Рекурсивни номерации на дискретно параметризирани множества

Както обикновено, ще означаваме множеството на рационалните числа с $\mathbb{Q}$. Очевидно $\mathbb{Q}$ е образът на $\mathbb{N}^3$ посредством изображението Θ, което на всеки елемент (j,k,l) на $\mathbb{N}^3$ съпоставя частното $\dfrac{j-k}{l+1}$. Въпросното изображение не е обратимо, но множеството

$$\{(j,k,l,j',k',l') \in \mathbb{N}^6 | \, \Theta(j,k,l) = \Theta(j',k',l')\}$$

е рекурсивно.

Ще разглеждаме по-общия случай на произволно изображение Θ с дефиниционна област $\mathbb{N}^K$ (елементите на $\mathrm{rng}(\Theta)$ могат да бъдат обекти от какъв да е вид), където K е положително цяло число и множеството

$$\{(i_1,\ldots,i_K,i'_1,\ldots,i'_K) \in \mathbb{N}^{2K} | \, \Theta(i_1,\ldots,i_K) = \Theta(i'_1,\ldots,i'_K)\}$$

е рекурсивно.

Един пример за такова изображение, който е по-прост от разгледания в началото, но въпреки това заслужава внимание, е следният: $\mathrm{dom}(\Theta) = \mathbb{N}^2$ и $\Theta(j,k) = j-k$ за всеки елемент (j,k) на $\mathbb{N}^2$ (в този случай $\mathrm{rng}(\Theta)$ е множеството $\mathbb{Z}$ на целите числа). За нас обаче ще бъде по-важен следният пример, който при $N=1$ може да бъде отъждествен с първоначалния: N е произволно положително цяло число, $\mathrm{dom}(\Theta) = \mathbb{N}^{3N}$ и

$$\Theta(j_1,k_1,l_1,\ldots,j_N,k_N,l_N) = \left(\frac{j_1-k_1}{l_1+1},\ldots,\frac{j_N-k_N}{l_N+1}\right)$$

при всеки избор на естествените числа $j_1,k_1,l_1,\ldots,j_N,k_N,l_N$, следователно $\mathrm{rng}(\Theta) = \mathbb{Q}^N$.

В общия случай за една функция θ от $\mathbb{N}$ към $\mathrm{rng}(\Theta)$ ще казваме, че е Θ-*рекурсивна*, ако съществуват такива рекурсивни функции $f_1,\ldots,f_K$ от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$, че за всяко $m \in \mathbb{N}$ е в сила равенството

$$\theta(m) = \Theta(f_1(m),\ldots,f_K(m)). \tag{1}$$

В условията на трите разгледани примера Θ-рекурсивните функции от $\mathbb{N}$ към $\mathrm{rng}(\Theta)$ ще наричаме просто *рекурсивни*.

Забележка. Поради включванията $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ функциите от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ са същевременно и функции от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{Z}$, а функциите от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{Z}$ са същевременно и функции от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{Q}$. За да бъдем сигурни, че разрешеното преди малко неспоменаване на изображението Θ не може да доведе до недоразумения, редно е да покажем, че за функциите от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ обичайната им рекурсивност е еквивалентна на рекурсивността им като функции от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{Z}$, а за функциите от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{Z}$ рекурсивността им като такива е еквивалентна на рекурсивността им като функции от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{Q}$. Верността на тези твърдения следва от обстоятелството, че при всеки избор на естествени числа j, k и l имаме:

$$j = j - 0,$$
$$j - k \in \mathbb{N} \Rightarrow j - k = j \dot{-} k,$$
$$j - k = \frac{j-k}{0+1},$$
$$\frac{j-k}{l+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{j-k}{l+1} = \left\lfloor \frac{j \dot{-} k}{l+1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k \dot{-} j}{l+1} \right\rfloor.$$

Лема 1. Съществува поне една Θ-рекурсивна номерация на множеството $\mathrm{rng}(\Theta)$. Ако това множество е безкрайно, то съществува обратима негова Θ-рекурсивна номерация.

