Ефективни метрични пространства

Метрика в едно множество X се нарича такава функция d от X^2 към $\mathbb{R}$, че при всеки избор на елементи ξ_1, ξ_2, ξ_3 на X да са в сила равенството $d(\xi_1, \xi_2) = d(\xi_2, \xi_1)$, неравенството $d(\xi_1, \xi_3) \leq d(\xi_1, \xi_2) + d(\xi_2, \xi_3)$ и еквивалентността $d(\xi_1, \xi_2) = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = \xi_2$ (от тези изисквания лесно следва, че всички стойности на функцията d са неотрицателни). Важен пример за метрика в множеството $\mathbb{R}$ е функцията на две променливи ρ, дефинирана с равенството

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = |\xi_1 - \xi_2|.$$

Тя може да се разглежда като частен случай на метриката ρ_N в $\mathbb{R}^N$, която се дефинира с равенството

$$\rho_N((\xi_{11}, \ldots, \xi_{1N}), (\xi_{21}, \ldots, \xi_{2N})) = \max(|\xi_{11} - \xi_{21}|, \ldots, |\xi_{1N} - \xi_{2N}|).$$

Дефиниция 1. *Ефективно метрично пространство* ще наричаме всяка наредена тройка (X, d, α), където X е множество (*носител* на пространството), d е метрика в X и α е частична функция от $\mathbb{N}$ към X, на която множеството на стойностите е навсякъде гъсто в X относно d (т.е. за всяко ξ от X и всяко положително число δ съществува число i от дефиниционната област на α, за което $d(\alpha(i), \xi) < \delta$).

Пример 1. Ако α е частично изображение на $\mathbb{N}$ върху множеството $\mathbb{Q}$ на рационалните числа, то тройката $(\mathbb{R}, \rho, \alpha)$ е ефективно метрично пространство.

Пример 2. Ако α е частично изображение на $\mathbb{N}$ върху множеството $\mathbb{Q}^N$, то тройката $(\mathbb{R}^N, \rho_N, \alpha)$ е ефективно метрично пространство.

Забележка. Дадената по-горе дефиниция не е съществено различна от онази, която е възприета в книгата на Клаус Вайраух „Computable Analysis: An Introduction“, издадена през 2000 г. В статията на Армин Хемерлинг „Effective metric spaces and representations of the reals“, публикувана през 2002 г., се използва доста по-ограничително понятие за ефективно метрично пространство – фактически се поставят допълнителните изисквания X да е пълно относно метриката d, α да е дефинирана навсякъде в $\mathbb{N}$ и множеството

$$\left\{ (i, j, k, l) \in \mathbb{N}^4 \;\middle|\; d(\alpha(i), \alpha(j)) < \frac{k}{l+1} \right\}$$

да е рекурсивно номеруемо (първото от тези допълнителни изисквания е изпълнено в условията на горните два примера, но за останалите две това зависи от избора на изображението α).

По-нататък ще дефинираме понятието изчислимост за елементи на носителя на едно ефективно метрично пространство и за частични изображения на носителя на едно ефективно метрично пространство в носителя на същото или друго ефективно метрично пространство. При някои специални избори на изображенията α горните два примера ще ни послужат, за да можем да разглеждаме изчислимостта в множеството на реалните числа като частен случай на изчислимостта в ефективни метрични пространства (при въпросните избори на изображенията α всъщност ще бъдат удовлетворени и трите допълнителни изисквания, които поставя дефиницията на Хемерлинг, спомената в горната забележка).

Ще наричаме *изчислима тотална номерация на* $\mathbb{Q}$ такова изображение α на $\mathbb{N}$ върху $\mathbb{Q}$, което може да се представи във вида

$$\alpha(i) = \frac{\alpha_1(i) - \alpha_2(i)}{\alpha_3(i) + 1} \tag{1}$$

при някой избор на рекурсивни функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (една такава номерация α би могла да се дефинира например с горното равенство, като се използват рекурсивни функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, за които $\{(\alpha_1(i), \alpha_2(i), \alpha_3(i)) \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^3$). Ако α е изчислима тотална номерация на $\mathbb{Q}$, то съществува такава рекурсивна функция на три променливи $\bar{\alpha}$, че при всеки избор на естествените числа x_1, x_2, x_3 е изпълнено равенството

$$\alpha(\bar{\alpha}(x_1, x_2, x_3)) = \frac{x_1 - x_2}{x_3 + 1}. \tag{2}$$

И наистина, нека α е изображение на $\mathbb{N}$ върху $\mathbb{Q}$, което има вида (1) при някой избор на рекурсивни функции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Да дефинираме функцията $\bar{\alpha} : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ с помощта на равенството

$$\bar{\alpha}(x_1, x_2, x_3) = \min \left\{ i \;\middle|\; \alpha(i) = \frac{x_1 - x_2}{x_3 + 1} \right\}.$$

