Изчислимост и спектри на структури

Александра Соскова

Софийски Университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по Математика и Информатика
Катедра Математическа Логика и Приложенията ѝ

24.11.2005 г.

Изчислими функции — понятия

Дефиниция

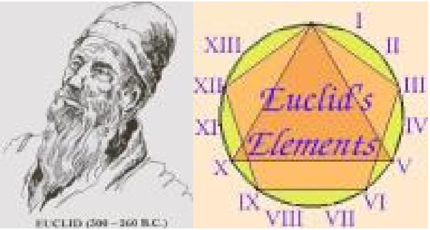
Изчислението, най-общо, е процес, при който от дадени обекти, по зададени правила (програми, алгоритми), чрез серия от стъпки получаваме резултат.

Дефиниция

Функциите, които могат да се определят с такива процеси, ще наричаме изчислими функции.

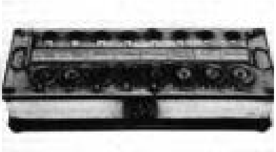
- Изчислимост над конструктивни обекти — естествени числа, думи в крайна азбука.
- Изчислимост над произволни обекти — абстрактна изчислимост.

Изчислими функции — началото



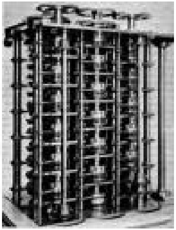
- Евклид (3в. пр.н.е.) — алгоритъм за НОД.
-  Ал - Хорезми (9в.) — думата "алгоритъм". Abu Jofar Mohammed ben Musa al Khorezmiy al Majusi al-Katrabbuli.

Изчислими функции — началото

- Блез Паскал (1642 г.) — първият цифров калкулатор за събиране.
-  Готфрид Лайбниц (1671 г.) — "Calculemus"(машина за умножение, деление, кореннуване)

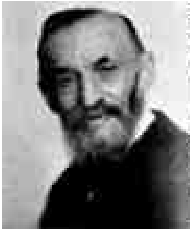
Изчислими функции — началото

- Чарлз Бабидж (1834) — аналитична машина.

- Дедекинд (1888) — дефинира функции с индукция ($m + n, m.n, m^n$).

Изчислими функции — началото



- Пеано (1889–1891) — аксиомите на аритметиката.

- Хилберт (1904–1928) — финистична програма за доказателство на непротиворечивост на математиката

Изчислими функции

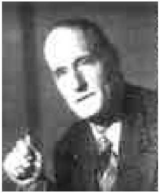
- Гьодел (1931) — теорема за непълнота на аритметиката, примитивно рекурсивни и общорекурсивни функции.
-  Чърч (1930 - 1934) λ - определими функции. Тезис на Чърч.

Изчислими функции

- Тюринг (1935) — машина на Тюринг, тезис на Чърч-Тюринг.

- Емил Пост (1936-1941) — системи на Пост, рекурсивно номеруеми множества.

Частично рекурсивни функции



- Клини (1938)
- $0 = \lambda x.0, S = \lambda x.x + 1,\ I^n_k = \lambda x_1, \ldots, x_n.x_k.$
- суперпозиция $\lambda \bar{x}.g(f_1(\bar{x}), \ldots f_k(\bar{x}))$.
- примитивна рекурсия
  $h(\bar{x}, 0) \simeq f(\bar{x}) \quad h(\bar{x}, y + 1) \simeq g(\bar{x}, y, h(\bar{x}, y))$.
- минимизация $f(\bar{x}) \simeq \mu z[g(\bar{x}, z) \simeq 0]$.

Частично рекурсивни функции

- $\varphi_0^{(n)}, \varphi_1^{(n)}, \ldots, \varphi_a^{(n)}, \ldots$
- $\Phi_n(a, \bar{x}) \simeq \varphi_a^{(n)}(\bar{x})$.

Теорема (Клини)

Съществува примитивно рекурсивна функция T_n, такава, че за всяка частично рекурсивна функция $\varphi_a^{(n)}$ на n аргумента:

$$\varphi_a^{(n)}(\bar{x}) \simeq U(\mu z[T_n(a, \bar{x}, z) = 0]).$$

Теорема (S_n^m)

За всеки $m, n \geq 1$ съществува примитивно рекурсивна функция S_n^m, такава, че

$$\varphi_a^{(m+n)}(\bar{x}, \bar{y}) \simeq \varphi_{S_n^m(a,\bar{x})}^{(n)}(\bar{y}).$$

Теорема за рекурсията

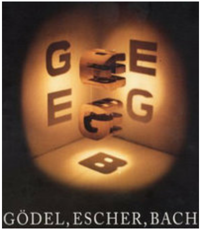
Теорема

За всяка рекурсивна функция f съществува неподвижна точка e: $\varphi_{e}^{(n)} = \varphi_{f(e)}^{(n)}$.

