100 години от рождението на професор Ярослав Тагамлицки

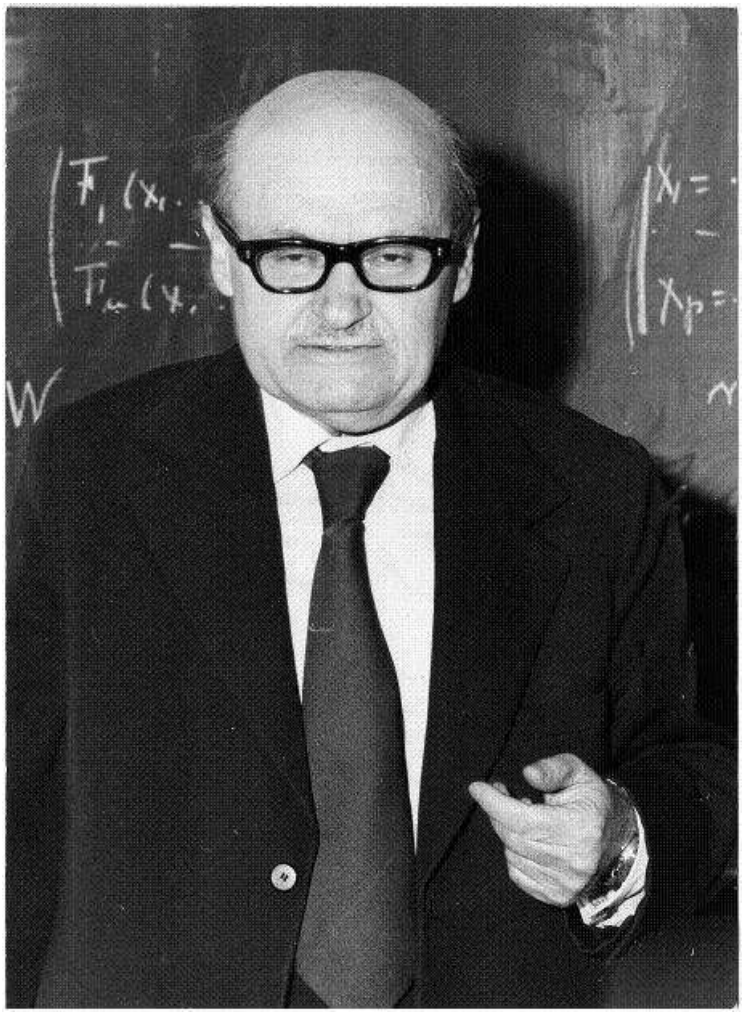
Димитър Скордев

Софийски университет
Факултет по математика и информатика

skordev@fmi.uni-sofia.bg

Юбилейна научна конференция
„100 години от рождението
на професор Ярослав Тагамлицки“

София, ФМИ, 15–17 септември, 2017



Ярослав-Роман Тагамлицки

1917 роден на 11 септември в гр. Армавир, Русия

1921 преселване в България

1936 завършва средно образование във Втора мъжка гимназия – София

1940 завършва математика в Софийския университет

1942-1943 специализация и докторат в Лайпцигския университет

1945 асистент към катедрата по диференциално и интегрално смятане в Софийския университет

1947 частен доцент към същата катедра, награда за наука от Комитета за наука, изкуство и култура

1949 редовен доцент

1952 Димитровска награда за наука

1954 професор и ръководител на катедрата

1958 доктор на физико-математическите науки

1961 член-кореспондент на БАН

1982 звание „Заслужил деятел на науката“

1983 починал на 28 ноември в София



Бащата на Ярослав Тагамлицки
инж. Александър Михайлович Тагамлицки
(1881 — 1945)



Майката на Ярослав Тагамлицки
Вера Леонидовна Тагамлицкая
(род. Чьорная) (1894—1976)



Ярослав Тагамлицки — ученик
в IV гимназиален клас



Ярослав Тагамлицки — ученик
в VII гимназиален клас



Родителите на Я. Тагамлицки. Снимката е направена около 1914 г.

Божурище, III курс, 1939 г.



Научни изяви по време на следването

В следните свои статии проф. Кирил Попов съобщава за резултати, получени от студента Ярослав Тагамлицки:

- Sur une extension de la notion de dérivée. *Comptes rendus, Paris*, **207** (1938), 110–112.
- Върху едно обобщение на понятието производна. *Год. на СУ, ФМФ*, **35**, кн. 1 (1938–39), 225–249.

Пак от това време са следните статии на Тагамлицки:

- Върху теоремата за крайните нараствания. *Спис. Физ.-мат. д-во*, **24**, №3–4 (1938), 95–98.
- Обобщение на теоремата за крайните нараствания. *Спис. Физ.-мат. д-во*, **24**, №5–6 (1939), 173–175.
- Едно свойство на сумируемите функции в Lebesgue'ов смисъл. *Юб. сб. Физ.-мат. д-во*, ч. 2, С., 1939, 73–74.

théorème que permettent d'énoncer de récents travaux de M. E. Maitland Wright (1) :

Si s est $\geq 4\,(k=2)$, ou si s est $\geq (k-2)\,2^{k-1}+5\,(k\geq 3)$, tout nombre n suffisamment grand peut être mis sous la forme

$$n=\Sigma\, m_i^k \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,s),$$

où les m_i sont des entiers distincts *qui satisfont aux inégalités*

$$m_i^k>\left(\frac{1}{s}-\varepsilon\right)n \qquad (\varepsilon \text{ quelconque positif et fixé}).$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une extension de la notion de dérivée.* Note de M. **Kyrille Popoff**, présentée par M. Paul Montel.

Nous avons défini (1) la tangente et la normale au point $[x, f(x)]$ de la courbe $y=f(x)$ comme positions limites, pour $u=0$, des axes de l'ellipse, correspondant au moment d'inertie

$$S_2=\int_0^u D^2\,du=\cos^2\alpha\int_0^u u^2\,du$$
$$+2\sin\alpha\cos\alpha\int_0^u u f(x,u)\,du+\sin^2\alpha\int_0^u [f(x,u)]^2\,du,$$

où l'on a posé $f(x,u)=f(x+u)-f(x)$.

La considération de la valeur minimum du moment

$$S_1=\int_0^u D\,du=\cos\alpha\int_0^u u\,du+\sin\alpha\int_0^u f(x,u)\,du$$

détermine une droite d'équation

$$(1)\qquad \eta-f(x)=\frac{2\int_0^u f(x,u)\,du}{u^2}(\xi-x),$$

qui, dans le cas où la dérivée existe, tend, pour $u=0$, vers une droite

(1) *Quart. J. Math. Oxford*, 4, 1933, p. 37-51, et 7, 1936, p. 230-240; *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, A. 232, 1933, p. 1-26.

(1) *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 1440.

limite qui est la tangente à la courbe. La limite

$$\lim_{u=0} \frac{2\int_0^u f(x,u)\,du}{u^2}, \tag{2}$$

lorsqu'elle existe, détermine ainsi, au moyen du premier moment, une dérivée généralisée de la fonction $f(x)$. Cette dérivée peut exister sans que la dérivée au sens classique existe, comme on le voit sur la fonction $y = x \sin 1/x$, qui admet une dérivée généralisée au moyen du premier moment, pour $x = 0$. On démontre facilement les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Soit* $F(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. *Si* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ *admettent des dérivées généralisées* $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ *au moyen des premiers moments*, $F(x)$ *admettra la dérivée généralisée* $\varphi'(x) + \psi'(x)$.

THÉORÈME II. — *Soit*

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = S_n(x) + R_n(x)$$

une série uniformément convergente dans l'intervalle (a, b) *et supposons que la série*

$$\sigma(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + u'_3(x) + \ldots,$$

formée par les dérivées généralisées $u'_n(x)$ *obtenues au moyen des premiers moments soit convergente.* $\sigma(x)$ *sera la dérivée généralisée de* $S(x)$, *si l'on a*

$$\left|\int_0^h R_n(x,u)\,du\right| = \left|\int_0^h [R_n(x+u) - R_n(x)]\,du\right| < A_n h^2, \qquad \text{avec} \quad \lim_{n=\infty} A_n = 0.$$

M. Iaroslav Tagamlitsky nous a signalé le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *La limite* (2) *existe certainement si la fonction continue* $f(x)$ *satisfait à la condition*

$$|f(x,h)| = |f(x+h) - f(x)| < Mh, \tag{3}$$

et si, en outre, il existe un nombre positif a *pour lequel l'expression*

$$f(x,h) - ah^{-1}\int_0^h \left(\frac{u}{h}\right)^{a-2} f(x,u)\,du \tag{4}$$

ne change pas de signe lorsque h *varie.*

En effet, l'expression (4) étant, au facteur ah^{-2} près, la dérivée par rapport à h de l'intégrale

$$F(h) = \frac{a}{h^a}\int_0^h y^{a-2} f(x,y)\,dy, \tag{5}$$

dont la valeur absolue reste moindre que M, la valeur de $E(h)$ tend d'une manière monotone vers une limite $E(o)$ lorsque h tend vers zéro. Or, l'existence de la limite (5) entraîne celle de la limite (2) et vice versa. Ces deux expressions étant identiques pour $a = 2$, pour le montrer, pour $a \neq 2$, considérons l'identité

$$\frac{2-a}{h^2}\int_0^h y^{1-a}\,dy\int_0^y z^{a-2}f(x,z)\,dz = \frac{1}{h^a}\int_0^h y^{a-2}f(x,y)\,dy - \frac{1}{h^2}\int_0^h f(x,y)\,dy$$

qu'on obtient en changeant l'ordre d'intégration dans l'intégrale double. En admettant l'existence de la limite $E(o)$, cette identité nous donne

$$(2-a)\,E(h\theta) = 2E(h) - \frac{2a}{h^2}\int_0^h f(x,y)\,dy \qquad (o<\theta<1)$$

et

$$\lim_{h=0}\frac{2}{h^2}\int_0^h f(x,y)\,dy = E(o).$$

Pour montrer que la limite $E(o)$ existe et est égale à la limite de (2), lorsque celle-ci existe, il suffit de considérer l'identité

$$\frac{2-a}{h^a}\int_0^h \frac{dz}{z^{2-a}}\int_0^z f(x,y)\,dy = \frac{1}{h^a}\int_0^h y^{a-2}f(x,y)\,dy - \frac{1}{h^2}\int_0^h f(x,y)\,dy.$$

Par exemple, soit x_n une suite dénombrable ayant pour limite zéro. La fonction, nulle pour $x \neq x_n$ et égale à $|x|$ pour $x = x_n$; ou la fonction égale à x^2 pour $x \neq x_n$, à $1/2\,x^2$ pour $x = x_{2k+1}$, à $|x|$ pour $x = x_{2k}$, vérifient les conditions de l'énoncé autour de l'origine. Elles admettent en ce point une dérivée généralisée sans admettre une dérivée ordinaire. Le principe de condensation des singularités permet de donner des exemples où cette particularité se produit en une infinité de points.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les domaines minima dans la théorie des transformations pseudoconformes.* Note (1) de M. **Menahem Schiffer**, présentée par M. Paul Montel.

Un problème de la théorie des T. P. (transformations pseudo-conformes) est de trouver un procédé bien déterminé, qui transforme un domaine d'une classe de

(1) Séance du 4 juillet 1938.

$$\frac{\int_0^u f_1(x|u)\,f_2(x|u)\,\varphi(u)\,du}{\int_0^u u\,\varphi(u)\,f_2(x|u)\,du}\cdot\frac{\int_0^u u\,\varphi(u)\,f_2(x|u)\,du}{\int_0^u u\,\varphi(u)\,du}.$$

Ако допустнемъ, че $f_2(x|u)$ може да се напише като единъ опредѣленъ интегралъ, първиятъ множитель клони къмъ производната (P) на функцията $f_1(x)$, а тъй като $f_2(x|u)$ въ интервала $(0, u)$ клони къмъ нула съ u, вториятъ факторъ клони къмъ нула.

Теорема III. Производната (P) на дробьта $F(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ е образувана съ производнитѣ (P) на $f_1(x)$ и $f_2(x)$, както нютоновата производна на $F(x)$ е образувана съ производнитѣ на $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

И наистина въ този случай имаме

$$\frac{\int_0^u F(x|u)\,\varphi(u)\,du}{\int_0^u u\,\varphi(u)\,du}=\frac{f_2(x)\int_0^u \frac{f_1(x|u)\,\varphi(u)\,du}{f_2(x+u)}-f_1(x)\int_0^u \frac{f_2(x|u)\,\varphi(u)\,du}{f_2(x+u)}\,du}{f_2(x)\int_0^u u\,\varphi(u)\,du}.$$

Но тукъ, напримѣръ, можемъ да пишемъ

$$\frac{\int_0^u \frac{f_1(x|u)\,\varphi(u)}{f_2(x+u)}\,du}{\int_0^u u\,\varphi(u)\,du}=\frac{\int_0^u f_1(x|u)\,\frac{\varphi(u)}{f_2(x+u)}\,du}{\int_0^u \frac{u\,\varphi(u)}{f_2(x+u)}\,du}\cdot\frac{\int_0^u \frac{u\,\varphi(u)}{f_2(x+u)}\,du}{\int_0^u u\,\varphi(u)\,du}.$$

Първиятъ факторъ отдѣсно клони къмъ производната (P) на $f_1(x)$, а вториятъ къмъ $\frac{1}{f_2(x)}$. Тъй и тукъ имаме

$$F'(x)=\frac{f_1'(x)\,f_2(x)-f_1(x)\,f_2'(x)}{f_2(x)^2}.$$

Тукъ допустнахме, че $\frac{1}{f_2(x+u)}$ може да се представи като единъ опредѣленъ интегралъ.

Теорема IV. Ако $F(\xi)$ е една функция на ξ, която има нютонова производна и $\xi=f(x)$ е функция на x, която има производна (P), то $F(\xi)$, разглеждано като функция на x, има производна (P), дадена отъ

$$F_x'=F_\xi'\cdot f'(x).$$

За да установимъ това свойство, ще излѣземъ отъ тождеството

$$\frac{\int_0^u \frac{\Delta F(\xi)}{\Delta\xi}\,f(x|u)\,\varphi(u)\,du}{\int_0^u u\varphi(u)\,du}=\frac{\int_0^u f(x|u)\,\frac{\Delta F}{\Delta\xi}\,\varphi(u)\,du}{\int_0^u u\,\frac{\Delta F}{\Delta\xi}\,\varphi(u)\,du}\cdot\frac{\int_0^u u\,\frac{\Delta F}{\Delta\xi}\,\varphi(u)\,du}{\int_0^u u\varphi(u)\,du}.$$

Границата на първия факторъ въ дѣсната страна е производната (P) на $f(x)$, а границата на втория факторъ е нютоновата производна на $F(\xi)$, туй което трѣбваше да се докаже.

Теорема V. Нека

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+u_{n+1}(x)+\cdots=S_n(x)+R_n(x)$$

да е единъ равномѣрно сходящъ редъ въ интервала (a, b), и членоветѣ на който иматъ производни (P). Редътъ

$$\sigma(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+u_3'(x)+\cdots+u_n'(x)+\cdots$$

представлява производната (P) на $S(x)$, ако

$$\left|\int_0^u R_n(x|u)\,\varphi(u)\,du\right|=A_n\int_0^u u\varphi(u)\,du$$

и ако $\lim_{n\to\infty} A_n=0$.

Една часть отъ горнитѣ резултати азъ развихъ въ свободнитѣ упражнения, които ржководихъ презъ миналата учебна година. Единъ отъ моитѣ студенти, господинъ Ярославъ Тагамлитцки, който вземаше живо участие въ тѣзи упражнения, въ различни времена следъ това ми съобщи нѣкои получени отъ него резултати, които се отнасятъ за частния

случай $\varphi(u)=\frac{1}{u}$ и които пораци интересътъ, който тѣ ще представятъ, ще приведа въ слѣднитѣ редове.

Нека $f(x)$ е функция, която е измѣрима въ лебеговъ смисълъ въ околността на x_0 и която удовлетворява неравенството

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|\leqslant M|h|.$$

Да образуваме редицата

$$D_0(h), D_1(h), \ldots, D_n(h), \ldots$$

гдето

$$D_0(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

. . . . . .

$$D_n(h)=\frac{1}{h}\int_0^h D_{n-1}(y)\,dy.$$

Както лесно се вижда, тукъ имаме $|D_n(h)|\leqslant M$. Чрезъ индукция може да се установи слѣднята формула:

$$D_n(h)=\frac{1}{(n-1)!\,h}\int_0^h D_0(y)\left[\log\frac{h}{y}\right]^{n-1}dy.$$

И наистина, като допустнемъ, че тази формула е вѣрна за $(n-1)$, чрезъ индукция получаваме

$$D_n(h)=\frac{1}{h}\int_0^h D_{n-1}(y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{(n-2)!\,h}\int_0^h\frac{dx}{x}\int_0^x D_0(y)\left[\log\frac{x}{y}\right]^{n-2}dy=$$

$$=\frac{1}{(n-2)!\,h}\int_0^h D_0(y)\,dy\int_y^h\left[\log\frac{x}{y}\right]^{n-2}\frac{dx}{x},$$

което пъкъ дава

$$D_n(y)=\frac{1}{(n-1)!\,h}\int_0^h D_0(y)\left[\log\frac{h}{y}\right]^{n-1}dy.$$

Въ случая, когато границата на $D_n(h)$, за $h\to+0$, съществува, ще казваме, че $f(x)$ е диференцуема (P_n^+) въ точка x_0. Сжщо ще казваме, че $f(x)$ е диференцуема (P_n^-), когато $D_n(h)$ клони къмъ напълно опредѣлена граница, когато h клони къмъ нула, като взема отрицателни стойности, и най-после ще казваме, че $f(x)$ е диференцуема (P_n), когато $(P_n^+)=(P_n^-)$.

