Ефективни топологични пространства

Дефиниция 1. *Ефективно топологично пространство* ще наричаме всяка наредена двойка $(X,\mathcal{U})$, където X е множество (*носител* на пространството), а $\mathcal{U}$ е такова частично изображение на $\mathbb{N}$ в множеството $\mathcal{P}(X)$ на подмножествата на X, че $\mathrm{rng}(\mathcal{U})$ да е база на топология в X.[1]

Дефиниция 2. Нека (X,d,α) е ефективно метрично пространство, а ι е обратима рекурсивна функция на два аргумента. *Ефективно топологично пространство, асоциирано с (X,d,α) с помощта на ι,* ще наричаме наредената двойка $(X,\mathcal{U})$, където $\mathcal{U}:\{\iota(k,n)\,|\,(k,n)\in\mathrm{dom}(\alpha)\times\mathbb{N}\}\to\mathcal{P}(X)$ и

$$\mathcal{U}(\iota(k,n))=\left\{\xi\in X\;\middle|\;d(\xi,\alpha(k))<\frac{1}{n+1}\right\}\tag{1}$$

за всяко $k\in\mathrm{dom}(\alpha)$ и всяко $n\in\mathbb{N}$.[2] Ще означаваме въпросната наредена двойка с $(X,d,\alpha)\iota$.

Дефиниция 3. Нека $\mathbf{X}=(X,\mathcal{U})$ е ефективно топологично пространство и $\xi\in X$. Ще означаваме с $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ множеството $\{i\in\mathrm{dom}(\mathcal{U})\,|\,\xi\in\mathcal{U}(i)\}$. *Представяне на ξ в $\mathbf{X}$* ще наричаме всяка тотална номерация на множеството $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$, т.е. всяко изображение на $\mathbb{N}$ върху $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$. Ще казваме, че ξ е *изчислим елемент на* $\mathbf{X}$, ако съществува рекурсивна функция, която е представяне на ξ в $\mathbf{X}$.

Забележка. При предположенията на горната дефиниция множеството $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ има поне един елемент благодарение на обстоятелството, че X е обединение на множества от $\mathrm{rng}(\mathcal{U})$. Оттук следва, че ξ има поне едно представяне в $\mathbf{X}$ и че ξ е изчислим елемент на $\mathbf{X}$ точно тогава, когато множеството $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ е рекурсивно номеруемо.

Теорема 1. Нека (X,d,α) е ефективно метрично пространство, а ι е обратима рекурсивна функция на два аргумента. Тогава:

А. За да бъде един елемент ξ на X изчислим елемент на ефективното топологично пространство $(X,d,\alpha)\iota$, необходимо и достатъчно е да бъде рекурсивно номеруемо множеството

$$\left\{(k,n)\in\mathrm{dom}(\alpha)\times\mathbb{N}\;\middle|\;d(\xi,\alpha(k))<\frac{1}{n+1}\right\}.\tag{2}$$

[1] Условието едно множество $\mathcal{B}$ от подмножества на X да е база на топология в X е равносилно с изискването множеството X и всяко сечение на две множества от $\mathcal{B}$ да са представими като обединения на множества, принадлежащи на $\mathcal{B}$. Топологията с база $\mathcal{B}$ при това положение се състои от всички обединения на множества, принадлежащи на $\mathcal{B}$.

[2] Тъй като множествата от вида в дясната страна на равенството (1) съставляват база на топологията в X, породена от метриката d, така дефинираната двойка наистина е ефективно топологично пространство.

B. Съществува такъв μ-рекурсивен оператор Γ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, че всеки път, когато f е представяне в $(X, d, \alpha)\iota$ на някой елемент на X, функцията $\Gamma(f)$ е представяне на същия елемент в (X, d, α).

