Ефективна равномерна непрекъснатост на някои изчислими реални функции

Лема за равномерност

За всяко m в $\mathbb{N}$ нека $\mathbb{N}_m = \{k \in \mathbb{N} \,|\, k \leq m\}$.

Лема за подреждане. Нека g е дадена рекурсивна функция на един аргумент. Функциите в $\mathbb{N}$, които имат дефиниционни области от вида $\mathbb{N}_m$ и се мажорират от функцията g, могат да се подредят в такава безкрайна редица без повторения $u_0, u_1, u_2, \ldots$, че функцията u от $\mathcal{F}_2$, определена с равенството

$$u(n, x) = u_n(x),$$

да е частично рекурсивна и да има рекурсивна дефиниционна област. При това подреждането може да се извърши така, че за всяко естествено число m функциите с дефиниционна област $\mathbb{N}_m$ да предхождат тези, които са с дефиниционна област $\mathbb{N}_{m+1}$.

Доказателство. Може например да се използва доказуемият чрез индукция факт, че ако $g_0, g_1, g_2, \ldots$ е дадена безкрайна редица от положителни цели числа, то всяко положително цяло число има точно едно представяне във вида

$$d_0 + d_1 g_0 + d_2 g_0 g_1 + d_3 g_0 g_1 g_2 + \cdots + d_m g_0 g_1 g_2 \ldots g_{m-1}, \tag{1}$$

където $m \in \mathbb{N}$, а $d_0, d_1, d_2, d_3, \ldots, d_m$ са цели числа, удовлетворяващи неравенствата.... $1 \leq d_i \leq g_i$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, m$. А именно, да положим $g_i = g(i) + 1$ за всяко i от $\mathbb{N}$ и за всяко n от $\mathbb{N}$ да вземем в качеството на u_n функцията с дефиниционна област $\mathbb{N}_m$ и стойности $d_0 - 1$, $d_1 - 1$, $d_2 - 1$, $d_3 - 1$, $\ldots$, $d_m - 1$, където m и d_0, d_1, d_2, d_3, $\ldots$, d_m са числата от представянето на $n + 1$ във вида (1). □

Лема за частична разрешимост. Нека $u_0, u_1, u_2, \ldots$ е такава безкрайна редица от функции от $\mathcal{F}_1$, че функцията u от $\mathcal{F}_2$, определена с равенството $u(n, x) = u_n(x)$, е частично рекурсивна и има рекурсивна дефиниционна област. Нека $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1^l$ е μ-рекурсивен оператор. Тогава съществува частично рекурсивна функция γ на $l + 1$ променливи, за която са изпълнени следните условия:

1. При всеки избор на $n, x_1, \ldots, x_l, y$ в $\mathbb{N}$ равенството $\Gamma(u_n)(x_1, \ldots, x_l) = y$ е еквивалентно на равенството $\gamma(n, x_1, \ldots, x_l) = y + 1$.

2. Ако $(x_1, \ldots, x_l) \in \mathrm{dom}(\Gamma(f))$ за дадени $n, x_1, \ldots, x_l$ в $\mathbb{N}$ и някоя функция f от $\mathcal{F}_1$, която е продължение на u_n, то $(n, x_1, \ldots, x_l) \in \mathrm{dom}(\gamma)$.

Доказателство. Ще използваме индукция относно построението на Γ. Ако за всяка функция f от $\mathcal{F}_1$ и всички $x_1, \ldots, x_l$ в $\mathbb{N}$ имаме равенството

$$\Gamma(f)(x_1, \ldots, x_l) = \varphi(x_1, \ldots, x_l),$$

където φ е някоя от първоначалните примитивно рекурсивни функции, то полагаме

$$\gamma(n, x_1, \ldots, x_l) = \varphi(x_1, \ldots, x_l) + 1.$$

Ако $l = 1$ и

$$\Gamma(f)(x) = f(x)$$

за всяка функция f от $\mathcal{F}_1$ и всяко x от $\mathbb{N}$, то полагаме

$$\gamma(n, x) = \begin{cases} u(n, x) + 1 & \text{при } (n, x) \in \mathrm{dom}(u), \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

За да покажем, че доказваното свойство се запазва при дефиниция чрез суперпозиция, да предположим, че $\Gamma_0 : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_k$ и $\Gamma_i : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_l$, $i = 1, \ldots, k$, са μ-рекурсивни оператори, които имат това свойство, като $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_l$ са съответни частично рекурсивни функции, свидетелстващи за наличието му. Ще покажем, че то е налице и за оператора $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_l$, дефиниран чрез равенството

$$\Gamma(f)(x_1, \ldots, x_l) = \Gamma_0(f)(\Gamma_1(f)(x_1, \ldots, x_l), \ldots, \Gamma_k(f)(x_1, \ldots, x_l)).$$

