Изчислимостта в ефективни топологични пространства допуска характеризация чрез номерационни оператори

Нека $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ е редицата от крайни подмножества на $\mathbb{N}$, определена чрез условието, че за всяко естествено число k е в сила равенството

$$\sum_{x \in \delta_k} 2^x = k.$$

Дефиниция. *Номерационен оператор* се нарича изображение Θ на $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ в $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, за което съществува такова рекурсивно номеруемо подмножество W на $\mathbb{N}^2$, че за всяко S от $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ и всяко t от $\mathbb{N}$ да е в сила равенството

$$\Theta(S) = \{t \,|\, \exists k((k,t) \in W \,\&\, \delta_k \subseteq S)\}. \tag{1}$$

Теорема. Нека $\mathbf{X} = (X, \mathcal{U})$ и $\mathbf{Y} = (Y, \mathcal{V})$ са ефективни топологични пространства, а $\theta : D \to Y$, където $D \subseteq X$. За да бъде изображението θ $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$-изчислимо, необходимо и достатъчно е да съществува такъв номерационен оператор Θ, че за всяко ξ в D да е в сила равенството

$$\mathcal{V}^{-1}(\theta(\xi)) = \Theta(\mathcal{U}^{-1}(\xi)).$$

Доказателство. За всяко ξ от D да положим $A_\xi = \mathcal{U}^{-1}(\xi)$, $B_\xi = \mathcal{V}^{-1}(\theta(\xi))$. Тогава $A_\xi \neq \varnothing$ и $B_\xi \neq \varnothing$, като представянията на ξ в $\mathbf{X}$ ще бъдат тоталните номерации на множеството A_ξ, а представянията на $\theta(\xi)$ в $\mathbf{Y}$ ще всъщност тоталните номерации на множеството B_ξ. При това положение ще имаме да докажем, че за да съществува μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, който за всяко ξ от D преобразува тоталните номерации на A_ξ в тотални номерации на B_ξ, необходимо и достатъчно е да съществува такъв номерационен оператор Θ, че за всяко ξ в D да е в сила равенството

$$B_\xi = \Theta(A_\xi) \tag{2}$$

Доказателство на необходимостта. Нека Γ е μ-рекурсивен оператор от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, който за всяко ξ от D преобразува тоталните номерации на A_ξ в тотални номерации на B_ξ. Да означим с W множеството на онези двойки (k,t) от $\mathbb{N}^2$, които удовлетворяват следното условие: съществуват естествено число r и функция $g : \{0,1,2,\ldots,r\} \to \delta_k$, такива, че $t \in \operatorname{rng}(\Gamma(g))$. Множеството W е рекурсивно номеруемо. За да се убедим в това, достатъчно е да покажем, че е рекурсивно номеруемо множеството H на онези тройки (k,t,r) от $\mathbb{N}^3$, за които $t \in \operatorname{rng}(\Gamma(g))$ при някой избор на функция $g : \{0,1,2,\dots,r\} \to \delta_k$. Можем да направим това, като използваме някоя рекурсивна функция на две променливи α, пораждаща в следния смисъл всевъзможните крайни редици от естествени числа: за всяка крайна редица $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r$ от естествени числа съществува такова естествено число a, че $\alpha(a,i) = a_i$ при $i = 0,1,2,\dots,r$.[1] При произволни естествени числа a и r нека $g_{a,r}$ е функцията от $\{0,1,2,\dots,r\}$ към $\mathbb{N}$, определена с равенствата $g_{a,r}(i) = \alpha(a,i)$, $i = 0,1,2,\dots,r$. Очевидно

$$H = \{(k,t,r) \in \mathbb{N}^3 \mid \exists a \in \mathbb{N}(\forall i \leq r(\alpha(a,i) \in \delta_k) \,\&\, t \in \operatorname{rng}(\Gamma(g_{a,r})))\}.$$