C. Всеки изчислим елемент на $(X, d, \alpha)\iota$ е изчислим елемент на (X, d, α).

Доказателство. Нека $(X, d, \alpha)\iota = (X, \mathcal{U})$. За доказателството на твърдението A нека $\xi \in X$. Една двойка (k, n) от естествени числа принадлежи на множеството (2) точно тогава, когато $\iota(k, n) \in \mathcal{U}^{-1}(\xi)$. Значи множеството (2) е първообраз на $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ посредством рекурсивната функция ι. Ако ξ е изчислим елемент на $(X, d, \alpha)\iota$, то множеството $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ е рекурсивно номеруемо и следователно неговият първообраз посредством ι ще бъде също рекурсивно номеруемо множество. За разсъждението в обратната посока да предположим, че множеството (2) е рекурсивно номеруемо. Тъй като всеки елемент на множеството $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ е стойност на функцията ι, от отбелязаната по-горе връзка между това множество и множеството (2) се вижда, че $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ е образ на (2) чрез функцията ι и следователно е рекурсивно номеруемо. За доказателството на твърдението B да предположим на първо време, че f е представяне в $(X, d, \alpha)\iota$ на даден елемент ξ на X. Благодарение на това, че множеството на стойностите на α е навсякъде гъсто в X относно d, за всяко естествено число n съществува число k в дефиниционната област на α, удовлетворяващо неравенството

$$d(\xi, \alpha(k)) < \frac{1}{n+1}, \tag{3}$$

т.е. съществува естествено число k, за което $\iota(k, n) \in \mathcal{U}^{-1}(\xi)$. Последното обаче е еквивалентно със съществуването на естествено число s, за което е в сила равенството

$$\iota(k, n) = f(s). \tag{4}$$

И така, за всяко естествено число n съществуват естествени числа k и s, които удовлетворяват равенството (4). Ясно е също, че когато за дадени естествени числа n, k и s е в сила равенството (4), числото k принадлежи на дефиниционната област на α и е в сила неравенството (3). Направените дотук разсъждения показват, че твърдението B ще бъде доказано, ако построим μ-рекурсивен оператор Γ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$ със следното свойство: винаги, когато $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и за дадено естествено число n съществуват естествени числа k и s, удовлетворяващи равенството (4), $\Gamma(f)(n)$ е дефинирано и има за стойност числото k от някоя такава двойка естествени числа. Един такъв оператор може да бъде дефиниран, като се изберат рекурсивни функции на един аргумент κ и σ, за които $\{(\kappa(t), \sigma(t)) \mid t \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2$, и се положи

$$\Gamma(f)(n) = \kappa(\mu t[|\iota(\kappa(t), n) - f(\sigma(t))| = 0]).$$

Тъй като μ-рекурсивните оператори преобразуват рекурсивните функции в частично рекурсивни, а представянията на елементите на X в (X, d, α) са навсякъде дефинирани функции в $\mathbb{N}$, твърдението C следва от B. $\square$

Предположенията на теорема 1 не са достатъчни, за да осигурят верността на обратното твърдение на твърдението C. Тривиален контрапример е следният: множеството X да има само един елемент, а дефиниционната област на α да не е рекурсивно номеруема. Тъй като единственият елемент на X е длъжен да бъде стойност на α, той ще бъде изчислим елемент на (X, d, α). Съответното му множество (2) обаче ще бъде декартовото произведение $\mathrm{dom}(\alpha) \times \mathbb{N}$ и поради това няма да е рекурсивно номеруемо, а оттук по твърдението A от теоремата следва, че въпросният елемент не е изчислим елемент на $(X, d, \alpha)\iota$.

Ето и един по-интересен пример – в него множеството X е безкрайно и $\mathrm{dom}(\alpha) = \mathbb{N}$.

