ω- Спектри на Структури

Стефан Вътев, Александра Соскова

ФМИ 2008
София

Преглед

- Спектри и ко-спектри
- Омега номерационни степени
- Омега спектри
- Омега ко-спектри
- Релативни спектри
- Минимални двойки
- Квазиминимална степен

Спектри на структури (Ричтър)

Дефиниция (Ричтър)

- $D^+(\mathfrak{B})$ - диаграмата на структурата $\mathfrak{B}$.
- Спектър на структурата $\mathfrak{A}$

$$\mathrm{DgSp}(\mathfrak{A}) = \{d_T(D^+(\mathfrak{B})) \mid \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}\}$$

- Казваме, че d е степен за $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{A})$, ако d е най-малката степен в $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{A})$

- Л. Ричтър [1981].
- Дж. Найт [1986].
- Аш, Джокуш, Дауни, Слеман, Сосков.

Номерация на структура

Нека $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}; R_1, \ldots, R_k, =, \neq)$ е изброима структура.

- Номерация f на $\mathfrak{A}$ е тотално изображение от $\mathbb{N}$ върху $\mathbb{N}$.
- за всяко $A \subseteq \mathbb{N}^a$ нека $f^{-1}(A) = \{\langle x_1 \ldots x_a \rangle : (f(x_1), \ldots, f(x_a)) \in A\}$.
- $f^{-1}(\mathfrak{A}) = f^{-1}(R_1) \oplus \cdots \oplus f^{-1}(R_k) \oplus f^{-1}(=) \oplus f^{-1}(\neq)$.

Спектри на Структури

Дефиниция

- Спектър на структурата $\mathfrak{A}$ е множеството

$$\mathrm{DS}(\mathfrak{A}) = \{d_e(f^{-1}(\mathfrak{A})) \mid f \text{ е номерация на } \mathfrak{A}\}.$$

Дефиниция

- Ко-спектър на $\mathfrak{A}$ е множеството

$$\mathrm{CS}(\mathfrak{A}) = \{b : (\forall a \in \mathrm{DS}(\mathfrak{A}))(b \leq a)\}.$$

Дефиниция

Нека $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_e$. $\mathcal{A}$ е затворено нагоре относно тотални степени, ако

$$\mathrm{a} \in \mathcal{A}, \mathrm{b} \text{ е тотална и } \mathrm{a} \leq \mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{b} \in \mathcal{A}.$$

Спектрите са затворени нагоре относно тотални степени.

- Общи свойства на затворените нагоре множества от степени.
- Специфични свойства:
  - Теорема за минимални двойки;
  - Теорема за квазиминимална степен.

ω-Номерационни Степени

$\mathcal{B} = \{\mathrm{B_n}\}_{n<\omega}$ е редица от множества.
Скок редица $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \{\mathcal{P}_n(\mathcal{B})\}_{n<\omega}$:

1. $\mathcal{P}_0(\mathcal{B}) = \mathrm{B_0}$
2. $\mathcal{P}_{n+1}(\mathcal{B}) = (\mathcal{P}_n(\mathcal{B}))' \oplus \mathrm{B_{n+1}}$

Дефиниция

За всеки две редици $\mathcal{A} = \{\mathrm{A_n}\}_{n<\omega}$ и $\mathcal{B} = \{\mathrm{B_n}\}_{n<\omega}$ казваме, че $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}$, ако $\mathrm{A_n} \leq_e \mathcal{P}_n(\mathcal{B})$ равномерно по n

Теорема (Сосков, Ковачев)

$\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}$, ако за всяко тотално множество X, ако $\mathrm{B_n} \leq_e \mathrm{X}^{(n)}$ равномерно по n, то $\mathrm{A_n} \leq_e \mathrm{X}^{(n)}$ равномерно по n

ω-Номерационни Степени

Да означим $A \uparrow \omega = \{A, \emptyset, \ldots, \emptyset, \ldots\}$.