Тогава, разбира се, при всеки избор на естествените числа x_1, x_2, x_3 ще бъде изпълнено равенството (2), а рекурсивността на функцията $\bar{\alpha}$ следва от равенството

$$\bar{\alpha}(x_1, x_2, x_3) = \mu i[|(\alpha_1(i)(x_3+1) + (\alpha_3(i)+1)x_2) - (\alpha_2(i)(x_3+1) + (\alpha_3(i)+1)x_1)| = 0].$$

С помощта на току-що доказаното свойство на изчислимите тотални номерации на $\mathbb{Q}$ се вижда, че всеки две такива номерации са в определен смисъл еквивалентни. А именно, ако α и α' са изчислими тотални номерации на $\mathbb{Q}$, то съществува такава рекурсивна функция на един аргумент τ, че за всяко i от $\mathbb{N}$ е в сила равенството

$$\alpha'(i) = \alpha(\tau(i)). \tag{3}$$

Действително, ако α' има вида

$$\alpha'(i) = \frac{\alpha'_1(i) - \alpha'_2(i)}{\alpha'_3(i) + 1},$$

където $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ са рекурсивни функции, а $\bar{\alpha}$ е такава рекурсивна функция на три променливи, че при всеки избор на естествените числа x_1, x_2, x_3 е изпълнено равенството (2), то за всяко i от $\mathbb{N}$ ще имаме равенството (3) с

$$\tau(i) = \bar{\alpha}(\alpha'_1(i), \alpha'_2(i), \alpha'_3(i)).$$

По-общо, нека N е произволно положително цяло число. Ще наричаме *изчислима тотална номерация на* $\mathbb{Q}^N$ такова изображение α на $\mathbb{N}$ върху $\mathbb{Q}^N$, което може да се представи във вида

$$\alpha(i) = \left(\frac{\alpha_{11}(i) - \alpha_{12}(i)}{\alpha_{13}(i) + 1}, \ldots, \frac{\alpha_{N1}(i) - \alpha_{N2}(i)}{\alpha_{N3}(i) + 1} \right) \tag{4}$$

при някой избор на рекурсивни функции $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{N1}, \alpha_{N2}, \alpha_{N3}$ (една такава номерация α би могла да се дефинира например с горното равенство, като се използват рекурсивни функции $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{N1}, \alpha_{N2}, \alpha_{N3}$, за които $\{(\alpha_{11}(i), \alpha_{12}(i), \alpha_{13}(i), \ldots, \alpha_{N1}(i), \alpha_{N2}(i), \alpha_{N3}(i)) \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^{3N}$). Ако α е изчислима тотална номерация на $\mathbb{Q}^N$, то съществува такава рекурсивна функция на $3N$ променливи $\bar{\alpha}$, че при всеки избор на естествените числа $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{N1}, x_{N2}, x_{N3}$ е изпълнено равенството

$$\alpha(\bar{\alpha}(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{N1}, x_{N2}, x_{N3})) = \left(\frac{x_{11} - x_{12}}{x_{13} + 1}, \ldots, \frac{x_{N1} - x_{N2}}{x_{N3} + 1} \right). \tag{5}$$

И наистина, нека α е изображение на $\mathbb{N}$ върху $\mathbb{Q}^N$, което има вида (4) при някой избор на рекурсивни функции $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{N1}, \alpha_{N2}, \alpha_{N3}$. Да дефинираме функцията $\bar{\alpha} : \mathbb{N}^{3N} \to \mathbb{N}$ с помощта на равенството

$$\bar{\alpha}(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{N1}, x_{N2}, x_{N3}) = \min \left\{ i \;\middle|\; \alpha(i) = \left(\frac{x_{11} - x_{12}}{x_{13} + 1}, \ldots, \frac{x_{N1} - x_{N2}}{x_{N3} + 1} \right) \right\}.$$

Тогава, разбира се, при всеки избор на естествените числа x_{jk} ще бъде изпълнено равенството (5), а рекурсивността на функцията $\bar{\alpha}$ следва от равенството

$$\bar{\alpha}(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{N1}, x_{N2}, x_{N3}) =$$
$$\mu i \left[\sum_{j=1}^{N} |(\alpha_{j1}(i)(x_{j3}+1) + (\alpha_{j3}(i)+1)x_{j2}) - (\alpha_{j2}(i)(x_{j3}+1) + (\alpha_{j3}(i)+1)x_{j1})| = 0 \right].$$

С помощта на доказаното свойство се вижда, че α и α' са изчислими тотални номерации на $\mathbb{Q}^N$, то съществува такава рекурсивна функция на един аргумент τ, че за всяко i от $\mathbb{N}$ е в сила равенството (3).