Въ случая, когато редицата $\{D_n(h)\}$ е сходяща, ще пишемъ

$$D(h)=\lim_{n\to\infty}D_n(h)$$

и ще казваме, че $f(x)$ е диференцуема (P^+) или (P^-), когато $D(h)$ клони къмъ опредѣлени граници, когато h клони къмъ нула, като взема съответно положителни или отрицателни стойности. Най-после ще казваме, че $f(x)$ е диференцуема (P), когато $\lim_{h\to+0}D(h)=\lim_{h\to-0}D(h)$. И тъй производнитѣ (P^+), (P^-), (P) сж дефинирани чрезъ

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to+0}D(h),\quad f'_-(x_0)=\lim_{h\to-0}D(h),\quad f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0).$$

Въ слѣднитѣ нѣколко реда ще разгледаме функции, диференцуеми на дѣсно. Аналогични резултати могатъ да се установятъ и за функции диференцуеми на лѣво.

Господинъ Тагамлитски показва най-напредъ, че ако $D(h)$ сжществува за $h>0$, производната $f'_+(x_0)$ сжществува. И наистина, вслѣдствие на неравенството $|D_n(h)|\leqslant M$, което се удовлетворява за всички стойности на n и на h, рекуренчната формула ни дава

$$D(h)=\frac{1}{h}\int_0^h D(y)\,dy,$$

отгдето следва, че за $h\neq 0$, $D(h)$ е непрекжсната функция на h, диференцуема въ нютоновъ смисълъ, съответната производна на която е нула, т. е., че $D(h)$ е независимо отъ h, и че следователно границата за $h=0$ сжществува. Обаче оттукъ не следва, че $D(h)=D(-h)$, както лесно може да се види върху функцията $f(x)=|x|$.

Следъ това се установява, че ако, въ точка x_0, $f(x)$ е диференцуема (P_n^+), тя е диференцуема (P_{n+1}^+), и че $\lim_{h\to+0}D_{n+1}(h)=\lim_{h\to+0}D_n(h)$, което непосрѣдствено следва отъ рекуренчната формула.

$$D_{n+1}(h) = \frac{\int_0^h D_n(y)\,dy}{h}.$$

Следъ това вече не е мжчно да се установи, че за тия дефинираните производни (P) имаме теоремите които установихме въ общия случай.

Господинъ Тагамлитцки установява и следната теорема. — Границата на

$$\frac{2\int_0^u f(x+u)\,du}{u^2}, \quad \text{за} \quad u \to +0 \tag{10}$$

която отговаря на $\varphi(u)=1$, сжществува сигурно, ако непрекжснатата функция $f(x)$ удовлетворява условието

$$|f(x+h)| = |f(x+h)-f(x)| < M|h|, \tag{11}$$

и ако, освенъ това, има едно положително число a, за което изразътъ

$$f(x+h) - ah^{-1}\int_0^h \left(\frac{u}{h}\right)^{a-2} f(x+u)\,du \tag{12}$$

не мѣни своя знакъ, когато h се мѣни.

За доказателството на тази теорема ний препращаме читателя къмъ нашата нота въ Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences de Paris [**207**, 1938, стр. 111—112]. Тукъ ще приведемъ само следнитѣ примѣри:

Нека $\{x_n\}$ е една редица, която има за граница нула. Функцията, която има стойность нула за $x \neq x_n$ и която е равна на $|x|$ за $x = x_n$; или пъкъ функцията, която е равна на x^2 за $x \neq x_n$, на $\frac{x^2}{2}$ за $x = x_{2k+1}$ и на $|x|$ за $x = x_{2k}$, отговарятъ на изискванията на горната теорема около началото. Тѣ иматъ въ тази точка обощена производна, безъ да иматъ производна въ нютоновъ смисълъ.

(Постжпила на 25 мартъ 1939)

SUR UNE EXTENSION DE LA NOTION DE DÉRIVÉE.

Par Kyrille Popoff.

RESUMÉ.

Newton à introduit la notion de dérivée d'une fonction, en étudiant le mouvement d'un point, comme la vitesse du changement de la valeur de la fonction, qu'on admet continue, par rapport au changement de la variable indépendante. Mais les théories moléculaires et corpusculaires introduisent dans la Physique des fonctions représentant des valeurs moyennes qui perdent leur sens physique lorsqu'on réduit à un point le domaine où on les considère. Ainsi, par exemple, la température qui mesure la valeur moyenne de l'énergie cinétique des molécules d'un corps n'a pas de signification physique dans un point, l'énergie cinétique moyenne ne tandant pas vers une limite déterminée lorsqu'on réduit de plus en plus le volum en le faisant tendre vers zéro. Pourtant cela n'empêche pas de considérer, en Physique, les dérivées de la température par rapport aux coordonnées, en introduisant ainsi les dérivées d'une fonction statistique qui ne couvre pas complètement la fonction physique.

Dans ce qui suit nous tâchons de généraliser la notion de dérivée de manière que la condition de la continuité ne soit pas nécessaire. Nous nous proposons de faire cela de façon que la dérivée généralisée coïncide avec la dérivée dans le sens classique, lorsque celle-ci existe, et peut exister aussi dans des cas où la dérivée newtonienne n'existe pas. La condition de la continuité n'étant plus nécessaire, la dérivée ainsi généralisée se prête mieux à l'étude des phénomènes où la continuité n'est pas assurée, comme par exemple dans la Physique moléculaire et dans les Sciences statistique où la notion de probabilité s'introduit d'une manière naturelle.

Premier chapitre.

Extension au moyen du moment d'inertie. Applications géométriques.

Plaçons nous au point de vue géométrique et considérons la courbe $y=f(x)$. Soit $M[x,f(x)]$ un point de cette courbe et

$$(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\sin\alpha = o$$

$$\left|E_{p_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)-1\right|<\left(\frac{R}{r_k}\right)^{p_k}$$ и редътъ $$\sum\left(\frac{R}{r_k}\right)^{p_k}$$ е сходящъ.

Забележка. Ако означимъ съ B_n броя на онѣзи членове на редицата (1), които сж $\leqq n$, то доказаната отъ насъ теорема може да се изрази още така:

За да бжде редицата (1) Вайерщрасова, необходимо и достатъчно е редицата

$$B_1,\ \sqrt{B_2},\ \sqrt[3]{B_3},\ \ldots,\ \sqrt[n]{B_n},\ \ldots \tag{4'}$$

да е ограничена.

И наистина, отъ една страна, лесно се вижда, че $B_n=A_1+A_2+\cdots+A_n$. Отъ друга страна, редицата (4) е ограничена тогава и само тогава, когато редътъ

$$f(z)=A_1z+A_2z^2+\cdots$$

има положителенъ радиусъ на сходимость. Но въ такъвъ случай и редътъ

$$(1-z)^{-1}f(z)=B_1z+B_2z^2+\cdots$$

има положителенъ радиусъ на сходимость, т. е. редицата (4') е сжщо ограничена. Обратно, отъ ограничеността на редицата (4') следва веднага сжщото и за редицата (4).

ЯРОСЛАВЪ ТАГАМЛИЦКИ

ЕДНО СВОЙСТВО НА СУМИРУЕМИТѢ ФУНКЦИИ ВЪ LEBESGUE'ОВЪ СМИСЪЛЪ

Нека редицата

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

отъ сумируеми функции въ измѣримия и ограниченъ ансамбълъ E да е сходяща и да клони къмъ сумируемата въ сжщия ансамбълъ функция $f(x)$.

Да означимъ съ e кой да е измѣримъ подансамбълъ на E.

Нека редицата

$$\int_e f_1(x)\,dx,\ \int_e f_2(x)\,dx,\ \ldots,\ \int_e f_n(x)\,dx,\ \ldots$$

да е сходяща и $J(e)$ да означава границата ѝ.

Ние ще докажемъ следната теорема:

Необходимото и достатъчно условие, за да сжществува равенството

$$\int_e f(x)\,dx=J(e),$$

е функцията $J(e)$ да бжде абсолютно непрекжсната, т. е. да клони къмъ нула заедно съ $\mathrm{m}\,e$ [1]).

[1]) $\mathrm{m}\,e$ означава Льобеговата мѣрка на ансамбъла e.

Необходимостьта на условието е очевидна вследствие на абсолютната непрекжснатость на интеграла. Сега ние ще установимъ, че условието е и достатъчно. За тази цель нека съ e_k означимъ онзи подансамбълъ на e, въ който

$$|f_n(x)-f(x)|\leqq\varepsilon$$

за всѣко $n\geqq k$, при това за $k>1$

$$|f_{k-1}(k)-f(x)|>\varepsilon,$$

гдето ε означава едно отнапредъ избрано положително число. Очевидно ансамблитѣ e_k сж всичкитѣ измѣрими и нѣматъ обща точка. Отъ друга страна, като помнимъ, че $f_n(x)$ клони къмъ $f(x)$ и e_k сж подансамбли на e, то заключаваме, че $e=e_1+e_2+\ldots+e_k+\ldots$, а оттукъ:

$$\int_e f(x)\,dx-\int_e f_n(x)\,dx=\int_{e_1}\left[f(x)-f_n(x)\right]dx+\int_{e_2}\left[f(x)-f_n(x)\right]dx+\ldots$$

Следователно, за $n\geqq N$ имаме

$$\left|\int_e f(x)\,dx-\int_e f_n(x)\,dx\right|\leqq\varepsilon\,\mathrm{m}\,e+\left|\int_{e'}f(x)\,dx\right|+\left|\int_{e'}f_n(x)\,dx\right|,$$

гдето

$$e'=e_{N+1}+e_{N+2}+\ldots$$

Като оставимъ n да клони къмъ безкрайность (при постоянно N), намираме:

$$\left|\int_e f(x)\,dx-J(e)\right|\leqq\varepsilon\,\mathrm{m}\,e+\left|\int_{e'}f(x)\,dx\right|+|J(e')|.$$

Сега да оставимъ N да расте неограничено; тогава, като имаме предъ видъ, че $\mathrm{m}\,e'\to 0$, получаваме

$$\left|\int_e f(x)-J(e)\right|\leqq\varepsilon\,\mathrm{m}\,e,$$

отгдето следва веднага вѣрностьта на твърдението.

АЛЕКСАНДЪРЪ ИВАНОВЪ

ЕВОЛЮЦИЯ ВЪ ТЕОРИЯТА НА ВѢРОЯТНОСТИТѢ

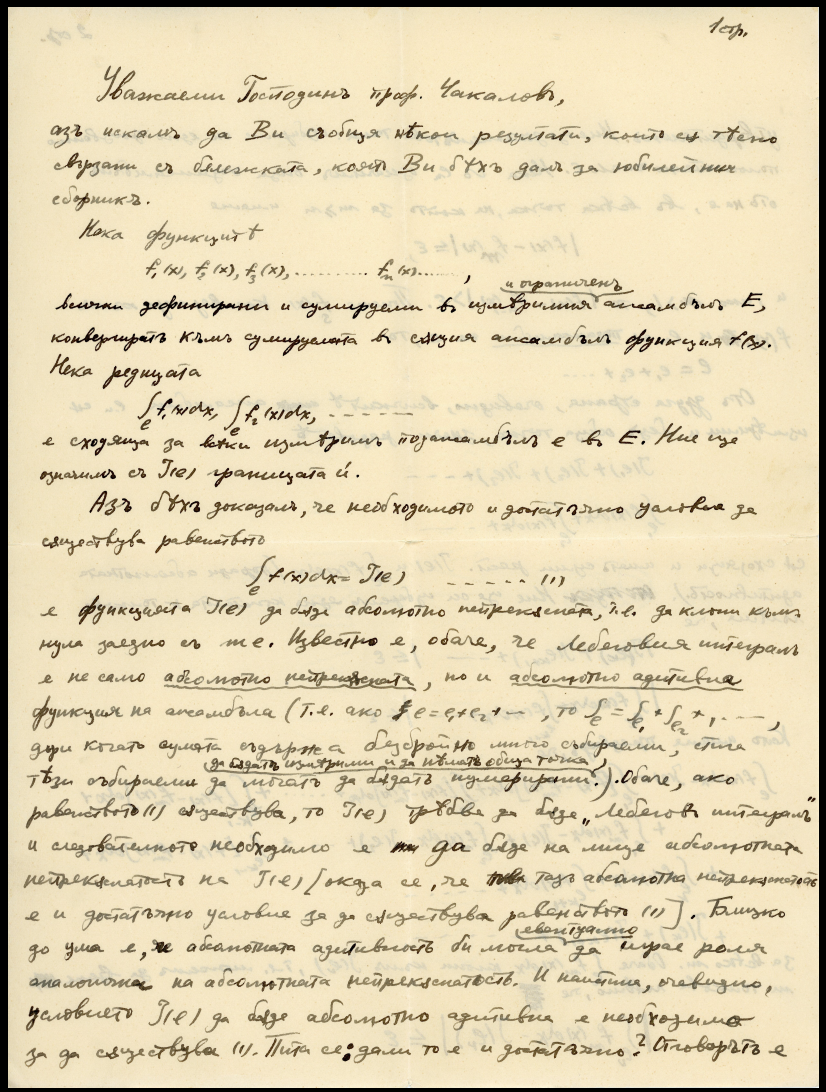
Историята на математиката ни посочва голѣмитѣ придобивки, които последната е дала на човѣчеството, отъ появата си до днесъ. Нѣма область на човѣшкото знание, въ което тя да не е направила своя ценен приносъ. Изобщо математиката се е развивала успоредно съ човѣшкия прогресъ. Всички знаятъ, каква важна роля е играла геометрията въ живота на старитѣ египтяни. И днесъ ние виждаме, че механиката и техниката сж добили ръстъ, който поразява. Въ тая насока човѣшкиятъ гений проявява такава прозорливость, че поразява обикновения човѣкъ.

Въ началото на настоящето столѣтие математиката навлѣзе въ область, въ която доминира случайността и която се смѣташе недосегаема за разрешение отъ човѣшкия умъ. Въпрѣки това тя и тукъ даде насока за развитие на цѣла редица важни проблеми, които иматъ голѣма стойность въ практическия животъ.

Я. Тагамлицки до проф. Л. Чакалов (юли 1939 г.)



Я. Тагамлицки до проф. Л. Чакалов – с. 1 и с. 2



1 стр.

Уважаеми Господине проф. Чакалов,

азъ исках да Ви съобщя нѣкои резултати, които съмъ тукъ свързан съ бележката, която Ви бѣхъ далъ за юбилейния сборникъ.

Нека функцията

$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots\ldots f_m(x)\ldots\ldots,$

всички дефинирани и сумируеми въ измѣримия (и ограниченъ) ансамблъ E, конвергиратъ къмъ сумируемата въ сѫщия ансамблъ функция $f(x)$. Нека редицата

$$\int_e f_1(x)\,dx,\ \int_e f_2(x)\,dx,\ \ldots\ldots$$

е сходяща за всѣки измѣримъ подансамблъ e въ E. Ние ще означимъ съ $J(e)$ границата ѝ.

Азъ бѣхъ доказалъ, че необходимото и достатъчно условие за съществува равенството

$$\int_e f(x)\,dx = J(e) \qquad \ldots\ldots (1)$$

е функцията $J(e)$ да бѫде абсолютно непрекъсната, т.е. да клони къмъ нула заедно съ $m(e)$. Известно е, обаче, че лебеговия интеграл е не само абсолютно непрекъснатъ, но и абсолютно адитивна функция на ансамбла (т.е. ако $e = e_1 + e_2 + \ldots$, то $\int_e = \int_{e_1} + \int_{e_2} + \ldots$), дори когато сумата съдържа безкрайно много събираеми, стига тѣзи събираеми да клонятъ къмъ нула (за всѣка измѣрима и за всѣка безкрайна точка). Обаче, ако равенството (1) съществува, то $J(e)$ трѣбва да бѫде „лебегов интеграл" и следователно необходимо е да бѫде на лице абсолютната непрекъснатостъ на $J(e)$ [откѫдето се, че тая тъкъ абсолютна непрекъснатостъ е и достатъчно условие за да съществува равенството (1)]. Близко до ума е, че абсолютната адитивность би могла (евентуално) да играе роля аналогична на абсолютната непрекъснатостъ. И наистина, очевидно, условието $J(e)$ да бѫде абсолютно адитивна е необходимо за да съществува (1). Пита се: дали то е и достатъчно? Отговорътъ е

2 стр.

