Ефективно сходящи редици от реални числа. Ефективно сходящи безкрайни редове

Дефиниция 1. За една безкрайна редица от реални числа $a_0, a_1, a_1, \ldots$ ще казваме, че *клони ефективно* към едно реално число a, ако съществува такава рекурсивна функция δ от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$, че всеки път, когато n и k са естествени числа, удовлетворяващи неравенството $n > \delta(k)$, да бъде в сила неравенството

$$|a_n - a| < \frac{1}{k+1}. \tag{1}$$

За една редица от реални числа ще казваме, че е *ефективно сходяща*, ако тя клони ефективно към някое реално число.

Пример 1. Безкрайна редица, на която всички членове са равни на дадено реално число a, клони ефективно към a, защото в този случай изискването от дефиницията може да бъде удовлетворено с произволно избрана рекурсивна функция δ от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$.

Пример 2. Редицата

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

клони ефективно към 0, защото при $k, n \in \mathbb{N}$ и $n > k$ имаме неравенството

$$\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{k+1}.$$

Пример 3. Редицата $a_0, a_1, a_1, \ldots$ с общ член $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ клони ефективно към 0, защото за всяко естествено число n имаме

$$0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

и следователно неравенството (1) с $a = 0$ несъмнено е в сила за тази редица при $n, k \in \mathbb{N}$ и $n > (k+1)^2 - 1$.

Пример 4. Нека $a, q \in \mathbb{R}$ и $|q| < 1$. Тогава редицата $a_0, a_1, a_1, \ldots$ с общ член $a_n = aq^n$ клони ефективно към 0. И наистина, благодарение на неравенството $|q| < 1$ имаме неравенството

$$|q| \leq \frac{1}{1+h}$$

за някое положително рационално число h. Тогава за всяко $n \in \mathbb{N}$ ще имаме

$$|a_n| = |a||q|^n \leq \frac{|a|}{(1+h)^n} \leq \frac{|a|}{1+nh}.$$

Нека m е естествено число, удовлетворяващо неравенството $mh \geq |a|$. Ако k е дадено естествено число, то при $n \in \mathbb{N}$ и $n > m(k+1)$ получаваме, че

$$|a_n - 0| = |a_n| \leq \frac{mh}{1+m(k+1)h} < \frac{1}{k+1}.$$

Забележка 1. Съгласно дефиниция, формулирана малко по-иначе в текста „Характеризация на изчислимите реални числа и на изчислимите реални функции без да се използват номерации", стандартно апроксимираща редица за едно реално число a наричаме такава редица $a_0, a_1, a_2, \ldots$ от рационални числа, че за всяко естествено число n да бъде в сила неравенството

$$|a_n - a| < \frac{1}{n+1}.$$

Ако една редица $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е стандартно апроксимираща редица за дадено реално число a, то тази редица клони ефективно към a, защото при $n, k \in \mathbb{N}$ и $n > k$ винаги ще бъде в сила неравенството (1).

Разбира се, ако една безкрайна редица от реални числа клони ефективно към дадено реално число, тя клони към него и в обичайния смисъл. Обратното не винаги е вярно.

Пример 5. Нека f е обратима рекурсивна функция от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$, на която множеството от стойностите не е рекурсивно. Да разгледаме редицата $a_0, a_1, a_1, \ldots$ с общ член

$$a_n = \frac{1}{f(n)+1}.$$

Поради обратимостта на функцията f, каквото и естествено число k да изберем, неравенството $f(n) > k$ може да бъде нарушено най-много за $k+1$ на брой естествени числа n. Това показва, че редицата $f(0), f(1), f(2), \ldots$ клони към безкрайност, а оттук следва, че редицата $a_0, a_1, a_1, \ldots$ клони към 0. Ще покажем обаче, че тази редица не клони ефективно към 0. Да допуснем противното. Тогава ще съществува такава рекурсивна функция δ от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$, че всеки път, когато n и k са естествени числа, удовлетворяващи неравенството $n > \delta(k)$, да бъде в сила неравенството

$$a_n < \frac{1}{k+1}.$$

Тъй като от него следва неравенството $f(n) > k$, виждаме, че при $n, k \in \mathbb{N}$ равенството $f(n) = k$ може да бъде изпълнено само при $n \leq \delta(k)$. При това положение обаче за всяко естествено число k би била в сила еквивалентността

$$k \in \operatorname{rng}(f) \Leftrightarrow \exists n \leq \delta(k)(f(n) = k)$$

и значи множеството $\operatorname{rng}(f)$ би се оказало рекурсивно.