Пример 1. Множеството на естествените числа може да се представи като обединение на непресичащи се множества $K_0, K_1, K_2, \ldots$, никое от които не е рекурсивно номеруемо.[3] Нека $X = \mathbb{N}$, d е обичайната метрика в $\mathbb{N}$ (т.е. абсолютната стойност на разликата), а $\alpha : \mathbb{N} \to X$ се дефинира по следния начин: $\alpha(k) = m$ при $k \in K_m$. Тогава $\mathrm{rng}(\alpha) = X$ и следователно всички елементи на X са изчислими в (X, d, α). Ако обаче $\mathbf{X}$ е ефективно топологично пространство, асоциирано с (X, d, α) с помощта на някоя обратима рекурсивна функция, то никой елемент на X не е изчислим в $\mathbf{X}$, защото за всеки елемент на X съответното множество (2) е някое от декартовите произведения $K_0 \times \mathbb{N}$, $K_1 \times \mathbb{N}$, $K_2 \times \mathbb{N}$, $\ldots$ и следователно не е рекурсивно номеруемо.

От това, че в общия случай не е вярно обратното твърдение на C, следва, че не винаги съществува μ-рекурсивен оператор, който да действа в посока обратна на посоката на действие на оператора от твърдението B, т.е. μ-рекурсивен оператор, който да преобразува представянията в (X, d, α) на елементите на X в техни представяния в $(X, d, \alpha)\iota$. Нека $(X, d, \alpha)\iota = (X, \mathcal{U})$. Лесно се строи μ-рекурсивен оператор, който преобразува всяко представяне в (X, d, α) на елемент ξ на X в обратимо изображение на $\mathbb{N}$ в $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$, а именно операторът, дефиниран чрез равенството $\Gamma(f)(n) = \iota(f(n), n)$, но от казаното в предходното изречение е ясно, че в някои случаи не за всяко всяко представяне f в (X, d, α) на елемент ξ на X множеството на стой-

[3] За целта може да се използва фактът, че е вярно следното твърдение: всяко безкрайно множество от естествени числа може да се представи като обединение на две непресичащи се множества, никое от които не е рекурсивно номеруемо. Верността на това твърдение следва от обстоятелството, че подмножествата на едно безкрайно множество от естествени числа са неизброимо много, а измежду тези подмножества онези, които са рекурсивно номеруеми или имат рекурсивно номеруемо допълнение до даденото множество, образуват изброима съвкупност. Множествата $K_0, K_1, K_2, \ldots$ могат да се построят по следния начин: като приложим горното твърдение към множеството $\mathbb{N}$, разделяме го на две непресичащи се множества, никое от които не е рекурсивно номеруемо, и в качеството на K_0 вземаме онова от двете, което съдържа числото 0, след това прилагаме твърдението към другото от тези две множества, разделяме го на две непресичащи се множества, никое от които не е рекурсивно номеруемо, и в качеството на K_1 вземаме онова от тях, което съдържа най-малкото число на въпросното друго множество, с другото от последните две множества постъпваме аналогично и т.н.; индуктивно се доказва, че $\{0, 1, \ldots, n\} \subset K_0 \cup K_1 \cup \cdots \cup K_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

ностите на $\Gamma(f)$ съвпада с цялото множество $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$.[4] Следното твърдение дава един по-сложен начин, по който винаги може $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ да се получи от произволно представяне на ξ в (X, d, α).

Лема 1. Нека (X, d, α) е ефективно метрично пространство, ι е обратима рекурсивна функция на два аргумента и $(X, d, \alpha)\iota = (X, \mathcal{U})$. Нека $\xi \in X$, а f е представяне на ξ в (X, d, α). Тогава $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ е образът чрез ι на множеството

$$\left\{(k, n) \in \mathrm{dom}(\alpha) \times \mathbb{N} \;\middle|\; \exists s \in \mathbb{N}\left(d(\alpha(f(s)), \alpha(k)) < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{s+1}\right)\right\}.^{5} \tag{5}$$

Доказателство. Ако (k, n) принадлежи на множеството (5), то, вземайки естествено число s, удовлетворяващо неравенството от дефиницията на това множество, ще имаме

$$d(\xi, \alpha(k)) \leq d(\xi, \alpha(f(s))) + d(\alpha(f(s)), \alpha(k)) < \frac{1}{s+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{n+1},$$