Тъй като при всеки избор на естествените числа x и k имаме равенството

$$\left\lfloor \frac{k}{2^x} \right\rfloor \dot{-} 2 \left\lfloor \frac{k}{2^{x+1}} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \delta_k, \\ 0 & \text{в противен случай,} \end{cases}$$

условието $\forall i \leq r(\alpha(a,i) \in \delta_k)$ е еквивалентно на равенството

$$\min_{i \leq r} \left(\left\lfloor \frac{k}{2^{\alpha(a,i)}} \right\rfloor \dot{-} 2 \left\lfloor \frac{k}{2^{\alpha(a,i)+1}} \right\rfloor \right) = 1.$$

Поради това рекурсивната номеруемост на множеството H ще бъде ясна, ако покажем, че е рекурсивно номеруемо множеството на тройките (t,a,r) от $\mathbb{N}^3$, удовлетворяващи условието $t \in \operatorname{rng}(\Gamma(g_{a,r}))$. Нека β е частичната функция на три променливи в $\mathbb{N}$, която на всяка тройка (a,r,i) от $\mathbb{N}^3$, удовлетворяваща условието $i \leq r$, поставя в съответствие числото $\alpha(a,i)$. Тогава при всеки избор на естествените числа a и r имаме равенството $g_{a,r} = \lambda i.\beta(a,r,i)$ и следователно $\Gamma(g_{a,r}) = \Gamma(\lambda i.\beta(a,r,i))$. Тъй като функцията β е частично рекурсивна, едно свойство на μ-рекурсивните оператори позволява да твърдим, че е частично рекурсивна и функцията на три аргумента γ, дефинирана чрез равенството

$$\gamma(a,r,s) = \Gamma(\lambda i.\beta(a,r,i))(s).$$

Понеже интересуващото ни множество от тройки е всъщност множеството $\{(t,a,r) \in \mathbb{N}^3 \mid \exists s \in \mathbb{N}(t = \gamma(a,r,s))\}$, неговата рекурсивна номеруемост става ясна. След като по този начин доказахме рекурсивната номеруемост на множеството W, да разгледаме изображението $\Theta : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, дефинирано чрез равенството (1). Това изображение е номерационен оператор. Нека ξ е произволен елемент на D. Ще покажем, че е изпълнено равенството (2). Да предположим първо, че $t \in B_\xi$. Нека f е някоя тотална номерация на A_ξ. Тогава $\Gamma(f)$ е тотална номерация на B_ξ и значи $t \in \operatorname{rng}(\Gamma(f))$. Като се възползваме от непрекъснатостта на оператора Γ, заключаваме, че

[1] Една такава функция α е например определената посредством равенството

$$a + 1 = p_0^{\alpha(a,0)} p_1^{\alpha(a,1)} p_2^{\alpha(a,2)} \dots,$$

където $p_0, p_1, p_2, \dots$ са последователните прости числа.

$t \in \mathrm{rng}(\Gamma(g))$ при $g = f \restriction \{0,1,2,\dots,r\}$ за някое естествено число r. Множеството $\mathrm{rng}(g)$ е крайно и $\mathrm{rng}(g) \subseteq \mathrm{rng}(f) = A_\xi$. Избирайки естественото число k така, че $\delta_k = \mathrm{rng}(g)$, осигуряваме, че $(k,t) \in W$ и $\delta_k \subseteq A_\xi$. С това е показано, че $t \in \Theta(A_\xi)$. Да предположим сега пък, че $t \in \Theta(A_\xi)$. В такъв случай $(k,t) \in W$ и $\delta_k \subseteq A_\xi$ за някое k. Значи $t \in \mathrm{rng}(\Gamma(g))$ при някой избор на естествено число r и на функция $g : \{0,1,2,\dots,r\} \to \delta_k$. Функцията g може да бъде продължена до някоя тотална номерация f на множеството A_ξ. Тогава $\mathrm{rng}(\Gamma(g)) \subseteq \mathrm{rng}(\Gamma(f)) = B_\xi$, следователно $t \in B_\xi$.

