Устен изпит по Изчислимост и сложност, 11.02.2025

Зад. 1. Нека f и g са произволни частични функции, а p е предикат, като всички те са на 1 аргумент. Да означим с h следната функция:

$$h(x) \simeq \begin{cases} f(x), & \text{ако } p(x) \\ g(x), & \text{ако } \neg p(x). \end{cases}$$

а) Докажете, че ако f, g и p са примитивно рекурсивни, то и h е примитивно рекурсивна.

б) Докажете, че ако f и g са **частично** рекурсивни функции, а p е рекурсивен предикат, то h е частично рекурсивна функция.

Зад. 2. Нека f е едноместна тотална функция.

а) Дефинирайте функция I_f, която да е функция-история на f (може да вземете $\widehat{f}$, H_f, или пък да си дефинирате ваша функция-история).

б) Докажете, че I_f наистина е история на f, което ще рече: от $I_f(x)$ можем да възстановим $f(z)$ за всяко $z \leq x$.

в) Докажете, че f е примитивно рекурсивна тогава и само тогава, когато I_f е примитивно рекурсивна.

г) Кажете кога функцията f се дефинира със силна рекурсия от дадени $c \in \mathbb{N}$ и двуместна функция F. Докажете, че силната рекурсия не е по-мощна от примитивната рекурсия, или все едно: ако F е примитивно рекурсивна, то и определяемата функция f ще е примитивно рекурсивна.

Зад. 3. Нека $\mathcal{K}$ е клас от едноместни изчислими функции.

а) Дайте определение за универсална функция за класа $\mathcal{K}$.

б) Да наречем $\mathcal{K}$ *ефективно изброим*, ако съществува рекурсивна функция h, такава че $\mathcal{K} = \{\varphi_{h(n)} \mid n \in N\}$. Докажете, че класът $\mathcal{K}$ има универсална функция точно тогава, когато е ефективно изброим.

в) Нека $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Вярно ли е, че ако $\mathcal{K}$ е ефективно изброим, то проблемът "$\varphi_a \in \mathcal{K}$?" е полуразрешим? А обратното дали е вярно? Обосновете отговорите си.

Успех! $\ddot\smile$