значи $\xi \in \mathcal{U}(\iota(k, n))$ и следователно $\iota(k, n) \in \mathcal{U}^{-1}(\xi)$. За разсъждението в обратната посока да разгледаме произволен елемент i на множеството $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$. Тогава $i \in \mathrm{dom}(\mathcal{U})$ и $\xi \in \mathcal{U}(i)$. Значи $i = \iota(k, n)$ за някои естествени числа k и n, като $k \in \mathrm{dom}(\alpha)$ и е в сила неравенството

$$d(\xi, \alpha(k)) < \frac{1}{n+1}.$$

Нека s е толкова голямо естествено число, че да имаме неравенството

$$\frac{1}{s+1} + d(\xi, \alpha(k)) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{s+1}.$$

Тогава

$$d(\alpha(f(s)), \alpha(k)) \leq d(\alpha(f(s)), \xi) + d(\xi, \alpha(k)) < \frac{1}{s+1} + d(\xi, \alpha(k)) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{s+1},$$

следователно двойката (k, n) принадлежи на множеството (5) и значи i е образ чрез ι на елемент на това множество. $\square$

При едно доста естествено предположение за ефективното метрично пространство (X, d, α) горната лема позволява да се построи μ-рекурсивен оператор, преобразуващ представянията в (X, d, α) на елементите на X в техни представяния в $(X, d, \alpha)\iota$, и като следствие от това при въпросното

[4] Всъщност единственият случай, когато за всяко представяне f в (X, d, α) на даден елемент ξ на X множеството на стойностите на $\Gamma(f)$ съвпада с цялото множество $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$, това е случаят, когато ξ е стойност на α, тя се приема от α само един път и в X няма нито един елемент ξ', различен от ξ и удовлетворяващ условието $d(\xi, \xi') < 1$.

[5] Изказано на геометричен език, неравенството в дефиницията на това множество изисква кълбото $\mathcal{U}(\iota(k, n))$ да има по-голям радиус от кълбото $\mathcal{U}(\iota(f(s), s))$, а разстоянието между центровете на тези две кълбета да бъде по-малко от разликата на радиусите им (това е едно достатъчно условие, щото второто от кълбетата да се съдържа в първото).

предположение е вярно обратното твърдение на С.

Дефиниция 4. *Полуизчислимо метрично пространство* ще наричаме такова ефективно метрично пространство (X, d, α), за което е рекурсивно номеруемо множеството

$$\left\{(j,k,p,q) \in \operatorname{dom}(\alpha) \times \operatorname{dom}(\alpha) \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\middle|\; d(\alpha(j), \alpha(k)) < \frac{p}{q+1}\right\}. \qquad (6)$$

Важни примери за полуизчислими метрични пространства са ефективните метрични пространства от вида $(\mathbb{R}^N, \rho_N, \alpha)$, където N е положително цяло число, а α е изчислима тотална номерация на $\mathbb{Q}^N$ (за тях съответните множества (6) са даже рекурсивни).

Теорема 2. Нека (X, d, α) е полуизчислимо метрично пространство, а ι е обратима рекурсивна функция на две променливи. Тогава:

1. Съществува такъв μ-рекурсивен оператор Γ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, че всеки път, когато f е представяне в (X, d, α) на някой елемент на X, функцията $\Gamma(f)$ е представяне на същия елемент в $(X, d, \alpha)\iota$.
2. Всеки изчислим елемент на (X, d, α) е изчислим елемент на $(X, d, \alpha)\iota$.