Доказателство на достатъчността. Нека Θ е такъв номерационен оператор, че за всяко ξ в D да е в сила равенството (2). Нека W е такова рекурсивно номеруемо подмножество на $\mathbb{N}^2$, че за всяко S от $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ и всяко t от $\mathbb{N}$ да е в сила равенството (1). Благодарение на рекурсивната номеруемост на W съществува такава рекурсивна функция на три аргумента χ, че

$$W = \{(k,t) \in \mathbb{N}^2 \,|\, \exists s(\chi(k,t,s) = 0)\}.$$

Да предположим на първо време, че $\xi \in D$ и f е някоя тотална номерация на множеството A_ξ. Тогава

$$\begin{aligned}
B_\xi &= \{t \,|\, \exists k((k,t) \in W \,\&\, \delta_k \subseteq A_\xi)\} = \{t \in \mathbb{N} \,|\, \exists k,s \in \mathbb{N}(\chi(k,t,s) = 0 \,\&\, \delta_k \subseteq A_\xi)\} \\
&= \{t \in \mathbb{N} \,|\, \exists k,s,r \in \mathbb{N}(\chi(k,t,s) = 0 \,\&\, \delta_k \subseteq \{f(0), f(1), f(2), \dots, f(r)\})\} \\
&= \left\{ t \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists k,s,r \in \mathbb{N}\left(\chi(k,t,s) + \sum_{x \in \delta_k} \min_{i \le r} |x - f(i)| = 0\right)\right\} \\
&= \left\{ t \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists k,s,r \in \mathbb{N}\left(\chi(k,t,s) + \sum_{x<k}\left(\left\lfloor \frac{k}{2^x} \right\rfloor \dot- 2\left\lfloor \frac{k}{2^{x+1}} \right\rfloor\right) \min_{i \le r} |x - f(i)| = 0\right)\right\}
\end{aligned}$$

(последното равенство в тази верига от равенства следва от обстоятелството, че всички числа от множеството δ_k са по-малки от k). Оттук се вижда, че изброяване на елементите на множеството B_ξ би могло да се осъществи по следния начин: разглеждаме последователно наредените четворки (t,k,s,r) от $\mathbb{N}^4$ и вземаме първите членове на онези от тях, за които е изпълнено равенството

$$\chi(k,t,s) + \sum_{x<k}\left(\left\lfloor \frac{k}{2^x} \right\rfloor \dot- 2\left\lfloor \frac{k}{2^{x+1}} \right\rfloor\right) \min_{i \le r} |x - f(i)| = 0$$

(четворките, за които е изпълнено то, са безбройно много, защото верността му се запазва при увеличаване на r). Разбира се, последователното разглеждане на наредените четворки от $\mathbb{N}^4$ може да се осъществи, като се използват рекурсивни функции на един аргумент $\tau, \kappa, \sigma, \rho$, за които $\{(\tau(n), \kappa(n), \sigma(n), \rho(n)) \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^4$. Направените дотук разсъждения показват, че μ-рекурсивен оператор Γ от $\mathcal{F}_1$ към $\mathcal{F}_1$, който за всяко ξ от D преобразува тоталните номерации на A_ξ в тотални номерации на B_ξ, може да се дефинира чрез равенството

$$\Gamma(f)(m) = \tau(\mu n[\Delta(f)(m,n) = 0]),$$

където изображението $\Delta : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ е дефинирано така:

$$\Delta(f)(m,n) = (m \dot{-} n) + \\ \chi(\kappa(n), \tau(n), \sigma(n)) + \sum_{x<\kappa(n)} \left(\left\lfloor \frac{\kappa(n)}{2^x} \right\rfloor \dot{-} 2 \left\lfloor \frac{\kappa(n)}{2^{x+1}} \right\rfloor \right) \min_{i \le \rho(n)} |x - f(i)|. \qquad \square$$