Дефиниция 2. Нека $\mathbf{X} = (X, d, \alpha)$ е ефективно метрично пространство, а ξ е елемент на X. *Представяне* на ξ в $\mathbf{X}$ ще наричаме всяка функция $f : \mathbb{N} \to \mathrm{dom}(\alpha)$, за която

$$d(\alpha(f(n)), \xi) < \frac{1}{n+1}$$

при всеки избор на n в $\mathbb{N}$. Вместо да казваме, че дадена функция е представяне на ξ в $\mathbf{X}$, ще казваме също, че тя *представя* ξ в $\mathbf{X}$.

Пример $1'$**.** Нека $\mathbf{X} = (\mathbb{R}, \rho, \alpha)$, където α е изчислима тотална номерация на $\mathbb{Q}$. Тогава:

(A) Ако $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ са такива функции в $\mathbb{N}$, че за всяко i в $\mathbb{N}$ е изпълнено равенството (1), а f е функция в $\mathbb{N}$, която представя в $\mathbf{X}$ даден елемент ξ на X, то тройката (f_1, f_2, f_3), където f_1, f_2, f_3 са функциите в $\mathbb{N}$, дефинирани с равенствата

$$f_k(n) = \alpha_k(f(n)), \quad k = 1, 2, 3, \tag{6}$$

представя реалното число ξ. Това е така, защото от дефиницията на метриката ρ и равенствата (1) и (6) следва равенството

$$\rho(\alpha(f(n)), \xi) = \left| \frac{f_1(n) - f_2(n)}{f_3(n) + 1} - \xi \right|. \tag{7}$$

(B) Ако функцията $\bar{\alpha} : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ е такава, че при всеки избор на x_1, x_2, x_3 в $\mathbb{N}$ е в сила равенството (2), а (f_1, f_2, f_3) е тройка от функции в $\mathbb{N}$, която представя дадено реално число ξ, то функцията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, дефинирана чрез равенството

$$f(n) = \bar{\alpha}(f_1(n), f_2(n), f_3(n)), \tag{8}$$

представя ξ в $\mathbf{X}$. Това се вижда отново от равенството (7), но този път то се получава, като се използват равенствата (2) и (8) вместо равенствата (1) и (6).

Пример $2'$**.** Нека $\mathbf{X} = (\mathbb{R}^N, \rho_N, \alpha)$, където α е изчислима тотална номерация на $\mathbb{Q}^N$. Тогава:

(A) Ако $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{N1}, \alpha_{N2}, \alpha_{N3}$ са такива функции в $\mathbb{N}$, че за всяко i в $\mathbb{N}$ е изпълнено равенството (4), а f е функция в $\mathbb{N}$, която представя в $\mathbf{X}$ даден елемент $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ на X, то при $j = 1, \ldots, N$ тройката (f_{j1}, f_{j2}, f_{j3}), където f_{j1}, f_{j2}, f_{j3} са функциите в $\mathbb{N}$, дефинирани с равенствата

$$f_{jk}(n) = \alpha_{jk}(f(n)), \quad k = 1, 2, 3, \tag{9}$$

представя реалното число ξ_j. Това е така, защото от дефиницията на метриката ρ_N и равенствата (4) и (9) следва равенството

$$\begin{aligned} &\rho(\alpha(f(n)), (\xi_1, \ldots, \xi_N)) = \\ &\quad \max\left(\left| \frac{f_{11}(n) - f_{12}(n)}{f_{13}(n) + 1} - \xi_1 \right|, \ldots, \left| \frac{f_{N1}(n) - f_{N2}(n)}{f_{N3}(n) + 1} - \xi_N \right| \right). \end{aligned} \tag{10}$$

(В) Ако функцията $\bar{\alpha} : \mathbb{N}^{3N} \to \mathbb{N}$ е такава, че при всеки избор на естествените числа $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{N1}, x_{N2}, x_{N3}$ е изпълнено равенството (5), а тройките (f_{j1}, f_{j2}, f_{j3}), $j = 1, \dots, N$, представят съответно дадени реални числа $\xi_1, \dots, \xi_N$, то функцията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, дефинирана чрез равенството

$$f(n) = \bar{\alpha}(f_{11}(n), f_{12}(n), f_{13}(n)), \dots, f_{N1}(n), f_{N2}(n), f_{N3}(n)), \tag{11}$$

представя $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ в $\mathbf{X}$. Това се вижда отново от равенството (10), но този път то се получава, като се използват равенствата (5) и (11) вместо равенствата (4) и (9).