Доказателство. Благодарение на рекурсивната номеруемост на множеството (6) съществува такава рекурсивна функция χ на пет аргумента, че то да съвпада с множеството

$$\{(j,k,p,q) \in \mathbb{N}^4 \mid \exists t \in \mathbb{N}(\chi(j,k,p,q,t) = 0)\}.$$

Нека $(X, d, \alpha)\iota = (X, \mathcal{U})$. За доказателството на твърдението 1 да предположим на първо време, че f е представяне в (X, d, α) на даден елемент ξ на X. По лема 1 множеството $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ е образът чрез ι на множеството (5). Тъй като стойностите на d са неотрицателни, неравенството в дефиницията на въпросното множество е равносилно с неравенството

$$d(\alpha(f(s)), \alpha(k)) < \frac{s \dot{-} n}{ns + n + s + 1}.$$

Поради това (5) е множеството на онези двойки (k, n) от $\mathbb{N}^2$, за които при някой избор на естественото число s четворката $(f(s), k, s \dot{-} n, ns + n + s)$ принадлежи на множеството (6). Следователно (5) е множеството на онези двойки (k, n) от $\mathbb{N}^2$, за които при някой избор на естествените числа s и t е вярно равенството

$$\chi(f(s), k, s \dot{-} n, ns + n + s, t) = 0. \qquad (7)$$

Оттук виждаме, че елементите на множеството $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ могат да бъдат последователно породени по следния начин: образуваме последователно всевъзможните четворки (k, n, s, t) от $\mathbb{N}^4$ и за онези от тях, за които е изпълнено равенството (7), образуваме съответното число $\iota(k, n)$. С оглед на това да се получава елемент на $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ за всяка четворка от $\mathbb{N}^4$ можем да допълним описания пораждащ процес, като се условим на всяка четворка (k, n, s, t), за която равенството (7) е нарушено, да съпоставяме например числото $\iota(f(n), n)$. Разбира се, последователното образуване на всички четворки от $\mathbb{N}^4$ можем да осъществяваме с помощта на рекурсивни функции на един аргумент $\kappa, \nu, \sigma, \tau$, такива, че $\{(\kappa(i), \nu(i), \sigma(i), \tau(i)) \,|\, i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^4$. Направените дотук разсъждения показват, че оператор, за какъвто става дума в твърдението 1, може да се дефинира, като за всяка функция f от $\mathcal{F}_1$ и всяко i и $\mathbb{N}$ се положи

$$\Gamma(f)(i) = \Delta(f)(i, \chi(f(\sigma(i)), \kappa(i), \sigma(i) \dot{-} \nu(i), \nu(i)\sigma(i) + \nu(i) + \sigma(i), \tau(i))),$$

където $\Delta : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ се дефинира по следния начин:

$$\Delta(f)(i, z) = \begin{cases} \iota(\kappa(i), \nu(i)), & \text{ако } z = 0, \\ \iota(f(\nu(i)), \nu(i)) & \text{в противен случай} \end{cases}$$

(μ-рекурсивността на Γ следва от μ-рекурсивността на Δ, която пък лесно се установява чрез свеждане на дефиницията на $\Delta(f)$ към примитивна рекурсия). Твърдението 2, разбира се, следва от твърдението 1. $\square$

Ще намерим изчислимите елементи на две конкретни ефективни топологични пространства, чиято топология не се поражда от никаква метрика.

Пример 2. На всяко крайно множество от естествени числа да поставим в съответствие естествено число по следния начин: ако множеството се състои от различните помежду си числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то съответното число е $2^{x_1} + 2^{x_2} + \cdots + 2^{x_m}$ (считаме, че съответното число е 0, ако множеството е празно). Като се използва, че всяко естествено число може да се представи в двоична бройна система и представянето му е единствено, вижда се, че всяко естествено число е съответно по този начин на точно едно крайно множество от естествени числа. Ще означаваме с δ_i онова крайно множество от естествени числа, на което съответното число е i. Нека $\mathbf{X} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{U})$, където $\mathrm{dom}(\mathcal{U}) = \mathbb{N}$ и $\mathcal{U}(i) = \{\xi \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \,|\, \delta_i \subseteq \xi\}$ за всяко i от $\mathbb{N}$. Очевидно $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{U}(0)$. Освен това за всеки две естествени числа i_1 и i_2 имаме равенството $\mathcal{U}(i_1) \cap \mathcal{U}(i_2) = \mathcal{U}(i)$, където i е естественото число, удовлетворяващо условието $\delta_i = \delta_{i_1} \cup \delta_{i_2}$. Това показва, че $\mathrm{rng}(\mathcal{U})$ е база на топология в $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ и значи наредената двойка $\mathbf{X}$ е ефективно топологично пространство. Ще покажем, че изчислими елементи на това пространство са точно онези елементи на носителя му, които са рекурсивно номеруеми множества. И наистина, за всяко ξ от $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ е в сила равенството $\mathcal{U}^{-1}(\xi) = \{i \in \mathbb{N} \,|\, \delta_i \subseteq \xi\}$. От това равенство лесно следва, че ако ξ е рекурсивно номеруемо множество, то множеството $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ също е рекурсивно номеруемо[6] и следователно ξ е изчислим елемент на $\mathbf{X}$. От същото равенство виждаме още, че за всяко ξ