Да дефинираме частичната функция γ на $l + 1$ променливи в $\mathbb{N}$ чрез равенството

$$\gamma(n, x_1, \ldots, x_l) = \delta(n, \gamma_1(n, x_1, \ldots, x_l), \ldots, \gamma_k(n, x_1, \ldots, x_l)),$$

където

$$\delta(n, t_1, \ldots, t_k) = \begin{cases} \gamma_0(n, t_1 - 1, \ldots, t_k - 1), & \text{ако } t_1 \ldots t_k \neq 0, \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Очевидно функцията γ е частично рекурсивна. За произволни $n, x_1, \ldots, x_l, y$ в $\mathbb{N}$ равенството $\gamma(n, x_1, \ldots, x_l) = y + 1$ е еквивалентно със съществуването на естествени числа $y_1, \ldots, y_k$, които удовлетворяват условията

$$\gamma_1(n, x_1, \ldots, x_l) = y_1 + 1, \ \ldots, \ \gamma_k(n, x_1, \ldots, x_l) = y_k + 1,$$
$$\gamma_0(n, y_1, \ldots, y_k) = y + 1),$$

а тези равенства са съответно еквивалентни на равенствата

$$\Gamma_1(u_n)(x_1, \ldots, x_l) = y_1, \ \ldots, \ \Gamma_m(u_n)(x_1, \ldots, x_l) = y_m,$$
$$\Gamma_0(u_n)y_1, \ldots, y_m) = y,$$

следователно равенството $\gamma(n, x_1, \ldots, x_l) = y + 1$ е еквивалентно на равенството $\Gamma(u_n)(x_1, \ldots, x_l) = y$. С това условието 1 е проверено. Проверката на условието 2 изглежда по следния начин. Да предположим, че за дадени естествени числа $n, x_1, \dots, x_l$ имаме такава функция f от $\mathcal{F}_1$, която е продължение на u_n, че $(x_1, \dots, x_l) \in \mathrm{dom}(\Gamma(f))$. Разбира се, последното означава, че

$$(x_1, \dots, x_l) \in \mathrm{dom}(\Gamma_1(f)), \ \dots, \ (x_1, \dots, x_l) \in \mathrm{dom}(\Gamma_m k(f)), \tag{2}$$

$$(\Gamma_1(f)(x_1, \dots, x_l), \dots, \Gamma_k(f)(x_1, \dots, x_l)) \in \mathrm{dom}(\Gamma_0(f)). \tag{3}$$

Целта ни е да покажем, че $(n, x_1, \dots, x_l) \in \mathrm{dom}(\gamma)$. Като използваме (2), заключаваме, че

$$(n, x_1, \dots, x_l) \in \mathrm{dom}(\gamma_1), \ \dots, \ (n, x_1, \dots, x_l) \in \mathrm{dom}(\gamma_k).$$

Да положим

$$t_1 = \gamma_1(n, x_1, \dots, x_l), \ \dots, \ t_k = \gamma_k(n, x_1, \dots, x_l).$$

Ако поне едно от числата $t_1, \dots, t_k$ е 0, то целта е постигната. Да предположим сега, че всяко от тези числа е различно от 0. Тогава ще бъдат в сила равенствата

$$\Gamma_1(u_n)(x_1, \dots, x_l) = t_1 - 1, \ \dots, \ \Gamma_k(u_n)(x_1, \dots, x_l) = t_k - 1.$$

Тъй като левите им страни са равни съответно на

$$\Gamma_1(f)(x_1, \dots, x_l), \ \dots, \ \Gamma_k(f)(x_1, \dots, x_l),$$

от тези равенства и (3) виждаме, че $(t_1 - 1, \dots, t_k - 1) \in \mathrm{dom}(\Gamma_0(f))$, а оттук следва, че $(n, t_1 - 1, \dots, t_k - 1) \in \mathrm{dom}(\gamma_0))$ и значи $(n, t_1, \dots, t_k) \in \mathrm{dom}(\delta)$. С това е показано, че и в този случай $(n, x_1, \dots, x_l) \in \mathrm{dom}(\gamma)$.

