \overset{\text{деф}}{=} \Omega_{\mathtt{nat}\to\mathtt{nat}}.$$

Задача 3.3. Докажете, че

$$\tau_1 \cong_{ctx} \tau_2 : \mathtt{nat} \to \mathtt{nat}.$$

Упътване. Ще използваме (2) на *Твърдение* 3.9.

Първо да разгледаме посоката $(\Rightarrow)$. За произволно $\rho : \mathtt{nat}$, ще докажем, че $\tau_1\rho \le_{ctx} \tau_2\rho : \mathtt{nat}$, което според (1) на *Твърдение* 3.9 означава да докажем, че

$$(\forall \mathtt{n})[\,\tau_1\rho \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n} \implies \tau_2\rho \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}\,].$$

Първо да отбележим, че $\tau_1\rho \equiv \Omega_{\mathtt{nat}}$. Понеже $\Omega_{\mathtt{nat}} \not\Downarrow_{\mathtt{nat}}$, то заключаваме, че за всяко такова ρ,

$$(\forall \mathtt{n})[\,\tau_1\rho \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n} \implies \tau_2\rho \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}\,].$$

Сега да разгледаме посоката $(\Leftarrow)$. Тук правим сходни разсъждения, защото понеже $\tau_2 \not\Downarrow_{\texttt{nat}\to\texttt{nat}}$, то и $\tau_2\rho \not\Downarrow_{\texttt{nat}}$. $\square$

Лесно се съобразява, че $\tau_1 \Downarrow_{\texttt{nat}\to\texttt{nat}} \tau_1$ и $\tau_2 \not\Downarrow_{\texttt{nat}\to\texttt{nat}}$. Това означава, че според горната задача термовете τ_1 и τ_2 ни дават пример кога нямаме обратната импликация в (1) на *Теорема* 3.4. Обърнете внимание, че $[\![\tau_1]\!] = [\![\tau_2]\!]$. Това означава, че трябва да продължим да търсим термове τ_1 и τ_2 от тип a, за които $[\![\tau_1]\!] \neq [\![\tau_2]\!]$ и $\tau_1 \cong_{ctx} \tau_2 : \mathsf{a}$.

3.8 Пълна абстракция

Full abstraction на англ. [4, стр. 179]

Определение 3.2. Денотационната семантика $[\![.]\!]$ се нарича **напълно абстрактна**, ако контекстната (операционната) и денотационната наредба съвпадат, т.е. за произволни термове τ_1, τ_2 от тип a е изпълнено, че

$$[\![\tau_1]\!] \sqsubseteq [\![\tau_2]\!] \iff \tau_1 \leq_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a}.$$

Теорема 3.5 (Гордън Плоткин 1977)**.** Денотационната семантика $[\![.]\!]$ за езика PCF **не е** напълно абстрактна.

Да напомним, че от *Теорема* 3.4 винаги имаме следното:

$$[\![\tau_1]\!] = [\![\tau_2]\!] \implies \tau_1 \cong_{ctx} \tau_2 : \mathtt{a}.$$

Сега ще се захванем с търсенето на термове τ_1 и τ_2, за които $[\![\tau_1]\!] \neq [\![\tau_2]\!]$ и $\tau_1 \cong \tau_2 : \mathtt{a}$.

Задача 3.4. Да дефинираме функцията $sor : \mathbb{N}_\perp \to (\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp)$ по следния начин:

sor идва от sequential or.

sor	$\perp$	0	$y > 0$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
0	$\perp$	0	1
$x > 0$	1	1	1

Докажете, че sor е определима в PCF.

Упътване. Разгледайте затворения терм

$$\tau \stackrel{\text{деф}}{=} \lambda\,\mathtt{x} : \mathtt{nat}\,.\,\lambda\,\mathtt{y} : \mathtt{nat}\,.\,\mathtt{if\ x\ then\ 1\ else\ if\ y\ then\ 1\ else\ 0}$$

Докажете, че $[\![\tau]\!] = sor$. □

Задача 3.5. Да дефинираме изображението $por : \mathbb{N}_\perp \to (\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp)$ по следния начин:

por	$\perp$	0	$y > 0$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	1
0	$\perp$	0	1
$x > 0$	1	1	1

por идва от parallel or.