утвърдителенъ. Ние ще докажемъ това така: избираме си едно произволно положително число ε. Нека съ e_m означимъ онзи подансамблъ отъ e, въ всѣка точка на който за m имаме

$$|f(x) - f_m(x)| \le \varepsilon,$$

и, ако $m > 1$, то $|f(x) - f_{m-1}(x)| > \varepsilon$. Понеже $f_s(x)$ конвергира къмъ $f(x)$, то и e_m ще тоталенъ подансамблъ на e, то

$$e = e_1 + e_2 + \ldots$$

Отъ друга страна, очевидно, всѣкой отъ ансамблитѣ e_m ще е измѣримъ и безъ общи точки, значи редоветѣ

$$J(e_1) + J(e_2) + J(e_3) + \ldots$$

$$\int_{e_1} f(x)\,dx + \int_{e_2} f(x)\,dx + \ldots$$

ще сходящи и имать сумы равни. $J(e)$ и $\int_e f(x)\,dx$ (поради абсолютната адитивность). Ние ще си избереме число η толкова малко, че

$$|J(e_k) + J(e_{k+1}) + \ldots| \le \varepsilon$$

$$\left|\int_{e_k} f(x)\,dx + \int_{e_{k+1}} f(x)\,dx + \ldots\right| \le \varepsilon$$

Като имаме предвидъ, че

$$\int_e f(x)\,dx - J(e) = \int_{e_1} [f(x) - f_m(x)]\,dx + \int_{e_2} [f(x) - f_m(x)]\,dx + \ldots\ldots + \int_{e_{k-1}} [f(x) - f_m(x)]\,dx +$$

$$+ \int_{e_1} f_m(x)\,dx - J(e_1) + \int_{e_2} f_m(x)\,dx - J(e_2) + \ldots + \int_{e_{k-1}} [f(x) - f_m(x)]\,dx +$$

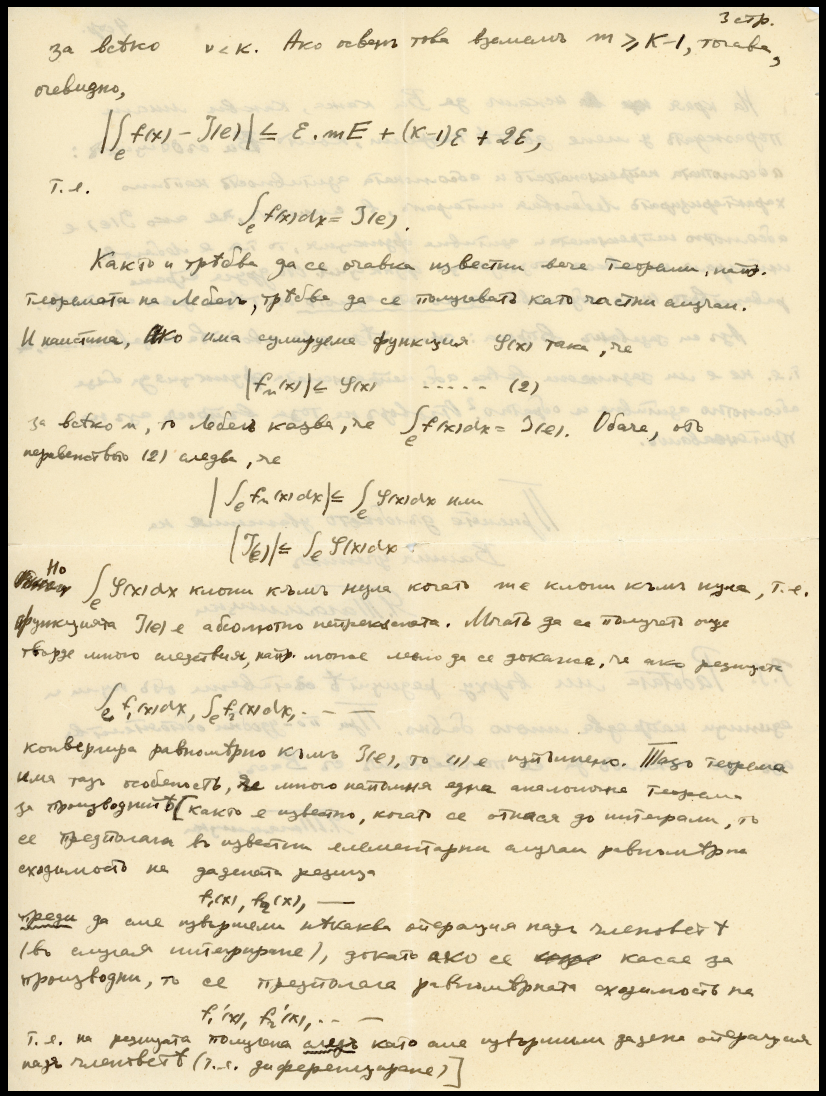
$$+ \int_{e_k} f(x)\,dx + \int_{e_{k+1}} f(x)\,dx + \ldots\ldots$$

$$+ J(e_k) + J(e_{k+1}) + \ldots\ldots$$

за всѣко m. Обаче $\int_e f_m(x)\,dx$ клони къмъ $J(e)$, т.е. можемъ да вземемъ m толкова голѣмо, че

$$\left|\int_{e_v} f_m(x)\,dx - J(e_v)\right| \le \varepsilon$$

Я. Тагамлицки до проф. Л. Чакалов – с. 3 и с. 4



3 стр.

за всяко $\nu < \kappa$. Ако освен това вземем $m \geqslant K-1$, тогава, очевидно,

$$\left| \int_e f(x) - J(e) \right| \leq \varepsilon \cdot mE + (\kappa-1)\varepsilon + 2\varepsilon,$$

т. е.

$$\int_e f(x)\,dx = J(e).$$

Какъ и трябва да се очаква известни вече теореми, напр. теоремата на Лебег, трябва да се получават като частни случаи.

И наистина, ако има сумируема функция $\varphi(x)$ така, че

$$|f_m(x)| \leq \varphi(x) \quad \text{-----} \quad (2)$$

за всяко m, то Лебег казва, че $\int_e f(x)\,dx = J(e)$. Обаче, отъ неравенството (2) следва, че

$$\left| \int_e f_m(x)\,dx \right| \leq \int_e \varphi(x)\,dx \text{ или}$$

$$|J_e| \leq \int_e \varphi(x)\,dx.$$

Но $\int_e \varphi(x)\,dx$ клони къмъ нула когато me клони къмъ нула, т. е. функцията $J(e)$ е абсолютно непрекъсната. Могатъ да се получатъ още твърде много слъдствия, напр. тогава лесно да се докаже, че ако редицата

$$\int_e f_1(x)\,dx, \int_e f_2(x)\,dx, \text{ — —}$$

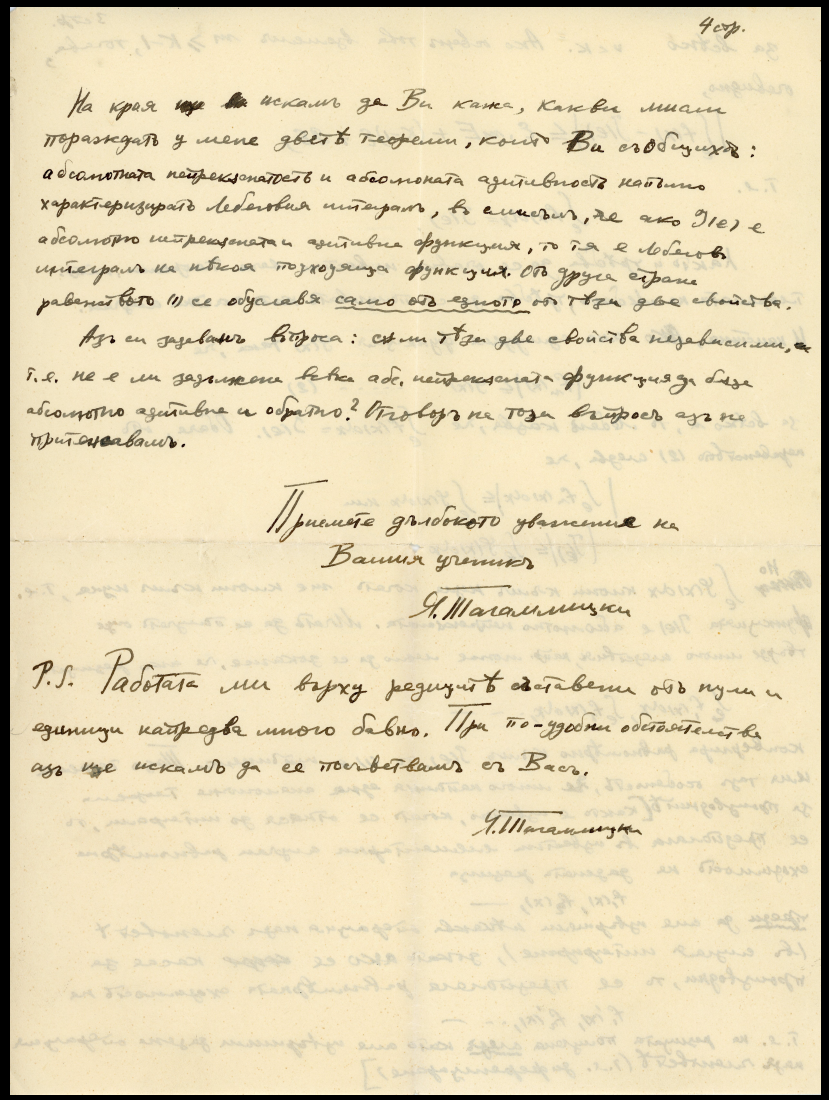
конвергира равномърно къмъ $J(e)$, то (1) е изпълнено. Тази теорема има тази особеность, че много напълно дава аналогични теореми за производнитѣ [както е известно, когато се отнася до интеграли, тя се трансформира въ известни елементарни случаи равномърната сходимость на дадената редица

$$f_1(x), f_2(x), \text{ — —}$$

~~Преди~~ да сме извършили нѣкакви операции надъ членоветѣ ѝ (въ случая интегриране), докато ако се ~~отнася~~ касае за производни, то се трансформира равномърната сходимость на

$$f_1'(x), f_2'(x), \text{ — —}$$

т. е. на редицата получена ~~чрезъ~~ като сме извършили дадена операция надъ членоветѣ (т. е. диференцуване)]



4 стр.

На края ~~на~~ искамъ да Ви кажа, какви мисли пораждатъ у мене двѣтѣ теореми, които Ви съобщихъ: абсолютната непрекъснатость и абсолютната адитивность напълно характеризиратъ лебеговия интегралъ, въ смисълъ, че ако $J(e)$ е абсолютно непрекъсната и адитивна функция, то тя е лебегов интегралъ на нѣкоя точкова функция. Отъ друга страна равенството (1) се обуславя само отъ едното отъ тѣзи двѣ свойства.

Азъ си задавамъ въпроса: сж ли тѣзи двѣ свойства независими, т. е. не е ли достатъчно нѣкак. непрекъсната функция да бъде абсолютно адитивна и обратно? Отговоръ на този въпросъ азъ не притежавамъ.

Приемете дълбокото уважение на
Вашия ученикъ
Я. Тагамлицки

P.S. Работата ми върху редицитѣ оставени отъ пущ и единици катедрува много бавно. При по-удобни обстоятелства азъ ще искамъ да се почерпвамъ отъ Васъ.

Я. Тагамлицки

Първите страници на дисертацията на Я. Тагамлицки

ABDRUCK
AUS DEN BERICHTEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE DER SÄCHSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG
XCV. BAND
SITZUNG VOM 7. JUNI 1943

Zum allgemeinen Kreisnormierungsprinzip der konformen Abbildung[1])

Von

Jaroslaw Tagamlizki (aus Sofia z. Z. in Leipzig)

Vorgelegt von Herrn Koebe

I. Einleitung 111
II. Problemstellung 113
III. Hilfssätze 115
IV. Entarteter Fall 120
Existenzbeweis 120
Unitätsbeweis 122
V. Nicht entarteter Fall 123
Existenzbeweis 123
Unitätsbeweis 126
Beispiel 129
VI. Schlußbemerkungen 129
VII. Literaturverzeichnis 131

Hinweise auf das Literaturverzeichnis sind im Text oft nur durch Nummernangabe gemacht.

I. Einleitung

Bekanntlich kann ein einfach zusammenhängendes Gebiet[2]) auf ein Kreisgebiet abgebildet werden. (Kreisnormierungsprinzip für einfach zusammenhängende Gebiete.) Die vollständige Begründung des Kreisnormierungsprinzipes[3]) für Gebiete endlichen Zusammenhanges ist von Herrn Prof. Koebe durchgeführt worden. Die allgemeine Lösung der Aufgabe für unendlich-vielfach zusammenhängende Gebiete ist als Desideratum von Herrn Koebe gestellt worden (allgemeines Kreisnormierungsprinzip). Die Behandlung dieses Problems in der vollen Allgemeinheit bietet jedoch

1) D 15.

2) „Gebiet" soll heißen, daß nur die inneren Punkte in Betracht kommen.

3) Damit ist der Satz gemeint, daß ein gegebenes schlichtes Gebiet eineindeutig auf ein Gebiet abgebildet werden kann, welches nur von Vollkreisen begrenzt ist (Kreisgebiet). Jeder einzelne Kreis darf sich auch auf einen Punkt reduzieren.

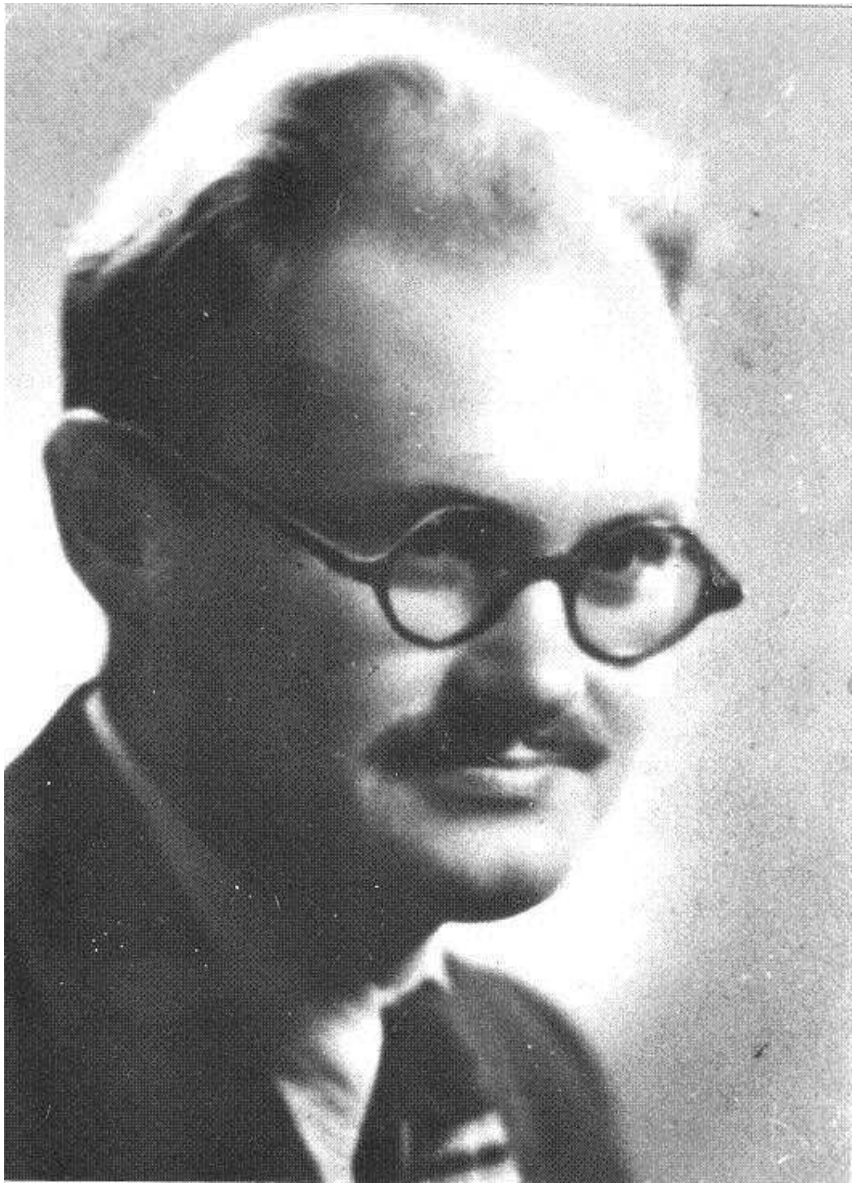
außerordentliche Schwierigkeiten dar, die bis heute noch nicht überwunden sind; dagegen wurde das analoge Problem der Abbildung auf Schlitzbereiche von Koebe auch für Bereiche unendlich hohen Zusammenhanges vollständig gelöst (10 u. 24)[1]). Es ist zwar durch Anwendung des Häufungsprinzipes der analytischen Funktionen leicht, die isolierten Begrenzungskomponenten des abzubildenden Gebietes in Kreise zu verwandeln (— man verwandelt zuerst die erste Begrenzungskomponente in einen Kreis, dann die ersten zwei usw.; auf die so gewonnene Folge von Abbildungen wendet man das Häufungsprinzip an. Zur näheren Begründung sei der Leser noch an gewisse spätere Bemerkungen, S. 124, verwiesen). Aber es gelingt im allgemeinen nicht, Näheres über die Häufungskomponenten zu gewinnen. Noch nicht überwundene Schwierigkeiten sind auch mit dem Unitätssatz verbunden. Herr Prof. Koebe hat mir gegenüber die Meinung ausgesprochen, daß vielleicht metrische Bedingungen irgendwelcher Art zur Präzisierung des Begriffes des allgemeinen Kreisgebietes notwendig sein könnten, um das Prinzip für Gebiete unendlich hohen Zusammenhanges insonderheit hinsichtlich des Unitätssatzes allgemein zu sichern[2]). Jedenfalls haben sich bei dem allgemeinen Parallelschlitztheorem solche Bedingungen als notwendig herausgestellt.

Nun einiges Nähere zur Geschichte dieses Problems.

Die Frage der konformen Abbildung von beliebigen Gebieten unendlich hohen Zusammenhanges auf Kreisgebiete wurde zuerst von Herrn Prof. Koebe gestellt. Das Problem hat sich folgendermaßen entwickelt. Mit Hilfe verschiedener Methoden (Methode der Überlagerungsfläche (7), iterierendes Verfahren, bzw. Iterationsmethode (7), Kontinuitätsmethode (19)) hat Koebe die Begründung des Kreisnormierungsprinzipes für Gebiete endlichen Zusammenhanges (Existenzsatz und Unitätssatz) durchgeführt. Im Jahre 1908 hat er zum erstenmal das allgemeine Kreisnormierungsprinzip ausgesprochen (Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, dritte Mitteilung, Gött. Nachr. 1908). In derselben Arbeit zeigt er einen Weg zur Behandlung des Kreisnormierungsprinzipes für symmetrische Gebiete unendlich hohen Zusammenhanges, deren sämtliche Begrenzungslinien die Achse des Reellen schneiden. Später hat A. Fischer den Koebeschen Gedanken ausgeführt (Diss. Jena, 1915). Ebenfalls auf Anregung von Koebe sind die Arbeiten von K. Georgi (Diss. Jena, 1915) und H. Denneberg (Diss. Leipzig, 1932) entstanden. In diesen Arbeiten handelt es sich um Gebiete, die eine einzige, und zwar punktförmige Häufungskomponente

1) Siehe auch Gött. Nachr. 1909 S. 324ff., ebenda 1910 S. 59ff.

2) Vgl. 8 S. 189.