Много от свойствата на ефективната сходимост на редици от реални числа са подобни на свойствата на обичайната. Например лесно се вижда, че при почленно събиране, почленно изваждане и почленно умножение на ефективно сходящи редици се получават пак ефективно сходящи редици, че всички подредици на една ефективно сходяща редица са също ефективно сходящи и че за ефективната сходимост е верен аналог на необходимото и достатъчно условие на Коши. Както ще видим обаче по-нататък, има едно важно различие – не е вярно, че всяка ограничена монотонно растяща редица от реални числа е ефективно сходяща.

Дефиниция 2. За един безкраен ред, на който членовете са реални числа, ще казваме, че е *ефективно сходящ*, ако редицата от частичните му суми е ефективно сходяща.

Пример 6. Нека $a, q \in \mathbb{R}$ и $|q| < 1$. Тогава редът $a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots$ е ефективно сходящ. И наистина, за всяко естествено число n имаме равенството

$$\left|(a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n) - \frac{a}{1-q}\right| = \frac{|a||q|^{n+1}}{1-q}$$

и можем да използваме обстоятелството, че дясната страна на това равенство е общ член на редица, която съгласно пример 4 клони ефективно към 0.

Теорема 1. Ако един безкраен ред е ефективно сходящ, то редицата от членовете му клони ефективно към 0.

Доказателство. Нека редът $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ е ефективно сходящ и нека сумата му е a. Тогава съществува рекурсивна функция δ от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ със свойството, че при $k, n \in \mathbb{N}$ и $n > \delta(k)$ винаги е в сила неравенството

$$|u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n - a| < \frac{1}{k+1}.$$

В такъв случай обаче при $k, n \in \mathbb{N}$ и $n > \delta(2k+1) + 1$ ще имаме

$$|u_n - 0| = |u_n| = |(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n - a) - (u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} - a)|$$
$$\leq |u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n - a| + |u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} - a| < \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+1}$$

и значи редицата $u_0, u_1, u_2, \ldots$ клони ефективно към 0. $\square$

За произволна редица $a_0, a_1, a_2, \ldots$ от реални числа съществува ред с реални членове, на който тя е редицата от частичните суми, а именно редът $a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots$. Поради това примери 1–4 могат да се преобразуват в примери за ефективно сходящи редове, а пример 5 – в пример за сходящ ред, който не е ефективно сходящ. Последният от въпросните редове ще има безбройно много положителни и безбройно много отрицателни членове. Сега ще дадем един пример за сходящ ред с положителни членове, който не е ефективно сходящ. Разбира се, редицата от частичните суми на този ред ще бъде ограничена строго растяща редица от положителни числа, която не е ефективно сходяща.

Пример 7. Нека функцията f е такава както в пример 5. Тогава редът

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(f(n)+1)^2} \tag{2}$$

е сходящ, но не е ефективно сходящ. Сходимостта му следва от обстоятелството, че всяка негова частична сума не надминава някоя частична сума на сходящия ред

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^2}$$

и следователно сумата на последния е една горна граница на редицата от частичните суми на реда (2). Ако обаче допуснем, че редът (2) е ефективно сходящ, то от теорема 1 би следвало, че редицата от членовете му клони ефективно към 0, т.е. че съществува рекурсивна функция δ от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ със свойството при $k, n \in \mathbb{N}$ и $n > \delta(k)$ да бъде винаги в сила неравенството

$$\frac{1}{(f(n)+1)^2} < \frac{1}{k+1}.$$

Оттук обаче ще може да се заключи, че при $k, n \in \mathbb{N}$ и $n > \delta(k^2+2k)$ е винаги в сила неравенството

$$\frac{1}{(f(n)+1)^2} < \frac{1}{(k+1)^2},$$

а значи и неравенството

$$\frac{1}{f(n)+1} < \frac{1}{k+1},$$

откъдето за редицата от пример 5 би следвало, че клони ефективно към 0 – в противоречие с установеното във въпросния пример.