Докажете, че por е непрекъснато изображение.

Упътване. Достатъчно е да се съобрази, че por е монотонно изображение. □

Лема 3.6 (Гордън Плоткин 1977)**.** Изображението por не е определимо в PCF, т.е. не съществува затворен терм ρ, за който $[\![\rho]\!] = por$.

Пример 3.2. Да видим, че операторът „или” в хаскел не е паралелен.

```
ghci> True || undefined
True
ghci> undefined || True
*** Exception: Prelude.undefined
```

Задача 3.6. Да разгледаме $f \in [\mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{н}} [\mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]]$, за което имаме ограниченията:

f	$\perp$	0	$y > 0$
$\perp$	$?$	$?$	1
0	$?$	0	$?$
$x > 0$	1	$?$	$?$

Докажете, че $f = por$.

Упътване. Използвайте монотонността на f. □

Задача 3.7. Да разгледаме изображението $f \in [\mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{н}} [\mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]]$, за което

$$f(0)(0) = 0 \text{ и } f(1)(\perp) = f(\perp)(1) = 1.$$

Докажете, че f не е определима в PCF.

Упътване. Да допуснем, че f е определима в PCF. Тогава $f = [\![\tau]\!]$, за някой затворен терм $\tau : \mathtt{nat} \to \mathtt{nat} \to \mathtt{nat}$.

За произволна променлива $\mathtt{z}$, да положим

$$\rho_{\mathtt{z}} \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{if\ z\ ==\ 0\ then\ 0\ else\ 1}.$$

Нека също положим

$$\tau' \stackrel{\text{деф}}{=} \tau\rho_{\mathtt{x}};$$
$$\tau'' \stackrel{\text{деф}}{=} \tau'\rho_{\mathtt{y}}.$$

Нека също така $\Gamma \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{x} : \mathtt{nat}$ и $\Delta = \mathtt{y} : \mathtt{nat}$. Ясно, че $[\![\tau']\!]_\Gamma \in [\mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{н}} [\mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]]$ и

$$\begin{aligned}
[\![\tau']\!]_\Gamma(u) &= [\![\tau\rho_{\mathtt{x}}]\!]_\Gamma(u) \\
&= \mathtt{eval}([\![\tau]\!], [\![\rho_{\mathtt{x}}]\!]_\Gamma(u)) \\
&= [\![\tau]\!]([\![\rho_{\mathtt{x}}]\!]_\Gamma(u))
\end{aligned}$$

Нека $f' = [\![\tau']\!]_\Gamma$. Получаваме следното за f'.

$$f'(u) = f([\![\rho_{\mathtt{x}}]\!]_\Gamma(u)) = \begin{cases} f(u), & \text{ако } u = \perp \text{ или } u = 0 \\ f(1), & \text{ако } u > 0. \end{cases}$$

Аналогично, ясно е, че $[\![\tau'']\!]_{\Gamma,\Delta} \in [\mathbb{N}_\perp \times \mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]$ и

$$[\![\tau'']\!]_{\Gamma,\Delta}(u, v) = [\![\tau'\rho_{\mathtt{y}}]\!]_{\Gamma,\Delta}(u, v)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathtt{eval}([\![\tau']\!]_\Gamma(u), [\![\rho_\mathtt{y}]\!]_\Delta(v))\\
&= [\![\tau']\!]_\Gamma(u)([\![\rho_\mathtt{y}]\!]_\Delta(v))\\
&= [\![\tau]\!]([\![\rho_\mathtt{x}]\!]_\Gamma(u))([\![\rho_\mathtt{y}]\!]_\Delta(v)).
\end{aligned}$$

Нека сега $f'' = [\![\tau'']\!]_{\Gamma,\Delta}$. Тогава

$$\begin{aligned}
f''(u,v) &= f'(u)([\![\rho_\mathtt{y}]\!]_\Delta(v))\\
&= \begin{cases} f'(u)(v), & \text{ако } v = \bot \text{ или } v = 0\\ f'(u)(1), & \text{ако } v > 0\end{cases}
\end{aligned}$$