Ярослав Тагамлицки – млад доцент



Ярослав Тагамлицки – млад професор

Начални стъпки към идеята за неразложимост

Първа статия в Годишника на Софийския университет

- Функции, които удовлетворяват известни неравенства върху реалната ос. Год. на СУ, Физ.-мат. фак., **42** (1946), кн. 1, 239–256.

Теорема 1

Ако $f(x)$ е дефинирана и има производни от произволен ред при $x < a$, а A е такава константа, че $|f^{(k)}(x)| \leq Ae^x$ за всяко $x < a$ и цяло $k \geq 0$, то $f(x) = Be^x$, където B е константа, удовлетворяваща неравенството $|B| \leq A$.

Други статии в подобен дух

- Sur les suites vérifiant certaines inégalités. C. R. Acad. Sci., Paris, **223** (1946), 940–942.
- Върху редици, които удовлетворяват някои неравенства. Год. на СУ, Физ.-мат. фак., **43** (1947), кн. 1, 193–237.
- Sur une propriété de la fonction exponentielle. C. R. Acad. Bulg. Sci., **1** (1948), no. 1, 33–34.

ФУНКЦИИ, КОИТО УДОВЛЕТВОРЯВАТ ИЗВЕСТНИ НЕРАВЕНСТВА ВЪРХУ РЕАЛНАТА ОС

От Я. Тагамлицки

В настоящата работа ние установяваме, че освен функциите $f(x)=Ce^x$ няма други, които при всяко цяло неотрицателно k за всяко x на ляво от някоя фиксирана точка от реалната ос удовлетворяват неравенствата

$$\left|\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right| \leqq Ae^x.$$

За всичките функции, които ние разглеждаме, се предполага, че са дефинирани върху реалната ос, обаче, евентуално, могат да приемат комплексни стойности, ако изрично не е казано противното. Освен споменатата теорема, ние даваме в нашата работа различни нейни уточнявания и приложения. При едно от прецизиранията ние си служим с помощна теорема, която представлява частен случай от по-обща теорема на г-н проф. Обрешков. Тази помощна теорема е построена по подобие на друга една теорема, която г-н проф. Обрешков ни беше задал като задача. В последния параграф е направено едно обобщение, като мястото на производната заемат оператори от по-общ характер. Като приложение на формулираната по-горе теорема и нейните обобщения, ние установяваме една класа редици от функции, които имат свойството, че сходимостта им в една единствена точка влече след себе си сходимостта в цялия интервал, в който са дефинирани.

§ 1

Теорема 1. Нека $f(x)$ е безбройно много пъти диференцуема за $x<a$ и

$$\left|\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right| \leqq Ae^x \qquad (k=0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

Ние ще покажем, че

$$f(x)=Be^x,$$

където B е една константа, чийто модул не надминава A. (Обратното е тривиално).

Доказателство. Ние ще използуваме методата на Liouville-Riemann, която ни дава възможност да дефинираме оператора $\frac{d^z}{dx^z}$ за всякакви комплексни значения на z. За тая цел да разгледаме

$$f_k^{(z)}(x)=\frac{1}{\Gamma(k-z)}\int_{-\infty}^{x}\frac{d^k f(t)}{dt^k}\cdot(x-t)^{k-z-1}dt, \quad x<a.$$

Изразът $f_k^{(z)}(x)$ е дефиниран за всяко цяло неотрицателно k и всяко комплексно z, за което $R(z)<k$, понеже неравенствата (1) осигуряват сходимостта на интеграла. При всяко фиксирано x и k изразът $f_k^{(z)}(x)$ е еднозначно дефиниран и е холоморфна функция на z. От друга страна

$$f_k^{(z)}(x)=f_{k+1}^{(z)}(x),$$

както това се вижда с едно интегриране по части:

$$\frac{1}{\Gamma(k-z)}\int_{-\infty}^{x}\frac{d^k f(t)}{dt^k}\cdot(x-t)^{k-z-1}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(k+1-z)}\int_{-\infty}^{x}\frac{d^{k+1} f(t)}{dt^{k+1}}\cdot(x-t)^{k-z}\,dt.$$

И тъй изразът $f_k^{(z)}(x)$ не зависи от k (разбира се, той е дефиниран само за цели неотрицателни стойности на k, и, следователно, като изменяме k, ние ще му даваме само такива стойности). Но тъй като на k можем да дадем произволно големи стойности, значи имаме възможност да продължим $f_k^{(z)}(x)$ в цялата равнина z. И така, $f_k^{(z)}(x)$ при всяко фиксирано значение на x представлява една цяла функция на z. Ние от сега нататък ще пишем $f^{(z)}(x)$ вместо $f_k^{(z)}(x)$, понеже $f_k^{(z)}(x)$ не зависи от k. Сега ние ще покажем, че за цели значения на z имаме

$$f^{(z)}(x)=\frac{d^z f(x)}{dx^z}.$$

И наистина, понеже k е произволно цяло неотрицателно число, стига да имаме $k>z$, можем да вземем $k=z+1$ и тогава

$$f^{(z)}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{d^{z+1} f(t)}{dt^{z+1}}\,dt=\frac{d^z f(x)}{dx^z},$$

което оправдава и избрания начин на означение. Ние ще изучим $f^{(z)}(x)$, като функция на z при фиксирано x.

Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences
Tome 1, № 1, Janvier-Mars, 1948

MATHÉMATIQUES

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Note de **Y. Tagamlitzki**
(Présentée par L. Tchakaloff le 13. VI. 1947)

Dans un travail récent nous avons établi le théorème suivant:[1])
Si la fonction réelle $f(x)$, admettant pour $x \geqq a$ une suite illimitée de dérivées, vérifie les inégalités

$$|f^{(n)}(x)| \leqq Ae^{-x}, \quad n=0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

elle se réduit à la fonction exponentielle $f(x)=Ce^{-x}$.

Les démonstrations connues de ce théorème impliquant des méthodes de la théorie des fonctions analytiques dans le domaine complexe, il serait désirable de trouver un procédé direct, qui ne fasse pas appel au domaine complexe. Nous allons donner ici une telle démonstration.

Démonstration. La fonction $f(x)$ vérifiant les inégalités (1), on trouve en intégrant par parties

$$f^{(n-1)}(x)=\frac{(-1)^{k-n}}{(k-n+1)!}\int_x^\infty f^{(k+1)}(t)\,(t-x)^{k-n+1}\,dt$$

pour $k \geqq n-1$, k et n étant des nombres entiers et positifs.

Considérons maintenant l'identité

$$e^{-x}f(x)+2e^{-x}f'(x)+e^{-x}f''(x)=$$

$$=\frac{(-1)^k}{(k-1)!\,(k+1)!}\int_x^\infty e^{-u}(u-x)^{k-1}\,du\int_x^\infty f^{(k+2)}(t)\,(t-x)^{k+1}\,dt+$$

$$+\frac{2(-1)^{k-1}}{k!^2}\int_x^\infty e^{-u}(u-x)^k\,du\int_x^\infty f^{(k+2)}(t)\,(t-x)^k\,dt+$$

$$+\frac{(-1)^{k-2}}{(k+1)!\,(k-1)!}\int_x^\infty e^{-u}(u-x)^{k+1}\,du\int_x^\infty f^{(k+2)}(t)(t-x)^{k-1}dt=$$

$$=\frac{(-1)^k}{(k-1)!\,(k+1)!}\int_x^\infty\int_x^\infty e^{-u}f^{(k+2)}(t)\,(u-x)^{k-1}(t-x)^{k-1}(u-t)^2\,du\,dt+$$

$$+(-1)^k\left[\frac{2}{(k+1)!\,(k-1)!}-\frac{2}{k^2!}\right]\int_x^\infty e^{-u}(u-x)^k\,du\int_x^\infty f^{(k+2)}(t)(t-x)^k dt,$$

ou bien

$$e^{-x}[f(x)+2f'(x)+f''(x)]= \tag{2}$$

$$=\frac{(-1)^k}{(k-1)!\,(k+1)!}\int_x^\infty\int_x^\infty e^{-u}f^{(k+2)}(t)\,(u-x)^{k-1}(t-x)^{k-1}(u-t)^2\,du\,dt+$$

$$+\frac{2e^{-x}f'(x)}{k+1}.$$

La fonction $f(x)$ vérifiant les inégalités (1), on a

$$|e^{-x}[f(x)+2f'(x)+f''(x)]| \leqq$$

$$\leqq\frac{1}{(k-1)!\,(k+1)!}\int_x^\infty\int_x^\infty e^{-u-t}(u-x)^{k-1}(t-x)^{k-1}(u-t)^2\,du\,dt+\frac{2e^{-x}|f'(x)|}{k+1}.$$

Dans le cas particulier $f(x)=e^{-x}$ la formule (2) nous donne

$$\frac{1}{(k-1)!\,(k+1)!}\int_x^\infty\int_x^\infty e^{-u-t}(u-x)^{k-1}(t-x)^{k-1}(u-t)^2\,du\,dt-\frac{2e^{-2x}}{k+1}=0$$

et, par conséquent,

$$|f(x)+2f'(x)+f''(x)| \leqq \frac{2e^{-x}}{k+1}+\frac{2|f'(x)|}{k+1}.$$

Le nombre entier et positif k étant arbitraire, on a

$$f(x)+2f'(x)+f''(x)=0$$

et par suite $\quad f(x)=Ce^{-x}+C_1xe^{-x}$.

D'autre part on a $\quad |Ce^{-x}+C_1xe^{-x}| \leqq Ae^{-x}$,

d'où il suit $C_1=0$.

La démonstration que nous venons d'exposer est une modification d'une méthode que nous avons appliquée à l'étude des suites régulièrement monotones[1]).

Institut de mathématiques de l'Université de Sofia.

[1]) Y. Tagamlitzki, Funktionen, die auf der reellen Achse gewissen Ungleichungen genügen, Annuaire de l'Université de Sofia, t. XLII, (1945—46), p. 239. — Sur les suites vérifiant certaines inégalités, Comptes rendus Ac. Sc. Paris, t. 223 (1946) p. 940—942.

[1]) Y. Tagamlitzki, Über Zahlenfolgen, die gewissen Ungleichungen genügen, Annuaire de l'Université de Sofia, t. XLIII, (1946—47) p. 193.

Някои прости вектори при едно частично нареждане

Хабилитационен труд при избора за редовен доцент

- Изследване на една класа от функции. Год. на СУ, Природо-мат. фак., **44** (1948), кн. 1, 317–356.

Дефиниция

При дадено $a \in \mathbb{R}$ функциите $f(x)$, дефинирани и безбройно много пъти диференцируеми при $x > a$, за които $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ и $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, за всяко $x > a$, са наречени *положително дефинитни*. Ако $f(x)$ и $g(x)$ са такива функции, казва се, че $f(x)$ *мажорира* $g(x)$, ако разликата $f(x) - g(x)$ е също положително дефинитна. За една положително дефинитна функция $f(x)$ се казва, че е *прост вектор*, ако $f(x) \not\equiv 0$ и единствените положително дефинитни функции, които $f(x)$ мажорира, са нейни произведения с константи.

За всяко $\lambda > 0$ функцията $e^{-\lambda x}$ е прост вектор. Прави се приложение на това към теорията на редовете на Дирихле.

ОТДЕЛЕН ОТПЕЧАТЪК ДАР ОТ АВТОРА
ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКИ ФАКУЛТЕТ, ТОМ XLIV, 1947—1948
КН. 1 — МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА
ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA
FACULTÉ DES SCIENCES, TOME XLIV, 1947—1948
LIVRE 1 — MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЕДНА КЛАСА ОТ ФУНКЦИИ

от
Я. ТАГАМЛИЦКИ

RECHERCHES SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS

PAR
Y. TAGAMLITZKI



СОФИЯ — SOFIA
УНИВЕРСИТЕТСКА ПЕЧАТНИЦА — IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1948

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЕДНА КЛАСА ОТ ФУНКЦИИ

От Я. Тагамлицки

В тая работа ние ще изследваме някои свойства на функциите, които са дефинирани, безбройно много пъти диференцуеми при $x>a$ и удовлетворяват на условията

$$f^{(k)}(x)=o(x^{-k}),\quad k=0,\ 1,\ldots,$$

когато x расте неограничено. Съвокупността от функциите с изброените свойства ще означаваме с $K(a)$. Разбира се, ако функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ принадлежат на $K(a)$, то и функциите $f_1(x)+f_2(x)$ и $\lambda f_1(x)$ принадлежат на $K(a)$ при всеки избор на константата λ.

Съвокупността $K(a)$ съдържа всяка функция $f(x)$, която при $x>a$ е безбройно много пъти диференцуема и удовлетворява на условията

$$(-1)^k f^{(k)}(x)\geqq 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=0.$$

И наистина, нека $b>a$. Да разгледаме

$$f(b)=\sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-1)^\nu f^{(\nu)}(x)(x-b)^\nu}{\nu!}+R_k,$$

където

$$R_k=\frac{(-1)^{k+1}(x-b)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x-\theta(x-b)),\quad 0<\theta<1.$$

При $x>b$ имаме

$$f(b)\geqq\frac{(-1)^k f^{(k)}(x)(x-b)^k}{k!}\geqq 0,$$

от където за положителни стойности на x получаваме

$$f(b)\left(\frac{x}{x-b}\right)^k\geqq(-1)^k f^{(k)}(x)\,x^k\geqq 0.$$

Да изберем едно положително ε, след това да вземем b толкова голямо, че да имаме

$$f(b)<\frac{\varepsilon}{2}$$

и, като фиксираме по този начин b, да изберем c толкова голямо, че при $x>c$ да имаме

Разглеждане от обща гледна точка

Обобщение за частично наредени линейни пространства

Върху някои приложения на общата теория на линейните пространства с частично нареждане. Год. на СУ, Природо-мат. фак., **45** (1949), кн. 1, 263–286.

Приложение (теорема 14)

Нека $a < x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots$, $b = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, а R е съвкупността на функциите, дефинирани и безбройно много пъти диференцируеми в интервала (a, b). Да наречем *положително дефинитни* функциите $f(x)$ от R, за които $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$ при $a < x < x_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Нека $p_1(x), p_2(x), p_3(x), \ldots$ са прости вектори относно съответната релация на мажориране. За да бъде една функция $f(x)$ от R развиваема в абсолютно сходящ ред от вида $\sum \alpha_\nu p_\nu(x)$, необходимо и достатъчно е да съществува такава функция $g(x)$ от R, развиваема в сходящ ред от същия вид с неотрицателни коефициенти, че $|f^{(k)}(x)| \leq (-1)^k g^{(k)}(x)$ при $a < x < x_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

ОТДЕЛЕН ОТПЕЧАТЪК ДАР ОТ АВТОРА
ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКИ ФАКУЛТЕТ, ТОМ XLV, 1948—1949
КН. 1 — (МЕТЕМАТИКА И ФИЗИКА)
ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA
FACULTÉ DES SCIENCES, TOME XLV, 1948—1949
LIVRE 1 — (MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE)

ВЪРХУ НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА ОБЩАТА ТЕОРИЯ НА ЛИНЕЙНИТЕ ПРОСТРАНСТВА С ЧАСТИЧНО НАРЕЖДАНЕ

От **Я. Тагамлицки**

Ние ще разгледаме общата теория на линейните пространства с частично нареждане с оглед на тяхните приложения към въпросите за развиваемост на функциите в редове по дадена система от функции.

Нека S е тяло, в което е установено едно пълно нареждане. Ще казваме, че една съвокупност R от произволни елементи представлява линейно пространство по отношение на тялото S, когато в R е дефинирана сумата на всеки два елемента от R като елемент от R и произведението λa на елементи λ от S с елементи a от R пак като елемент от R. За сумата и произведението се иска да бъдат комутативни, асоциативни, дистрибутивни и да удовлетворяват на условията

$$1a = a, \quad 0a = 0b$$

каквито и да бъдат елементите a и b от R. Елемента $0a$, който съгласно нашето изискване не зависи от a, ние ще наричаме нулев елемент на R и ще го бележим със знака 0. Елементите на S ние понякога ще наричаме скалари, а елементите на R вектори. Термините линейно пространство и векторно пространство означават едно и също нещо. Теорията на линейните пространства е изучавана от множество автори. За нас в случая представляват особен интерес линейните пространства, в които е установено частично нареждане, подчинено на някои условия. Тия пространства, доколкото ни е известно, за пръв път са изучавани от S. Steen[1]) и Л. В. Канторович[2]).

Казваме, че в едно линейно пространство R е установено частично нареждане, ако релацията $a \subset b$ е дефинирана пове между някои елементи a и b от R и удовлетворяват на следните изисквания

[1]) S. Steen. An introduction to the theory of operators Proc. Lond. Math. Soc. (2), 41 (1936), стр. 351—399.

[2]) Л. В. Канторович, Lineare halbgeordnete Räume, Математический сборник, т. 2 (44), стр. 121 (1936).

I. От $a = b$ следва $a \subset b$

II. От $a \subset b$ и $b \subset a$ следва $a = b$

III. От $a \subset b$, $c \subset d$ следва $a + c \subset b + d$

IV. От $a \subset b$, $\lambda \geqq 0$ следва $\lambda a \subset \lambda b$.

Ще казваме, че едно нареждане е нормално, когато всяка крайна ограничена отгоре съвокупност от вектори притежава най-малка мажоранта (или, както се казва понякога, точна горна граница), т. е. мажоранта, която е по-малка от всяка друга мажоранта. Ще казваме, че нареждането е напълно нормално, когато и всяка безкрайна ограничена отгоре съвокупност от вектори притежава най-малка мажоранта.

Най-малката мажоранта на една фамилия от вектори f_α ще означаваме със знака $\cup f_\alpha$, а най-голямата миноранта със знака $\cap f_\alpha$. Когато се касае за два вектора f_1 и f_2, ще пишем съответно

$$f_1 \cup f_2 \quad \text{и} \quad f_1 \cap f_2.$$

Терминологията и означенията, които ние употребяваме, се отличават от терминологията и означенията на някои автори. Освен това в аксиомите, които ние изброихме, не се поставя изискване за съществуване на мажоранта на всяка крайна фамилия от вектори. Ние изключихме това изискване от системата от аксиоми, противно на обикновената практика, понеже измежду специалните линейни пространства, към които ние искаме да прилагаме общата теория, има и такива, в които дори не всеки два вектора имат обща мажоранта.

