Глава 2

ЕЛЕМЕНТАРНИ МОДЕЛИ
(МОДЕЛИРАНЕ С ПОМОЩТА НА ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ)

В тази глава ще въведем и обсъдим някои от най-простите класически модели, свързани с популационната динамика, разпространението на епидемии, химическите реакции и др. Моделите са чисто феноменологични в смисъл, че те не изискват осмисляне на спецификата и детайлите на разглежданите процеси и явления. Вместо това се постулира, че скоростта на изменение на параметрите на състояние са прости и интуитивно правдоподобни функции на тези параметри, съдържащи коефициенти (параметри на системата), които следва да се определят допълнително по един или друг начин (например, експериментално). Като резултат моделите се формулират с помощта на обикновени диференциални уравнения. Затова и елементарното моделиране, разгледано в тази глава, се нарича често моделиране с помощта на обикновени диференциални уравнения. (В западната литература се използва и термина „формулиране на модели от думи“ (formulating models from words), смисълът на който би трябва да стане ясен от текста по-долу, вж. по-специално § 3.1.)

Централно място в главата ще заемат моделите на на популационната динамика. Неин предмет е изучаването на биологическите общности, състоящи се от един или няколко биологически вида. Целта, поне в разглежданите класически модели, е в чисто феноменологичното моделиране на влиянието на окръжаващата среда и на разнообразието на взаимодействията между видовете. Класическите модели са дело на Ферхулст (1838), Лотка (1925) (който е биофизик) и преди всичко на Волтера (1926), макар че интересът към популационната динамика се е появил още в началото на 19-ия век като реакция на известния труд на Малтус (1798).

Обърнете внимание, че по принцип и класическата динамика на материална точка може да се причисли към моделирането с помощта на обикновени диференциални уравнения. Това е очевидно от съотношенията (1.5), описващи движението на точката, които очевидно представляват система от такива уравнения. Нещо повече, динамиката на материална точка също може да се формулира като „модел от думи“ именно, от думите „каквато е силата, такова е и ускорениато“ (при постоянна маса на точката). Въпреки това динамиката на точка е неуместно да се разглежда тук поне по две причини. Първата и основната се състои в това, че зад нея стои *фундаментален* природен закон — втория закон на Нютон (1.5). Елементарните модели, разглеждани по-долу, се базират от друга страна на чисто евристични и емпирични съотношения, зад които не стои нищо фундаментално, а използването им се оправдава единствено с това, че те водят до смислени заключения. Втората причина е в това, че подробното изучаване на динамиката на материална точка е част от класическата аналитична механика и е изложена в множество превъзходни съчинения.

§ 3. Закон на Малтус и различните му интерпретации

§ 3.1. Коефициент на прираст. Закон на Малтус. Нека $N = N(t)$ е броят на индивидите в дадена биологична популация. Считаме, че N е достатъчно голямо, за да разглеждаме $N(t)$ като непрекъсната функция, игнорирайки очевидния факт, че реално N приема само дискретни стойности. Основното предположение на модела на Малтус се състои в това, че нарастването $\mathrm{d}N$ на броя на индивидите за време $\mathrm{d}t$ е пропорционално на този брой

$$\mathrm{d}N \approx N\,, \tag{3.1}$$

т. е.

$$\mathrm{d}N = \varepsilon N\,\mathrm{d}t\,, \quad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \varepsilon N\,. \tag{3.2}$$

Забележете, как думите „нарастването е пропорционално на броя на индивидите записани математически“, „пораждат модела“ (3.2). По същата схема („модели от думи“) ще въведем и всички останали модели в тази глава.

Параметърът ε в (3.2) се нарича *коефициент на прираст* или *репродуктивен потенциал* (fertility coefficient) и представлява основна характеристика на популацията. Ако представим ε във вида

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}N/N}{\mathrm{d}t}\,, \tag{3.3}$$

виждаме, че този параметър представлява относителното нарастване ($\mathrm{d}N/N$) на популацията за единица време. Оттук следва, че размерността на ε е „единица върху време“

$$[\varepsilon] = T^{-1}\,. \tag{3.4}$$

В общия случай $\varepsilon = \varepsilon(t, N)$, а в най-простия $\varepsilon = \mathrm{const}$. Тогава, ако $N = N_0$ в началния момент $t = 0$, то решението на диференциалното уравнение (3.2) е

$$N = N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{\varepsilon t}\,. \tag{3.5}$$

Това решение съответства на експоненциален ръст на популацията (*закон на Малтус*, 1798).