Преминаваме към индуктивната стъпка за случая на дефиниция чрез примитивна рекурсия. Нека $\Gamma_0 : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_l$ и $\Gamma_1 : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_{l+2}$ са μ-рекурсивни оператори с доказаното свойство, а γ_0 и γ_1 са съответни частично рекурсивни функции, свидетелстващи за наличието му. Ще докажем, че то е налице и при оператора $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1^{l+1}$, дефиниран чрез равенствата

$$\begin{aligned} \Gamma(f)(x_1, \dots, x_l, 0) &= \Gamma_0(f)(x_1, \dots, x_l), \\ \Gamma(f)(x_1, \dots, x_l, s+1) &= \Gamma_1(f)(x_1, \dots, x_l, s, \Gamma(f)(x_1, \dots, x_l, s)). \end{aligned}$$

За целта дефинираме частичната функция γ на $l+2$ променливи в $\mathbb{N}$ чрез равенствата

$$\begin{aligned} \gamma(n, x_1, \dots, x_l, 0) &= \gamma_0(n, x_1, \dots, x_l), \\ \gamma(n, x_1, \dots, x_l, s+1) &= \delta(n, x_1, \dots, x_l, s, \gamma(n, x_1, \dots, x_l, s)), \end{aligned}$$

където

$$\delta(n, x_1, \dots, x_l, s, t) = \begin{cases} \gamma_1(n, x_1, \dots, x_l, s, t-1), & \text{ако } t \neq 0, \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Очевидно функцията γ е частично рекурсивна. Ще покажем, че за произволни $n, x_1, \ldots, x_l, s$ в $\mathbb{N}$ имаме

$$\forall y(\Gamma(u_n)(x_1, \ldots, x_l, s) = y \Leftrightarrow \gamma(n, x_1, \ldots, x_l, s) = y + 1) \tag{4}$$

и че $(n, x_1, \ldots, x_l, s) \in \mathrm{dom}(\gamma)$ винаги, когато $(x_1, \ldots, x_l, s) \in \mathrm{dom}(\Gamma(f))$ за някоя функция f от $\mathcal{F}_1$, която е продължение на функцията u_n.

Доказателството на твърдението (4) ще бъде чрез индукция относно s. То е вярно при $s = 0$, защото

$$\begin{aligned}\Gamma(u_n)(x_1, \ldots, x_l, 0) = y \Leftrightarrow \Gamma_0(u_n)(x_1, \ldots, x_l) = y \\ \Leftrightarrow \gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l)) = y + 1 \Leftrightarrow \gamma(n, x_1, \ldots, x_l, 0) = y + 1.\end{aligned}$$

Да предположим, че (4) е вярно за дадено s от $\mathbb{N}$. Тогава

$$\begin{gathered}\Gamma(u_n)(x_1, \ldots, x_l, s+1) = y \Leftrightarrow \Gamma_1(u_n)(x_1, \ldots, x_l, s, \Gamma(u_n)(x_1, \ldots, x_l, s)) = y \\ \Leftrightarrow \exists z(\Gamma(u_n)(x_1, \ldots, x_l, s) = z \,\&\, \Gamma_1(u_n)(x_1, \ldots, x_l, s, z) = y) \\ \Leftrightarrow \exists z(\gamma(n, x_1, \ldots, x_l, s) = z + 1 \,\&\, \gamma_1(n, x_1, \ldots, x_l, s, z) = y + 1) \\ \Leftrightarrow \delta(n, x_1, \ldots, x_l, s, \gamma(n, x_1, \ldots, x_l, s)) = y + 1 \Leftrightarrow \gamma(n, x_1, \ldots, x_l, s+1) = y + 1.\end{gathered}$$

Чрез индукция относно s ще докажем и твърдението, че ако $(x_1, \ldots, x_l, s)$ принадлежи на $\mathrm{dom}(\Gamma(f))$ за някоя функция f от $\mathcal{F}_1$, която е продължение на функцията u_n, то $(n, x_1, \ldots, x_l, y)$ принадлежи на $\mathrm{dom}(\gamma)$. Твърдението е вярно при $s = 0$, защото $(x_1, \ldots, x_l, 0) \in \mathrm{dom}(\Gamma(f))$ точно тогава, когато $(x_1, \ldots, x_l) \in \mathrm{dom}(\Gamma_0(f))$, и $(n, x_1, \ldots, x_l, 0) \in \mathrm{dom}(\gamma)$ точно тогава, когато $(n, x_1, \ldots, x_l) \in \mathrm{dom}(\gamma_0)$. Да предположим сега, че въпросното твърдение е вярно за дадено s от $\mathbb{N}$ и че $(x_1, \ldots, x_l, s+1)$ принадлежи на $\mathrm{dom}(\Gamma(f))$ за някоя функция f от $\mathcal{F}_1$, която е продължение на функцията u_n. Тогава $(x_1, \ldots, x_l, s) \in \mathrm{dom}(\Gamma(f))$ и $(x_1, \ldots, x_l, s, \Gamma(f)(x_1, \ldots, x_l, s)) \in \mathrm{dom}(\Gamma_1(f))$. Оттук следва, че $(n, x_1, \ldots, x_l, s) \in \mathrm{dom}(\gamma)$ и

$$(n, x_1, \ldots, x_l, s, \Gamma(f)(x_1, \ldots, x_l, s)) \in \mathrm{dom}(\gamma_1). \tag{5}$$