Ще покажем, че някои често използвани свойства на обичайната сходимост на редовете са налице и за ефективната сходимост на редове.

Теорема 2. Ако $u_0, u_1, u_2, \dots$ и $v_0, v_1, v_2, \dots$ са такива редици от реални числа, че $|u_i| \le v_i$ за всички достатъчно големи i в $\mathbb{N}$ и редът $v_0+v_1+v_2+\cdots$ е ефективно сходящ, то редът $u_0+u_1+u_2+\cdots$ също е ефективно сходящ.

Доказателство. Да предположим, че е изпълнена предпоставката на горната импликация. Тогава съществува рекурсивна функция δ от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ със свойството при $k, n \in \mathbb{N}$ и $n > \delta(k)$ да бъде винаги в сила неравенството

$$v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \cdots < \frac{1}{k+1}.$$

Като използваме направеното предположение и свойствата на обичайната сходимост на редовете, виждаме, че редът $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ е абсолютно сходящ и за всички достатъчно големи n в $\mathbb{N}$ имаме неравенствата

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots| \leq |u_{n+1}|+|u_{n+2}|+|u_{n+3}|+\cdots \leq v_{n+1}+v_{n+2}+v_{n+3}+\cdots.$$

Ако c е такова естествено число, че тези неравенства да бъдат изпълнени за всички естествени числа n, по-големи от c, то при $k, n \in \mathbb{N}$ и $n > \max(\delta(k), c)$ винаги ще бъде в сила неравенството

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots| < \frac{1}{k+1},$$

а това показва, че редът $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ е ефективно сходящ. □

Следствие. Ако $u_0, u_1, u_2, \ldots$ е редица от реални числа, за която редът $|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots$ е ефективно сходящ, то и редът $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ е ефективно сходящ.

Теорема 3. Нека $u_0, u_1, u_2, \ldots$ е редица от реални числа, а q е реално число, по-малко от 1, като за всички достатъчно големи естествени числа i числото u_i е различно от 0 и е изпълнено неравенството

$$\left|\frac{u_{i+1}}{u_i}\right| \leq q. \tag{3}$$

В такъв случай редът $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ е ефективно сходящ.

Доказателство. Нека c е такова естествено число, че при $i \in \mathbb{N}$ и $i \geq c$ да бъдат винаги изпълнени неравенството $u_i \neq 0$ и неравенството (3). Разбира се, числото q е неотрицателно. Доказваме индуктивно, че при $i \in \mathbb{N}$ и $i \geq c$ винаги е в сила неравенството $|u_i| \leq |u_c|q^{i-c}$, след което използваме пример 4 и теорема 2. □

Теорема 4. Нека $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е монотонно намаляваща редица от реални числа, която клони ефективно към 0. Тогава редът

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots \tag{4}$$

е ефективно сходящ.

Доказателство. От обичайната теория на редовете е ясно, че при направените предположения редът (4) е сходящ и за всяко естествено число n абсолютната стойност на разликата между частичната сума

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n \tag{5}$$

и сумата на реда не надминава a_{n+1}. Ефективната сходимост на редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ гарантира съществуването на рекурсивна функция δ от $\mathbb{N}$

към $\mathbb{N}$ със свойството при $k, n \in \mathbb{N}$ и $n > \delta(k)$ да бъде винаги в сила неравенството

$$a_n < \frac{1}{k+1}.$$

Ясно е тогава, че при $k, n \in \mathbb{N}$ и $n > \delta(k)$ абсолютната стойност на разликата между частичната сума (5) и сумата на реда (4) ще бъде винаги по-малка от $\dfrac{1}{k+1}$, следователно редът е ефективно сходящ. $\square$