Дефиниция 3. Нека $\mathbf{X} = (X, d, \alpha)$ е ефективно метрично пространство, а ξ е елемент на X. Казваме, че ξ е *изчислим елемент* на $\mathbf{X}$, ако съществува рекурсивна функция, която представя ξ в $\mathbf{X}$.

Пример $1''$**.** При предположенията на пример $1'$ едно реално число е изчислим елемент на $\mathbf{X}$ точно тогава, когато то е изчислимо. И наистина, при тези предположения можем да си послужим с функции $\bar{\alpha}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, които са рекурсивни, а тогава за всяка рекурсивна функция на един аргумент f функциите f_1, f_2, f_3, дефинирани с равенствата (6), ще бъдат също рекурсивни и за всеки три рекурсивни функции на един аргумент f_1, f_2, f_3 функцията f, дефинирана с равенството (8), също ще бъде рекурсивна.

Пример $2''$**.** При предположенията на пример $2'$ един елемент $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ на R^N е изчислим елемент на $\mathbf{X}$ точно тогава, когато всяко от реалните числа $\xi_1, \dots, \xi_N$ е изчислимо. И наистина, при тези предположения можем да си послужим с функции $\bar{\alpha}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{N1}, \alpha_{N2}, \alpha_{N3}$, които са рекурсивни, а тогава за всяка рекурсивна функция на един аргумент f функциите, дефинирани с равенствата (9), ще бъдат също рекурсивни и за всеки $3N$ рекурсивни функции на един аргумент $f_{11}, f_{12}, f_{13}, \dots, f_{N1}, f_{N2}, f_{N3}$ функцията, дефинирана с равенството (11), също ще бъде рекурсивна.

Пример 3. Ако $\mathbf{X} = (X, d, \alpha)$ е произволно ефективно метрично пространство, то всички елементи на $\mathrm{rng}(\alpha)$ са изчислими елементи на $\mathbf{X}$.

Дефиниция 4. Нека $\mathbf{X} = (X, d, \alpha)$ и $\mathbf{Y} = (Y, e, \beta)$ са ефективни метрични пространства. Нека $\theta : D \to Y$, където $D \subseteq X$. Казваме, че изображението θ е $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$-*изчислимо*, ако съществува такъв μ-рекурсивен оператор $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$, че всеки път, когато една функция f от $\mathcal{F}_1$ представя в $\mathbf{X}$ един елемент ξ на D, функцията $\Gamma(f)$ представя в $\mathbf{Y}$ елемента $\theta(\xi)$.

От дадените дотук дефиниции веднага следва, че всяко $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$-изчислимо изображение преобразува изчислимите елементи на $\mathbf{X}$, които принадлежат на дефиниционната на това изображение, в изчислими елементи на $\mathbf{Y}$.

Твърдение 1. Нека $\mathbf{X} = (\mathbb{R}^N, \rho_N, \alpha)$, където α е изчислима тотална номерация на $\mathbb{Q}^N$, $\mathbf{Y} = (\mathbb{R}, \rho, \beta)$, където β е изчислима тотална номерация на $\mathbb{Q}$, и $\theta : D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{R}^N$. Изображението θ е $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$-изчислимо точно тогава, когато то е изчислима реална функция.

Доказателство. Да предположим първо, че изображението θ е $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$-изчислимо. Нека Γ е μ-рекурсивен оператор със свойството от горната дефиниция. Тогава да дефинираме най-напред оператор $\Delta : \mathcal{F}_1^{3N} \to \mathcal{F}_1$ чрез равенството

$$\Delta(f_{11}, f_{12}, f_{13}, \ldots, f_{N1}, f_{N2}, f_{N3})(n) \\ = \bar{\alpha}(f_{11}(n), f_{12}(n), f_{13}(n), \ldots, f_{N1}(n), f_{N2}(n), f_{N3}(n)),$$

където $\bar{\alpha}$ е такава рекурсивна функция на $3N$ променливи, че при всеки избор на естествените числа $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{N1}, x_{N2}, x_{N3}$ да е изпълнено равенството (5). След това да дефинираме оператори $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ от $\mathcal{F}_1^{3N}$ към $\mathcal{F}_1$ с помощта на равенството

$$\Gamma_k(f_{11}, f_{12}, f_{13}, \ldots, f_{N1}, f_{N2}, f_{N3})(n) \\ = \beta_k(\Gamma(\Delta(f_{11}, f_{12}, f_{13}, \ldots, f_{N1}, f_{N2}, f_{N3}))(n)),$$

