Изчислимост в стил на Гжегорчик на реални числа и реални функции

В този текст разглеждаме изчислимост на реални числа, съвпадаща с въведената в статията [1] на Гжегорчик, и изчислимост на реални функции, по-обща от въведената в тази статия, но дефинирана по подобен начин.[1]

Дефиниция 1. За едно реално число ξ ще казваме, че е *изчислимо в смисъл на Гжегорчик*, ако съществуват такива рекурсивни функции f и g от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$, че

$$\forall i \in \mathbb{N} \left(\left| \frac{f(i) - g(i)}{i+1} - \xi \right| < \frac{1}{i+1} \right). \tag{1}$$

Твърдение 1. Нека ν е представянето на Гжегорчик на множеството на неотрицателните реални числа. За числата от това множество изчислимостта в смисъл на Гжегорчик е еквивалентна на ν-изчислимост.

Доказателство. Нека ξ е неотрицателно реално число. Ако $\xi = \nu(f)$ за дадена функция f от $\mathbb{T}$ и вземем в качеството на g константата 0, то ще бъде изпълнено условието (1) и значи числото ξ ще бъде изчислимо в смисъл на Гжегорчик, в случай че функцията f е рекурсивна. С това показахме, че от ν-изчислимостта на числото ξ следва неговата изчислимост в смисъл на Гжегорчик. За да покажем обратното, да предположим, че ξ е изчислимо в смисъл на Гжегорчик. Нека f и g са рекурсивни функции от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$, за които е изпълнено условието (1). Тогава за всяко i от $\mathbb{N}$ имаме

$$\left| \frac{|f(i) - g(i)|}{i+1} - \xi \right| = \left| \left| \frac{f(i) - g(i)}{i+1} \right| - |\xi| \right| \le \left| \frac{f(i) - g(i)}{i+1} - \xi \right| < \frac{1}{i+1},$$

следователно $\xi = \nu(\lambda i.|f(i) - g(i)|)$ и е достатъчно да забележим, че функцията $\lambda i.|f(i) - g(i)|$ е рекурсивна. $\square$

Лема 1. Съществуват такива μ-рекурсивни функционали A и B от $\mathcal{F}_{3,1}$, че

$$\forall i \in \mathbb{N} \left(\left| \frac{A(f,g,h,i) - B(f,g,h,i)}{i+1} - \xi \right| < \frac{1}{i+1} \right) \tag{2}$$

[1] За да получим точно изчислимостта на реални функции от цитираната статия, би трябвало да ограничим класа на използваните μ-рекурсивни функционали, като в последната точка на индуктивната дефиниция за μ-рекурсивен функционал, дадена в текста „μ-рекурсивни функционали и μ-рекурсивни оператори“, поискаме при всеки избор на m-ка $\bar{u}$ от навсякъде дефинирани функции от $\mathcal{F}_1$ и на естествени числа $x_1, \ldots, x_l$ да съществува естествено число t, за което $F_0(\bar{u}, x_1, \ldots, x_l, t) = 0$. Това, че двете споменати понятия за изчислимост на реална функция са наистина различни, е показано в статията [2].

винаги, когато $\xi \in \mathbb{R}$, $f, g, h \in \mathbb{T}$ и

$$\forall i \in \mathbb{N} \left(\left| \frac{f(i) - g(i)}{h(i) + 1} - \xi \right| < \frac{1}{i+1} \right). \tag{3}$$

Доказателство. Ако $\xi \in \mathbb{R}$, $f, g, h \in \mathbb{T}$ и е изпълнено условието (3), то за всяко i от $\mathbb{N}$ ще имаме неравенството

$$\left| \frac{f(2i+1) - g(2i+1)}{h(2i+1) + 1} - \xi \right| < \frac{1}{2i+2}.$$

Поради това е достатъчно да дефинираме μ-рекурсивни функционали A и B от $\mathcal{F}_{3,1}$, за които

$$\left| \frac{A(f,g,h,i) - B(f,g,h,i)}{i+1} - \frac{f(2i+1) - g(2i+1)}{h(2i+1)+1} \right| \le \frac{1}{2i+2}$$

при всеки избор на $f, g, h \in \mathbb{T}$ и на естествено число i. Очевидно горното неравенство е равносилно с неравенството

$$\left| A(f,g,h,i) - B(f,g,h,i) - \frac{(i+1)(f(2i+1) - g(2i+1))}{h(2i+1)+1} \right| \le \frac{1}{2},$$