Дефиниция

$$\mathcal{D}_1 = \{d_\omega(A \uparrow \omega) \mid A \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Твърдение

$$A \uparrow \omega \leq_\omega B \uparrow \omega \iff A \leq_e B$$

Твърдение

$$\mathcal{D}_T \cong \mathcal{D}_e^+ \subseteq \mathcal{D}_e \cong \mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_\omega$$

ω- Спектри на Структури

За всяко $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_e$ нека

$$co(\mathcal{D}) = \{b \mid b \in \mathcal{D}_\omega \ \& \ (\forall a \in \mathcal{D})(b \leq_\omega a)\}.$$

$$A \subseteq B \Rightarrow co(B) \subseteq co(A)$$

Дефиниция (Сосков)

ω-спектър на $\mathfrak{A}$ е множество
$DS(\mathfrak{A}) = \{d_e(f^{-1}(\mathfrak{A})) \mid f$ е номерация на $\mathfrak{A}\}$

Дефиниция

ω-ко-спектър на $\mathfrak{A}$ е множеството $CS(\mathfrak{A}) = co(DS(\mathfrak{A}))$

Твърдение

За произволно непразно множество $\mathcal{A} \subseteq D_e$ и всяко естествено число $k > 0$, съществува номерационна степен b такава, че $co(\mathcal{A}) \subset co(\mathcal{A}_{b,k})$, където:

$$\mathcal{A}_{b,k} = \{a : a \in \mathcal{A} \ \& \ b \leq_e a^{(k)}\}.$$

Следствие

Нека $k > 0$. Съществува $b \in DS_k(\mathfrak{A})$, такова че $CS(\mathfrak{A}) \neq co(\{a \mid a \in DS(\mathfrak{A}) \ \& \ a^{(k)} = b\})$

ω- Спектри на структури относно $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n<\omega}$

Нека $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n<\omega}$ е фиксирана редица от множества. Номерацията f на $\mathfrak{A}$ е допустима относно редицата $\mathcal{B}$, ако за всяко n,

$$f^{-1}(B_n) \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)} \text{ равномерно по } n$$

$\mathcal{E}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ - класът на всички допустими номерации.

Дефиниция

ω- спектър на структурата $\mathfrak{A}$ относно $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n<\omega}$ е множеството

$$DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) = \{d_e(f^{-1}(\mathfrak{A})) \mid f \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})\}$$

Лема

Ако F е тотално множество, $\mathrm{f} \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ и $\mathrm{f}^{-1}(\mathfrak{A}) \leq_{\mathrm{e}} \mathrm{F}$, тогава съществува допустима номерация $\mathrm{g} \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, такава че

1. $\mathrm{g}^{-1}(\mathfrak{A}) \equiv_{\mathrm{e}} \mathrm{F} \oplus \mathrm{f}^{-1}(\mathfrak{A}) \equiv_{\mathrm{e}} \mathrm{F}$;
2. $\mathrm{g}^{-1}(\mathrm{B}) \leq_{\mathrm{e}} \mathrm{F} \oplus \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{B})$, за всяко $\mathrm{B} \subseteq \mathbb{N}$.

Следствие

$\mathrm{DS}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ е затворен нагоре относно тотални е-степени.

Дефиниция

k-ти скок ω-спектър на $\mathfrak{A}$ относно $\mathcal{B}$

$$DS_k(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) = \{a^{(k)} \mid a \in DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})\}.$$

Твърдение

$DS_k(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ е затворен нагоре относно тотални степени.

Ко-спектри

За всяко $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_e$ нека
$co(\mathcal{D}) = \{b \mid b \in \mathcal{D}_\omega \ \& \ (\forall a \in \mathcal{D})(b \leq_\omega a)\}$.