където $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ са такива рекурсивни функции на един аргумент, че

$$\beta(i) = \frac{\beta_1(i) - \beta_2(i)}{\beta_3(i) + 1}$$

за всяко i от $\mathbb{N}$. Ясно е, че операторите $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ са μ-рекурсивни. Да предположим, че $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in D$ и тройките $(f_{11}, f_{12}, f_{13}), \ldots, (f_{N1}, f_{N2}, f_{N3})$ представят съответно $\xi_1, \ldots, \xi_N$. Ще покажем, че тройката от функциите

$$\Gamma_k(f_{11}, f_{12}, f_{13}, \ldots, f_{N1}, f_{N2}, f_{N3}), \quad k = 1, 2, 3,$$

представя числото $\theta(\xi_1, \ldots, \xi_N)$. За целта отбелязваме, че по точка (B) от пример $2'$ функцията $\Delta(f_{11}, f_{12}, f_{13}, \ldots, f_{N1}, f_{N2}, f_{N3})$ представя в $\mathbf{X}$ елемента $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ на $\mathbb{R}^N$. Оттук следва, че функцията

$$\Gamma(\Delta(f_{11}, f_{12}, f_{13}, \ldots, f_{N1}, f_{N2}, f_{N3}))$$

представя в $\mathbf{Y}$ съответната стойност $\theta(\xi_1, \ldots, \xi_N)$. По точка (A) от пример $1'$, приложен за $\mathbf{Y}$, това дава желаното заключение.

За разсъждението в обратната посока да предположим, че функцията θ е изчислима. Нека $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ са μ-рекурсивни оператори от $\mathcal{F}_1^{3N}$ към $\mathcal{F}_1$, които свидетелстват за изчислимостта на θ. Да дефинираме най-напред оператори $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \ldots, \Delta_{N1}, \Delta_{N2}, \Delta_{N3}$ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$ чрез равенствата

$$\Delta_{jk}(f)(n) = \alpha_{jk}(f(n)), \quad j = 1, \ldots, N, \ k = 1, 2, 3,$$

където $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{N1}, \alpha_{N2}, \alpha_{N3}$ са такива рекурсивни функции на един аргумент, че за всяко i от $\mathbb{N}$ да е в сила равенството (4). Да дефинираме след това оператори $\Gamma_1', \Gamma_2', \Gamma_3'$ и Γ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, като положим

$$\begin{aligned}
\Gamma_1'(f) &= \Gamma_1(\Delta_{11}(f), \Delta_{12}(f), \Delta_{13}(f), \ldots, \Delta_{N1}(f), \Delta_{N2}(f), \Delta_{N3}(f)),\\
\Gamma_2'(f) &= \Gamma_2(\Delta_{11}(f), \Delta_{12}(f), \Delta_{13}(f), \ldots, \Delta_{N1}(f), \Delta_{N2}(f), \Delta_{N3}(f)),\\
\Gamma_3'(f) &= \Gamma_3(\Delta_{11}(f), \Delta_{12}(f), \Delta_{13}(f), \ldots, \Delta_{N1}(f), \Delta_{N2}(f), \Delta_{N3}(f)),\\
\Gamma(f)(n) &= \bar{\beta}(\Gamma_1'(f)(n), \Gamma_2'(f)(n), \Gamma_3'(f)(n)),
\end{aligned}$$

където $\bar{\beta}$ е такава рекурсивна функция на три променливи, че при всеки избор на естествени числа x_1, x_2, x_3 да е в сила равенството

$$\beta(\bar{\beta}(x_1, x_2, x_3)) = \frac{x_1 - x_2}{x_3 + 1}.$$

Ясно е, че операторът Γ е μ-рекурсивен. Да предположим, че една функция f представя $\mathbf{X}$ даден елемент $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ на D. Ще покажем, че функцията $\Gamma(f)$ представя в $\mathbf{Y}$ съответната стойност $\theta(\xi_1, \ldots, \xi_N)$. За целта отбелязваме, че по точка (A) от пример $2'$ тройката $(\Delta_{j1}(f), \Delta_{j2}(f), \Delta_{j3}(f))$ представя числото ξ_j при $j = 1, \ldots, N$. Оттук следва, че тройката $(\Gamma'_1(f), \Gamma'_2(f), \Gamma'_3(f))$ представя числото $\theta(\xi_1, \ldots, \xi_N)$. По точка (B) от пример $1'$, приложен за $\mathbf{Y}$, това дава желаното заключение. $\square$