а лесно се проверява, че за верността му би било достатъчно да бъдат изпълнени неравенствата

$$\left| A(f,g,h,i) - \frac{(i+1)(f(2i+1) \dot{-} g(2i+1))}{h(2i+1)+1} \right| \le \frac{1}{2},$$
$$\left| B(f,g,h,i) - \frac{(i+1)(g(2i+1) \dot{-} f(2i+1))}{h(2i+1)+1} \right| \le \frac{1}{2}.$$

Верността им можем да осигурим, като положим

$$A(f,g,h,i) = \sigma((i+1)(f(2i+1) \dot{-} g(2i+1)), h(2i+1)),$$
$$B(f,g,h,i) = \sigma((i+1)(g(2i+1) \dot{-} f(2i+1)), h(2i+1)),$$

където σ е функцията от $\mathbb{N}^2$ към $\mathbb{N}$, дефинирана чрез равенството

$$\sigma(k,l) = \left\lfloor \frac{k}{l+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

(не е трудно да се види, че при всеки избор на естествените числа k и l имаме неравенството

$$\left| \sigma(k,l) - \frac{k}{l+1} \right| \le \frac{1}{2}$$

и че функцията σ е рекурсивна). □

Теорема 1. Едно реално число е изчислимо в смисъл на Гжегорчик точно тогава, когато е изчислимо.

Доказателство. Нека $\xi \in \mathbb{R}$. Ако ξ е изчислимо в смисъл на Гжегорчик, то съществуват рекурсивни функции f и g, за които е изпълнено условието (1), но то може да се напише във вида (3) с $h = \lambda i.i$ и изчислимостта на ξ е ясна от следствието от теорема 1 в текста „Характеризация на изчислимите реални числа и на изчислимите реални функции без да се използват номерации“. За да докажем обратната импликация, да предположим, че числото ξ е изчислимо. Току-що споменатото следствие позволява да твърдим, че за някои рекурсивни функции f, g и h от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ е изпълнено условието (3), а оттук с помощта на лема 1 заключаваме, че за тях и някои μ-рекурсивни функционали A и B от $\mathcal{F}_{3,1}$ ще бъде в сила условието (2). Като вземем предвид, че функциите $\lambda i.A(f,g,h,i)$ и $\lambda i.B(f,g,h,i)$ са рекурсивни, виждаме, че числото ξ е изчислимо в смисъл на Гжегорчик. □

Дефиниция 2. Нека Φ е частична функция от $\mathbb{R}^N$ към $\mathbb{R}$, където N е положително цяло число. Ще казваме, че Φ е *изчислима в разширен смисъл на Гжегорчик*, ако съществуват такива μ-рекурсивни функционали F и G от $\mathcal{F}_{2N,1}$, че

$$\left|\frac{F(f_1,g_1,\dots,f_N,g_N,i)-G(f_1,g_1,\dots,f_N,g_N,i)}{i+1}-\Phi(\xi_1,\dots,\xi_N)\right|<\frac{1}{i+1}$$

винаги, когато $(\xi_1,\dots,\xi_N)\in\operatorname{dom}(\Phi)$, $f_1,g_1,\dots,f_N,g_N\in\mathbb{T}$, $i\in\mathbb{N}$ и

$$\left|\frac{f_1(k)-g_1(k)}{k+1}-\xi_1\right|<\frac{1}{k+1},\ \dots,\ \left|\frac{f_N(k)-g_N(k)}{k+1}-\xi_N\right|<\frac{1}{k+1} \tag{4}$$

за всяко $k\in\mathbb{N}$.

Теорема 2. Нека Φ е частична функция от $\mathbb{R}^N$ към $\mathbb{R}$, където N е положително цяло число. Функцията Φ е изчислима в разширен смисъл на Гжегорчик точно тогава, когато е изчислима.

Доказателство. Нека A и B са μ-рекурсивните функционали от лема 1. Да предположим първо, че Φ е изчислима в разширен смисъл на Гжегорчик. Нека F и G са μ-рекурсивни функционали със свойството от дефиниция 2. Дефинираме функционали F', G' и H от $\mathcal{F}_{3N,1}$ по следния начин:

$$\begin{aligned}
F'(f_1,g_{1,1},\dots,f_N,g_N,h_N,i) &= F(\lambda k.A(f_1,g_1,h_1,k),\lambda k.B(f_1,g_1,h_1,k),\dots,\\
&\qquad \lambda k.A(f_N,g_N,h_N,k),\lambda k.B(f_N,g_N,h_N,k),i),\\
G'(f_1,g_{1,1},\dots,f_N,g_N,h_N,i) &= G(\lambda k.A(f_1,g_1,h_1,k),\lambda k.B(f_1,g_1,h_1,k),\dots,\\
&\qquad \lambda k.A(f_N,g_N,h_N,k),\lambda k.B(f_N,g_N,h_N,k),i),\\
H(f_1,g_{1,1},\dots,f_N,g_N,h_N,i) &= i.
\end{aligned}$$

