Изчислимост относно именуващи системи

Нека $\mathbb{T}$ е множеството на навсякъде дефинираните функции от $\mathcal{F}_1$. Ако X и Y са множества, всяко от които е $\mathbb{N}$ или $\mathbb{T}$, а γ е частично изображение на X в Y, в следните случаи приемаме, че γ е *изчислимо*:

- $X = Y = \mathbb{N}$ и съществува частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_1$, която е продължение на γ.
- $X = Y = \mathbb{T}$ и съществува μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, който е продължение на γ.
- $X = \mathbb{T}$, $Y = \mathbb{N}$ и съществува μ-рекурсивен функционал от $\mathcal{F}_{1,0}$, който е продължение на γ.
- $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{T}$ и съществува частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_2$, която е продължение на $\lambda si.\gamma(s)(i)$.

Очевидно всички рестрикции на разглежданите по-горе изчислими изображения също са изчислими.

Твърдение 1. Ако $X = \mathbb{N}$ или $X = \mathbb{T}$, то тъждественото изображение на X в X е изчислимо.

Доказателство. Ако $X = \mathbb{N}$, то въпросното изображение е проекционна функция. Ако пък $X = \mathbb{T}$, то разглежданото изображение има за продължение оператора, съответен на μ-рекурсивния функционал $\lambda ux.u(x)$. $\square$

Твърдение 2. Нека X_0, X_1, X_2 са множества, всяко от които е $\mathbb{N}$ или $\mathbb{T}$, γ_1 е изчислимо частично изображение на X_0 в X_1, а γ_2 е изчислимо частично изображение на X_1 в X_2. Тогава частичното изображение γ на X_0 в X_2, дефинирано чрез равенството $\gamma(s) = \gamma_2(\gamma_1(s))$, също е изчислимо.

Доказателство. Разглеждат се поотделно осемте възможности за тройката от множествата X_0, X_1, X_2.

Да предположим най-напред, че $X_0 = X_1 = \mathbb{N}$. Нека δ_1 е частично рекурсивно продължение на γ_1. Ако X_2 също е $\mathbb{N}$, то изображението γ има за продължение частично рекурсивната функция δ, дефинирана чрез равенството $\delta(s) = \delta_2(\delta_1(s))$, където δ_2 е частично рекурсивно продължение на γ_2. Ако пък $X_2 = \mathbb{T}$, то $\lambda si.\gamma(s)(i)$ има за продължение частично рекурсивната функция δ от $\mathcal{F}_2$, дефинирана чрез равенството $\delta(s,i) = \delta_2(\delta_1(s), i)$, където δ_2 е частично рекурсивно продължение на $\lambda ti.\gamma_2(t)(i)$.

В случая, когато $X_0 = \mathbb{N}$, а $X_1 = \mathbb{T}$, нека δ_1 е частично рекурсивно продължение на $\lambda si.\gamma_1(s)(i)$. Ако $X_2 = \mathbb{N}$, то γ има за продължение функцията δ, дефинирана чрез равенството $\delta(s) = \delta_2(\lambda i.\delta_1(s,i))$, където δ_2 е μ-рекурсивен функционал от $\mathcal{F}_{1,0}$, продължаващ γ_2 – така дефинираната функция δ е частично рекурсивна по силата на отбелязан в бележка под линия частен случай на твърдение 3 от текста „μ-рекурсивни функционали и μ-рекурсивни оператори“. Ако пък $X_2 = \mathbb{T}$, то $\lambda si.\gamma(s)(i)$ има за продължение функцията δ от $\mathcal{F}_2$, дефинирана чрез равенството $\delta(s,i) = \delta_2(\lambda i.\delta_1(s,i))(i)$, където δ_2 е μ-рекурсивен оператор, продължаващ γ_2 – частичната рекурсивност на така дефинираната функция δ се вижда с помощта на бележката под линия към твърдение 3° от споменатия по-горе текст.

При $X_0 = \mathbb{T}$ и $X_1 = \mathbb{N}$ нека δ_1 е μ-рекурсивен функционал от $\mathcal{F}_{1,0}$, който е продължение на γ_1. Ако $X_2 = \mathbb{N}$, то изображението γ има за продължение функционала δ от $\mathcal{F}_{1,0}$, дефиниран чрез равенството $\delta(s) = \delta_2(\delta_1(s))$, където δ_2 е частично рекурсивно продължение на γ_2 – този функционал е μ-рекурсивен по силата на твърдения 1 и 3 от текста, за който стана дума. Ако пък $X_2 = \mathbb{T}$, то γ има за продължение изображението δ, дефинирано чрез равенството $\delta(s) = \lambda i.\delta_2(\delta_1(s), i)$, където δ_2 е частично рекурсивно продължение на $\lambda ti.\gamma_2(t)(i)$ – това изображение е μ-рекурсивен оператор, защото е операторът, съответен на μ-рекурсивния функционал $\lambda si.\delta_2(\delta_1(s), i)$.

