Вариант 1

Да означим с $N_x(\omega)$ броя на срещанията на буквата x в ω.

Задача 1. Да разгледаме езика

$$L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid N_a(\omega) \equiv 1 \bmod 3 \;\&\; N_b(\omega) \geq 2\}.$$

а) Постройте минимален детерминиран тотален автомат разпознаващ L.

б) Опишете думите, които се съдържат в класа на еквивалентност на думата $aabaa$ относно релацията на Майхил-Нероуд за езика L.

За всяко $k = 0, 1, 2$ и $n = 0, 1, 2$, да дефинираме езика

$$L_{n,k} = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid N_a(\omega) \equiv k \bmod 3 \;\&\; N_b(\omega) \geq n\}.$$

На всеки език $L_{n,k}$ съпоставяме състоянието $q_{n,k}$. Началното състояние ще бъде $q_{1,2}$, защото $L = L_{1,2}$. Финалното състояние ще бъде $q_{0,0}$, защото ε принадлежи единствено на $L_{0,0}$. Функцията на преходите δ се определя чрез следните свойства:

- $a^{-1}L_{1,2} = L_{0,2}$ и $b^{-1}L_{1,2} = L_{1,1}$;
- $a^{-1}L_{0,2} = L_{2,2}$ и $b^{-1}L_{0,2} = L_{0,1}$;
- $a^{-1}L_{1,1} = L_{0,1}$ и $b^{-1}L_{1,1} = L_{1,0}$;
- $a^{-1}L_{2,2} = L_{1,2}$ и $b^{-1}L_{2,2} = L_{2,1}$;
- $a^{-1}L_{0,1} = L_{2,1}$ и $b^{-1}L_{0,1} = L_{0,0}$;
- $a^{-1}L_{1,0} = L_{0,0}$ и $b^{-1}L_{1,0} = L_{1,0}$;
- $a^{-1}L_{0,0} = L_{2,0}$ и $b^{-1}L_{0,0} = L_{0,0}$;
- $a^{-1}L_{2,1} = L_{1,1}$ и $b^{-1}L_{2,1} = L_{2,0}$;
- $a^{-1}L_{2,0} = L_{1,0}$ и $b^{-1}L_{2,0} = L_{2,0}$.

Целият автомат е изобразен на Фигура 1.

За подточка б), лесно се съобразява, че $\delta^\star(q_{1,2}, aabaa) = q_{0,1}$, т.е. $(aabaa)^{-1}L_{1,2} = L_{0,1}$. Тогава:

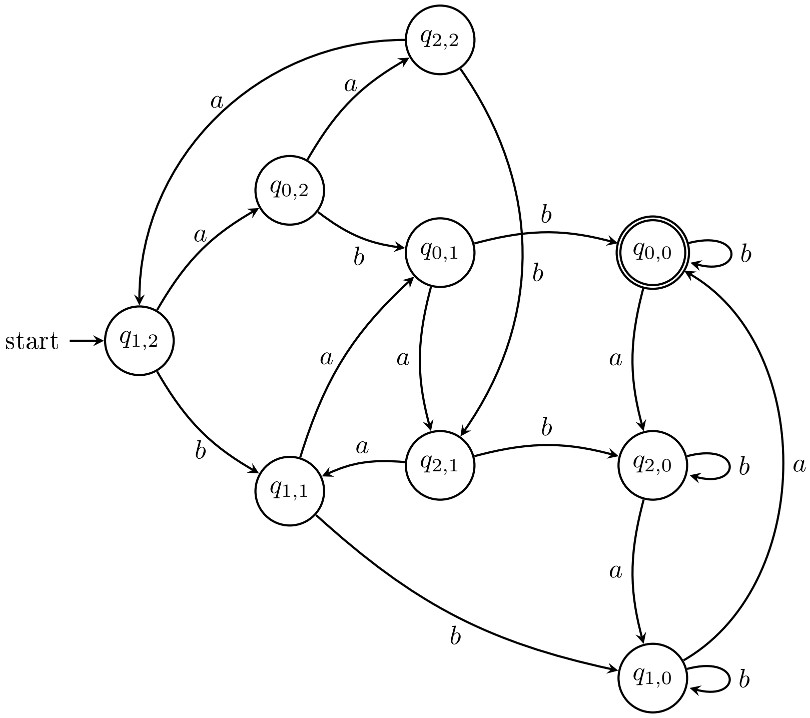
$$\begin{aligned}
[aabaa]_L &\stackrel{\text{деф}}{=} \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid (aabaa)^{-1}L = \omega^{-1}L\} \\
&= \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid L_{0,1} = \omega^{-1}L_{1,2}\} \\
&= \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid \delta^\star(q_{1,2}, \omega) = q_{0,1}\} \\
&= \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid N_a(\omega) \equiv 1 \bmod 3 \;\&\; N_b(\omega) = 1\}.
\end{aligned}$$