Така получаваме следната характеризация на f'':

f''	$\bot$	0	$y > 0$
$\bot$	$?$	$?$	1
0	$?$	0	$?$
$x > 0$	1	$?$	$?$

Нека сега $\rho \stackrel{\text{деф}}{=} \lambda\,\mathtt{x} : \mathtt{nat}\,.\,\lambda\,\mathtt{y} : \mathtt{nat}\,.\,\tau''$. Тогава за $g = [\![\rho]\!]$ имаме, че

$$g(x)(y) = f''(x,y).$$

От *Задача* 3.6 получаваме, че $g = por$. Достигаме до противоречие, защото por не е определимо изображение. □

В следващите твърдения ще използваме типовете

$$\mathtt{a} \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{nat} \to (\mathtt{nat} \to \mathtt{nat})$$
$$\mathtt{b} \stackrel{\text{деф}}{=} (\mathtt{nat} \to (\mathtt{nat} \to \mathtt{nat})) \to \mathtt{nat}.$$

За $n = 0, 1$, нека дефинираме затворените термове

```
τn ≡ λf:a.if (f 1 Ωnat) == 1 then
            if (f Ωnat 1) == 1 then
              if (f 0 0) == 0 then n
                else Ωnat
              else Ωnat
            else Ωnat
```

Лесно се съобразява, че τ_0 и τ_1 са добре типизирани термове от тип $\mathtt{b}$.

Задача 3.8. Докажете, че

$$[\![\tau_0]\!] \neq [\![\tau_1]\!].$$

Упътване. Докажете, че за $n = 0, 1$ е изпълнено, че

$$[\![\tau_n]\!](por) = n.$$

□

Твърдение 3.12. $\tau_1 \cong_{ctx} \tau_2 : \mathtt{b}$.

Доказателство. Понеже $\mathtt{b} = \mathtt{a} \to \mathtt{nat}$, от *Твърдение* 3.9 следва, че е достатъчно да докажем, че за всеки затворен терм $\rho : \mathtt{a}$ е изпълнено, че

$$\tau_1 \rho \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n} \iff \tau_2 \rho \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{n}.$$

Да видим какво означава $\tau_i \rho \Downarrow_{\mathtt{nat}}$ за $i = 0, 1$. Това означава, че трябва да са изпълнени и трите свойства:

- $\rho\ \mathtt{1}\ \Omega_{\mathtt{nat}} \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{1}$;
- $\rho\ \Omega_{\mathtt{nat}}\ \mathtt{1} \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{1}$;
- $\rho\ \mathtt{0}\ \mathtt{0} \Downarrow_{\mathtt{nat}} \mathtt{0}$.

Понеже $[\![\Omega_{\mathtt{nat}}]\!] = \perp$, от теоремата за коректност получаваме, че трябва да са изпълнени следните три свойства:

- $[\![\rho]\!](1)(\perp) = 1$;
- $[\![\rho]\!](\perp)(1) = 1$;
- $[\![\rho]\!](0)(0) = 0$.

Но тогава $[\![\rho]\!] = por$, което е противоречие с *Задача* 3.7. □

Доказателството на следващата теорема излиза извън обхвата на този курс.

Теорема 3.6 (Плоткин 1977)**.** Денотационната семантика $[\![.]\!]$ за езика PCF+$\mathtt{por}$ е напълно абстрактна.

[4, стр. 188]

Глава 4

Доказване на свойства на програми

След като вече имаме точна дефиниция на семантиката на една рекурсивна програма, можем да видим как можем да доказваме формално свойства на рекурсивни програми.

4.1 Свойства

- Да фиксираме една област на Скот $\mathcal{A}$. Подмножествата $P \subseteq \mathcal{A}$ ще наричаме **свойства**.
- Казваме, че P е **непрекъснато (или допустимо, индуктивно) свойство** над областта на Скот $\mathcal{A}$, ако за всяка верига $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ от елементи на $\mathcal{A}$, е изпълнено:

В [7, стр. 166] се наричат *inclusive subsets*. В [1] се наричат *chain-complete assertions*

$$\frac{P(a_0) \qquad P(a_1) \qquad P(a_2) \qquad P(a_3) \qquad \dots}{P(\bigsqcup_i a_i)}$$

Понеже $\mathcal{A}$ е област на Скот, ние знаем, че $\bigsqcup_i a_i$ съществува

Нека да видим, че има свойства, който не са непрекъснати.