Доказателство. Ако $f_1, \ldots, f_K$ са рекурсивни функции от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$, за които е в сила равенството

$$\{(f_1(m), \ldots, f_K(m)) \,|\, m \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^K,$$

то функцията θ, дефинирана чрез равенството (1), е рекурсивна номерация на множеството $\mathrm{rng}(\Theta)$. Ако $\mathrm{rng}(\Theta)$ е безкрайно, можем, използвайки номерацията θ, да дефинираме индуктивно функция h от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ чрез равенството

$$h(n) = \min\{k \in \mathbb{N} \,|\, \theta(k) \notin \{\theta(h(l)) \,|\, l < n\}\}$$

и тогава $\lambda n.\theta(h(n))$ ще бъде обратима рекурсивна номерация на $\mathrm{rng}(\Theta)$. □

Лема 2. Нека τ е Θ-рекурсивна номерация на множеството $\mathrm{rng}(\Theta)$. Тогава:

(a) съществува такава рекурсивна функция h от $\mathbb{N}^K$ към $\mathbb{N}$, че при всеки избор на естествените числа $i_1, \ldots, i_K$ да е в сила равенството

$$\Theta(i_1, \ldots, i_K) = \tau(h(i_1, \ldots, i_K));$$

(b) за да бъде една функция от $\mathbb{N}$ към $\mathrm{rng}(\Theta)$ Θ-рекурсивна необходимо и достатъчно е тя да може да се представи във вида $\lambda m.\tau(s(m))$, където s е рекурсивна функция от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$.

Доказателство. За доказателството на твърдението (a) полагаме

$$h(i_1, \ldots, i_K) = \min\{k \in \mathbb{N} \,|\, \tau(k) = \Theta(i_1, \ldots, i_K)\}.$$

Достатъчността в (b) е очевидна. За доказателството на необходимостта да предположим, че θ е някоя е рекурсивна функция от $\mathbb{N}$ към $\mathrm{rng}(\Theta)$, и да положим

$$s(m) = h(f_1(m), \ldots, f_K(m)),$$

където h е със свойствата от (a), а $f_1, \dots, f_K$ са такива рекурсивни функции от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$, че за всяко $m \in \mathbb{N}$ е в сила равенството (1). $\square$

Лема 3. Всеки две Θ-рекурсивни номерации на $\operatorname{rng}(\Theta)$ са еквивалентни.

Доказателство. Нека θ и θ' са Θ-рекурсивни номерации на $\operatorname{rng}(\Theta)$. По точка (b) от лема 2 функцията θ' може да се представи във вида $\lambda m.\theta(s(m))$, където s е рекурсивна функция от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$. Тогава функцията s ще бъде изчислима (θ, θ')-реализация на тъждественото изображение на $\operatorname{rng}(\Theta)$ в себе си и следователно това изображение е (θ, θ')-изчислимо. Неговата (θ', θ)-изчислимост се установява по аналогичен начин. $\square$

Нека Θ_1 и Θ_2 са изображения с дефиниционни области съответно $\mathbb{N}^{K_1}$ и $\mathbb{N}^{K_2}$, където K_1 и K_2 са положителни цели числа, и нека множествата

$$\{(i_1, \dots, i_{K_l}, i'_1, \dots, i'_{K_l}) \in \mathbb{N}^{2K} \,|\, \Theta_l(i_1, \dots, i_K) = \Theta_l(i'_1, \dots, i'_K)\}, \quad l = 1, 2,$$

са рекурсивни. Ако θ_1 е Θ_1-рекурсивна номерация на $\operatorname{rng}(\Theta_1)$ и θ_2 е Θ_2-рекурсивна номерация на $\operatorname{rng}(\Theta_2)$, то (θ_1, θ_2)-изчислимите частични изображения на $\operatorname{rng}(\Theta_1)$ в $\operatorname{rng}(\Theta_2)$ ще наричаме (Θ_1, Θ_2)-*изчислими*. От лема 3 следва, че така дефинираното свойство (Θ_1, Θ_2)-изчислимост не зависи от избора на θ_1 и θ_2.