Целта ни е да покажем, че $(n, x_1, \ldots, x_l, s+1) \in \mathrm{dom}(\gamma)$, т.е. че

$$(n, x_1, \ldots, x_l, s, \gamma(n, x_1, \ldots, x_l, s)) \in \mathrm{dom}(\delta). \tag{6}$$

Нека $\gamma(n, x_1, \ldots, x_l, s) = t$. Ако $t = 0$, твърдението (6) е очевидно вярно. Ако пък $t \neq 0$, то $\Gamma(u_n)(x_1, \ldots, x_l, s) = t - 1$, а значи и $\Gamma(f)(x_1, \ldots, x_l, s) = t - 1$. Последното заедно с (5) дава, че $(n, x_1, \ldots, x_l, s, t-1) \in \mathrm{dom}(\gamma_1)$, а това показва, че твърдението (6) е вярно и в този случай.

Остава да покажем, че разглежданото свойство се запазва и при дефиниция чрез μ-операция. Нека $\Gamma_0 : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_{l+1}$ е μ-рекурсивен оператор с това свойство и нека γ_0 е частично рекурсивна функция, която свидетелства за наличието на свойството. Ще покажем, че то е налице и при оператора $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_l$, дефиниран чрез равенството

$$\Gamma(f)(x_1, \ldots, x_l) = \mu s[\Gamma_0(f)(x_1, \ldots, x_l, s) = 0]. \tag{7}$$

За целта разглеждаме частичната функция γ от $\mathbb{N}^{l+1}$ към $\mathbb{N}$, дефинирана чрез равенството

$$\gamma(n, x_1, \ldots, x_l) = (\delta(n, x_1, \ldots, x_l) + 1)\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, \delta(n, x_1, \ldots, x_l)),$$

където

$$\delta(n, x_1, \ldots, x_l) = \mu s[\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, s) \dot{-} 1 = 0].$$

Очевидно тя е частично рекурсивна. Да предположим, че са дадени естествени числа $n, x_1, \ldots, x_l, y$. Равенството $\Gamma(u_n)(x_1, \ldots, x_l) = y$ е еквивалентно с това да е в сила равенството $\Gamma_0(u_n)(x_1, \ldots, x_l, y) = 0$ и за всяко естествено число s, по-малко от y, да съществува различно от 0 число z, за което е вярно равенството $\Gamma_0(u_n)(x_1, \ldots, x_l, s) = z$. От своя страна това е еквивалентно с изискването да е в сила равенството $\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, y) = 1$ и за всяко естествено число s, по-малко от y, да съществува различно от 0 число z, за което е вярно равенството $\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, s) = z + 1$. Ще покажем, че току-що формулираното изискване е еквивалентно на равенството $\gamma(n, x_1, \ldots, x_l) = y + 1$. Първо да предположим, че е изпълнено въпросното изискване. Тогава очевидно $\delta(n, x_1, \ldots, x_l) = y$, откъдето следва, че

$$\gamma(n, x_1, \ldots, x_l) = (y + 1)\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, y) = y + 1.$$

За разсъждението в обратната посока да предположим, че

$$\gamma(n, x_1, \ldots, x_l) = y + 1.$$

Тогава съществува естествено число t, за което са изпълнени равенствата

$$\delta(n, x_1, \ldots, x_l) = t, \quad (t + 1)\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, t) = y + 1. \tag{8}$$

От първото от тях следва, че $\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, t) \dot{-} 1 = 0$, а от второто – че $\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, t) \neq 0$. Оттук заключаваме, че $\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, t) = 1$. Като използваме още веднъж равенствата (8), получаваме последователно, че $t = y$ и $\delta(n, x_1, \ldots, x_l) = y$, а също, че $\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, y) = 1$. Освен това от равенството $\delta(n, x_1, \ldots, x_l) = y$ следва, че за всяко естествено число s, по-малко от y, съществува различно от 0 число z, за което е вярно равенството $\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, s) = z + 1$.