Пример 4.1. Нека да разгледаме областта на Скот от точните изображения $[\mathbb{N}_\perp \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$. Да разгледаме свойството $P \subseteq [\mathbb{N}_\perp \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$, което е дефинирано по следния начин:

$$P(f) \overset{\text{деф}}{\equiv} (\exists x \in \mathbb{N})[f(x) = \perp].$$

Да разгледаме изображенията f_i, дефинирани по следния начин:

$$f_i(x) = \begin{cases} 42, & x \in \mathbb{N} \,\&\, x \leq i \\ \perp, & x \in \mathbb{N} \,\&\, x > i \\ \perp, & x = \perp. \end{cases}$$

Лесно се съобразява, че $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ е верига в $[\mathbb{N}_\perp \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$ и че за всяко i, $P(f_i)$. Да разгледаме точната горна граница g на тази верига, за която знаем, че за всяко $y \in \mathbb{N}$,

$$g(x) = y \iff (\exists i)[f_i(x) = y].$$

Според конструкцията на g, $g(x) = 42$ за всяко $x \in \mathbb{N}$. Оттук директно получаваме, че $\neg P(g)$. Така видяхме, че P *не е непрекъснато свойство*.

Задача 4.1. Докажете, че свойството Q над $[\mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp]$, където

$$Q(f) \iff (\forall x \in \mathbb{N})[f(x) \neq \perp],$$

е непрекъснато.

4.1.1 Основни свойства

Твърдение 4.1. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са области на Скот и $f_1, f_2 \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{B}]$. Тогава следните свойства над $\mathcal{A}$ са непрекъснати:

- $P(a) \overset{\text{деф}}{\equiv} f_1(a) \sqsubseteq f_2(a)$;
- $P(a) \overset{\text{деф}}{\equiv} f_1(a) = f_2(a)$;

Твърдение 4.2. Нека $\mathcal{A}$ е област на Скот. Да фиксираме произволен елемент $a_0 \in \mathcal{A}$. Тогава следните свойства над $\mathcal{A}$ са непрекъснати:

- $P(a) \overset{\text{деф}}{\equiv} a \sqsubseteq a_0$;
- $P(a) \overset{\text{деф}}{\equiv} a = a_0$;

4.1.2 Сечение

Твърдение 4.3. Нека P_1 и P_2 непрекъснати свойства над областта на Скот $\mathcal{A}$. Тогава $P_1 \cap P_2$ също е непрекъснато свойство.

4.1.3 Обединение

Твърдение 4.4. Нека P_1 и P_2 непрекъснати свойства над областта на Скот $\mathcal{A}$. Тогава $P_1 \cup P_2$ също е непрекъснато свойство.

4.1.4 Допълнение

Твърдение 4.5. Съществува непрекъснато свойство P над областта на Скот $\mathcal{A}$, за което $\mathcal{A} \setminus P$ **не** е непрекъснато свойство.

Доказателство. Да вземем $\mathcal{A} = [\mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp]$. Свойството Q от *Задача* 4.1 е непрекъснато, докато $[\mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp] \setminus Q = P$, което е точно свойството от *Пример* 4.1, а за него знаем, че не е непрекъснато. □

4.1.5 Частична коректност

- Да разгледаме едно свойство I в областта на Скот $\mathcal{A}$, което наричаме условие за входа, и свойство O в областта на Скот $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, което наричаме условие за изхода.

- **Свойство от тип частична коректност** относно I и O представлява свойство $P \subseteq [\mathcal{A} \to \mathcal{B}]$ със следната дефиниция

$$P(f) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in \mathcal{A})[\, I(a) \mathbin{\&} f(a) \neq \bot \implies O(a, f(a))\,].$$

Твърдение 4.6. Нека $I \subseteq \mathcal{A}$, а O е непрекъснато свойство в $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

$$P(f) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in \mathcal{A})[\, I(a) \mathbin{\&} f(a) \neq \bot \implies O(a, f(a))\,].$$

Тогава свойството P е непрекъснато в областта на Скот $[\mathcal{A} \to \mathcal{B}]$.

