Писмен изпит по Изчислимост и сложност, 06.02.2025

Зад. 1. Докажете, че са примитивно рекурсивни:

а) функцията $f(x,y) = \underbrace{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}_{y+1 \text{ пъти}}$;

б) предикатът

$p(x) \iff$ в двоичния запис на x няма две съседни еднакви цифри.

Зад. 2. Нека f е произволна едноместна функция. Докажете, че следните условия са еквивалентни:

(1) f се получава с минимизация от някоя примитивно рекурсивна функция (т.е. $f(x) \simeq \mu y[g(x,y) = 0]$ за някоя пр. р. ф. g).

(2) Множеството $G = \{(x,y) \mid f(x) \simeq y\}$ има примитивно рекурсивна характеристична функция.

Зад. 3. A, B и C са полуразрешими множества от естествени числа, такива че $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$, $A \cap B = \emptyset$ и $A \cap C = \emptyset$. Известно е още, че $B \cap C$ е разрешимо. Докажете, че A, B и C са разрешими.

Зад. 4. Нека $c \in \mathbb{N}$ е фиксирано естествено число.
а) Докажете, че множеството $A = \{a \mid \{0, \dots, c\} \subseteq W_a\}$ е полуразрешимо.

б) Докажете, че множествата $B = \{a \mid W_a \subseteq \{0, \dots, c\}\}$ и $C = \{a \mid W_a = \{0, \dots, c\}\}$ не са полуразрешими.

Успех! $\ddot\smile$