[6] Можем да използваме, че всички числа от δ_i са по-малки от i и че за произволно x от $\mathbb{N}$ разликата

$$\left\lfloor \frac{i}{2^x} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{i}{2^{x+1}} \right\rfloor$$

е равна на 1, когато $x \in \delta_i$, и е равна на 0 в противен случай. Оттук е ясно, че условието от $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ и всяко x от $\mathbb{N}$ е вярна еквивалентността $x \in \xi \Leftrightarrow 2^x \in \mathcal{U}^{-1}(\xi)$. Ако ξ е изчислим елемент на $\mathbf{X}$, то множеството $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ е рекурсивно номеруемо и следователно ξ също е рекурсивно номеруемо множество.

Пример 3. За всяко положително цяло число i нека φ_i е частичната функция в $\mathbb{N}$, дефинирана по следния начин (приели сме, че $p_0, p_1, p_2, \ldots$ са последователните прости числа): $\mathrm{dom}(\varphi_i)$ е множеството на онези x от $\mathbb{N}$, за които p_x дели i, и за всяко x от това множество съответната стойност $\varphi_i(x)$ е най-голямото естествено число y, за което p_x^{y+1} дели i. Нека $\mathbf{X} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{U})$, където $\mathrm{dom}(\mathcal{U}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ и за всяко i от $\mathrm{dom}(\mathcal{U})$ множеството $\mathcal{U}(i)$ се състои от всички функции от $\mathcal{F}_1$, които са продължения на функцията φ_i. Така дефинираното $\mathbf{X}$ е ефективно топологическо пространство, защото множеството $\mathrm{rng}(\mathcal{U})$ е база на топологията в $\mathcal{F}_1$, , която използвахме при доказателството за непрекъснатост на изчислимите реални функции. Ще покажем, че изчислимите елементи на $\mathbf{X}$ са точно частично рекурсивните функции на един аргумент. И наистина, нека $\xi \in \mathcal{F}_1$. Тогава множеството $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ се състои от всички естествени числа i, за които функцията φ_i е рестрикция на ξ. Оттук се вижда лесно, че ако функцията ξ е частично рекурсивна, то множеството $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ е рекурсивно номеруемо и следователно ξ е изчислим елемент на $\mathbf{X}$. За да докажем обратното, отбелязваме, че наредената двойка (x, y) принадлежи на графиката на функцията ξ точно за онези естествени числа x и y, за които $p_x^{y+1} \in \mathcal{U}^{-1}(\xi)$ (това е така, защото при $i = p_x^{y+1}$ функцията φ_i има дефиниционна област $\{x\}$ и е в сила равенството $\varphi_i(x) = y$). Ако ξ е изчислим елемент на $\mathbf{X}$, то множеството $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$ е рекурсивно номеруемо и следователно графиката на ξ е рекурсивно номеруема, тъй че ξ е частично рекурсивна функция.

Изчислимост на частични изображения на носителя на едно ефективно топологично пространство в носителя на същото или друго ефективно топологично пространство, се въвежда по аналогичен начин както при ефективните метрични пространства, като се използват представяния на елементите на пространствата.