За да завършим доказателството, да предположим, че $(x_1, \ldots, x_l)$ принадлежи на $\mathrm{dom}(\Gamma(f))$ за някоя функция f от $\mathcal{F}_1$, която е продължение на функцията u_n. Целта ни ще бъде да докажем, че $(n, x_1, \ldots, x_l) \in \mathrm{dom}(\gamma)$. Нека $\Gamma(f)(x_1, \ldots, x_l) = a$. Тогава $\Gamma_0(f)(x_1, \ldots, x_l, s)$ е дефинирано за всяко естествено число s, ненадминаващо a, като $\Gamma_0(f)(x_1, \ldots, x_l, a) = 0$. Оттук става ясно, че $\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, s)$ е дефинирано за всяко естествено число s, ненадминаващо a. Може да се твърди още, че $\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, a) \dot{-} 1 = 0$. Действително, това е така в случай, че $\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, a) = 0$, а пък ако $\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, a) \neq 0$, то $\Gamma_0(u_n)(x_1, \ldots, x_l, a) = \gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, a) - 1$, откъдето следва, че и $\Gamma_0(f)(x_1, \ldots, x_l, a) = \gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, a) - 1$, значи и в този случай $\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, a) \dot{-} 1 = 0$. Това, заедно с обстоятелството, че

$\gamma_0(n, x_1, \ldots, x_l, s) \dot{-} 1$ е дефинирано и при $s = 0, 1, \ldots, a-1$, позволява да заключим, че $\delta(n, x_1, \ldots, x_l)$ и $\gamma(n, x_1, \ldots, x_l)$ са дефинирани. □

Следствие. При предположенията на лемата за частична разрешимост и допълнителното предположение, че операторът Γ преобразува всички навсякъде дефинирани функции от $\mathcal{F}_1$ в навсякъде дефинирани функции, множеството $\{(n, x_1, \ldots, x_l) \,|\, (x_1, \ldots, x_l) \in \mathrm{dom}(\Gamma(u_n))\}$ е рекурсивно.

Лема за равномерност. Нека g е рекурсивна функция, а $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ е μ-рекурсивен оператор, преобразуващ всички навсякъде дефинирани функции от $\mathcal{F}_1$ в навсякъде дефинирани функции. Тогава съществува такава рекурсивна функция на един аргумент $\tilde{g}$, че за всяка навсякъде дефинирана функция f от $\mathcal{F}_1$, която се мажорира от g, и всяко естествено число a е в сила равенството

$$\Gamma(f)(a) = \Gamma\left(f \restriction \mathbb{N}_{\tilde{g}(a)}\right)(a).$$

Доказателство. Нека a е дадено естествено число. Ще покажем, че при подходящ избор на естественото число m числото a е в дефиниционната област на $\Gamma(f)$ за всяка функция $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}$, която се мажорира от g. Допускаме противното и разглеждаме множеството, състоящо се от функцията с празна дефиниционна област и от всички функции f от $\mathcal{F}_1$, които имат дефиниционни области от вида $\mathbb{N}_m$, мажорират се от функцията g и са такива, че $a \notin \mathrm{dom}(\Gamma(f))$. Нека T е ориентираният безкраен граф, чиито върхове са функциите от това множество, а ребро от дадена функция към друга е налице точно тогава, когато втората е продължение на първата и дефиниционната област на втората има точно един елемент повече от дефиниционната област на първата. Лесно се вижда, че T е дърво, имащо за корен функцията с празна дефиниционна област. В това дърво броят на ребрата с начало в даден връх на T е винаги краен, защото от функцията с празна дефиниционна област излизат най-много $g(0) + 1$ ребра, а от коя да е функция с дефиниционна област $\mathbb{N}_m$ – най-много $g(m+1) + 1$ ребра. От лемата на Кьониг следва, че от началото на дървото T излиза поне един безкраен път в това дърво. Тъй като от всеки две функции, които са различни върхове от такъв път, едната е продължение на другата, ще съществува навсякъде дефинирана функция f_0 от $\mathcal{F}_1$, която е продължение на всички тях. Поради направеното предположение $a \in \mathrm{dom}(\Gamma(f_0))$. Тогава обаче числото a би принадлежало на $\mathrm{dom}(\Gamma(f))$ и за някой връх от пътя, а това противоречи на дефиницията на множеството T. Полученото противоречие доказва съществуването на естествено число m с формулираното в началото свойство.