4.1.6 Тотална коректност

Свойство от тип тотална коректност относно I и O представлява свойство $P \subseteq [\mathcal{A} \to \mathcal{B}]$ със следната дефиниция

$$P(f) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in \mathcal{A})[I(a) \implies (f(a) \neq \bot \mathbin{\&} O(a, f(a)))].$$

Твърдение 4.7. Нека I е свойство в $\mathcal{A}$, а O е непрекъснато свойство в $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Тогава свойството

$$P(f) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in \mathcal{A})[I(a) \implies (f(a) \neq \bot \mathbin{\&} O(a, f(a)))]$$

е непрекъснато в $[\mathcal{A} \to \mathcal{B}]$.

4.2 Правило на Скот

[7, стр. 166]

- Нека $\mathcal{A}$ е област на Скот и нека $f \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{A}]$.
- Всяко $P \subseteq A$ ще наричаме свойство.
- Тогава **правилото на Скот** гласи следното:

С $\texttt{lfp}(f)$ означаваме най-малката неподвижна точка на f (от англ. least fixed point)

$$\frac{P(\bot) \qquad (\forall a \in \mathcal{A})[P(a) \implies P(f(a))]}{P(\texttt{lfp}(f))}$$

Доказателство.

□

Сравнете с *Твърдение* 1.8

Задача 4.2. Нека $f \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{A}]$. Да означим множеството от преднеподвижни точки на f като

$$\texttt{Pref}(f) \stackrel{\text{деф}}{=} \{a \in \mathcal{A} \mid f(a) \sqsubseteq a\}.$$

Тогава

$$(\forall a \in \mathcal{A})[a \in \texttt{Pref}(f) \implies \texttt{lfp}(f) \sqsubseteq a].$$

Доказателство. Да фиксираме елемент $a \in \mathtt{Pref}(f)$. Да разгледаме непрекъснатото свойство

$$P(b) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} b \sqsubseteq a.$$

Сами се убедете, че P е непрекъснато свойство!

Ясно е, че $P(\bot)$. Нека $b \in \mathcal{A}$, за който $P(b)$. Ще докажем, че $P(f(b))$.

$$\begin{aligned} b \sqsubseteq a &\implies f(b) \sqsubseteq f(a) && \text{// } f \text{ е мон.}\\ &\implies f(b) \sqsubseteq f(a) \sqsubseteq a && \text{// } a \in \mathtt{Pref}(f)\\ &\implies f(b) \sqsubseteq a && \text{// } \sqsubseteq \text{ е транз. рел..} \end{aligned}$$

От правилото на Скот, заключаваме, че $P(\mathtt{lfp}(f))$, т.е. $\mathtt{lfp}(f) \sqsubseteq a$. □

Задача 4.3. Нека $f, g \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$ като имаме свойствата:

- $f(\bot) \sqsubseteq g(\bot)$;
- $f \circ g \sqsubseteq g \circ f$.

Докажете, че $\mathtt{lfp}(f) \sqsubseteq \mathtt{lfp}(g)$.

Доказателство. Разгледайте непрекъснатото свойството

$$P(a) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} f(a) \sqsubseteq g(a).$$

От условието имаме, че $P(\bot)$. Нека $P(a)$. Ще докажем, че $P(g(a))$.

$$\begin{aligned} P(a) &\iff f(a) \sqsubseteq g(a)\\ &\implies g(f(a)) \sqsubseteq g(g(a)) && \text{// } g \text{ е мон.}\\ &\implies f(g(a)) \sqsubseteq g(g(a)) && \text{// } f \circ g \sqsubseteq g \circ f\\ &\iff P(g(a)). \end{aligned}$$

Тогава по правилото на Скот ще заключим, че $P(\mathtt{lfp}(g))$, откъдето

$$f(\mathtt{lfp}(g)) \sqsubseteq g(\mathtt{lfp}(g)) = \mathtt{lfp}(g).$$

Това означава, че $\mathtt{lfp}(g)$ е преднеподвижна точка на f, т.е.

$$\mathtt{lfp}(g) \in \mathtt{Pref}(f).$$

Понеже $\mathtt{lfp}(f)$ е най-малката преднеподвижна точка на f, то заключаваме, че $\mathtt{lfp}(f) \sqsubseteq \mathtt{lfp}(g)$. □

Задача 4.4. Нека $h \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{B}]$, $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$, $g \in [\mathcal{B} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{B}]$, като имаме свойствата:

- h е точна, т.е. $h(\bot^{\mathcal{A}}) = \bot^{\mathcal{B}}$;
- $g \circ h = h \circ f$.