Дефиниция 5. Нека $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ са ефективни топологични пространства, а θ е частично изображение на носителя на $\mathbf{X}$ в носителя на $\mathbf{Y}$. Ще казваме, че изображението θ е $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$-*изчислимо*, ако съществува такъв μ-рекурсивен оператор Γ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, че всеки път, когато f е представяне в $\mathbf{X}$ на някой елемент ξ на дефиниционната област на θ, функцията $\Gamma(f)$ е представяне в $\mathbf{Y}$ на $\theta(\xi)$.

От дефиниции 3 и 5 веднага следва, че всяко $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$-изчислимо изображение преобразува изчислимите елементи на $\mathbf{X}$, които принадлежат на дефиниционната му област, в изчислими елементи на $\mathbf{Y}$. Не е трудно да се

$\delta_i \subseteq \xi$ е еквивалентно на условието

$$\forall x < i \left(\left\lfloor \frac{i}{2^x} \right\rfloor \dot{-} 2 \left\lfloor \frac{i}{2^{x+1}} \right\rfloor = 0 \vee x \in \xi \right).$$

види също, че ако $\mathbf{X_0}$, $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$ са ефективни топологични пространства, θ_1 е $(\mathbf{X_0}, \mathbf{X_1})$-изчислимо частично изображение на носителя на $\mathbf{X_0}$ в носителя на $\mathbf{X_1}$ и θ_2 е $(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2})$-изчислимо частично изображение на носителя на $\mathbf{X_1}$ в носителя на $\mathbf{X_2}$, то изображението θ, дефинирано чрез равенството $\theta(\xi) = \theta_2(\theta_1(\xi))$, е $(\mathbf{X_0}, \mathbf{X_2})$-изчислимо.

Теорема 3. Нека $\mathbf{X} = (X, \mathcal{U})$ и $\mathbf{Y} = (Y, \mathcal{V})$ са ефективни топологични пространства, а θ е $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$-изчислимо изображение на D в Y, където $D \subseteq X$. Тогава θ е непрекъснато във всяка точка от D относно топологията в X с база $\mathrm{rng}(\mathcal{U})$ и топологията в Y с база $\mathrm{rng}(\mathcal{V})$.

Доказателство. Благодарение на изчислимостта на θ съществува такъв μ-рекурсивен оператор Γ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, че всеки път, когато $\xi \in D$ и f е функция от $\mathcal{F}_1$, представяща ξ в $\mathbf{X}$, функцията $\Gamma(f)$ представя $\theta(\xi)$ в $\mathbf{Y}$. Нека ξ е произволна точка от D, а V – произволно отворено множество в $\mathbf{Y}$, което съдържа $\theta(\xi)$. Ще докажем съществуването на такова отворено множество U в $\mathbf{X}$, че $\xi \in U$ и образът на сечението $D \cap U$ чрез θ се съдържа във V. Тъй като V е обединение на множества от $\mathrm{rng}(\mathcal{V})$, съществува естествено число b от $\mathrm{dom}(\mathcal{V})$, за което $\theta(\xi) \in \mathcal{V}(b) \subseteq V$. Нека f е функция от $\mathcal{F}_1$, която представя ξ в $\mathbf{X}$. Тогава $\Gamma(f)$ представя $\theta(\xi)$ в $\mathbf{Y}$. Тъй като $b \in \mathcal{V}^{-1}(\theta(\xi))$, ще имаме равенството $\Gamma(f)(a) = b$ за някое естествено число a. Поради непрекъснатостта на оператора Γ съществува такова крайно множество E от естествени числа, че $\Gamma(f')(a) = b$ за всяка функция f' от $\mathcal{F}_1$, която съвпада с f в E. Разбира се, можем да считаме, че множеството E не е празно. За всяко естествено число i може да се образува множеството $\mathcal{U}(f(i))$ и това множество съдържа точката ξ, тъй като всички стойности на f принадлежат на множеството $\mathcal{U}^{-1}(\xi)$. Да означим с U сечението на множествата $\mathcal{U}(f(i))$, където $i \in E$. Тогава U е отворено множество в $\mathbf{X}$ и $\xi \in U$. Нека ξ' е произволна точка от $D \cap U$. Всички стойности, които приема функцията f в множеството E, принадлежат и на множеството $\mathcal{U}^{-1}(\xi')$. При това положение, както може да се съобрази, съществува такова представяне f' на ξ', че f' съвпада с f в множеството E. За това f' ще е в сила равенството $\Gamma(f')(a) = b$ и $\Gamma(f')$ ще бъде представяне на $\theta(\xi')$ в $\mathbf{Y}$. Оттук заключаваме, че $b \in \mathcal{V}^{-1}(\theta(\xi'))$, т.е. $\theta(\xi') \in \mathcal{V}(b))$ и следователно $\theta(\xi') \in V$. □