Един отличен от нула положително дефинитен вектор ще наричаме прост, когато той е колинеарен с всички положително дефинитни вектори, които са по-малки от него. Това значи, че един положително дефинитен и отличен от нула вектор p ще наричаме прост, когато от неравенствата

$$0 \subset a \subset p$$

следва

$$a = \lambda p.$$

където λ е скалар. От неравенствата $0 \subset \lambda p \subset p$ заключаваме, че $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Ако един вектор p е прост и μ е един положителен скалар, то векторът μp е също прост. Два колинеарни прости вектори ние ще разглеждаме като несъществено различни.

До колкото ни е известно, понятието прост вектор е въведено в теорията на линейните пространства от нас. Целта на настоящата работа е да се изучи ролята на простите вектори при въпросите за развиваемост на векторите в редове и при някои други сродни въпроси.

За да се установи едно частично нареждане в едно линейно пространство, достатъчно е да се каже, кои вектори y

Интегрална добавка към реда на Абел (1)

Трудът, за който бива присъдена втората докторска степен

- Изследвания върху Абелевия интерполационен ред. Год. на СУ, Природо-мат. фак., **46** (1950), кн. 1, 385–443.
- Об одном обобщении ряда Абеля. ДАН СССР, **80** (1951), №1, 17–20.

При постановката от приложението в труда за частично наредени пространства нека $x_0, x_1, x_2, \ldots$ е аритметична прогресия с реални членове и положителна разлика τ. Нека $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots$ са интерполационните полиноми на Абел, определени по следния начин: $P_n(x) = (x_0 - x)(x_n - x)^{n-1}/n!, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ Представлява интерес въпросът за развиваемост на функции в ред от вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$, където коефициентите a_n не зависят от x. Отговорът на въпроса е положителен за функция $f(x)$, която е полином (тогава имаме $a_n = (-1)^n f^{(n)}(x_n)$ за всяко n). В общия случай обаче положението е много по-сложно.

Интегрална добавка към реда на Абел (2)

В статията се установява, че в случая полиномите $P_n(x)$ са прости вектори, но но освен тях и произведенията им с положителни константи има още много други прости вектори – доказва се, че множеството на простите вектори в този случай се състои от произведенията с положителни константи на полиномите $P_n(x)$ и на функциите на x от вида $R(x,t)$, $0 < t \leq 1$, където

$$R(x,t) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda(x_0-x)} - e^{\mu(x_0-x)}}{\lambda - \mu} & \text{при } t<1,\ \tau\lambda e^{1-\tau\lambda} = \tau\mu e^{1-\tau\mu} = t,\ \mu<\lambda, \\ (x_0 - x)e^{(x_0-x)/\tau} & \text{при } t=1. \end{cases}$$

Интегрална добавка към реда на Абел (3)

Теорема II

За да може една функция $f(x)$, която е дефинирана и безбройно много пъти диференцируема при $x > a$, да се представи във вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) + \int_0^1 R(x,t)d\theta(t),$$

където коефициентите a_n не зависят от x и са неотрицателни, а функцията $\theta(t)$ не зависи от x и е монотонно растяща, необходимо и достатъчно е функцията $f(x)$ да бъде положително дефинитна.

ИЗСЛЕДВАНИЯ ВЪРХУ АБЕЛЕВИЯ ИНТЕРПОЛАЦИОНЕН РЕД

От Я. Тагамлицки

Увод

Интерполационната задача на Abel[1] може да се формулира така: дадени са $n+1$ числа

$$x_0, x_1, x_2, \dots x_n,$$

които образуват аритметична прогресия, и $n+1$ произволни числа

$$a_0, a_1, a_2, \dots a_n;$$

търси се полином $P(x)$ от възможно най-ниска степен, който удовлетворява условията

$$P^{(k)}(x_k) = a_k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots n.$$

Решението на тази задача се дава, както е известно и както лесно се вижда, със следната интерполационна формула на Abel:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(k)}(x_k) \frac{(x_0 - x)(x_k - x)^{k-1}}{k!}.$$

Във връзка с тази задача възниква въпросът за изучаването на безкрайния ред

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(k)}(x_k) \frac{(x_0 - x)(x_k - x)^{k-1}}{k!},$$

който съответствува на цитираната по-горе интерполационна формула. Този ред е изучаван за пръв път от Abel[1], но достатъчни условия за развиваемост на една функция в ред от този тип са дадени за пръв път от Halphen[2]). Оказа се, че има множество случаи, при които Абелевото развитие на една функция е сходящо, но не представлява функцията. Ето какво казва Halphen[2]) във връзка с това: „Un exemple plus curieux

[1] N. H. Abel, Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes, (Oeuvres, т. 2).

[2]) G. H. Halphen, Sur une série d'Abel, Comptes Rendus, Acad. Sc. т. 93, стр. 1003.

encore de cas où la série converge sans représenter la fonction est fourni par Abel lui-même, à son insu. L'illustre géomètre applique la formule (1) à la fonction $\log(1+x)$. La série converge et il est manifeste, qu'elle ne représente pas $\log(1+x)$, comme Abel l'avait pensé".

И наистина, в този случай при $x_0 = 0$ Абелевото развитие има вида

$$\ln(1+x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x(\nu\tau - x)^{\nu-1}}{\nu(1+\nu\tau)^{\nu}},$$

където с τ сме означили разликата на аритметичната прогресия. В този случай Абелевият ред е сходящ при всички (дори комплексни) стойности на x, ако $\tau \neq 0$, и представлява цяла функция. От това следва, че съвокупността от точките, в които интересуващето ни Абелево развитие е равно на $\ln(1+x)$, не може да има друга (крайна) точка на сгъстяване, освен, евентуално, точката -1, защото функцията $\ln(1+x)$ не е цяла. По-специално това развитие не може да представлява $\ln(1+x)$ в никой интервал.

Нека разликата на аритметичната прогресия

$$(2) \qquad x_0, x_1, x_2, \dots$$

е различна от нула. Известно[1]) е, че от сходимостта на Абелевия ред

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{(x_0 - x)(x_\nu - x)^{\nu-1}}{\nu!}$$

в една точка различна от x_0 следва неговата сходимост при всички, дори комплексни, стойности на x; сходимостта е равномерна във всяка ограничена област на комплексната равнина и, следователно, сумата на разглеждания ред е цяла функция на x. Обаче, далеч не всяка цяла функция може да се развие в Абелев ред. Да разгледаме един пример. Нека

$$f(x) = (x_0 - x)\, e^{-\frac{x}{\tau}}, \quad \tau \neq 0.$$

В такъв случай

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{x_k - x}{\tau^k} e^{-\frac{x}{\tau}},$$

откъдето

$$f^{(k)}(x_k) = 0$$

и, следователно, функцията $f(x)$ не е развиваема в Абелев ред.

Сега ще дадем друг пример. Нека разликата τ на прогресията (2) е съществено положителна. Да означим с λ и μ две положителни числа свързани с равенството

[1]) Вж., например, G. Polya, G. Szegö, Aufgaben und Lehasätze aus der Analysis, том I, отдел III, зад. 255, Берлин 1925.

Теорема за конусите (1)

Първоначална и обобщена версия

- Върху геометрията на конусите в Хилбертовите пространства. Год. на СУ, Физ.-мат. фак., **47** (1952), кн. 1, ч. 2, 85–107.
- Върху едно обобщение на понятието за неразложимост. Год. на СУ, Физ.-мат. фак., **48** (1954), кн. 1, ч. 1, 69–85.

Дефиниция (за изпъкнал конус, норма и неразложимост)

Едно множество K в дадено линейно пространство се нарича *изпъкнал конус*, ако $\alpha a + \beta b \in K$ винаги, когато $a, b \in K$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. *Норма* в K е такава функция $P : K \to [0, +\infty)$, че при $a, b \in K$ и $\alpha \geq 0$ винаги $P(a + b) \leq P(a) + P(b)$ и $P(\alpha a) = \alpha P(a)$, като $P(a) = 0$ само при $a = 0$. *Неразложим елемент на K относно P* се нарича такъв ненулев елемент c на K, за който не съществуват неколинеарни елементи a и b на K, удовлетворяващи равенствата $c = a + b$ и $P(c) = P(a) + P(b)$.

Теорема за конусите (2)

Обща теорема за конусите

Предполага се, че са дадени изпъкнал конус K с норма P и съдържащ се в него изпъкнал конус L с норма Q. При известни допълнителни предположения от топологичен характер се твърди, че ако условията $c \in L$ и $P(c) \geq Q(c)$ са изпълнени винаги, когато c е неразложим елемент на K относно P, то тези условия са изпълнени за всяко c от K.

Приложения, посочени в статиите: теорема на Хаусдорф за моментите, теорема на Уидър, теореми на Бернщайн за регулярно монотонни функции, развиване в ред на Абел с интегрална добавка.

Теорема за конусите (3)

Многобройни приложения на теоремата за конусите са посочени в доклад на проф. Тагамлицки на Българска математическа сесия през 1956 г.

Резюме на доклада

- Неразложимите елементи и техните приложения. В: Т. Генчев, И. Проданов, Д. Скордев, И. Тодоров и В. Чакалов (съст.). Ярослав Тагамлицки – учен и учител. София, Наука и изкуство, 1986, с. 106–108 (в сборника с резюмета от 1956 г. е на руски и на немски).

Около 1956–1957 г. Тагамлицки разбира, че теоремата за конусите може да се получи като следствие от теоремата на Крейн и Милман.

ГОДИШНИК НА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ФАКУЛТЕТ
ТОМ XLVII, КН. I, ЧАСТ I, (МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА) ГОДИНИ 1950/51—1951/52
ANNUAIRE DU FACULTÉ DES SCIENCES — PHYSIQUE ET MATHÉMATIQUES
TOME XLVII, LIVRE I, PARTIE II (MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE)
ANNES 1950/51—1951/52

ВЪРХУ ГЕОМЕТРИЯТА НА КОНУСИТЕ В ХИЛБЕРТОВИТЕ ПРОСТРАНСТВА

От Я. Тагамлицки

Нека H е едно линейно[1] пространство, в което е дефинирано скаларно[2] произведение, приемащо само реални стойности и удовлетворяващо на обикновените изисквания. Такова пространство H ние ще наричаме Хилбертово пространство в широк смисъл (за разлика от обикновено разглежданите Хилбертови пространства, така да се каже в тесен смисъл, при които се поставя още допълнителното изискване за пълнота относно силната сходимост (вж. например Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, Теория линейных операторов, Москва — Ленинград, 1950, стр. 15).

Една съвкупност R от елементи r на H се нарича конус, когато при всички неотрицателни стойности на t имаме $tr \in R$. Един конус R ние ще наричаме обикновен, когато може да се намери такъв елемент n от H, за който $(n, r) > 0$ всеки път, когато $r \in R$ и $r \neq 0$.

Един конус R се нарича силно компактен, когато от всяка ограничена по норма[3] редица

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

от елементи, принадлежащи на R, може да се избере силно[4] сходяща подредица, границата на която принадлежи на R.

Един конус R се нарича силно затворен, когато границата на всяка силно сходяща редица от елементи, принадлежащи на R, също принадлежи на R.

Един конус R се нарича изпъкнал, когато при всеки избор на a и b от R имаме $a + b \in R$.

---

[1] Това значи, че елементите на H могат да се събират помежду им и да се умножават с реални числа, като при това са изпълнени обикновените изисквания за дистрибутивност, асоциативност и пр.

[2] Това значи, че на всеки два елемента a и b от H е съпоставено по едно реално число (a, b), удовлетворяващо следните изисквания:

1. $(a, b) = (b, a)$ при всички $a \in H$ и $b \in H$.

2. $(\alpha a + \beta b, c) = \alpha(a, c) + \beta(b, c)$ при всички $a \in H$, $b \in H$, $c \in H$, каквито и да бъдат реалните числа α и β.

3. $(a, a) \geq 0$ при всяко $a \in H$, като равенството се достига само при $a = 0$.

[3] Под норма $\| a \|$ на един елемент a от H се разбира $\sqrt{(a, a)}$.

[4] Нека $s \in H$ и $s_n \in H$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Казваме, че редицата $\{s_n\}$ силно клони към s, когато $\lim_{n \to \infty} (s_n - s, s_n - s) = 0$.

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИ ФАКУЛТЕТ
ТОМ 48, 1953/54, КН. 1 (МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА), Ч. I
ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA
FACULTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES
T. 48, 1953/54, LIVRE 1 (MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE), PARTIE I

ВЪРХУ ЕДНО ОБОБЩЕНИЕ НА ПОНЯТИЕТО ЗА НЕРАЗЛОЖИМОСТ

Я. Тагамлицки

Понятието за неразложимост спада към основните понятия в теорията на числата и алгебрата, но се използува и в други области на математиката. Доколкото ни е известно, това понятие е въведено в геометрията от Минковски [1]. В по-ново време понятието за неразложимост се среща в работите на А. Г. Пинскер [3], Б. С. Над [4], И. М. Гельфанд [5, 11], Д. А. Райков [5, 11], Н. Н. Боголюбов [6, 7, 10], Н. М. Крылов [6, 7], М. Г. Крейн [2, 8, 9], Д. П. Мильман [8, 12], С. Г. Крейн [9, 10], М. А. Рутман [12], Н. Бурбаки [13] и др. В няколко от нашите последни публикации [14] ние се стремяхме да въведем това понятие по систематичен начин в някои въпроси от класичния анализ. За тази цел ние разработихме един общ метод, който приложихме към позитивната проблема за моментите и други сродни въпроси. От досегашните ни изследвания обаче не се вижда дали този метод е приложим и към съответните общи (не непременно позитивни) проблеми, каквато е например проблемата за моментите относно функция с ограничена вариация и пр. В настоящата работа ние ще дефинираме понятието неразложимост по такъв начин, че да обхванем проблеми и от този вид.

* * *

Ще казваме, че една съвкупност K е конус, ако на всеки неин елемент x и на всяко неотрицателно* число λ е съпоставен един елемент λx от K, като при това са изпълнени обичайните условия:

1) $1 x = x$ при всяко x от K;

2) $0 x = 0 y$ при всеки избор на x и y от K;

3) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x$ при всяко x от K и при всички неотрицателни стойности на λ и μ;

4) ако λ и μ са неотрицателни числа, ако $\lambda \neq \mu$ и ако $\lambda x = \mu x$, където $x \in K$, то $x = 0 x$.

Произведението $0 x$ ще означаваме кратко със символа 0.

Ще казваме, че един конус K е изпъкнал, ако в него е дефинирана сума на всеки два негови елемента, като при това са изпълнени изискванията:

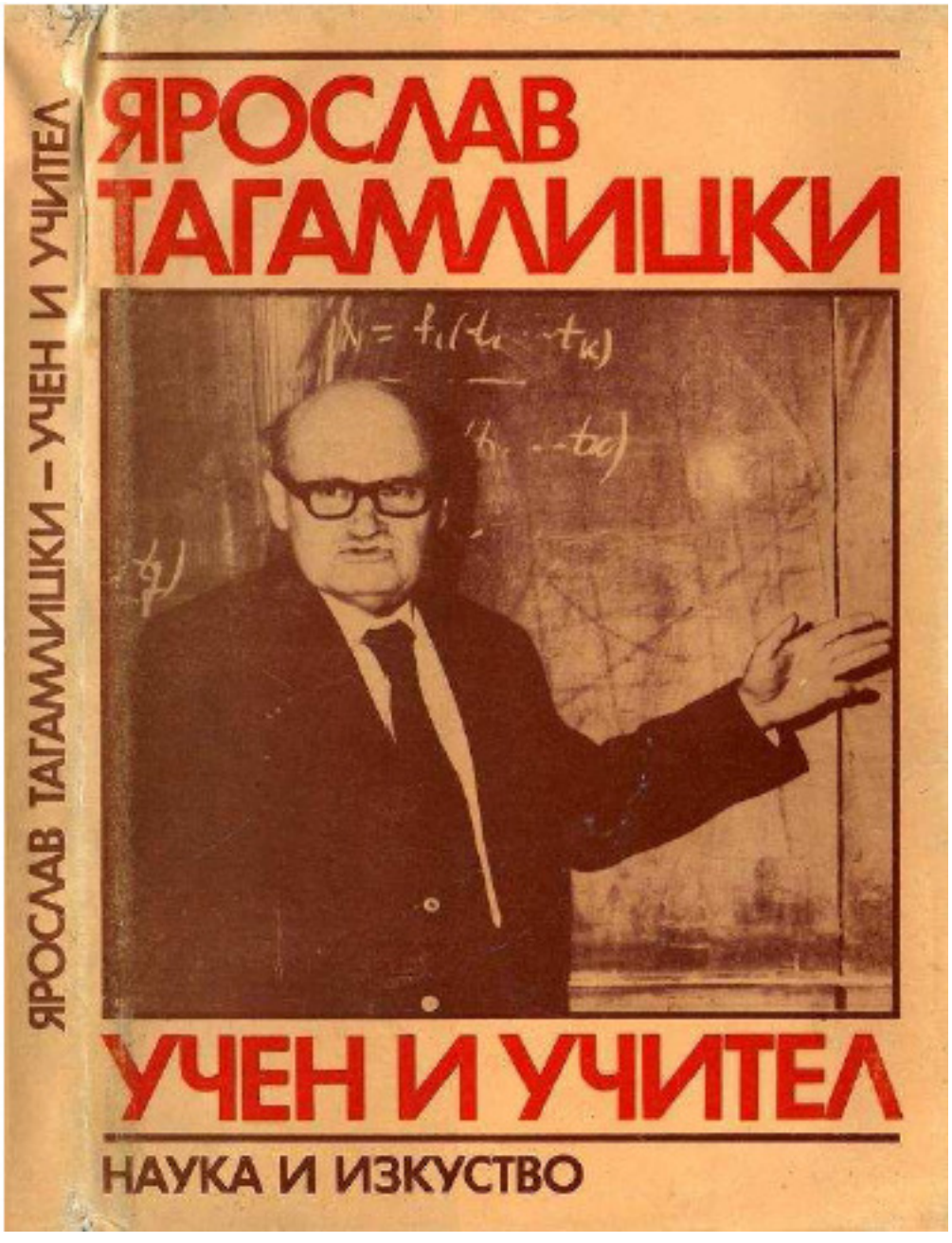
1) ако $x \in K$ и $y \in K$, то $x + y = y + x$;

2) ако $x \in K$, $y \in K$, $z \in K$, то $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) ако $x \in K$, $y \in K$, $z \in K$ и $x + y = x + z$, то $y = z$;

---

* Вместо неотрицателни числа ние можем да си мислим елементите на коя да е комутативна полугрупа.