Докажете, че $\mathtt{lfp}(g) = h(\mathtt{lfp}(f))$.

Упътване.

- Разгледайте непрекъснатото свойство

$$P_1(a) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} h(a) \sqsubseteq g(h(a)).$$

Докажете с правилото на Скот, че $P_1(\texttt{lfp}(f))$. Тогава

$$\begin{aligned} h(\texttt{lfp}(f)) \sqsubseteq g(h(\texttt{lfp}(f)) &\iff h(f(\texttt{lfp}(f))) \sqsubseteq g(h(\texttt{lfp}(f) \\ &\iff h(f(\texttt{lfp}(f))) \sqsubseteq h(f(\texttt{lfp}(f))) \\ &\iff g(h(\texttt{lfp}(f))) \sqsubseteq h(\texttt{lfp}(f)). \end{aligned}$$

Това означава, че $h(\texttt{lfp}(f))$ е преднеподвижна точка на g, т.е.

$$h(\texttt{lfp}(f)) \in \texttt{Pref}(g).$$

Заключаваме, че $\texttt{lfp}(g) \sqsubseteq h(\texttt{lfp}(f))$.

- Другата посока е по-лесна. Разгледайте непрекъснатото свойство

$$P_2(a) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} h(a) \sqsubseteq \texttt{lfp}(g).$$

Докажете, че $P_2(\texttt{lfp}(f))$.

□

Задача 4.5. Нека $f, g \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$ като имаме свойствата:

- $f(\bot) = g(\bot)$;
- $f \circ g = g \circ f$.

Докажете, че $\texttt{lfp}(f \circ g) = \texttt{lfp}(g \circ f)$.

Упътване. Разгледайте непрекъснатото свойство

Лесно се вижда, че P е непрекъснато свойство, защото f и g са непрекъснати изображения.

$$P(a) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} g(f(a)) \sqsubseteq a.$$

Ясно е, че $P(\bot)$. Нека $P(a)$. Ще докажем, че $P(f(g(a))$.

$$\begin{aligned} g(f(a)) \sqsubseteq a &\implies g(f(g(f(a)))) \sqsubseteq g(f(a)) \\ &\implies g(f(f(g(a)))) \sqsubseteq f(g(a)) \\ &\implies P(f(g(a))). \end{aligned}$$

От правилото на Скот заключваме, че $P(\texttt{lfp}(f \circ g))$. Това означава, че

$$g(f(\texttt{lfp}(f \circ g))) \sqsubseteq \texttt{lfp}(f \circ g),$$

т.е. $\texttt{lfp}(f \circ g) \in \texttt{Pref}(g \circ f)$. Следователно,

$$\texttt{lfp}(g \circ f) \sqsubseteq \texttt{lfp}(f \circ g).$$

За другата посока разсъждаваме аналогично. □

Задача 4.6. Нека $p \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$ и $h \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$, като h е точна, т.е. $h(\perp) = \perp$. Да разгледаме

$$\Gamma \in [[\mathcal{A} \times \mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \overset{\text{н}}{\to} [\mathcal{A} \times \mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]],$$

където

$$\Gamma(f)(x,y) = \begin{cases} y, & p(x) = 0 \\ h(f(h(x),y)), & p(x) \in \mathbb{N}^+ \\ \perp, & p(x) = \perp. \end{cases}$$

Докажете, че ако $f_\Gamma \overset{\text{деф}}{=} \mathtt{lfp}(\Gamma)$, то

$$(\forall a, b \in \mathcal{A})[h(f_\Gamma(a,b)) = f_\Gamma(a, h(b))].$$

Упътване. Разгледайте непрекъснатото свойство

$$P(g) \overset{\text{деф}}{\equiv} (\forall a, b \in \mathcal{A})[h(g(a,b)) = g(a, h(b))].$$