Задача 2. Докажете, че езика

$$L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid 3N_a(\omega) \leq 2N_b(\omega) + 1\}$$

не е регулярен.

- Разглеждаме произволна константа $p \geq 1$ (не знаем колко е p).



Фигура 1: Минимален автомат за езика $L_{1,2}$

- Избираме дума $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$. Например, нека $\alpha = a^p b^{2p}$. Ясно е, че $\alpha \in L$, защото $3p \leq 4p + 1$.

- Разглеждаме произволно разбиване на α на три части $xyz = \alpha$, със свойствата $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$. Понеже $|xy| \leq p$ и $\alpha = a^p b^{2p}$, то думата xy е съставена само от a-та.

- Избираме i, за което $xy^i z \notin L$. Например, нека $i = p + 1$. Да видим какви свойства има думата $\omega = xy^i z$.

  $$N_a(\omega) = N_a(\alpha) + p|y| = p + p|y| \geq 2p.$$

  Освен това,

  $$N_b(\omega) = N_b(\alpha).$$

  Получаваме, че $\omega \notin L$, защото

  $$3N_a(\omega) \geq 6p > 4p + 1 = 2N_b(\omega) + 1.$$

Достигнахме до противоречие с лемата за покачването. Следователно, L не е регулярен.

Вариант 2

Да означим с $N_x(\omega)$ броя на срещанията на буквата x в ω.

Задача 3. Да разгледаме езика

$$L = \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid N_a(\omega) \equiv 2 \bmod 3 \ \&\ \omega \text{ започва и завършва с } b\}.$$

а) Постройте минимален детерминиран тотален автомат разпознаващ L.

б) Опишете думите, които се съдържат в класа на еквивалентност на думата $bbabb$ относно релацията на Майхил-Нероуд за езика L.

За $k = 0,1,2$, да означим $L_k = \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid N_a(\omega) \equiv k \bmod 3\}$. Нека също да разгледаме езиците:

$$L_{k,b} = L_k \cdot \{b\}$$
$$L_{b,k,b} = \{b\} \cdot L_k \cdot \{b\}.$$

Функцията на преходите δ се определя чрез следните свойства:

- $a^{-1}L_{b,2,b} = \emptyset$ и $b^{-1}L_{b,2,b} = L_{2,b}$;
- $a^{-1}L_{2,b} = L_{1,b}$ и $b^{-1}L_{2,b} = L_{2,b}$;
- $a^{-1}L_{1,b} = L_{0,b}$ и $b^{-1}L_{1,b} = L_{1,b}$;
- $a^{-1}L_{0,b} = L_{2,b}$ и $b^{-1}L_{0,b} = L_{0,b} \cup \{\varepsilon\} \stackrel{\text{деф}}{=} M$;
- $a^{-1}M = L_{2,b}$ и $b^{-1}M = M$;
- $a^{-1}\emptyset = \emptyset$ и $b^{-1}\emptyset = \emptyset$;

Състоянията на автомата са $\{q_{b,2,b}, q_{0,b}, q_{1,b}, q_{2,b}, q_\emptyset, q_M\}$. Началното състояние ще бъде $q_{b,2,b}$, защото $L = L_{b,2,b}$. Финалното състояние ще бъде q_M, защото ε принадлежи единствено на M. Целият автомат е изобразен на Фигура 2.