Доказателство

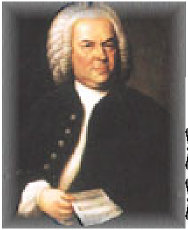
- $\theta(a, \bar{x}) \simeq \varphi_{\varphi_a(a)}^{(n)}(\bar{x}) \simeq \Phi_n(\Phi_1(a, a), \bar{x})$ (θ е изчислима)
- $\varphi_{h(a)}^{(n)}(\bar{x}) \simeq \theta(a, \bar{x})$ (S_n^m)
- има b: $\varphi_b(z) = f(h(z))$
- $\varphi_{f(h(b))}^{(n)} = \varphi_{\varphi_b(b)}^{(n)} = \varphi_{h(b)}^{(n)}$
- $e = h(b)$.

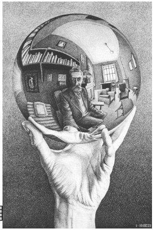
Self reference



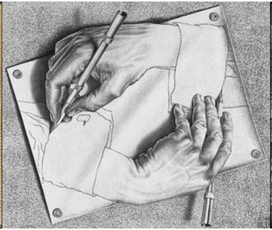
- Хофщатер — "Гьодел, Ешер и Бах в една златна примка"
- Гьодел — доказателството на непълнота на PA - аритметиката
- формула Φ = "Φ не е теорема на PA".
- Ако $PA \vdash \Phi$, то $\mathcal{N} \models \Phi$ и следователно $PA \nvdash \Phi$.
- Ако $PA \vdash \neg\Phi$, то $\mathcal{N} \models \neg\Phi$ и следователно $PA \vdash \Phi$, т. е. PA е противоречива.

Self reference





- Бах.


- Ешер.

Релативизация

Дефиниция

Една функция ψ е μ - рекурсивна относно $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$, ако може да се получи от $\{0, \mathrm{S}\} \cup \{\mathrm{I}^n_k : 1 \leq i \leq n\} \cup \Phi$ посредством операциите суперпозиция, примитивна рекурсия и минимизация.

Едно множество е полуразрешимо, ако е дефиниционна област на някоя частично рекурсивна функция.

Дефиниция

Изображението $\Gamma : \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(\omega)$ се нарича номерационен оператор, ако съществува полуразрешимо множество W, такова че

$$x \in \Gamma(A) \iff \exists v(\langle v, x \rangle \in W \;\&\; D_v \subseteq A).$$

Релативизация

Дефиниция

(i) $A \leq_e B$, ако съществува номерационен оператор Γ, за който $A = \Gamma(B)$.

(ii) ψ е частично рекурсивна относно Φ, ако $\langle\psi\rangle \leq_e \langle\varphi_1, \ldots, \varphi_k\rangle$.

Теорема

Ако ψ е μ - рекурсивна относно Φ, то ψ е частично рекурсивна относно Φ.
Ако в Φ има само тотални функции, то и обратното е вярно.

Абстрактна изчислимост

$\mathfrak{A} = (\mathrm{B}; \theta_1, \dots, \theta_n; \mathrm{R}_1, \dots, \mathrm{R}_k)$.
$\mathrm{B}_0 = \mathrm{B} \cup \{0\}$, $\langle ., . \rangle$. B^* е най-малкото множество, съдържащо B_0 и затворено относно $\langle ., . \rangle$. $\mathcal{E} = \{\theta_1^*, \dots, \theta_n^*; \mathrm{R}_1^*, \dots, \mathrm{R}_k^*\}$.
$\mathrm{L}(\langle s, t \rangle) \simeq s, \mathrm{R}(\langle s, t \rangle) \simeq t$.

Дефиниция

- композиция $\varphi \circ \psi(s) \simeq \varphi(\psi(s))$.
- съчетание $\Pi(\varphi, \psi)(s) \simeq \langle \varphi(s), \psi(s) \rangle$.
- итерация $[\varphi, \psi](s) \simeq t \iff \exists r_0, \dots, \exists r_n (r_0 = s \;\&\; r_n = t \;(\forall i < n)(r_{i+1} \simeq \varphi(r_i) \;\&\; \psi(r_i) \in \mathrm{B}^* \setminus \mathrm{B}_0) \;\& \psi(r_n) \in \mathrm{B}_0)$.

Дефиниция (Скордев)

$\varphi \in \mathrm{PC}(\mathfrak{A})$ е просто изчислима в $\mathfrak{A}$, ако φ се получава от елементите на $\mathcal{E} \cup \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}$ с операциите композиция, съчетание и итерация.