$\square$

Задача 4.7. Нека $p \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$ и $h \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$, като p е точна, т.е. $p(\perp) = \perp$. Да разгледаме

$$\Gamma \in [[\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \overset{\text{н}}{\to} [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]],$$

където:

$$\Gamma(f)(x) = \begin{cases} x, & p(x) = 0 \\ f(f(h(x))), & p(x) \in \mathbb{N}^+ \\ \perp, & p(x) = \perp. \end{cases}$$

Докажете, че ако $f_\Gamma \overset{\text{деф}}{=} \mathtt{lfp}(\Gamma)$, то

$$(\forall a \in \mathcal{A})[f_\Gamma(f_\Gamma(a)) = f_\Gamma(a)].$$

Упътване. Разгледайте непрекъснатото свойство

$$P(g) \overset{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in \mathcal{A})[f_\Gamma(g(a)) = g(a)].$$

$\square$

Задача 4.8. Нека $p \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$ и $h, k \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$, като h е точна, т.е. $h(\perp) = \perp$. Да разгледаме $\Gamma_{1,2} \in [[\mathcal{A} \times \mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \overset{\text{н}}{\to} [\mathcal{A} \times \mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]]$, където:

$$\Gamma_1(f)(x,y) = \begin{cases} y, & p(x) = 0 \\ h(f(k(x),y)), & p(x) \in \mathbb{N}^+ \\ \perp, & p(x) = \perp; \end{cases}$$

$$\Gamma_2(f)(x,y) = \begin{cases} y, & p(x) = 0 \\ f(k(x),h(y)), & p(x) \in \mathbb{N}^+ \\ \perp, & p(x) = \perp; \end{cases}$$

Докажете, че ако $f_1 \overset{\text{деф}}{=} \mathtt{lfp}(\Gamma_1)$ и $f_2 = \mathtt{lfp}(\Gamma_2)$, то $f_1 = f_2$.

Упътване. Разгледайте непрекъснатото изображение Δ, където

$$\Delta(f,g) = \langle \Gamma_1(f), \Gamma_2(g) \rangle.$$

Разгледайте свойството:

$$P(f,g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} f = g \;\&\; (\forall a,b \in \mathcal{A})[h(f(a,b))) = f(a,h(b))].$$

Първо трябва да се съобрази, че това свойство е непрекъснато, което не е трудно. Ясно е, че $P(\Omega,\Omega)$. Докажете, че $P(f,g) \implies P(\Delta(f,g))$. $\square$

Задача 4.9. Операторът $\Gamma : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$ е зададен с равенството:

$$\Gamma(f)(x,y) = \begin{cases} y, & \text{ако } y|x \\ f(f(x,y+1)),x), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажете, че:

а) операторът Γ е компактен;

б) $(\forall x,y \in \mathbb{N})[!f_\Gamma(x,y) \;\&\; y \not| x \;\Rightarrow\; f_\Gamma(x,y) \mid x]$.

Задача 4.10. Операторът $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ е зададен с равенството:

$$\Gamma(f)(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \leq 1 \\ x/2, & \text{ако } 2|x \;\&\; x > 1 \\ f(f(3\lfloor x/2 \rfloor + 2)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажете, че:

а) операторът Γ е компактен;

б) $(\forall x \in \mathbb{N})[!f_\Gamma(x) \;\&\; x > 1 \;\Rightarrow\; f_\Gamma(x) \;\leq x/2]$.

4.3 Задачи

Задача 4.11. Да фиксираме $a_0 \in \mathcal{A}$ и да разгледаме $P \subseteq [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$, където

$$P(f) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} \mathtt{lfp}(f) = a_0.$$

Проверете дали P е непрекъснато свойство.

Задача 4.12. Даден е следния оператор $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 3.f(\sqrt{x},y) + 2, & \text{ако } x \text{ е точен квадрат} \\ y, & \text{ако } x \text{ не е точен квадрат} \end{cases}$$

Да се докаже, че:

а) операторът Γ е компактен.

б) ако $f_\Gamma = \mathtt{lfp}(\Gamma)$, то:

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})[3.f_\Gamma(x,y) + 2 \simeq f_\Gamma(x, 3y+2)].$$

Упътване. Подточка а) е стандартна.