НЕРАЗЛОЖИМИТЕ ЕЛЕМЕНТИ И ТЕХНИТЕ ПРИЛОЖЕНИЯ*

проф. Ярослав Тагамлицки

Големите успехи на абстрактния функционален анализ отдавна получиха всеобщо признание. Все пак разпространено е мнението, че въпреки общността истинските ценности на математическата мисъл се съдържат в специалните въпроси на класическата математика, че класическите методи са достатъчни в рамките на класическата математика и че като правило абстрактните методи не дават нищо друго освен това, което вече е открито по друг начин.

Приблизително от 1948 г. ние се стремяхме да разработим такива методи в абстрактния функционален анализ, които биха могли да бъдат използувани системно и в областта на класическия анализ [1]**. Понятието екстремна точка на изпъкнало множество, въведено от Минковски [2] и използувано от С. Н. Бернщейн, Боголюбов, Крилов, Гелфанд, Райков, Б. Над и др., изглежда особено подходящо за тази цел. Известно е, че след важната теорема на Крейн и Милман [9] това понятие придоби голямо значение. Трябва да се отбележи обаче, че теоремата на Крейн и Милман е доказана с помощта на теоремата на Цермело. Големите възможности на метода на екстремните елементи в друго направление на класическия анализ бяха изяснени в забележителната работа на П. Розенблум [3].

* Превод на „Неразложимые елементы и их приложения“ — резюме на доклада на Я. Тагамлицки, изнесен на международната математическа конференция, състояла се в София през 1956 г. (Вж. „Краткое содержание секционных докладов Болгарской математической сессии, С., 27. VIII — 3. IX. 1956“, издадено от БАН.) Преводът е на Т. Генчев. — *Бел. съст.*

** Номерата в средните скоби се отнасят за литературата в края на статията.— *Бел. ред.*

Нашите изследвания се базират на следната теорема [4], която са доказва без помощта на трансфинитна индукция и без теоремата на Цермело:

Ако регулярният* конус K е компактен относно някаква норма $P(x)$ и съдържа ненулеви елементи, то той съдържа и неразложими ел менти, т. е. такива ненулеви елементи f, за които от $f=g+h$, $g\in K$, $h\in K$ и $P(f)=P(g)+P(h)$ следва, че g и h са колинеарни и еднопосочни. По-нататък нека някакъв изпъкнал и компактен относно нормата $Q(x)$ конус L се съдържа в K. В такъв случай, ако всичките неразложими елементи f на конуса K лежат в L и удовлетворяват условието $Q(f)\leqq P(f)$, то конусите съвпадат и $Q(x)\leqq P(x)$ за всяко $x\in K$.

Тази теорема ще наричаме накратко теорема за конусите. Приложенията ще разпределим по следния начин:

1. Доказателства на известни теореми.

Следващите теореми се доказват по подобен начин с помощта на теоремата за конусите: теоремата на Ф. Рис за линейните функционали в $C[a, b]$ заедно с нейното уточнение, отнасящо се до позитивните функционали; общата теорема на Хаусдорф за моментите заедно с нейното уточнение в случая на позитивни моменти; теоремите на Хамбургер и Стилтес за моментите; теоремата на Ф. Рис за моментите; теоремата на Бохнер за интегралите на Фурие и теоремата на Крамер; теоремата на Блашке — Пик за изпъкналите функции и нейните обобщения за изпъкналост от произволен ред; теоремата на Бернщейн за абсолютно монотонните функции в краен интервал, неговата теорема за абсолютно монотонните функции в безкраен интервал, както и обобщението на Уидер. При това общата природа на тези теореми изпъква в нова светлина.

2. Теореми, открити с помощта на теоремата за конусите, на които са дадени и непосредствени доказателства:

Теоремата за разлагане на клас от функции в обобщен абелов ред [5], теоремата за интерполационния ред на Нютон с неотрицателни коефициенти [6], теоремата на Д. Добрев за полунормите в равнината.

3. Теореми, открити с помощта на теоремата за конусите, други доказателства на които засега не са известни:

Теоремата за абсолютно сходящите редове на Гончаров,

* За необходимите дефиниции вж. [4].

чиито възли растат монотонно; теоремата на Бл. Сендов за регулярно монотонните функции [7].

В заключение ще отбележим, че всеки нормиран конус с изброима координатна система винаги може по такъв начин да се допълни до компактен, че компактната му обвивка да удовлетворява всички условия на теоремата за конусите и следователно да притежава неразложими елементи. По този начин естествено стигаме до едно обобщение на понятието функция, като при това е възможно, както и при обобщението на Л. Шварц, да се диференцира безбройно много пъти. Тези обобщени функции, които ще наричаме псевдофункции, могат да се разглеждат като специални разпределения на Шварц или Микусински, при които нормите остават крайни. Псевдофункциите образуват линейни пространства, в които са в сила теоремата за конусите и подходящ аналог на теоремите на Хели. Функциите на Дирак и техните производни са неразложими елементи в съответните пространства [8]. Тези въпроси успешно допълни и развиха по-нататък Ив. Тодоров.

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Тагамлицки, Я. Годишник на Соф. университет. Т. 44, 1947 — 1948, 317 — 355.
2. Minkowski, H. Gesammelte Abhandlungen, B. II, 131 — 229.
3. Rosenbloom, P. Bull. de la Soc. Math. de France, T. 79, 1951, 1 — 58; T. 80, 1952, 182 — 215.
4. Тагамлицки, Я. Годишник на Соф. университет. Т. 48, 1953 — 1954, 69 — 84.
5. Тагамлицки, Я. Годишник на Соф. университет. Т. 46, 1949 — 1950, 385 — 443.
6. Тагамлицкий, Я. ДАН СССР. Т. 87, 1952, 183 — 186.
7. Сендов, Бл. ДАН СССР. Т. 110. 1956.
8. Тагамлицки, Я. Годишник на Соф. университет. Т. 49, 1954 — 1955, ч. I, 34 — 48 и Т. 49, 1954 — 1955, ч. II, 41 — 54.
9. Krein, M. und D. Milman. Studia Math. T. 9, 1940, 133 — 138.

D. Van Nostrand Company, Inc.
PUBLISHERS SINCE 1848
120 ALEXANDER ST. PRINCETON, N.J.

WILLIAM R. MINRATH
Vice President

September 20, 1962

Professor I. E. Tagamlitzki
Mathematical Institute of Bulgarian Academy of Sciences
Sofia
BULGARIA

Dear Professor Tagamlitzki:

I have received a most interesting letter from Professor Stone, who is Chairman of the Editorial Board of our University Series in Higher Mathematics. He informs me that you have much excellent material which could be published as a book in this Series. He also states that you have been considering publishing it in Bulgarian and in German.

Accordingly, I am writing to you at this time to tell you of our great interest in publishing your material in our University Series in Higher Mathematics. This could be done either before or after you publish in Bulgaria, and we would be happy to negotiate with you for the sale of other language rights, such as the German.

Professor Stone has mentioned a number of topics you plan to include, and has added that the book would be a generalized version of the Krein-Milman theorem and its applications to various problems.

If you are interested in my proposal, I should be happy to receive from you an outline, so that we can discuss the matter further with Professor Stone and the other members of the Editorial Board.

Yours sincerely,

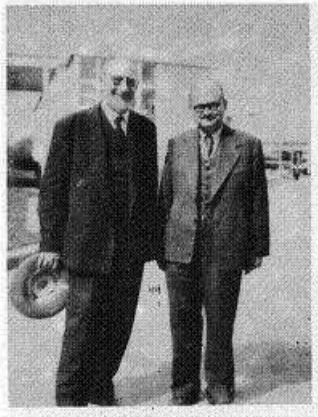
William R. Minrath

Vice President

WRM:adf



Я. Тагамлицки, А. Постников и А. Бицадзе на международната математическа конференция в София през септември 1956 г.



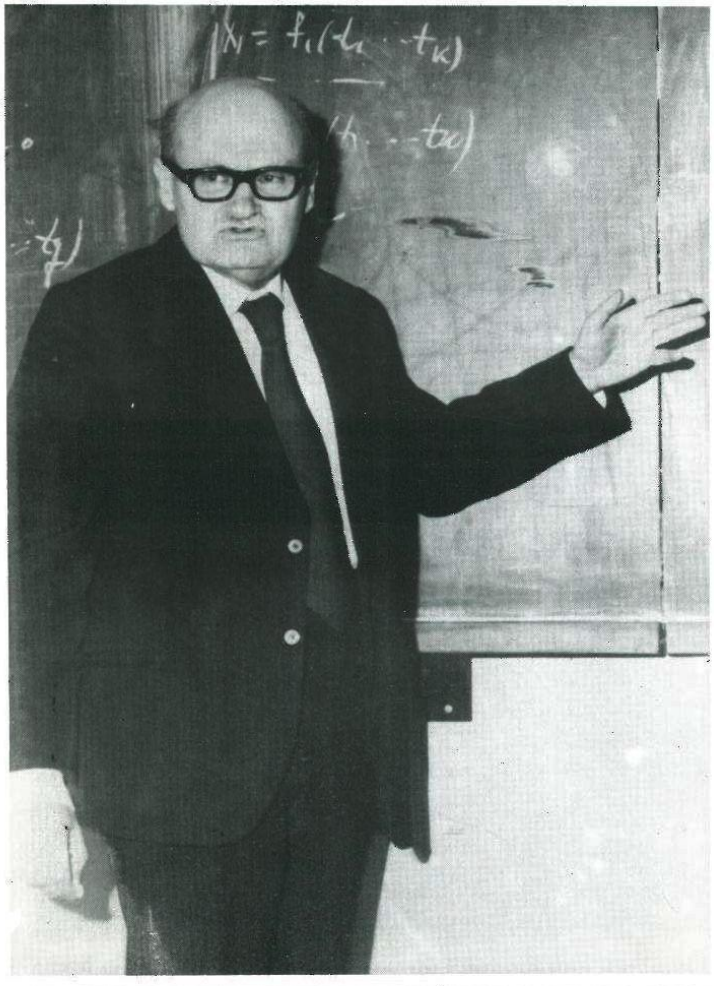
Я. Тагамлицки и Ф. Трикоми на конференция в Румъния през 1959 г.



Р. Нарджевски, Я. Тагамлицки, Я. Микусински и Л. Еренпрайс на конференция в Полша през 1960 г.



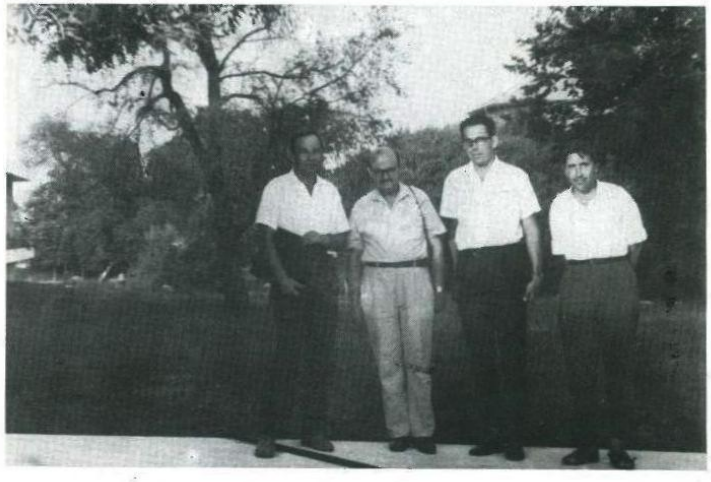
Р. А. Александрян, Ст. Терзиян, Ц. Г. Александрян, Я. Тагамлицки и В. М. Левитан на лятната школа по микролокален анализ през август 1982 г. в Горна баня



Я. Тагамлицки докладва на международната конференция по комплексен анализ — Варна, 1981 г.



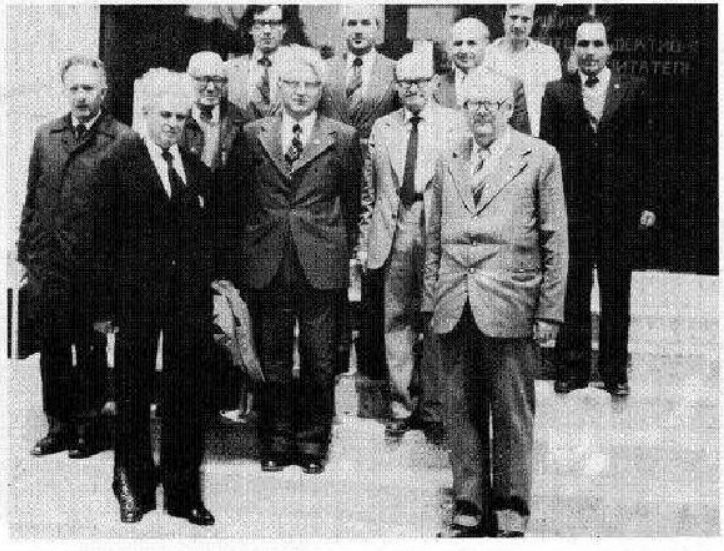
Ив. Проданов, Я. Тагамлицки, Бл. Сендов и Т. Боянов сред развалините на Троя (септември, 1971 г.)



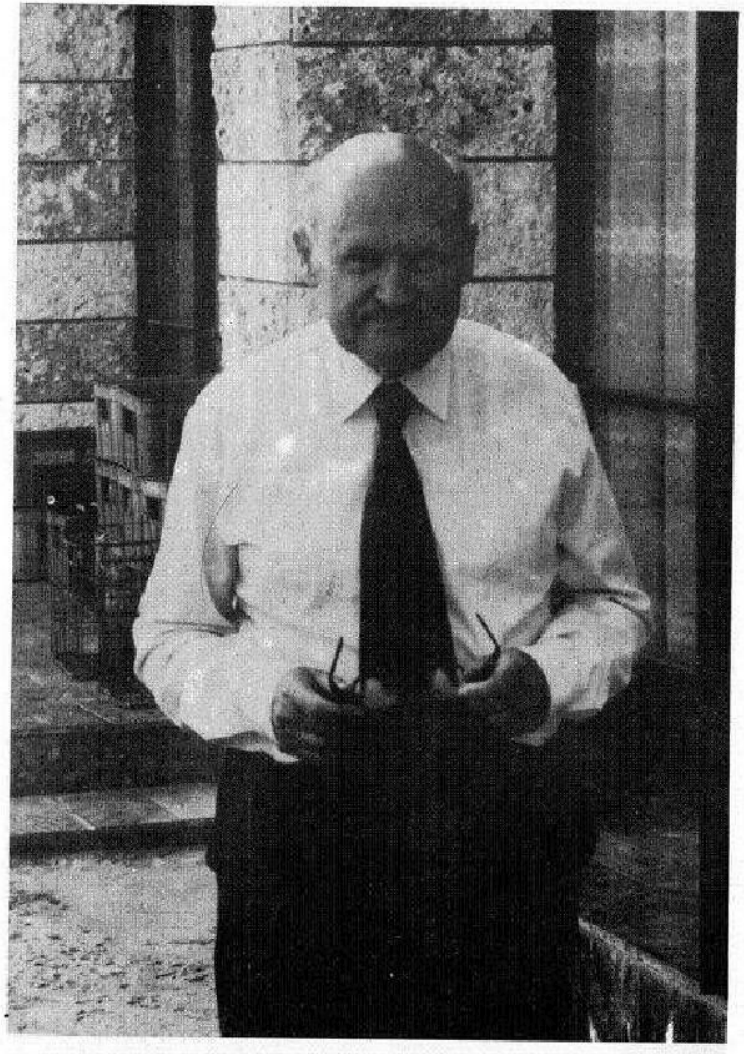
Т. Генчев, Я. Тагамлицки, Р. Денчев и Н. Стоев на Втория конгрес на българските математици — Варна, септември 1967 г.



А. Николов, А. Матеев, Я. Тагамлицки и Г. Тотов на една от пролетните конференции на българските математици. Снимката вероятно е от 1977 г.



Я. Тагамлицки през 1980 г. в Шумен на честването на 100-годишнината от рождението на акад. Кирил Попов



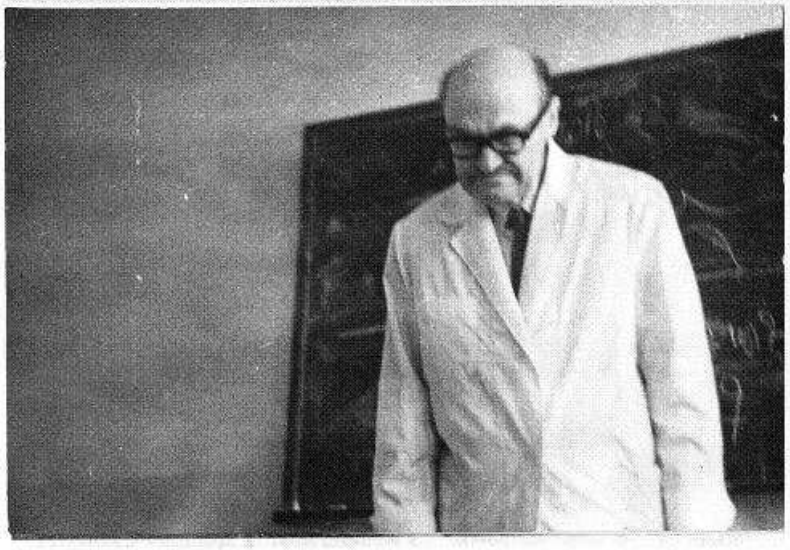
Я. Тагамлицки на международната конференция по комплексен анализ — Варна, 1981 г.