Функционалите F', G' и H са μ-рекурсивни – μ-рекурсивността на първите два следва от твърдение $2'$ в текста „μ-рекурсивни функционали и μ-рекурсивни оператори“, а третият е μ-рекурсивен по точка 1 от индуктивната дефиниция за μ-рекурсивен функционал. Да разгледаме сега произволна точка $(\xi_1,\ldots,\xi_N)$ от дефиниционната област на Φ и произволни функции $f_1,g_1,h_1,\ldots,f_N,g_N,h_N$ от $\mathbb{T}$, за които при всеки избор на k в $\mathbb{N}$ са изпълнени неравенствата

$$\left|\frac{f_1(k)-g_1(k)}{h_1(k)+1}-\xi_1\right|<\frac{1}{k+1},\ \ldots,\ \left|\frac{f_N(k)-g_N(k)}{h_N(k)+1}-\xi_N\right|<\frac{1}{k+1}.$$

Тогава за всяко $k\in\mathbb{N}$ ще бъдат в сила неравенствата

$$\left|\frac{A(f_n,g_n,h_n,k)-B(f_n,g_n,h_n,k)}{k+1}-\xi_n\right|<\frac{1}{k+1},\quad n=1,\ldots,N,$$

а оттук следва, че за всяко $i\in\mathbb{N}$ е изпълнено неравенството

$$\left|\frac{F'(f_1,g_{1,1},\ldots,f_N,g_N,h_N,i)-G'(f_1,g_{1,1},\ldots,f_N,g_N,h_N,i)}{H(f_1,g_{1,1},\ldots,f_N,g_N,h_N,i)}-\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_N)\right| < \frac{1}{i+1}.$$

Като вземем предвид следствието от теорема 2 в текста „Характеризация на изчислимите реални числа и на изчислимите реални функции без да се използват номерации“, виждаме, че функцията Φ е изчислима. За доказателството на обратната импликация да предположим сега пък, че Φ е изчислима. Нека F, G и H са μ-рекурсивни функционали със свойството от споменатото следствие. Дефинираме функционали F' и G' от $\mathcal{F}_{2N,1}$ по следния начин:

$$\begin{aligned}
F'(f_1,g_1,\ldots,f_N,g_N,i) &= A(\lambda j.F(f_1,g_1,I,\ldots,f_N,g_N,I,j),\\
&\qquad \lambda j.G(f_1,g_1,I,\ldots,f_N,g_N,I,j),\lambda j.H(f_1,g_1,I,\ldots,f_N,g_N,I,j),i),\\
G'(f_1,g_1,\ldots,f_N,g_N,i) &= B(\lambda j.F(f_1,g_1,I,\ldots,f_N,g_N,I,j),\\
&\qquad \lambda j.G(f_1,g_1,I,\ldots,f_N,g_N,I,j),\lambda j.H(f_1,g_1,I,\ldots,f_N,g_N,I,j),i),
\end{aligned}$$

където I е тъждественото изображение на $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. И тези функционали са μ-рекурсивни. Нека $(\xi_1,\ldots,\xi_N)$ е произволна точка от дефиниционната област на Φ, а $f_1,g_1,\ldots,f_N,g_N$ са функции от $\mathbb{T}$, за които при всеки избор на k в $\mathbb{N}$ са изпълнени неравенствата (4). Тогава за всяко j от $\mathbb{N}$ ще бъде в сила неравенството

$$\left|\frac{F(f_1,g_1,I,\ldots,f_N,g_N,I,j)-G(f_1,g_1,I,\ldots,f_N,g_N,I,j)}{H(f_1,g_1,I,\ldots,f_N,g_N,I,j)+1}-\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_N)\right| < \frac{1}{j+1},$$

а оттук следва, че за всяко i от $\mathbb{N}$ ще имаме неравенството

$$\left|\frac{F'(f_1,g_1,\ldots,f_N,g_N,i)-G'(f_1,g_1,\ldots,f_N,g_N,i)}{i+1}-\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_N)\right|<\frac{1}{i+1}.$$

С това е показано, че функцията Φ е изчислима в разширен смисъл на Гжегорчик. $\square$

Литература

[1] Grzregorczyk, A. Computable functionals. Fundamenta Mathematicae, **42** (1955), no. 1, 168–202.
Достъпен е електронен архив на томовете на списанието до 2000 г. вкл.

[2] Shepherdson, J.C. On the definition of computable function of a real variable. Z. Math. Logik Grundlag. Math., **22** (1976), no. 1, 391—402.