Твърдение 2 (запазване на изчислимостта при композиция). Нека $\mathbf{X_k} = (X_k, d_k, \alpha_k)$, $k = 0, 1, 2$, са ефективни метрични пространства, θ_1 е $(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1)$-изчислимо частично изображение на X_0 в X_1, а θ_2 е $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$-изчислимо частично изображение на X_1 в X_2. Тогава частичното изображение θ на X_0 в X_2, определено чрез равенството $\theta(\xi) = \theta_2(\theta_1(\xi))$, е $(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_2)$-изчислимо.

Доказателство. Нека Γ_1 и Γ_2 са такива μ-рекурсивни оператори от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, че всеки път, когато f е представяне в $\mathbf{X}_0$ на някой елемент ξ на $\mathrm{dom}(\theta_1)$, функцията $\Gamma_1(f)$ е представяне в $\mathbf{X}_1$ на $\theta_1(\xi)$ и всеки път, когато g е представяне в $\mathbf{X}_2$ на някой елемент η на $\mathrm{dom}(\theta_2)$, функцията $\Gamma_2(g)$ е представяне в $\mathbf{X}_2$ на $\theta_2(\xi)$. Да разгледаме оператора Γ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, определен чрез равенството $\Gamma(f) = \Gamma_2(\Gamma_1(f))$. Той също е μ-рекурсивен и всеки път, когато f е представяне в $\mathbf{X}_0$ на някой елемент ξ на $\mathrm{dom}(\theta)$, функцията $\Gamma(f)$ е представяне в $\mathbf{X}_2$ на $\theta(\xi)$. $\square$

Дефиниция 5. Нека (X_k, d_k, α_k), $k = 1, \ldots, N$, са ефективни метрични пространства. Тяхно *декартово произведение* ще наричаме всяко ефективно метрично пространство от вида $(X_1 \times \cdots \times X_N, d, \alpha)$, където метриката d се определя чрез равенството

$$d((\xi_1, \ldots, \xi_N), (\xi'_1, \ldots, \xi'_N)) = \max(d_1(\xi_1, \xi'_1), \ldots, d_N(\xi_N, \xi'_N)), \qquad (12)$$

а α е частично изображение на $\mathbb{N}$ в $X_1 \times \cdots \times X_N$, за което съществуват частично рекурсивна функция на N променливи τ_0 и частично рекурсивни функции на един аргумент $\tau_1, \ldots, \tau_N$ със следните свойства:

(a) $\alpha(\tau_0(i_1, \ldots, i_n)) = (\alpha_1(i_1), \ldots, \alpha_N(i_N))$ всеки път, когато $i_1 \in \mathrm{dom}(\alpha_1)$, $\ldots, i_N \in \mathrm{dom}(\alpha_N)$;

(b) $\alpha(i) = (\alpha_1(\tau_1(i)), \ldots, \alpha_N(\tau_N(i)))$ за всяко i от $\mathrm{dom}(\alpha)$.

(за равенствата в точки (a) и (b) се изисква винаги, когато едната страна на някое от тях има смисъл, другата страна също да има смисъл и стойностите им да бъдат равни).

Пример 4. Нека $X_k = \mathbb{R}$, $d_k(\xi, \xi') = |\xi - \xi'|$ при $k = 1, \ldots, N$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ са изчислими тотални номерации на множеството $\mathbb{Q}$. Ако метриката d в $\mathbb{R}^N$ е определена чрез равенството

$$d((\xi_1, \ldots, \xi_N), (\xi'_1, \ldots, \xi'_N)) = \max(|\xi_1 - \xi'_1|, \ldots, |\xi_N - \xi'_N|)$$

и α е изчислима тотална номерация на множеството $\mathbb{Q}^N$, то $(\mathbb{R}^N, d, \alpha)$ е декартово произведение на ефективните метрични пространства

$$(X_1, d_1, \alpha_1), \ldots, (X_N, d_N, \alpha_N).$$

Твърдение 3. За всяка крайна редица от ефективни метрични пространства съществува тяхно декартово произведение.