Изчислимостта на едно изображение на носителя на едно ефективно метрично пространство в носителя на същото или друго ефективно метрично пространство в общия случай не е еквивалентна на изчислимостта на това изображение, която се получава при замяна на метричните пространства с техни асоциирани ефективни топологични пространства. В случая на полуизчислими метрични пространства обаче такава еквивалентност е налице.

Теорема 4. Нека $\mathbf{X} = (X, d, \alpha)$ и $\mathbf{Y} = (Y, e, \beta)$ са полуизчислими метрични пространства, $\theta : D \to Y$, където $D \subseteq X$, и ι е обратима рекурсивна функция на две променливи. Изображението θ е $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$-изчислимо точно тогава, когато то е $(\mathbf{X}\iota, \mathbf{Y}\iota)$-изчислимо.

Доказателство. По твърдение B от теорема 1 съществуват такива μ-

рекурсивни оператори Γ_1^X и Γ_1^Y от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, че за всеки елемент на X операторът Γ_1^X преобразува представянията на този елемент в $\mathbf{X}\iota$ в негови представяния в $\mathbf{X}$ и за всеки елемент на Y операторът Γ_1^Y преобразува представянията на този елемент в $\mathbf{Y}\iota$ в негови представяния в $\mathbf{Y}$. По твърдение 1 от теорема 2 съществуват такива μ-рекурсивни оператори Γ_2^X и Γ_2^Y от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, че за всеки елемент на X операторът Γ_2^X преобразува представянията на този елемент в $\mathbf{X}$ в негови представяния в $\mathbf{X}\iota$ и за всеки елемент на Y операторът Γ_2^Y преобразува представянията на този елемент в $\mathbf{Y}$ в негови представяния в $\mathbf{Y}\iota$. Ако изображението θ е $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$-изчислимо, то съществува μ-рекурсивен оператор Γ, който за всяко ξ от D преобразува представянията на ξ в $\mathbf{X}$ в представяния на $\theta(\xi)$ в $\mathbf{Y}$, а тогава за всяко ξ от D μ-рекурсивният оператор Γ', дефиниран чрез равенството $\Gamma'(f) = \Gamma_2^Y(\Gamma(\Gamma_1^X(f)))$, преобразува представянията на ξ в $\mathbf{X}\iota$ в представяния на $\theta(\xi)$ в $\mathbf{Y}\iota$, следователно изображението θ е $(\mathbf{X}\iota, \mathbf{Y}\iota)$-изчислимо. Ако изображението θ е $(\mathbf{X}\iota, \mathbf{Y}\iota)$-изчислимо, то съществува μ-рекурсивен оператор Γ, който за всяко ξ от D преобразува представянията на ξ в $\mathbf{X}\iota$ в представяния на $\theta(\xi)$ в $\mathbf{Y}\iota$, а тогава за всяко ξ от D μ-рекурсивният оператор Γ', дефиниран чрез равенството $\Gamma'(f) = \Gamma_1^Y(\Gamma(\Gamma_2^X(f)))$, преобразува представянията на ξ в $\mathbf{X}$ в представяния на $\theta(\xi)$ в $\mathbf{Y}$, следователно изображението θ е $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$-изчислимо. $\square$