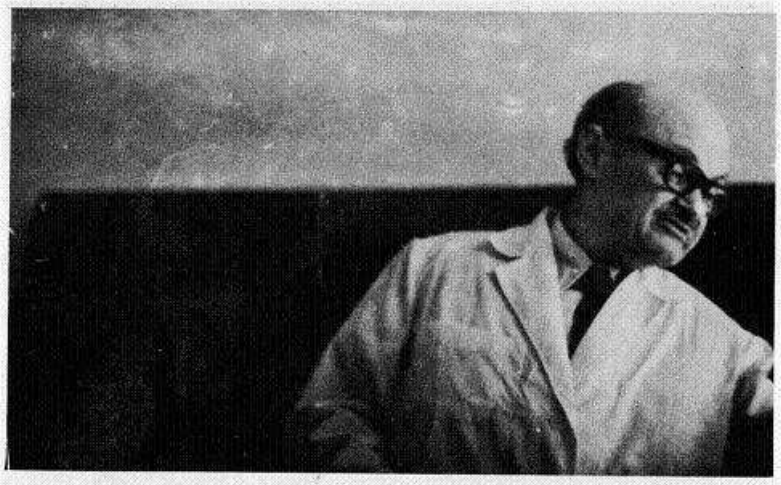
А. Матеев, Я. Тагамлицки, Б. Петканчин, Л. Илиев и Сп. Манолов на Осмата пролетна конференция на Съюза на математиците в България — Слънчев бряг, 1979 г.



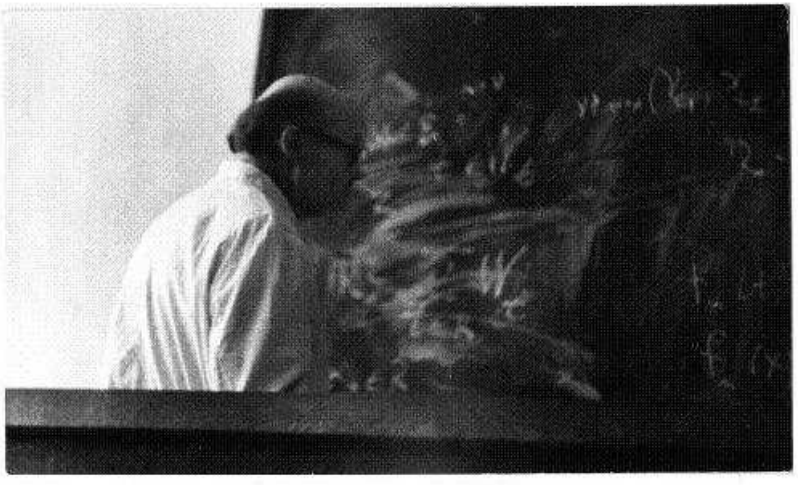
Я. Тагамлицки на юбилейната научна сесия в Шумен през октомври 1981 г. На първия ред отляво надясно: Д. Скордев, Ст. Троянски, Ал. Вътанов, Я. Тагамлицки и П. Русев

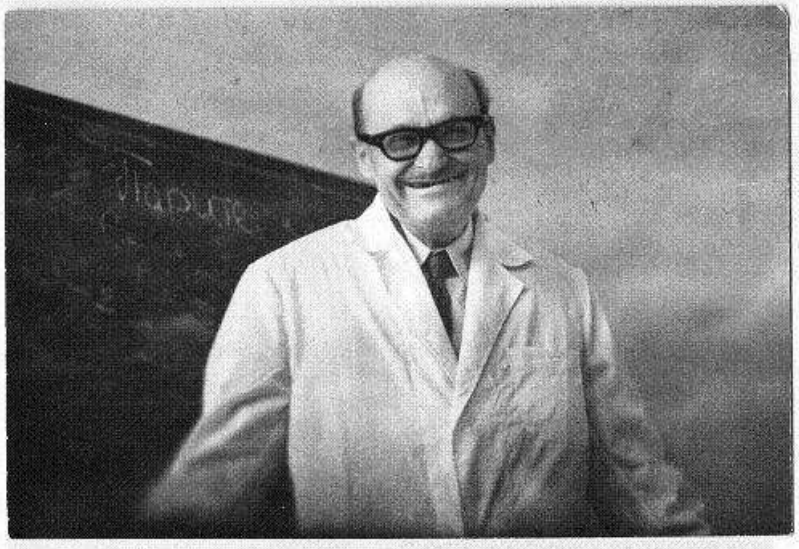


След обичайния поздрав лекцията може да започне. . . Снимката е от есента на 1975 г.



Лекциите на проф. Тагамлицки винаги бяха емоционални. . .Снимката е от есента на 1975 г.





Малка шега за добро настроение. . . и лекцията може да продължи. Снимката е от есента на 1975 г.

На вр. Мусала – 12 юли 1965 г.



Топологична индукция

Публикации за топологичната индукция

- Я. Тагамлицкий. О методе крайних точек. Studia Math., Ser. spec., 1963, no. 1, 129–130.
- Ja. A. Tagamlicki, M. Dehen. L'induction topologique. Sémin. Choquet, Fac. Sci., Paris, **10** (1970–1971), no. 1, 1/01–1/07.
- Y. Tagamlitzki. The principle of topological induction (prepared for publication by O. Kounchev). Annuaire Univ. Sofia, Fac. Math. Méc., **80** (1991), livre 1, 53–58.

Вместо компактно подмножество на линейно пространство с локално изпъкнала топология се разглежда произволно компактно топологично пространство заедно със съвкупност от отворени множества, удовлетворяваща определени условия. Теоремата на Крейн и Милман се получава, ако в качеството на такава съвкупност се вземат всички сечения на даденото компактно множество с изпъкнали отворени множества.

Други изследвания на проф. Тагамлицки

Обобщение на основните теореми за отделимост

- Върху принципа за отделимост в абелевите асоциативни пространства. Известия на Мат. инст., БАН, **7** (1963), 169–183.

Вместо за множества в линейни пространства става дума за такива в математически структури с подходящо понятие, обобщаващо понятието отсечка.

Сред резултатите на Тагамлицки в други абстрактни области на математиката можем да посочим например едно широко обобщение на теоремата на Тихонов за компактност на топологични произведения. Тагамлицки разработва и нови подходи към теорията на многообразията и към някои математически въпроси на теоретичната физика. Освен в областта на математиката извършва систематични проучвания и по въпроси от археологията, езикознанието и медицината. Предлага нови идеи и в учението за тоналностите в музиката.

ICM-82, Warsaw, 1983, Short communications (Abstracts)
Section 9: Real and functional analysis, Part I, p. 22

TAGAMLITZKI, T., (Sofia, Bulgaria)

THE DIAGONAL PRINCIPLE FOR GENERALIZED SEQUENCES

A class Σ of generalized sequences (i.e. of directed systems) is said to be stable if it contains every subsequence of every sequence which belongs to Σ.

THEOREM. Let Ω be a set of stable classes Σ and let $\{a_\alpha\}$ be a generalized sequence. If for every fixed Σ every subsequence $\{a_{\alpha_\beta}\}$ contains a subsubsequence $\{a_{\alpha_{\beta_\gamma}}\}$ that belongs to Σ then there is a generalized subsequence $\{a_{\alpha_\delta}\}$ which does not depend on Σ such that by any choice of $\Sigma \in \Omega$ the sequence $\{a_{\alpha_\delta}\}$ belongs to Σ for sufficiently large values of δ, i.e. there is some δ_o, which may depend on Σ, such that

$$\{a_{\alpha_\delta}\}_{\delta > \delta_o} \in \Sigma .$$

Текстове в годишните научни отчети на сектора по реален и функционален анализ

1972

- Едно обобщение на формулата на Стокс. 3 стр.
  [A generalization of Stoke's formula. 3 pages (in Bulgarian).]
- Върху принципа за максимум. 4 стр.
  [On the maximum principle. 4 pages (in Bulgarian).]

1973

- Приложение на една редукционна формула за интеграли върху многообразия към въпроса за неподвижните точки. 4 стр.
  [Application of a reduction formula for integrals on manifolds to the fixpoint problem. 4 pages (in Bulgarian).]

1974

- Върху уравненията на електродинамиката. 6 стр.
  [On the electrodynamics equations. 6 pages (in Bulgarian).]
- Галилеевият принцип за относителността и понятието сила. 6 стр.
  [Galileo's relativity principle and the force notion. 6 pages (in Bulgarian).]

1975

- Sur le principe du maximum. Mathematical Structures, Computational mathematics, Mathematical Modeling. Sofia, 1975, 471–477.
- A boundary value problem in linear spaces. 1975, 4 pages.

1976

- A boundary value problem in linear spaces. C. R. Acad. Bulg. Sci., **29**, no. 3, 1976, 307–309.
- Съществуване на ориентируема покриваща за многообразие без особености. 2 стр.
  [The existence of an orientable covering for a manifold without singularities. 2 pages (in Bulgarian).]

1977

- Върху общия диагонален принцип. 3 стр.
  [On the general diagonal principle. 3 pages (in Bulgarian).]
- Някои въпроси за преподаването на математиката в средното училище. Математика и математическо образование, Доклади на III прол. конф. на БМД, Бургас, 2–4.4.1974, С., БАН, 1976, 87–93.
  [Some issues in teaching mathematics in the secondary schools. Mathematics and Mathematical Education. Proc. of the 3rd Spring Conference of UMB, Burgas, 2–4.4.1974, Sofia, BAS, 1976, 87–93 (in Bulgarian).]

1978

- Глобални координатни системи в проективни пространства. 2 стр.
  [Global coordinate systems in projective spaces. 2 pages (in Bulgarian).]
- Тангенциални диференциални оператори върху гладки многообразия. 4 стр.
  [Tangential differential operators on smooth manifolds. 4 pages (in Bulgarian).]

1979

- Екстремуми на допустими функции върху многообразия с постоянна размерност. 3 стр.
  [Extrema of admissible functions on manifolds with a constant dimension. 3 pages (in Bulgarian).]
- Многообразия с постоянна размерност. 5 стр.
  [Manifolds with a constant dimension. 5 pages (in Bulgarian).]

1980

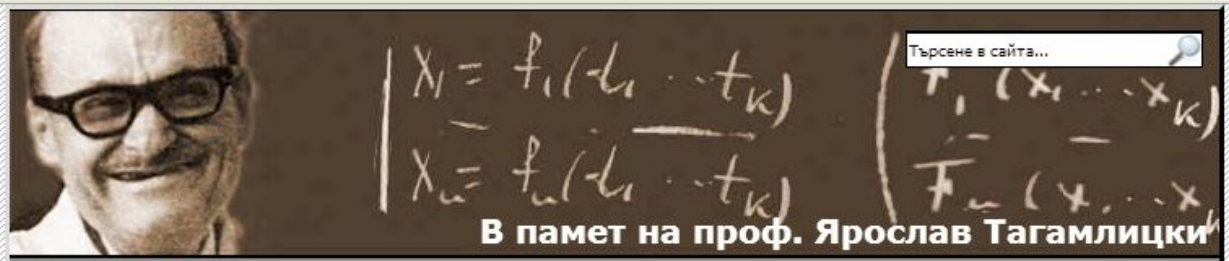
- Някои приложения на общия диагонален принцип. 5 стр.
  [Some applications of the general diagonal principle. 5 pages (in Bulgarian).]
- Уравнения на електродинамиката, които притежават галилеева инвариантност. 2 стр.
  [Electrodynamics equations possesing Galilean invariance. 2 pages (in Bulgarian)]

1981

- Глобална форма на оператора на Лаплас върху многообразия с постоянен ранг. 3 стр.
  [A global form of the Laplace operator on manifolds with a constant rank. 3 pages (in Bulgarian).]
- Обобщени уравнения на Коши-Риман за многообразия с постоянен ранг. 8 стр.
  [Generalized Cauchy-Riemann equations for manifolds with a constant rank. 8 pages (in Bulgarian).]

1982

- Диагонален принцип за обобщени редици. 7 стр.
  [A diagonal principle for generalized sequences. 7 pages (in Bulgarian).]



Биография
Трудове
Звания и отличия
Спомени за него
Неговата школа
Лекции по анализ
Неговият кръжок
Фотоалбум
Неговият глас
Фолклор
Връзки

НЕГОВИЯТ ГЛАС –

запис от лекции

Дисертации на аспирантите му (меню "Неговата школа")

ДИПЛОМАНТИ

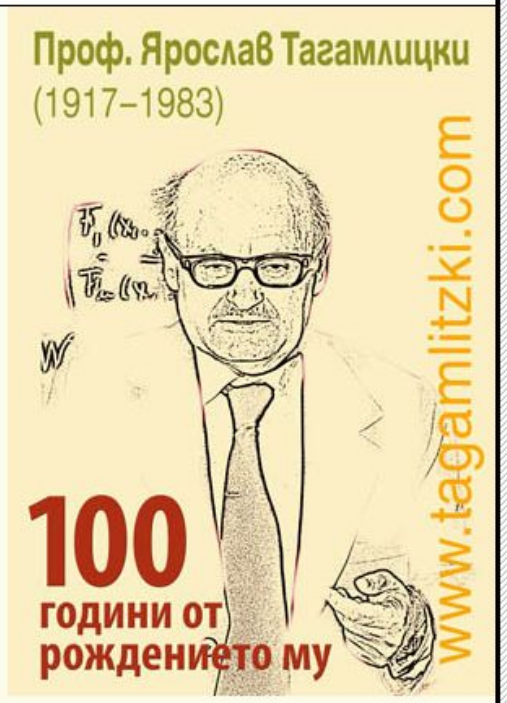
Негови дипломанти и дипломните им

Юбилейна научна конференция "100 години от рождението на проф. Тагамлицки", 15-17 септември 2017 г., София (ФМИ)

Да си спомним за легендарния проф. Ярослав Тагамлицки, дългогодишен ръководител на Катедрата по математически анализ към Математическия факултет на Софийския университет

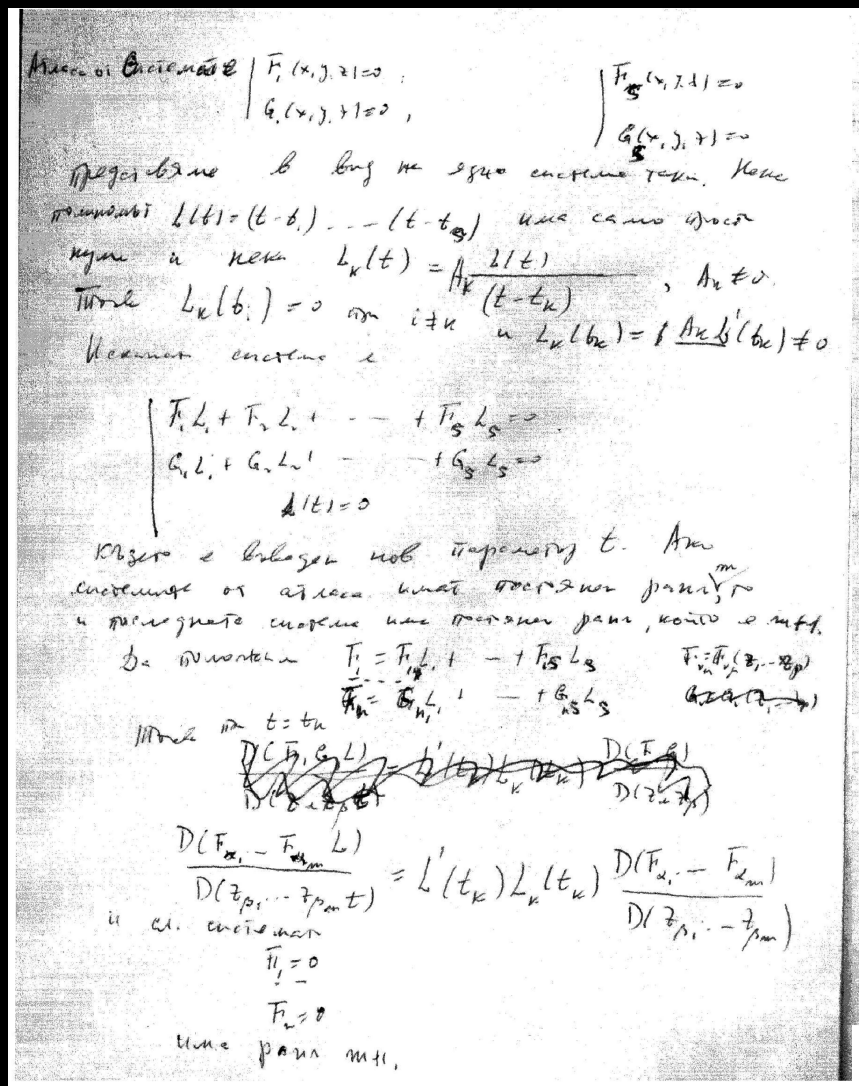
Всички негови трудове, с които разполагаме към днешна дата (с изключение на учебниците), са достъпни в раздел "Трудове" на този сайт.

Настоящият сайт представлява съвкупност от 4 почти идентични сайта, съответно на български, немски, английски и руски езици. Смяната на езика се управлява от избора на съответните знаменца горе вляво под банера.



Copyright (c) Ад Хок 2008-2015 (www.adhoc-bg.com). Всички права запазени. Последно обновяване: Tue Feb 14 2017 at 5:50:56pm

Из тетрадка с бележки относно многообразия



Ако $f = P(x,y) + iQ(x,y)$, където P и Q са реални функции на реални променливи, то по дефиниция

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}$$

f се нарича гладка, ако P и Q са гладки

Функция $f(z)$ на комплексната променлива z се нарича гладка, ако функцията $f = P + iQ$ на реалните променливи x и y е гладка

По дефиниция $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, където dx и dy са функции линейни.