За подточка б), лесно се съобразява, че $\delta^\star(q_{b,2,b}, bbabb) = q_{1,b}$, т.е. $(bbabb)^{-1}L_{b,2,b} = L_{1,b}$. Тогава:

$$\begin{aligned}
[bbabb]_L &\stackrel{\text{деф}}{=} \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid (bbabb)^{-1}L = \omega^{-1}L\} \\
&= \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid L_{1,b} = \omega^{-1}L_{b,2,b}\} \\
&= \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid \delta^\star(q_{b,2,b}, \omega) = q_{1,b}\} \\
&= \{b\} \cdot \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid N_a(\omega) \equiv 1 \bmod 3\}.
\end{aligned}$$

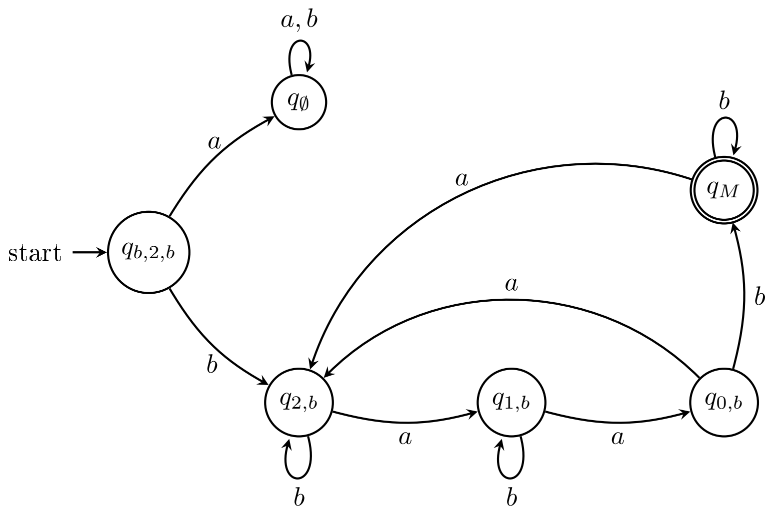
Задача 4. Докажете, че езика

$$L = \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid 3N_a(\omega) > 2N_b(\omega) + 1\}$$

не е регулярен.

Да допуснем, че L е регулярен.

- Разглеждаме произволна константа $p \geq 1$ (не знаем колко е p).



Фигура 2: Минимален автомат за езика $L_{b,2,b}$

- Избираме дума $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$. Например, нека $\alpha = b^p a^{p+1}$. Ясно е, че $\alpha \in L$, защото $3p + 3 > 2p + 1$.
- Разглеждаме произволно разбиване на α на три части $xyz = \alpha$, със свойствата $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$. Понеже $|xy| \leq p$ и $\alpha = b^p a^{p+1}$, то думата xy е съставена само от b-та.
- Избираме i, за което $xy^i z \notin L$. Например, нека $i = p + 2$. Да видим какви свойства има думата $\omega = xy^i z$.

  $$N_b(\omega) = N_b(\alpha) + (p + 1)|y| = p + (p + 1)|y| \geq 2p + 1.$$

  Освен това,

  $$N_a(\omega) = N_a(\alpha).$$

  Получаваме, че $\omega \notin L$, защото

  $$2N_b(\omega) + 1 \geq 4p + 3 > 3p + 3 = 3N_a(\omega).$$

Достигнахме до противоречие с лемата за покачването. Следователно, L не е регулярен.