Остана да разгледаме случая, когато $X_0 = X_1 = \mathbb{T}$. Нека δ_1 е μ-рекурсивен оператор, който е продължение на γ_1. Ако $X_2 = \mathbb{N}$, то изображението γ има за продължение функционала δ от $\mathcal{F}_{1,0}$, дефиниран чрез равенството $\delta(s) = \delta_2(\delta_1(s))$, където δ_2 е μ-рекурсивен функционал от $\mathcal{F}_{1,0}$, продължаващ γ_2 – това, че функционалът δ е μ-рекурсивен, може да се види с помощта на твърдение 3 от вече споменатия текст. Ако пък $X_2 = \mathbb{T}$, то γ има за продължение изображението δ, дефинирано чрез същото равенство, където δ_2 обаче е μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, продължаващ γ_2 – така дефинираното δ също е μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$ по силата на бележката под линия към твърдение 3° от същия текст. □

Ще наричаме *номерация* на едно множество M всяко частично изображение на $\mathbb{N}$ върху M. *Представяне* на M ще наричаме всяко частично изображение на $\mathbb{T}$ върху M.[1] Номерациите и представянията на M ще наричаме с общото название *именуващи системи за* M.

Пример 1. Нека p и q са такива функции от $\mathbb{T}$, че

$$\{(p(s), q(s)) \mid s \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2.$$

Ако на всяко s от $\mathbb{N}$ поставим в съответствие числото

$$\frac{p(s)}{q(s)+1},$$

получаваме една номерация с дефиниционна област $\mathbb{N}$ на множеството неотрицателните рационални числа.

Пример 2. За една функция t от $\mathbb{T}$ ще казваме, че *представя в смисъл на Гжегорчик*[2] едно реално число ξ, ако за всяко i от $\mathbb{N}$ е в сила неравен-

[1] Разбира се, за да съществува номерация на едно множество, необходимо е то да е най-много изброимо, а за да съществува негово представяне, необходимо е мощността му да не надминава тази на континуума.

[2] По името на полския математик Анджей Гжегорчик (Andrzej Grzegorczyk, 1922–2014).

ството

$$\left|\frac{t(i)}{i+1} - \xi\right| < \frac{1}{i+1}.$$

Лесно е да се види, че ако дадена функция от $\mathbb{T}$ представя в смисъл на Гжегорчик някое реално число, това число е единствено и е неотрицателно. Ако на всяка такава функция поставим в съответствие представяното от нея реално число, получаваме едно представяне на множеството на неотрицателните реални числа, което ще наричаме *представяне на Гжегорчик*.

Нека ν_1 и ν_2 са именуващи системи, а f е частично изображение на $\mathrm{rng}(\nu_1)$ в $\mathrm{rng}(\nu_2)$. Ще наричаме (ν_1, ν_2)-*реализация* на f такова частично изображение φ на $\mathrm{dom}(\nu_1)$ в $\mathrm{dom}(\nu_2)$, че $f(\nu_1(s)) = \nu_2(\varphi(s))$ за всяко s от $\mathrm{dom}(\nu_1)$, за което $\nu_1(s) \in \mathrm{dom}(f)$. Ще казваме, че изображението f е (ν_1, ν_2)-*изчислимо*, ако съществува изчислима (ν_1, ν_2)-реализация на f.

Забележка. Лесно е да се види, че при предположенията от горния абзац съществува поне една (ν_1, ν_2)-реализация на f и че тя е единствена, ако имаме равенството $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{rng}(\nu_1)$ и изображението ν_2 е обратимо.

Пример 3. Нека ν_1 е номерацията от пример 1, а ν_2 е представянето на Гжегорчик. Нека f е тъждественото изображение на множеството на неотрицателните рационални числа в множеството на неотрицателните реални числа. Да означим с φ изображението на $\mathbb{N}$ в $\mathrm{dom}(\nu_2)$, дефинирано чрез равенството

$$\varphi(s) = \lambda i. \left\lfloor \frac{p(s)}{q(s)+1}(i+1) \right\rfloor.$$

Тогава φ е (ν_1, ν_2)-реализация на f. Ако функциите p и q са рекурсивни, изображението φ е изчислимо и следователно изображението f е (ν_1, ν_2)-изчислимо.

Пример 4. Нека ν е представянето на Гжегорчик, а f е изображението на множеството на неотрицателните реални числа в себе си, дефинирано чрез равенството $f(\xi) = \xi + 1$. За всяко t от $\mathrm{dom}(\nu)$ да положим

$$\varphi(t) = \lambda i.t(i) + i + 1.$$

Тогава φ е една изчислима (ν, ν)-реализация на изображението f и следователно то е (ν, ν)-изчислимо.

Пример 5. Нека X_1 и X_2 са множества, всяко от които съвпада с някое от множествата $\mathbb{N}$ и $\mathbb{T}$, и нека ν_i е тъждественото изображение на X_i в себе си при $i = 1, 2$. В такъв случай едно частично изображение на X_1 в X_2 е (ν_1, ν_2)-изчислимо точно тогава, когато то е изчислимо. И наистина, нека f е частично изображение на X_1 в X_2. Тогава, както се вижда веднага, f е (ν_1, ν_2)-реализация на себе си и следователно, ако f е изчислимо, то f е (ν_1, ν_2)-изчислимо. Да предположим сега, че частичното изображение f е (ν_1, ν_2)-изчислимо. Тогава ще съществува някоя изчислима (ν_1, ν_2)-реализация φ на f. Лесно обаче се проверява, че f е рестрикция на φ, а оттук следва, че f също е изчислимо.