Тогава $dz = dx + i\,dy$ и $d\bar{z} = dx - i\,dy$

и ат. $dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})$ и $dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$

и ат.

$$df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar{z}$$

По дефиниция

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Приносът му за научното израстване на млади хора (1)

В статията си „Моят учител професор Ярослав Тагамлицки“ акад. Иван Тодоров пише за проф. Тагамлицки следното:
„... той още от първите седмици на първия семестър издирваше всред тълпата от мераклии за диплома в аудиторията малкото истински способни, за да им даде възможност да растат.“
И по-нататък:
„Ние не си давахме сметка за скромността на названието *кръжок* (вместо по-претенциозното „семинар“) *по диференциално и интегрално смятане* — по името на учебния предмет за студентите от първи и втори курс (не по функционален анализ — съвременната област на математиката, в която ни въвеждаше нашият учител). В началото на петдесетте години нашият факултет не беше разглезен от обилие на спецкурсове и семинари и кръжокът на проф. Тагамлицки, както и неговите лекции по функционален анализ (които всяка година бяха различни) бяха притегателен център за любознателни студенти и млади асистенти.“

Приносът му за научното израстване на млади хора (2)

От `http://www.tagamlitzki.com/bg/school.html`:
„... Тагамлицки в началото на 50-те основава прочутия си кръжок, през който като асистенти, аспиранти, демонстратори и студенти преминават най-ярките представители на българската математическа мисъл от втората половина на 20 в.

Кръжочници

Невъзможно е да се изброят всички участвали в кръжока на Тагамлицки през десетилетията, поради което се ограничаваме само с по-известните имена от първите десетина години след създаването на кръжока. В работата му през този период вземат участие (в азбучен ред по малко име):
Апостол Обретенов, Благовест Сендов, Боян Пенков, Владимир Александров, Владимир Лубих, Владимир Чакалов, Димитричка Шопова, Димитър Добрев, Димитър Скордев, Дойчин Дойчинов, Емануил Димитров, Иван Димовски, Иван Проданов, Иван Райчинов, Иван Тодоров, Николай Стоев, Николай Хадживанов, Станчо Димиев, Тодор Генчев и др.“

Jaroslav Tagamlitski - The Ma...
www.genealogy.ams.org/id.php?id=81491
67%
Search

Mathematics Genealogy Project

Home
Search
Extrema
About MGP
Links
FAQs
Posters
Submit Data
Contact
Mirrors
Donate

A service of the NDSU Department of Mathematics, in association with the American Mathematical Society.

Jaroslav A. Tagamlitski

Dr. rer. nat. Universität Leipzig 1943

Dissertation: *Zum allgemeinen Kreisnormierungsprinzip der konformen Abbildung*

Mathematics Subject Classification: 30—Functions of a complex variable

Advisor: Paul Koebe
Advisor 2: Bartel Leendert van der Waerden

Students:
Click here to see the students listed in chronological order.

Name	School	Year	Descendants
Boyadzhiev, Khristo	University of Sofia	1978	
Chakalov, Vladimir	University of Sofia	1957	
Genchev, Todor	University of Sofia	1969	1
Ljubenova, Elena	University of Sofia	1979	
Nguyen, Minh Thai	University of Sofia	1977	
Prodanov, Ivan	University of Sofia	1967	12
Skordev, Dimiter	University of Sofia	1967	15
Tsanov, Vasil	University of Sofia	1978	

According to our current on-line database, Jaroslav Tagamlitski has 8 students and 36 descendants.
We welcome any additional information.

If you have additional information or corrections regarding this mathematician, please use the update form. To submit students of this mathematician, please use the new data form, noting this mathematician's MGP ID of 81491 for the advisor ID.

Search | About MGP | Links | FAQs | Posters | Submit Data | Contact

The Mathematics Genealogy Project is in need of funds to help pay for student help and other associated costs. If you would like to contribute, please donate online using credit card or bank transfer or mail your tax-deductible contribution to:

Mathematics Genealogy Project
Department of Mathematics
North Dakota State University
P. O. Box 6050
Fargo, North Dakota 58108-6050

Преподавателска дейност

От 1948 г. до последните си дни Тагамлицки чете курса по диференциално и интегрално смятане за математици (дълго време и за физици). Съответният учебник има следните издания:

- Лекции по диференциално и интегрално смятане (1951) (циклостилно издание).
- Диференциално и интегрално смятане (1954, 1957).
- Диференциално смятане (1962, 1967, 1971, 1978).
- Интегрално смятане (1963, 1967, 1971, 1978).

Чел е специални курсове по интегрални уравнения, комбинаторна топология, редове на Фурие, интерполационни редове, теория на реалните функции, обобщени функции. Особено място заемат лекциите му по функционален анализ, които той чете в течение на повече от четвърт век.
Разработва оригинален метод за преподаване на елементи на диференциалното и интегралното смятане без използване на граничен преход (*Математика и физика*, 1973, №6, 6–8).

Реформа на образованието

ВЪРХУ МОДЕРНИЗИРАНЕТО НА МАТЕРИАЛА ПО МАТЕМАТИКА В СРЕДНИТЕ УЧИЛИЩА ЧРЕЗ ВЪВЕЖДАНЕ НА ЕФОДИКАТА

Я. ТАГАМЛИЦКИ (София)

Думата ефодика се употребява обикновено като съкратено наименование на съчинението на Архимед «Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος», в което той излага един нов за онова време метод. С помощта на този метод Архимед е направил множество открития и, по-специално, е намерил обема на кълбото. Обаче разсъжденията, с които той си е служил, не представляват доказателства. Поради това Архимед е давал на откритите с помощта на неговия метод теореми и редовни доказателства, които почиват върху аксиомата на Евдокс. Най-многобройни и най-дълбоки приложения на тази аксиома в древността се дължат на Архимед, поради което много математици сега я наричат аксиома на Архимед.

Тук ние влагаме в думата «ефодика» друг смисъл. Както ще видим, върху аксиомата на Архимед може да се изгради напълно строго една съществена част от анализа. Това ни дава основание да гледаме на Архимед като на родоначалник на изследвания от този род. Под ефодика ние ще разбираме частта от анализа, която ще опишем в следващите редове.

В ефодиката се изучават производни и интеграли. Тази част от анализа обаче се отличава от диференциалното и интегралното смятане, защото не използува никаква аксиома за непрекъснатост на съвкупността от числата, с които работи, а се ограничава с аксиомата на Архимед (според която съвкупността от целите положителни числа не е ограничена отгоре.) По такъв начин изучаването на тази дисциплина може дори да предхожда въвеждането на ирационалните числа, защото аксиомата на Архимед е валидна и в съвкупността на рационалните числа.

Ефодиката се отличава от диференциалното и интегрално смятане и по това, че не използува нито понятието граница, нито понятието непрекъснатост. В средното училище тези понятия не се усвояват задоволително от учениците главно поради това, че не могат да бъдат развити достатъчно и не получават подходящи приложения. Ефодиката ни освобождава от необходимостта да се занимаваме с тези понятия в средното училище. Обаче понятието производна се дефинира точно. Ефодиката е чувствително по-елементарна от диференциалното и интегрално смятане и е по-малка по обем, обаче възможностите за приложения, които тя ни открива както в самата математика, така и във физиката, са сравними с възможностите, които ни дава кой да е пълноценен курс по диференциално и интегрално смятане. На много от тези приложения е необходимо и понятието реално число, което може да бъде въведено допълнително.

Ефодиката се отличава съществено и от пропедевтиката на диференциалното и интегрално смятане, т. е. от традиционните форми на преподаването на тези въпроси в средното училище. Разликата се заключава в това, че ефодиката е една напълно строга математична наука, което не й пречи да бъде достъпна за средношколската младеж. При обичайните изложения на диференциалното и интегрално смятане в средното училище главните затруднения се явяват, когато искаме да докажем критерия за монотонност. В ефодиката обаче този въпрос се разглежда напълно строго и същевременно елементарно. С това, разбира се, се установява строго и основната теорема на интегралното смятане, защото ако производната на една функция е нула в един интервал, то тя е и монотонно растяща и монотонно намаляваща (и следователно е константа).

Вероятно учениците биха могли да усвоят успешно ефодиката, като се започне нейното преподаване от IX клас. Разбира се, за да може да се реши този въпрос окончателно, е необходимо да се направят съответни опити. Такъв опит беше направен тази година в летния лагер в село Говедарци, където се подбираха ученици и ученички за Националната математическа гимназия. Кандидатите бяха завършили VIII клас в различни училища на страната. Опитът показа, че учениците могат на тази възраст да усвоят успешно ефодиката при условие, че тя им се дава във форма, която е рационално разработена в методическо отношение. Въпреки този положителен резултат, ние все още не можем да направим окончателни изводи, защото опитът беше направен с деца, които вече бяха подбирани и които в по-голямата си част се отличаваха с подчертано трудолюбие. В случай обаче, че резултатът на опити, проведени и при нормални училищни условия, се окаже положителен, това ще открие възможност да се използуват производните и интегралите във физиката и в математиката още в средното училище. Това би било едно постижение от принципиално значение.

се -> не се В ефодиката ние се стремим към най-голяма общност. Ние изучаваме функции в някой интервал, които имат производна, удовлетворяваща условието на Липшиц. Обаче тази степен на общност е все пак много голяма. Тя ни дава много повече от това, което е необходимо за приложенията в средношколската математика и физика. Същевременно тази класа от функции, както ще видим, поради простотата си е пригодна за преподаванията в средното училище. За да дадем идея за съдържанието на ефодиката, ние ще разгледаме сега няколко въпроса по същество.

* * *

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в интервала $m \leqq x \leqq n$. Ще казваме, че тази функция е **нормална** в този интервал, ако при всеки избор на числото a от интервала $[m, n]$ функцията $f(a+h)$ на променливата h при $m \leqq a+h \leqq n$ може да се представи във вида

$$f(a+h) = p + qh + R,$$

където p и q не зависят от h и

$$|R| \leqq Ah^2,$$

където A е подходящо число, което не зависи нито от h, нито от a.

Лесно се доказва, че в това развитие p и q са определени еднозначно. По дефиниция полагаме

$$f'(a) = q.$$

Разбира се, рационалните функции са нормални във всеки затворен интервал, в който са дефинирани. Това обстоятелство ни дава възможност да разглеждаме много примери. След дефиницията на понятието нормална функция и на понятието производна се доказват теоремите за диференциране на сума, разлика, произведение, частно и функция от функция.

Главната теорема на ефодиката се формулира по следния начин:

Ако функцията $f(x)$ е нормална в интервала $m \leqq x \leqq n$ и $f'(x) \geqq 0$, то $f(x)$ е монотонно растяща в този интервал.

Доказателството на тази теорема се основава върху аксиомата на Архимед, според която съвкупността от целите положителни числа не е ограничена отгоре.

Доказателство. Нека x_1 и x_2 са две числа, които удовлетворяват неравенствата

$$x_1 < x_2, \quad m \leqq x_1 \leqq n, \quad m \leqq x_2 \leqq n.$$

От условието за нормалност следва

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)\,(x_2 - x_1) + R, \tag{1}$$

където

$$|R| \leqq A(x_2 - x_1)^2$$

при подходящ избор на константата A. От (1) получаваме

$$f(x_2) - f(x_1) \geqq -A(x_2 - x_1)^2, \tag{2}$$

защото

$$f'(x_1) \geqq 0, \quad x_2 - x_1 > 0, \quad R \geqq -A(x_2 - x_1)^2.$$

Делим интервала $[x_1, x_2]$ на две равни части. Прилагаме неравенството (2) към двойката точки $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$ и към двойката точки $\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]$. Това ни дава

$$f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqq -\frac{A}{4}(x_2 - x_1)^2,$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1) \geqq -\frac{A}{4}(x_2 - x_1)^2.$$

Като съберем тези неравенства, получаваме

$$f(x_2) - f(x_1) \geqq -\frac{A}{2}(x_2 - x_1)^2.$$

Ако приложим n пъти този резултат, ще получим при всички цели положителни стойности на n

$$f(x_2) - f(x_1) \geqq -\frac{A}{2^n}(x_2 - x_1)^2.$$

Искаме да докажем, че $f(x_2) - f(x_1) \geqq 0$. Да допуснем противното, т. е. че

$$f(x_2) - f(x_1) < 0.$$

Това ни дава

$$2^n \leqq \frac{A(x_2 - x_1)^2}{f(x_1) - f(x_2)}.$$

От друга страна, имаме $2^n > n$ и следователно

$$n \leqq \frac{A(x_2 - x_1)^2}{f(x_1) - f(x_2)}.$$

По такъв начин ние намерихме една горна граница на съвкупността от целите положителни числа, което противоречи на аксиомата на Архимед. С това доказателството е завършено.

Из доклада „Лекция и творчество“, изнесен от проф. Тагамлицки на прол. конф. на СМБ през 1978 г.

„Ако една дефиниция няма да се прилага, няма нужда да се дава. Такава дефиниция е празна, макар и да съществуват обекти, които удовлетворяват нейните условия. Когато искаме да въведем ново понятие, не бива да започваме от дефиницията, нито от пример, който трябва да установи, че условията на дефиницията са изпълними. Ние трябва да изхождаме от задача. Това ще ни осигури, че дефиницията поне не е празна. Такова едно изискване обаче е много малко, за да оправдае въвеждането на една дефиниция. Ние искаме да изучаваме само съществени дефиниции. Поради това трябва да изхождаме от задача, която е интересна.

Усвояването на една дефиниция е не само логически процес, но и психологически. Той има силно изразена емоционална страна. Поради това творческият момент в преподаването е от решаващо значение.“

Настоящата книга е посветена на
100-годишнината от рождението
на видния български математик
Ярослав Александров Тагамлицки
(11.IX.1917–28.XI.1983),
за когото преподаването
на математиката беше призвание,
следвано с изключително
чувство за отговорност
и забележително майсторство.

ISBN 978-954-07-4153-6
9 789540 741536
www.press-su.com
Цена 15 лв.

Ярослав Тагамлицки

ЗА ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

(из педагогическото наследство
на професор Тагамлицки)

Университетско издателство
„Св. Климент Охридски“

Съдържание

Предговор 5

Някои въпроси за преподаването на математиката в средното училище 9

Лекция и творчество 18

Един метод за изграждане на елементи от диференциалното и интегралното смятане без граничен преход 28

Нормални функции и производни 28
Примитивни функции на нормални функции 40
Обобщени обеми, лица и дължини 42
Елементарни функции 54
Дефиниция на функцията $\ln x$ 54
Дефиниция на функцията e^x за произволни стойности на x . . 60
Дефиниция на показателната функция a^x $(a > 0)$ за произволни стойности на x 62
Изследване на степенната функция x^b за положителни стойности на x и произволни стойности на b 63
Дефиниция на функцията $\operatorname{arctg} x$ за произволни стойности на x 64
Дефиниция на функцията $\operatorname{tg} x$ в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 68
Дефиниция на функциите $\sin x$ и $\cos x$ за всички стойности на x 69
Продължение на функцията $\operatorname{tg} x$ за произволни стойности на x, различни от $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ 75
Приблизително пресмятане на числото π 76
Допълнителни бележки на Д. Скордев 78

Методически указания за подпомагане самостоятелната работа по диференциално и интегрално смятане на студентите задочници по математика и физика 80

I. Какви предварителни знания са необходими? 80
II. За ролята на дефинициите 85
III. Какви са пътищата за съзнателното усвояване на една дефиниция? 90
IV. Как да обмисляме формулировките на теоремите? 93
V. Как да изучаваме доказателствата? 94
VI. Относно ролята на задачите 97

Из учебника по диференциално смятане 99

Обща формула на Тейлор 99
Отношение на два остатъчни члена 102
Задачи за напълно монотонни функции 104

Из учебника по интегрално смятане 106

Задачи за формулата на Уолис и за функцията Гама 106
Приблизително пресмятане на интеграли 112

YAROSLAV TAGAMLITZKI

SELECTED PAPERS

St. Kliment Ohridksi
University Press

CONTENTS

Preface 7
1. Zum allgemeinen Kreisnormierungsprinzip der konformen Abbildung 9
2. Functions satisfying certain inequalities on the real axis 31
3. Sur les suites vérifiant certaines inégalités 49
4. On sequences satisfying certain inequalities 52
5. On the integration of sequences of functions. 96
6. On absolutely convergent Dirichlet series. 100
7. On the absolutely convergent Laplace integral 105
8. Sur l'équation intégrale de Stieltjes 111
9. Sur la majoration de certaines transformées intégrales 114
10. Investigation of a class of functions 117
11. Sur une propriété de la fonction exponentielle 159
12. On certain applications of the general theory of partially ordered linear spaces 162
13. On functions whose derivatives satisfy certain inequalities 188
14. A research on the Abelian interpolation series 193
15. On a generalization of the Abelian series 250
16. On the geometry of the cones in Hilbert spaces 256
17. On the Newton interpolation series with nonnegative coefficients . . 282
18. Investigation of vectors indecomposable with respect to certain cones 286
19. On a generalization of the notion of indecomposability. 300
20. Cone completion and its application to the function notion generalization problem. Part I. 318
21. Cone completion and its application to the function notion generalization problem. Part II 346
22. Cone completion and its application to the function notion generalization problem. Part III 360
23. On a certain kind of Goncharov interpolation series and the related spaces and cones. 390
24. On some interpolation expansions of regular-monotone functions . . 406
25. Investigation of a class of generalized functions 421
26. On the extreme points method 498
27. On the separation principle in Abelian associative spaces 500
28. L'induction topologique 514
29. Sur le principe du maximum 520

30. A boundary value problem in linear spaces 528
31. A diagonal principle for generalized sequences and some of its applications. 532
32. The principle of topological induction 544
Y. A. Tagamlitzki (A short biographical note) 551
Acknowledgment 554

Поклон пред делото на професор Тагамлицки!