За да докажем лемата напълно, ще бъде достатъчно да намерим рекурсивна функция, която по всяко естествено число a дава естествено число m с въпросното свойство. За тази цел ще използваме редица $u_0, u_1, u_2, \ldots$ със свойствата, формулирани в лемата за подреждането. В редицата са най-напред разглежданите функции с дефиниционна област $\mathbb{N}_0$, след тях са онези с дефиниционна област $\mathbb{N}_1$, след това – онези с дефиниционна област $\mathbb{N}_2$ и т.н. Според следствието от лемата за частична разрешимост множеството $\{(n,x)\,|\,x \in \mathrm{dom}(\Gamma(u_n))\}$ е рекурсивно. Благодарение на това търсенето на естествено число m с интересуващото ни свойство може да стане чрез алгоритъм, при който при $m = 0, 1, 2, \ldots$ последователно проверяваме дали $a \in \mathrm{dom}(\Gamma(u_n))$ за всички u_n с дефиниционна област $\mathbb{N}_m$, и правим това, докато стигнем до някое m, за което това условие е изпълнено (това, че в даден момент от работата на алгоритъма вече са разгледани всички u_n с дефиниционна област $\mathbb{N}_m$ личи например от обстоятелството, че след този момент вече числото $m+1$ принадлежи на дефиниционната област на текущото u_n). Строго доказателство, че функцията, пресмятана чрез този алгоритъм, е рекурсивна, се получава лесно. □

Ефективна равномерна непрекъснатост

Лема за ретракция. Съществуват μ-рекурсивни оператори $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$ със следните свойства:

1. Винаги, когато една функция f представя в смисъл на Гжегорчик някое число от интервала $[0,1]$, тройката $(\mathrm{T}_1(f), \mathrm{T}_2(f), \mathrm{T}_3(f))$ представя същото число.

2. За всяка функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ тройката $(\mathrm{T}_1(f), \mathrm{T}_2(f), \mathrm{T}_3(f))$ представя някое число от интервала $[0,1]$.

Доказателство. Нека f е произволна функция от $\mathcal{F}_1$. За всяко i от дефиниционната ѝ област полагаме

$$a_i^f = \frac{f(i)-1}{i+1}, \quad b_i^f = \min\left(\frac{f(i)+1}{i+1}, 1\right).$$

Нека

$$A^f = \{m \in \mathbb{N} \,|\, \mathbb{N}_m \subseteq \mathrm{dom}(f)\}$$

(очевидно $A^f = \mathbb{N}$ точно тогава, когато $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N}$). При $m \in A^f$ полагаме още

$$K_m^f = \left\{k \in \mathbb{N}_m \;\middle|\; \max_{i \in \mathbb{N}_k} a_i^f < \min_{i \in \mathbb{N}_k} b_i^f \right\}, \quad c_m^f = \begin{cases} \min\limits_{k \in K_m^f} b_k^f, & \text{ако } f(0) < 2, \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

(дефиницията на c_m^f е коректна, защото при $f(0) < 2$ поне числото 0 принадлежи на K_m^f). Ще докажем следните две твърдения:

1. Ако функцията f представя в смисъл на Гжегорчик дадено число ξ от интервала $[0,1]$, то
$$|c_m^f - \xi| < \frac{2}{m+1}$$
за всяко m от $\mathbb{N}$.

2. Ако $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N}$, то съществува такова число ξ от интервала $[0,1]$, че за всяко m от $\mathbb{N}$ да бъде е сила неравенството

$$|c_m^f - \xi| \leq \frac{2}{m+1}.$$

За доказателството на твърдението 1 да предположим, че функцията f представя в смисъл на Гжегорчик някое число ξ от интервала $[0,1]$. Тогава $A^f = \mathbb{N}$ и за всяко i от $\mathbb{N}$ имаме неравенствата $a_i^f < \xi \leq b_i^f$, следователно $K_m^f = \mathbb{N}_m$ за всяко m от $\mathbb{N}$. Тъй като $f(0) < 2$ в този случай, за всяко m от $\mathbb{N}$ ще имаме равенството

$$c_m^f = \min_{k \in N_m} b_k^f,$$

а следователно и неравенствата $a_m^f < \xi \leq c_m^f \leq b_m^f$. Оттук се вижда, че

$$|c_m^f - \xi| = c_m^f - \xi < b_m^f - a_m^f \leq \frac{2}{m+1}$$

за всяко m от $\mathbb{N}$.

За доказателството на твърдението 2 да предположим, че $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N}$. Тогава отново $A^f = \mathbb{N}$. Нека ξ е точната долна граница на множеството $\{c_0^f, c_1^f, c_2^f, \ldots\}$. Очевидно ξ е число от интервала $[0,1]$. Ще покажем, че

$$|c_m^f - \xi| \leq \frac{2}{m+1}$$

за всяко m от $\mathbb{N}$. Това е очевидно при $f(0) \geq 2$, защото тогава лявата страна на горното неравенство е 0. Затова да предположим, че $f(0) < 2$. Нека m е произволно естествено число.