Твърдение 3. Ако ν е именуваща система, то тъждественото изображение на $\mathrm{rng}(\nu)$ в себе си е (ν, ν)-изчислимо.

Доказателство. Тъждественото изображение на $\mathrm{dom}(\nu)$ в себе си е изчислима (ν,ν)-реализация на тъждественото изображение на $\mathrm{rng}(\nu)$ в себе си. $\square$

Твърдение 4. Нека ν_0, ν_1, ν_2 са именуващи системи, f_1 е (ν_0, ν_1)-изчислимо частично изображение на $\mathrm{rng}(\nu_0)$ в $\mathrm{rng}(\nu_1)$ и f_2 е (ν_1, ν_2)-изчислимо частично изображение на $\mathrm{rng}(\nu_1)$ в $\mathrm{rng}(\nu_2)$. Тогава частичното изображение f на $\mathrm{rng}(\nu_0)$ в $\mathrm{rng}(\nu_2)$, дефинирано чрез равенството $f(x) = f_2(f_1(x))$, е (ν_0, ν_2)-изчислимо.

Доказателство. Нека φ_1 е изчислима (ν_0, ν_1)-реализация на f_1, а φ_2 е изчислима (ν_1, ν_2)-реализация на f_2. Ако означим с φ частичното изображение на $\mathrm{dom}(\nu_0)$ в $\mathrm{dom}(\nu_2)$, дефинирано чрез равенството $\varphi(s) = \varphi_2(\varphi_1(s))$, то φ е изчислима (ν_0, ν_2)-реализация на f. $\square$

Ако ν е представяне на едно множество M, то елементите на M от вида $\nu(t)$, където t е рекурсивна функция от $\mathrm{dom}(\nu)$, се наричат *ν-изчислими.*

Пример 6. Нека ν е представянето на Гжегорчик. Тогава всяко неотрицателно рационално число е ν-изчислимо. И наистина, ако a е неотрицателно рационално число, то $a = \nu(t)$ при $t = \lambda i.\lfloor (i+1)a \rfloor$. Числото $\sqrt{2}$ също е ν-изчислимо, защото $\sqrt{2} = \nu(t)$ при $t = \lambda i.\max\{j \in \mathbb{N} \,|\, j^2 < 2(i+1)^2\}$.

Твърдение 5. Нека ν_1 е именуваща система, ν_2 е представяне и f е (ν_1, ν_2)-изчислимо изображение на $\mathrm{rng}(\nu_1)$ в $\mathrm{rng}(\nu_2)$. Ако ν_1 е номерация, то всички стойности на f са ν_2-изчислими, а ако ν_1 е представяне, то стойностите на f за ν_1-изчислимите елементи на $\mathrm{dom}(f)$ са ν_2-изчислими.

Доказателство. Нека φ е изчислима (ν_1, ν_2)-реализация на f. Това, че φ е (ν_1, ν_2)-реализация на f, означава, че φ е частично изображение на $\mathrm{dom}(\nu_1)$ в $\mathrm{dom}(\nu_2)$ и $f(\nu_1(s)) = \nu_2(\varphi(s))$ за всяко s от $\mathrm{dom}(\nu_1)$, за което $\nu_1(s) \in \mathrm{dom}(f)$. Ако ν_1 е номерация, то φ е частично изображение на $\mathbb{N}$ в $\mathbb{T}$, а изчислимостта на φ означава, че някоя частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_2$ е продължение на $\lambda si.\varphi(s)(i)$. В такъв случай е ясно, че φ ще преобразува всички елементи на $\mathrm{dom}(\nu_1)$ в рекурсивни функции. Да разгледаме сега случая, когато ν_1 е представяне. В този случай φ е частично изображение на $\mathbb{N}$ в $\mathbb{T}$ и съществува μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, който е продължение на φ. Оттук с помощта на твърдение 2° от текста „μ-рекурсивни функционали и μ-рекурсивни оператори“ заключаваме, че φ преобразува рекурсивните функции от дефиниционната си област в рекурсивни функции. $\square$

Твърдение 6. Нека ν_1 е именуваща система, ν_2 е представяне и a е ν_2-изчислим елемент на $\mathrm{rng}(\nu_2)$. Тогава изображението, което съпоставя a на всеки елемент на $\mathrm{rng}(\nu_1)$, е (ν_1, ν_2)-изчислимо.

Доказателство. Да означим въпросното изображение с f. Нека $a = \nu_2(t)$, където t е рекурсивна функция от $\mathrm{dom}(\nu_2)$, и нека φ е изображението, което съпоставя t на всеки елемент на $\mathrm{dom}(\nu_1)$. Тогава лесно се проверява, че φ е изчислима (ν_1, ν_2)-реализация на f (в случая, когато ν_1 е представяне, използваме твърдение 1° от текста „μ-рекурсивни функционали и μ-рекурсивни оператори“). $\square$