Дефиниция

ω-ко-спектър на $\mathfrak{A}$ относно $\mathcal{B}$ е множеството

$$CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) = co(DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B}))$$

Дефиниция

k-ти ω-ко-спектър на $\mathfrak{A}$ относно $\mathcal{B}$ е множеството

$$CS_k(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) = co(DS_k(\mathfrak{A}, \mathcal{B})).$$

Σ_n^+ формули

1. Елементарна Σ_0^+ формула със свободни променливи измежду $W_1, \ldots, W_r$ е $\exists\overline{Y}\Phi(\overline{W}, \overline{Y})$, където Φ е крайна конюнкция от атомарни формули от $\mathcal{L} \cup \{P_0\}$;
2. Σ_n^+ формула е с.е. дизюнкция от елементарни Σ_n^+ формули в езика $\mathcal{L} \cup \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$;
3. Елементарна Σ_{n+1}^+ формула е формула от вида $\exists\overline{Y}\Phi(\overline{W}, \overline{Y})$, където Φ е крайна конюнкция от атоми от вида $P_{n+1}(Y_i)$ или $P_{n+1}(W_i)$ и Σ_n^+ формули или отрицания на Σ_n^+ формули със свободни променливи измежду $\overline{W}, \overline{Y}$ в езика $\mathcal{L} \cup \{P_0, \ldots, P_n\}$.

Нормална форма

Дефиниция

Редицата $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$ е формулно k-определима в $\mathfrak{A}$ относно $\mathcal{B}$, ако съществува рекурсивна редица от формули $\{\Phi^{\gamma(n,x)}(W_1, \ldots, W_r)\}_{n,x<\omega}$, такава че за всяко n, $\Phi^{\gamma(n,x)}$ е Σ^+_{n+k} формула и елементи $t_1, \ldots, t_r$ на $\mathbb{N}$, такива че:

$$x \in A_n \iff (\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \models \Phi^{\gamma(n,x)}(W_1/t_1, \ldots, W_r/t_r)$$

Теорема

Редицата $\mathcal{A}$ е формулно k-определима в $\mathfrak{A}$ относно $\mathcal{B}$, т. т. к. $d_\omega(\mathcal{A}) \in CS_k(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Общи свойства на затворени нагоре множества от степени

Твърдение

$$CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) = co(\{a \mid a \in DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \ \& \ a \text{ е тотална е-степен}\}).$$

Твърдение

Съществува $c \in DS_n(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, такава че:

$$CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \neq co(\{a \mid a \in DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \ \& \ a^{(n)} = c\}).$$

Релативни спектри (1)

Номерацията f на $\mathfrak{A}$ е допустима относно $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$, ако за всяко $n \leq k$,

$$f^{-1}(\mathfrak{A}_n) \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A})^{(n)}$$

Дефиниция

Релативния спектър на структурата $\mathfrak{A}$ относно структурите $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ е множеството

$$RS(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \{d_e(f^{-1}(\mathfrak{A})) \mid f \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_n)\}$$

Твърдение (ко-спектър в $\mathcal{D}_e$)

$CRS_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) = CRS_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k), k \leq n$

Релативни спектри в (2)

Дефиниция

Релативния ω-ко-спектър на структурата $\mathfrak{A}$ относно структурите $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$ е множеството

$$\mathrm{CRS_k}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n) = \mathrm{co}(\mathrm{DS_k}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n))$$

Твърдение

Съществуват структури $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ такива, че $\mathrm{CS}(\mathfrak{A}) \neq \mathrm{CRS}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$

Понятието за ω-спектър е обобщение на релативния ω-спектър, защото $\mathrm{RS}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n) = \mathrm{DS}(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, където $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$, $B_0 = \emptyset$, $B_k = D(\mathfrak{A}_k)$ за $0 < k \leq n$ и $B_k = \emptyset$ за всяко $k > n$.