Ще разгледаме първо случая, когато $m \in K_m^f$, т.е.

$$\max_{i \in \mathbb{N}_m} a_i^f < \min_{i \in \mathbb{N}_m} b_i^f. \tag{9}$$

Тъй като b_m^f е едно от числата b_k^f с k в K_m^f, а пък c_m^f е най-малкото от тях, пак ще имаме неравенството $c_m^f \leq b_m^f$. Понеже $\xi \leq c_m^f$, ще следва, че

$$|c_m^f - \xi| = c_m^f - \xi \leq b_m^f - a_m^f \leq \frac{2}{m+1},$$

стига да покажем, че $a_m^f \leq \xi$. Ще направим това, като покажем, че a_m^f е долна граница на множеството $\{c_0^f, c_1^f, c_2^f, \ldots\}$. Нека n е произволно естествено число. Имаме равенството $c_n^f = b_k^f$ за някое k от K_n^f. Ако $k \leq m$, то $a_m^f < b_k^f$ благодарение на неравенството (9), а ако $k > m$, то $a_m^f < b_k^f$ благодарение на неравенството

$$\max_{i \in \mathbb{N}_k} a_i^f < \min_{i \in \mathbb{N}_k} b_i^f.$$

Следователно $a_m^f < c_n^f$ за всяко n от $\mathbb{N}$.

Остана да разгледаме случая, когато $m \notin K_m^f$. Нека k_m^f е най-голямото от числата в множеството K_m^f. Разбира се, $k_m^f < m$. Тъй като всички естествени числа, по-малки от k_m^f, също принадлежат на K_m^f, имаме равенството $K_m^f = \mathbb{N}_{k_m^f}$. Лесно е да се съобрази, че

$$K_n^f = \begin{cases} \mathbb{N}_n & \text{при } n < k_m^f, \\ \mathbb{N}_{k_m^f} & \text{при } n \geq k_m^f \end{cases} .$$

Значи

$$K_0^f \subset K_1^f \subset \cdots \subset K_{k_m^f-1}^f \subset K_{k_m^f}^f = K_{k_m^f+1}^f = K_{k_m^f+2}^f = K_{k_m^f+3}^f = \cdots,$$

а оттук следва, че

$$c_0^f \geq c_1^f \geq \cdots \geq c_{k_m^f-1}^f \geq c_{k_m^f}^f = c_{k_m^f+1}^f = c_{k_m^f+2}^f = c_{k_m^f+3}^f = \cdots.$$

При това положение е ясно, че $c_m^f = \xi$ и следователно $|c_m^f - \xi| = 0$.

От твърденията 1 и 2 е ясно, че свойствата от формулировката на лемата ще бъдат налице, ако изберем такива μ-рекурсивни оператори $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3$ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, че за всяка функция f от $\mathcal{F}_1$ да имаме

$$\mathrm{dom}(\mathrm{T}_1(f)) = \mathrm{dom}(\mathrm{T}_2(f)) = \mathrm{dom}(\mathrm{T}_3(f)) = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 2x+2 \in A^f\}$$

и при всеки избор на естественото число x да е в сила равенството

$$\frac{\mathrm{T}_1(f)(x) - \mathrm{T}_2(f)(x)}{\mathrm{T}_3(f)(x) + 1} = c_{2x+2}^f.$$

Доказателство за съществуване на такива оператори се получава чрез рутинна техническа работа. □

Дефиниция. Нека $\theta : D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{R}$. Казваме, че θ е *ефективно равномерно непрекъсната*, ако съществува такава рекурсивна функция $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, че за всяко естествено число n и всеки две числа ξ и ξ' от D, за които $|\xi - \xi'| < \dfrac{1}{h(n)+1}$, да е в сила неравенството $|\theta(\xi) - \theta(\xi')| < \dfrac{1}{n+1}$.

Теорема. Нека α и β са изчислими реални числа, $\alpha < \beta$ и $\theta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ е изчислима. Тогава θ е ефективно равномерно непрекъсната.