Изчислимост по Московакис

Я. Московакис

Дефиниция

$\varphi \in \mathrm{SC}(\mathfrak{A})$ е изчислима чрез търсене по Московакис в $\mathfrak{A}$, ако $\varphi \in \mathrm{PC}(\mathfrak{A} \cup (\mathrm{B}^*)^2)$.

Дефиниция

$\varphi \in \mathrm{REDS}(\mathfrak{A})$ е изчислима по Фридман в $\mathfrak{A}$, ако $\varphi \in \mathrm{PC}(\mathfrak{A} \cup (\omega^*)^2)$.

$\mathrm{PC}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{REDS}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{SC}(\mathfrak{A})$.

Номерации

Дефиниция

Номерация на системата $\mathfrak{A} = (B; \theta_1, \ldots, \theta_n; R_1, \ldots, R_k)$ се нарича наредената двойка $\langle f, \mathfrak{B}_f \rangle$,
$\mathfrak{B}_f = (\omega; \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \sigma_1, \ldots, \sigma_k)$:

(i) $\mathrm{dom}(f)$ е затворена относно $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$;

(ii) $f(\varphi_i(\bar{x})) \simeq \theta_i(f(\bar{x}))$, за $\bar{x} \in \mathrm{dom}(f)$;

(iii) $\sigma_j(\bar{x}) \simeq R_j(f(\bar{x}))$, за $\bar{x} \in \mathrm{dom}(f)$.

Дефиниция

Ако θ е функция в B, то функцията φ в ω се нарича асоциат на θ в $\langle f, \mathfrak{B}_f \rangle$, ако $f(\varphi(\bar{x})) \simeq \theta(f(\bar{x}))$, за $\bar{x} \in \mathrm{dom}(f)$.

Допустимост

Дефиниция

Функцята θ в B се нарича μ (p.r.) допустима в номерацията $\langle \mathrm{f}, \mathfrak{B}_\mathrm{f} \rangle$, ако има асоциат φ, който е μ-рекурсивен (частично рекурсивен) в $\mathfrak{B}_\mathrm{f}$.

Теорема

- $\theta \in \mathrm{PC}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \theta$ е μ - допустима относно всяка номерация на $\mathfrak{A}$ [Сосков].
- $\theta \in \mathrm{REDS}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \theta$ е p.r. - допустима относно всяка номерация на $\mathfrak{A}$ [Сосков].
- $\theta \in \mathrm{SC}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \theta$ е p.r. - допустима относно всяка тотална номерация на $\mathfrak{A}$ [Московакис,Сосков].

Номерациони степени

Б. Купър

Дефиниция

- $A \equiv_e B \iff A \leq_e B \;\&\; B \leq_e A$. $\mathcal{D}_e = (\mathcal{D}_e, \leq, 0_e)$.
- $d_e(A)$ — класът на еквивалентност, съдържащ A.
- $A^+ = A \oplus (\omega \setminus A)$. A е тотално, ако $A \equiv_e A^+$.
- $K_A = \{\langle x, z\rangle : x \in \Gamma_z(A)\}$.
- $A' = (K_A)^+, A'' = (A')' \dots,\ a^{(n)} = d_e(A^{(n)})$.
- ако $\alpha = \lim \alpha(p)$, то $A^{(\alpha)} = \{\langle p, x\rangle : x \in A^{(\alpha(p))}\}$.

α-допустими множества

1989 Аш, Найт, Манаси, Слеман, Чисхолм.

- Нека α е конструктивен ординал. Множеството A е α-допустимо относно $\mathfrak{A}$, ако за всяка тотална номерация f на $\mathfrak{A}$: $f^{-1}(A) \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A})^{(\alpha)}$.

α-допустими множества

2002 Сосков, Балева.

- Нека $\{B_\alpha\}_{\alpha \leq \zeta}$ е редица от подмножества на ω и ζ е конструктивен ординал.
- Добавяме всяко множество B_α към структурата $\mathfrak{A}$ като частичен предикат, който е α-допустим относно $\mathfrak{A}$.
- Ограничаваме класа на всички номерации на $\mathfrak{A}$ до класа на тези номерации f на $\mathfrak{A}$, за които $f^{-1}(B_\alpha) \leq_e f^{-1}(\mathfrak{A})^{(\alpha)}$.

