Изчислимост на извличането на корен

Както е известно, ако n е положително цяло число, то $\lambda\xi.\sqrt[n]{\xi}$ е частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$ с дефиниционна област $[0,\infty)$, когато n е четно, и е функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$, когато n е нечетно.

Теорема. За всяко положително цяло число n функцията $\lambda\xi.\sqrt[n]{\xi}$ е изчислима.

Доказателство. Ще използваме теорема 2 от текста „Изчислимост в стил на Гжегорчик на реални числа и реални функции“. Нека n е положително цяло число. Дефинираме функционали F и G от $\mathcal{F}_{3,1}$ чрез равенствата

$$F(f_1,g_1,i) = \lfloor \sqrt[n]{f_1((i+1)^n-1) \dot{-} g_1((i+1)^n-1)} \rfloor,$$
$$G(f_1,g_1,i) = \lfloor \sqrt[n]{g_1((i+1)^n-1) \dot{-} f_1((i+1)^n-1)} \rfloor.$$

Очевидно всеки от тях е μ-рекурсивен и дефиниционната му област съдържа множеството $\mathbb{T}\times\mathbb{T}\times\mathbb{N}$. Нека ξ_1 е произволно число, за което $\sqrt[n]{\xi_1}$ е дефинирано, а f_1 и g_1 са такива функции от $\mathbb{T}$, че

$$\left|\frac{f_1(k)-g_1(k)}{k+1}-\xi_1\right| < \frac{1}{k+1} \tag{1}$$

за всяко $k\in\mathbb{N}$. Ще покажем, че

$$\left|\frac{F(f_1,g_1,i)-G(f_1,g_1,i)}{i+1}-\sqrt[n]{\xi_1}\right| < \frac{1}{i+1} \tag{2}$$

за всяко $i\in\mathbb{N}$.

Нека i е произволно естествено число. Да положим

$$a = f_1((i+1)^n-1) - g_1((i+1)^n-1).$$

Тогава при $k=(i+1)^n-1$ неравенството (1) добива вида

$$\left|\frac{a}{(i+1)^n}-\xi_1\right| < \frac{1}{(i+1)^n}. \tag{3}$$

Ако $a=0$, то неравенството (2) е изпълнено, защото в този случай неравенството (3) показва, че

$$|\xi_1| < \frac{1}{(i+1)^n}$$

и следователно

$$|\sqrt[n]{\xi_1}| < \frac{1}{i+1},$$

а пък дефиницията на функционалите F и G дава, че

$$F(f_1, g_1, i) = G(f_1, g_1, i) = 0.$$

Да разгледаме сега случая, когато $a > 0$. Тогава $a \geq 1$, поради което от неравенството (3) следва, че $\xi_1 > 0$. От дефиницията на функционалите F и G получаваме равенствата

$$\begin{aligned} F(f_1, g_1, i) &= \lfloor \sqrt[n]{a} \rfloor, \\ G(f_1, g_1, i) &= 0, \end{aligned}$$

а от първото от тях следват неравенствата

$$(F(f_1, g_1, i))^n \leq a < (F(f_1, g_1, i) + 1)^n.$$

От второто от тези неравенства виждаме, че $F(f_1, g_1, i) \neq 0$, и това позволява да заключим, че

$$(F(f_1, g_1, i) - 1)^n < a < (F(f_1, g_1, i) + 1)^n.$$

Оттук, като използваме още веднъж неравенството (3), получаваме неравенствата

$$(F(f_1, g_1, i) - 1)^n \leq a - 1 < (i+1)^n \xi_1 < a + 1 \leq (F(f_1, g_1, i) + 1)^n.$$

От тях обаче следва, че

$$F(f_1, g_1, i) - 1 < (i+1)\sqrt[n]{\xi_1} < F(f_1, g_1, i) + 1$$

и значи

$$\left| \frac{F(f_1, g_1, i)}{i+1} - \sqrt[n]{\xi_1} \right| < \frac{1}{i+1},$$

тъй че е в сила неравенството (2).

Остана да се занимаем със случая, когато $a < 0$. Тогава $a \leq -1$, поради което от неравенството (3) следва, че $\xi_1 < 0$ и значи коренният показател n е нечетен. От дефиницията на функционалите F и G сега получаваме равенствата

$$\begin{aligned} F(f_1, g_1, i) &= 0, \\ G(f_1, g_1, i) &= \lfloor \sqrt[n]{-a} \rfloor, \end{aligned}$$

а от второто от тях следват неравенствата

$$(G(f_1, g_1, i))^n \leq -a < (G(f_1, g_1, i) + 1)^n.$$

От второто от тези неравенства виждаме, че $G(f_1, g_1, i) \neq 0$, и това позволява да заключим, че

$$(G(f_1, g_1, i) - 1)^n < -a < (G(f_1, g_1, i) + 1)^n.$$

Оттук, като използваме още веднъж неравенството (3), получаваме неравенствата

$$(G(f_1, g_1, i) - 1)^n \leq -a - 1 < -(i+1)^n \xi_1 < -a + 1 \leq (G(f_1, g_1, i) + 1)^n.$$

От тях обаче следва, че

$$G(f_1, g_1, i) - 1 < -(i+1)\sqrt[n]{\xi_1} < G(f_1, g_1, i) + 1$$

и значи

$$\left| \frac{G(f_1, g_1, i)}{i+1} + \sqrt[n]{\xi_1} \right| < \frac{1}{i+1},$$

тъй че отново е в сила неравенството (2). □

Забележка. От дефиницията на функционала G в горното доказателство е ясно, че при $a \geq 0$ имаме равенството $G(f_1, g_1, i) = 0$, а от разсъжденията в доказателството се вижда, че при четни стойности на n случаят $a < 0$ не е възможен за разглежданите функции f_1 и g_1. Поради това при четно n доказателството може да се опрости, като дефиниционното равенство на функционала G се замени с равенството $G(f_1, g_1, i) = 0$. Всъщност без тази замяна и почти във вида, в който е изложено по-горе, доказателството може да послужи при четно n, за да се докаже изчислимостта на продължението на функцията $\lambda \xi . \sqrt[n]{\xi}$ до функция, дефинирана навсякъде в $\mathbb{R}$ и приемаща стойност $-\sqrt[n]{-\xi}$ за всяко отрицателно реално число ξ.