Доказателство. Без ограничение на общността можем да приемем, че $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. Това е така, защото при предположенията на теоремата функцията $\bar{\theta} : [0,1] \to \mathbb{R}$, дефинирана чрез равенството $\bar{\theta}(\xi) = \theta(\alpha + (\beta - \alpha)\xi)$, също е изчислима, а от нейната ефективна равномерна непрекъснатост лесно следва ефективната равномерна непрекъснатост и на θ. Нека Γ_1, Γ_2, Γ_3 са такива μ-рекурсивни оператори от $\mathcal{F}_1^3$ към $\mathcal{F}_1$, че всеки път, когато една тройка $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ представя някое число ξ от интервала $[0,1]$, тройката $(\Gamma_1(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3), \Gamma_2(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3), \Gamma_3(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3))$ представя числото $\theta(\xi)$. Нека

T_1, T_2, T_3 са μ-рекурсивни оператори от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$ със свойствата от лемата за ретракция. Да разгледаме операторите Δ_1, Δ_2, Δ_3 от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, дефинирани по следния начин:

$$\Delta_i(f) = \Gamma_i(\mathrm{T}_1(f), \mathrm{T}_2(f), \mathrm{T}_3(f)), \quad i = 1, 2, 3.$$

Тези оператори също са μ-рекурсивни. Те имат следните свойства:

1. Всеки път, когато f представя в смисъл на Гжегорчик някое число ξ от интервала $[0,1]$, тройката $(\Delta_1(f), \Delta_2(f), \Delta_3(f))$ представя числото $\theta(\xi)$.

2. Винаги, когато f е навсякъде дефинирана функция от $\mathcal{F}_1$, функциите $\Delta_1(f)$, $\Delta_2(f)$, $\Delta_3(f)$ също са навсякъде дефинирани.

Като използваме второто от горните свойства, да приложим лемата за равномерност за всеки от трите оператора Δ_1, Δ_2, Δ_3, като в качеството на g използваме функцията $S = \lambda x.x + 1$. Вземайки максималното от съответните три числа $\tilde{g}(a)$, убеждаваме се в съществуването на такава рекурсивна функция на един аргумент τ, че за всяка навсякъде дефинирана функция f от $\mathcal{F}_1$, която се мажорира от функцията S, и всяко естествено число a са в сила равенствата

$$\Delta_i(f)(a) = \Delta_i\left(f \restriction \mathbb{N}_{\tau(a)}\right)(a), \quad i = 1, 2, 3.$$

Да дефинираме функцията $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, като положим $h(n) = \tau(2n+1)$. Тя, разбира се, е рекурсивна. Нека n е произволно естествено число, а ξ и ξ' са кои да е две числа от интервала $[0,1]$, за които $|\xi–\xi'| < \dfrac{1}{h(n)+1}$. Ще покажем, че $|\theta(\xi) - \theta(\xi')| < \dfrac{1}{n+1}$. Тъй като при $i = 0, 1, 2, \ldots, h(n)$ имаме

$$|\xi(i+1) - \xi'(i+1)| = |\xi - \xi'|(i+1) \le |\xi - \xi'|(h(n)+1) < 1,$$

съществуват такива естествени числа $k_0, k_1, k_1, \ldots, k_{h(n)}$, че $|k_i - \xi(i+1)| < 1$ и $|k_i - \xi'(i+1)| < 1$ при $i = 0, 1, 2, \ldots, h(n)$. Оттук следва, че числата ξ и ξ' имат съответно представяния в смисъл на Гржегорчик f и f', за които $f \restriction \mathbb{N}_{h(n)} = f' \restriction \mathbb{N}_{h(n)}$, т.е. $f \restriction \mathbb{N}_{\tau(2n+1)} = f' \restriction \mathbb{N}_{\tau(2n+1)}$. Тъй като функциите f и f' са представяния в смисъл на Гжегорчик на числа от интервала $[0,1]$, тези функции се мажорират от функцията S и следователно при $i = 1, 2, 3$ са в сила равенствата

$$\Delta_i(f)(2n+1) = \Delta_i\left(f \restriction \mathbb{N}_{\tau(2n+1)}\right)(2n+1),$$
$$\Delta_i(f')(2n+1) = \Delta_i\left(f' \restriction \mathbb{N}_{\tau(2n+1)}\right)(2n+1),$$

а оттук става ясно, че

$$\Delta_i(f)(2n+1) = \Delta_i(f')(2n+1), \quad i = 1, 2, 3.$$

От друга страна обаче имаме неравенствата

$$\left|\frac{\Delta_1(f)(2n+1) - \Delta_2(f)(2n+1)}{\Delta_3(f)(2n+1)+1} - \theta(\xi)\right| < \frac{1}{2n+2},$$
$$\left|\frac{\Delta_1(f')(2n+1) - \Delta_2(f')(2n+1)}{\Delta_3(f')(2n+1)+1} - \theta(\xi')\right| < \frac{1}{2n+2}.$$

Понеже фигуриращите в левите им страни частни са равни помежду си, следва, че $|\theta(\xi)-\theta(\xi')|<\dfrac{1}{n+1}$. □