Идеали

Дефиниция

Нека I е идеал в $\mathcal{D}$, ако

1. $x \in I$, тогава за всяко $y \leq_\omega x$, то $y \in I$;
2. $x, y \in I \Rightarrow x \oplus y \in I$;

Теорема (Сосков)

За всеки изброим идеал I в $\mathcal{D}_e$съществува структура $\mathfrak{A}$ такава, че $I = CS(\mathfrak{A})$

Теорема (Ганчев)

Нека I да бъде изброим идеал в $\mathcal{D}_\omega$. Тогава съществуват тотални степени $f, g \in \mathcal{D}_1$ така, че
$I = I(f) \cap I(g) \Rightarrow I^{(n)} = I(f^{(n)}) \cap I(g^{(n)})$

Теорема за минимална двойка

Теорема

За всяка структура $\mathfrak{A}$ и за всяка редица $\mathcal{B}$, съществуват тотални e-степени f и g в $DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$, такива че за всяка ω-номерационна степен a и $k \in \mathbb{N}$:

$$a \leq_\omega f^{(k)} \ \& \ a \leq_\omega g^{(k)} \Rightarrow a \in CS_k(\mathfrak{A}, \mathcal{B}) \ .$$

Следствие

$CS_k(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$ е най-малкият идеал съдържащ всички k-ти ω-скокове на елементи на $CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Квазиминимална степен

Сосков Една e-степен q_0 е квазиминимална относно $DS(\mathfrak{A})$, ако

- $q_0 \notin CS(\mathfrak{A})$;
- за всяка тотална e-степен a: $a \geq q_0 \Rightarrow a \in DS(\mathfrak{A})$ и
- за всяка тотална e-степен a: $a \leq q_0 \Rightarrow a \in CS(\mathfrak{A})$.

Теорема

За всяка структура $\mathfrak{A}$ и за всяка редица $\mathcal{B}$, съществува $F \subseteq \mathbb{N}$, такова че $q = d_\omega(\{F, \emptyset, \emptyset, \dots\})$ и:

1. $q \notin CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$;
2. Ако a е тотална e-степен и $a \geq_\omega q$, то $a \in DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$
3. Ако a е тотална e-степен и $a \leq_\omega q$, то $a \in CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Квазиминимална степен

Сосков Една e-степен q_0 е квазиминимална относно $DS(\mathfrak{A})$, ако

- $q_0 \not\in CS(\mathfrak{A})$;
- за всяка тотална e-степен a: $a \geq q_0 \Rightarrow a \in DS(\mathfrak{A})$ и
- за всяка тотална e-степен a: $a \leq q_0 \Rightarrow a \in CS(\mathfrak{A})$.

Теорема

За всяка структура $\mathfrak{A}$ и за всяка редица $\mathcal{B}$, съществува $F \subseteq \mathbb{N}$, такова че $q = d_\omega(\{F, \emptyset, \emptyset, \dots\})$ и:

1. $q \not\in CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$;
2. Ако a е тотална e-степен и $a \geq_\omega q$, то $a \in DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$
3. Ако a е тотална e-степен и $a \leq_\omega q$, то $a \in CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$.

Въпроси

1. Вярно ли е, че за всеки изброим идеал I съществува структура $\mathfrak{A}$ такава, че $I = CS(\mathfrak{A})$?
2. Вярно ли е, че за всеки изброим идеал I съществува структура $\mathfrak{A}$ и ω-редица $\mathcal{B}$ такива, че $I = CS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$?
3. За всяка структура $\mathfrak{A}$ и всяка редица $\mathcal{B}$, дали съществува структура $\mathfrak{B}$, такава че $DS(\mathfrak{B}) = DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$?

Заб: Съществуват структура $\mathfrak{A}$ и редица $\mathcal{B}$ такива, че $DS(\mathfrak{A}) \neq DS(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$

- Ganchev, H. Countable ideals of ω-enumeration degrees. submitted in J. Logic and Computation.
- Soskov I. N., Degree spectra and co-spectra of structures. Ann. Univ. Sofia, 96:45–68, (2003).
- Soskov, I. N., Kovachev, B. Uniform regular enumerations Mathematical Structures in Comp. Sci. 16 no. 5:901–924, (2006)
- Soskov, I. N. The ω-enumeration degrees, J. Logic and Computation 17, no. 6, 1193-1214 (2007)
- Soskov, I. N., Ganchev H. The jump operator on the ω-enumeration degrees. Ann. Pure Appl. Logic, to appear.

Soskova, A. A. Relativized degree spectra. J. Logic and Computation 17, no. 6, 1215-1233 (2007)