Доказателство. Нека (X_k, d_k, α_k), $k = 1, \ldots, N$, са ефективни метрични пространства. Както е известно, съществуват такава рекурсивна функция на N променливи τ_0 и такива рекурсивни функции на един аргумент $\tau_1, \ldots, \tau_N$, че при всеки избор на естествените числа $i_1, \ldots, i_N$ са изпълнени равенствата

$$\tau_k(\tau_0(i_1, \ldots, i_N)) = i_k, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Нека функцията $d : (X_1 \times \cdots \times X_N)^2 \to \mathbb{R}$ се определя чрез равенството (12), а частичното изображение α на $\mathbb{N}$ в $X_1 \times \cdots \times X_N$ – чрез равенството в точка (b) от дефиницията за декартово произведение на ефективни метрични пространства. Лесно се вижда, че функцията d е метрика в $X_1 \times \cdots \times X_N$. Свойството (b) е налице по самата дефиниция на α, а наличието на свойството (a) следва от наличието на (b) и начина, по който бяха избрани функциите $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_N$. От свойствата (a) и (b) следва равенството $\mathrm{rng}(\alpha) = \mathrm{rng}(\alpha_1) \times \cdots \times \mathrm{rng}(\alpha_N)$, а от него и дефиницията на .метриката d е ясно, че множеството $\mathrm{rng}(\alpha)$ е навсякъде гъсто в $X_1 \times \cdots \times X_N$ относно d.$\square$

Твърдение 4. Нека $\mathbf{X}_k = (X_k, d_k, \alpha_k)$, $k = 1, \ldots, N$, са ефективни метрични пространства и $\mathbf{X} = (X_1 \times \cdots \times X_N, d, \alpha)$ е тяхно декартово произведение. Тогава при $k = 1, \ldots, N$ изображението $\pi_k : X_1 \times \cdots \times X_N \to X_k$, определено чрез равенството

$$\pi_k(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \xi_k,$$

е $(\mathbf{X}, \mathbf{X}_k)$-изчислимо.

Доказателство. Нека $\tau_1, \ldots, \tau_N$ са частично рекурсивни функции със свойството (b) от дефиницията за декартово произведение на ефективни метрични пространства. Ако f е представяне в $\mathbf{X}$ на даден елемент $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ на $X_1 \times \cdots \times X_N$, то за всяко n от $\mathbf{N}$ числото $f(n)$ принадлежи на $\mathrm{dom}(\alpha)$ и е в сила равенството

$$\alpha(f(n)) = (\alpha_1(\tau_1(f(n))), \ldots, \alpha_N(\tau_N(f(n)))),$$

поради което

$$d_k(\alpha_k(\tau_k(f(n))), \xi_k) \le d(f(n, (\xi_1, \ldots, \xi_N)) < \frac{1}{n+1}.$$

Да разгледаме оператора Γ_k от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, определен чрез равенството $\Gamma_k(f)(n) = \tau_k(f(n))$. Той очевидно е μ-рекурсивен, а от казаното по-горе е ясно, че винаги, когато f е представяне в $\mathbf{X}$ на даден елемент на множеството $X_1 \times \cdots \times X_N$, функцията $\Gamma_k(f)$ е представяне в $\mathbf{X}_k$ на образа на този елемент при изображението π_k. □

Твърдение 5. Нека $\mathbf{X}_k = (X_k, d_k, \alpha_k)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, са ефективни метрични пространства и $\mathbf{X} = (X_1 \times \cdots \times X_N, d, \alpha)$ е декартово произведение на $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N$. Нека θ е частична изображение на X_0 в $X_1 \times \cdots \times X_N$. За да бъде изображението θ $(\mathbf{X}_0, \mathbf{X})$-изчислимо, необходимо и достатъчно е при $k = 1, \ldots, N$ да бъде $(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_k)$-изчислимо изображението θ_k, определено чрез равенството

$$\theta_k(\xi) = \pi_k(\theta(\xi)),$$

където $\pi_1, \ldots, \pi_N$ са изображенията от предходното твърдение.

Доказателство. Необходимостта следва от предходното твърдение и запазването на изчислимостта при композиция. За доказателството на достатъчността да предположим, че при $k = 1, \ldots, N$ изображението θ_k е $(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_k)$-изчислимо. Разбира се, всяко от изображенията $\theta_1, \ldots, \theta_N$ има същата дефиниционна област както изображението θ. Нека $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ са такива μ-рекурсивни оператори от$\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, че всеки път, когато f е представяне в $\mathbf{X}_0$ на някой елемент ξ от дефиниционната област на θ, функцията $\Gamma_k(f)$ е представяне в $\mathbf{X}_k$ на $\theta_k(\xi)$ при $k = 1, \ldots, N$. Нека τ_0 е частично рекурсивна функция със свойството (а) от дефиницията за декартово произведение на ефективни метрични пространства. Да разгледаме оператора Γ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, определен чрез равенството

$$\Gamma(f)(n) = \tau_0(\Gamma_1(f)(n), \ldots, \Gamma_N(f)(n)).$$

Той, разбира се, е μ-рекурсивен. Ако f е представяне в $\mathbf{X}_0$ на някой елемент ξ от дефиниционната област на θ, то при $k = 1, \ldots, N$ функцията $\Gamma_k(f)$ е представяне в $\mathbf{X}_k$ на $\theta_k(\xi)$ и значи за всяко n от $\mathbb{N}$ ще имаме неравенствата

$$d_k(\alpha_k(\Gamma_k(f)(n)), \theta_k(\xi)) < \frac{1}{n+1}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