- Нека първо да разгледаме операторите Γ_1 и Γ_2, където

$$\Delta_1(f) \stackrel{\text{деф}}{=} 3f(x,y) + 2$$
$$\Delta_2(f) \stackrel{\text{деф}}{=} f(x, 3y+2).$$

  Съобразете, че те са непрекъснати.

- От *Твърдение* 4.1 следва, че свойството

$$P(f) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} \Delta_1(f) = \Delta_2(f)$$

  е непрекъснато.

- Използвайте правилото на Скот върху P за да докажете, че $P(f_\Gamma)$. Това означава, че $3f_\Gamma(x,y) + 2 \simeq f_\Gamma(x, 3y+2)$ за всяко $x, y \in \mathbb{N}$.

□

Задача 4.13. Даден е следния оператор $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} (f(\sqrt{x}, y))^2, & \text{ако } x \text{ е точен квадрат} \\ y, & \text{иначе} \end{cases}$$

Да се докаже, че:

а) операторът Γ е компактен.

б) ако f_Γ е най-малката неподвижна точка на Γ, то:

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})[(f_\Gamma(x,y))^2 \simeq f_\Gamma(x, y^2)].$$

Задача 4.14. Нека $p_0, p_1, p_2 \ldots$ е редицата от всички прости числа в нарастващ ред. Операторът $\Gamma : \mathcal{F}_3 \to \mathcal{F}_3$ действа по правилото:

$$\Gamma(f)(x,y,z) \simeq \begin{cases} x^x y, & \text{ако } p_z = x \;\&\; x, y, z \in \mathbb{N} \\ f(x+x, y, z+2), & \text{ако } p_z = x \;\&\; x, y, z \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Да се докаже, че:

а) операторът Γ е компактен.

б) ако $f_\Gamma = \mathtt{lfp}(\Gamma)$, то:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{N})[!f_\Gamma(x,y,z) \implies (\exists \text{ просто число } p)[p \geq x \;\&\; p^p y \mid f_\Gamma(x,y,z)].$$

Задача 4.15. Операторът $\Gamma : \mathcal{F}_3 \to \mathcal{F}_3$ е зададен с равенството:

$$\Gamma(f)(x,y,z) = \begin{cases} z, & y = 0 \,\&\, x, z \in \mathbb{N} \\ f(x, y-1, xy+z), & y > 0 \,\&\, x, z \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

а) Докажете, че Γ е компактен;

б) Докажете, че ако $f_\Gamma = \texttt{lfp}(\Gamma)$, то

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})[f_\Gamma(x,y,0) = \frac{xy(y+1)}{2}].$$

Упътване. Да разгледаме свойството над ествествените числа

$$P(y) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x, z \in \mathbb{N})[f_\Gamma(x,y,z) = \frac{xy(y+1)}{2} + z].$$

Докажете с математическа индукция по $y \in \mathbb{N}$, че $(\forall y \in \mathbb{N})[P(y)]$. □

Забележка 4.1. Да разгледаме програмата на езика **REC**:

```
h(x,y) = f(x,y,0) where
  f(x,y,z) = if y == 0 then z
             else f(x, y-1, x*y + z)
```

Съобразете, че ние горе на практика доказахме, че

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})[\mathcal{D}_V[\![\texttt{h}]\!](x,y) = \frac{xy(y+1)}{2}].$$

Библиография

[1] Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell*. Cambridge University Press, 2015.

[2] Roberto Bruni and Ugo Montanari. *Models of Computation*. Springer, 2017.

[3] Marcelo Fiore. Lecture Notes on Denotational Semantics. https://www.cl.cam.ac.uk/teaching/1920/DenotSem/DenotSemNotes.pdf. Достъпен на 3 януари 2020 г.

[4] Carl Gunter. *Semantics of Programming Languages*. MIT Press, 1992.

[5] Robert Harper. *Practical Foundations for Programming Languages*. CUP, 2016.

[6] Benjamin Pierce. *Types and Programming Languages*. MIT Press, 2002.

[7] Glynn Winskel. *The Formal Semantics of Programming Languages*. MIT Press, 1993.

[8] Ангел Дичев и Иван Сосков. *Теория на програмите*. СУ „Св. Климент Охридски”, 1998.

Азбучен указател