Спектри на структури

Дефиниция

- Спектър за $\mathfrak{A}$ е множеството
$$\mathrm{DS}(\mathfrak{A}) = \{\mathrm{d_e}(\mathrm{f}^{-1}(\mathfrak{A})) : \mathrm{f} \text{ е номерация } \mathfrak{A}\}.$$
- Ако a е най-малкият елемент на $\mathrm{DS}(\mathfrak{A})$, то a се нарича степен на $\mathfrak{A}$.
- Коспектър на $\mathfrak{A}$ е множеството
$$\mathrm{CS}(\mathfrak{A}) = \{\mathrm{b} : (\forall \mathrm{a} \in \mathrm{DS}(\mathfrak{A}))(\mathrm{b} \leq \mathrm{a})\}.$$

Свойства на спектрите на структури

 Джокуш  Дауни

- Спектрите са затворени нагоре относно тотални степени [Сосков].
- Има структури — линейно наредени множества, които нямат степен [Ричтър].
- За всеки рекурсивен ординал α съществува линейно наредено множество с α степен $0^{(\alpha)}$, което няма β степен за $\beta < \alpha$ [Найт, Джокуш, Дауни].

Свойства на коспектрите

Сосков Всеки изброим идеал от номерационни степени може да се представи като коспектър на някоя структура.

Теорема (Минимални двойки)

[Сосков] Съществуват f и g от $DS(\mathfrak{A})$ такива, че за всяка номерационна степен a и всяко $\alpha < \zeta$

$$a \leq f^{(\alpha)} \ \&\ a \leq g^{(\alpha)} \Rightarrow a \in CS^{\alpha}(\mathfrak{A}).$$

Теорема (Квазиминимална степен)

[Сосков] Съществува номерацинна степен q, квазиминимална относно $DS(\mathfrak{A})$, т.е.

- $q \notin CS(\mathfrak{A})$
- за всяка тотална степен a: ако $a \geq q$, то $a \in DS(\mathfrak{A})$
- за всяка тотална степен a: ако $a \leq q$, то $a \in CS(\mathfrak{A})$.

Съвместни спектри на структури

Нека ζ е рекурсивен ординал и $\{\mathfrak{A}_\xi\}_{\xi \leq \zeta}$ е редица от структури над естествените числа.

Дефиниция

- Съвместен спектър на редицата $\{\mathfrak{A}_\xi\}_{\xi \leq \zeta}$ е множеството

$$\mathrm{DS}(\{\mathfrak{A}_\xi\}_{\xi \leq \zeta}) = \{\mathrm{a} : (\forall \xi \leq \zeta)(\mathrm{a}^{(\xi)} \in \mathrm{DS}(\mathfrak{A}_\xi))\}.$$

Дефиниция

- Коспектър на $\{\mathfrak{A}_\xi\}_{\xi \leq \zeta}$ е:

$$\mathrm{CS}(\{\mathfrak{A}_\xi\}_{\xi \leq \zeta}) = \{\mathrm{b} : (\forall \mathrm{a} \in \mathrm{DS}(\{\mathfrak{A}_\xi\}_{\xi \leq \zeta}))(\mathrm{b} \leq \mathrm{a})\}.$$

Свойства на съвместните коспектри

Теорема

Съществуват елементи f и g на $\mathrm{DS}(\{\mathfrak{A}_\xi\}_{\xi\leq\zeta})$, такива, че за всяка степен a and $\alpha < \zeta$:

$$\mathrm{a} \leq \mathrm{f}^{(\alpha)} \;\&\; \mathrm{a} \leq \mathrm{g}^{(\alpha)} \Rightarrow \mathrm{a} \in \mathrm{CS}^{\alpha}(\{\mathfrak{A}_\xi\}_{\xi\leq\zeta}).$$

Теорема

Съществува номерацинна степен q такава, че:

1. $\mathrm{q}^{(\alpha)} \in \mathrm{DS}(\mathfrak{A}_\alpha)$,$\alpha < \zeta$, $\mathrm{q} \notin \mathrm{CS}(\{\mathfrak{A}_\xi\}_{\xi\leq\zeta})$;
2. Ако a е тотална степен и $\mathrm{a} \geq \mathrm{q}$, тогава $\mathrm{a} \in \mathrm{DS}(\{\mathfrak{A}_\xi\}_{\xi\leq\zeta})$;
3. Ако a е тотална степен и $\mathrm{a} \leq \mathrm{q}$, тогава $\mathrm{a} \in \mathrm{CS}(\{\mathfrak{A}_\xi\}_{\xi\leq\zeta})$.

C. J. Ash, J. F. Knight, M. Manasse, and T. Slaman,
Generic copies of countable structures.
Ann. Pure Appl. Logic 42 : 195–205 1989.

J. Chisholm,
Effective model theory vs. recursive model theory
J. Symbolic Logic, 55:1168–1191 1990.

I. N. Soskov and V. Baleva
Ash's Theorem for abstract structures.
Proceedings of Logic Colloquium'2002, 2002.

I. N. Soskov,
Degree spectra and co-spectra of structures.
Ann. Univ. Sofia, 96:45–68, 2003.

CiE (2005) Амстредам