а значи и неравенството

$$d((\alpha_1(\Gamma_1(f)(n)), \ldots, \alpha_N(\Gamma_N(f)(n)), \theta(\xi)) < \frac{1}{n+1}.$$

Тъй като $(\alpha_1(\Gamma_1(f)(n)), \ldots, \alpha_N(\Gamma_N(f)(n)) = \alpha(\Gamma(f)(n))$, с това е показано, че винаги, когато f е представяне в $\mathbf{X}_0$ на даден елемент на X_0, функцията $\Gamma(f)$ е представяне в $\mathbf{X}$ на образа на този елемент при изображението θ. □

Знаем, че изчислимите реални функции са непрекъснати. Това се обобщава лесно за изчислими изображения в метрични пространства.

Теорема. Нека $\mathbf{X} = (X, d, \alpha)$ и $\mathbf{Y} = (Y, e, \beta)$ са ефективни метрични пространства, а θ е $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$-изчислимо частично изображение на X в Y. Тогава изображението θ е непрекъснато във всяка точка от дефиниционната си област.

Доказателство. Да означим дефиниционната област на θ с D. Благодарение на изчислимостта на θ съществува такъв μ-рекурсивен оператор Γ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, че всеки път, когато $\xi \in D$ и f е функция от $\mathcal{F}_1$, представяща ξ в $\mathbf{X}$, функцията $\Gamma(f)$ представя $\theta(\xi)$ в $\mathbf{Y}$. Нека ξ е произволна точка от D, а ε е произволно положително число. Ще докажем съществуването на такова положително число δ, че за всяка точка ξ' от D, за която $d(\xi', \xi) < \delta$, да бъде в сила неравенството $e(\theta(\xi'), \theta(\xi)) < \varepsilon$. За тази цел да изберем първо едно естествено число a, за което е изпълнено неравенството

$$\frac{1}{a+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека f е функция от $\mathcal{F}_1$, която представя ξ в $\mathbf{X}$. Тогава функцията $\Gamma(f)$ представя $\theta(\xi)$ в $\mathbf{Y}$ и следователно $\mathrm{dom}(\Gamma(f)) = \mathbb{N}$. Нека $\Gamma(f)(a) = b$. Тогава $b \in \mathrm{dom}(\beta)$ и

$$e(\beta(b), \theta(\xi)) < \frac{1}{a+1}. \tag{13}$$

Благодарение на непрекъснатостта на μ-рекурсивните оператори, съществува такова крайно подмножество E на $\mathbb{N}$, че $\Gamma(f')(a) = b$ за всяка функция f', съвпадаща с f в E. Понеже за всяко t от $\mathbb{N}$ числото $f(t)$ принадлежи на $\mathrm{dom}(\alpha)$ и е в сила неравенството

$$d(\alpha(f(t)), \xi) < \frac{1}{t+1},$$

можем да изберем такова положително число δ, че за всяко t от множеството E да имаме

$$d(\alpha(f(t)), \xi) + \delta \leq \frac{1}{t+1}.$$

При такъв избор на δ нека ξ' е точка от D, за която $d(\xi', \xi) < \delta$. Тогава при $t \in E$ ще имаме

$$d(\alpha(f(t)), \xi') \leq d(\alpha(f(t)), \xi) + d(\xi, \xi') < d(\alpha(f(t)), \xi) + \delta \leq \frac{1}{t+1}.$$

Благодарение на това съществува функция f' от $\mathcal{F}_1$, която представя ξ' в $\mathbf{X}$ и съвпада с f върху множеството E. В такъв случай обаче $\Gamma(f')(a) = b$. Тъй като $\Gamma(f')$ представя $\theta(\xi')$ в $\mathbf{Y}$, виждаме, че

$$e(\beta(b), \theta(\xi')) < \frac{1}{a+1}.$$

От това неравенство и неравенството (13) следва, че

$$e(\theta(\xi'), \theta(\xi)) < \frac{2}{a+1} \leq \varepsilon.$$

□