Да отбележим, че константата ε е свързана по прост начин с времето T за удвояване на популацията, което е *характерното време* за модела. По-точно, ако в интервала $(t, t+T)$ числеността на популацията се увеличи два пъти, то

$$T = \frac{\ln 2}{\varepsilon}\,. \tag{3.6}$$

Фундаменталното заключение, което Малтус извежда от закона (3.5), се състои в това, че човечеството (като биологична популация) може да съществува само ако периодите на експоненциален ръст се прекъсват от периоди на катастрофални бедствия, т. нар. *малтусиански катастрофи*[10] (епидемии или войни).

Упражнение 3.1. *Предполагаме, че населението на земята $N(t)$ се подчинява на закона на Малтус (3.2). В момент $t = 0$ (1650 г.) населението е $6 \cdot 10^8$ (600 милиона), а в момент $t = 300$ (1950 г.) е $2,8 \cdot 10^9$ (2,8 милиарда). Намерете*

а) Коефициентът на прираст на човечеството;

б) Ако земята не може да изхрани повече от $25 \cdot 10^9$ (25 милиарда) души, кога най-късно ще настъпи малтусианската катастрофа?

Отговор: а) $\varepsilon \approx 0,01243$; б) в 2376 год.

Ако коефициентът ε в (3.5) е отрицателен, $\varepsilon < 0$, полагаме $\mu = -\varepsilon$. Тогава

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\mu N\,, \quad \text{т. е.} \quad N = N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\mu t}\,, \tag{3.7}$$

[10]Томас Малтус (1766 – 1834) е английски икономист, който пръв забелязва, че много биологични популации се увеличават със скорост, пропорционална на числеността на популацията. Оригиналната есе на Малтус от 1798 г. е препечатвано многократно, вж., например, [22]. Разсъжденията му за т. нар. днес малтусиански катастрофи са предизвикали широк отзвук и дискусия през 19-ти век.

което съответства на експоненциално намаляване на популацията. Параметърът μ в този случай се нарича *коефициент на смъртност* (mortality coefficient). При това, аналогично на (3.6)

$$T = \frac{\ln 2}{\mu}\,, \tag{3.8}$$

където T е времето, за което популацията намалява два пъти.

§ 3.2. „Финансова“ интерпретация на модела на Малтус. Лихва и инфлация. „Финансова“ интерпретация на модела на Малтус (3.2) може да потърсим при нарастването на банков влог. Тук

$$\mathrm{d}Q = \ell Q\,\mathrm{d}t\,, \tag{3.9}$$

където ℓ е лихвата, а Q е големината на влога, $\mathrm{d}Q$ е нарастването на влога за време $\mathrm{d}t$. В този контекст моделът (3.9) е реалистичен, само ако банката начислява лихва непрекъснато. Практиката, обаче, е лихвата да се начислява „дискретно“, т. е. за определен период от време (например, в края на всяка календарна година). Прост анализ ще покаже защо това е по-изгодно за банките.

Ако лихвата се начислява непрекъснато, то влогът нараства експоненциално $Q(t) = Q_0 \exp(\ell t)$, вж. (3.5), и след n години големината му ще бъде

$$Q_n = Q(n) = Q_0\,\mathrm{e}^{\ell n}\,. \tag{3.10}$$

Ако пък лихвата се начислява в края на всяка година, големината на влога след n години е

$$\widetilde{Q}_n = Q_0(1+\ell)^n\,. \tag{3.11}$$

Но

$$\mathrm{e}^{\ell n} > (1+\ell)^n \tag{3.12}$$

(неравенството на Бернули) и затова

$$Q_n > \widetilde{Q}_n\,.$$

Последното неравенство обяснява защо банките начисляват лихвата на „дискретни“ порции.

Упражнение 3.2. *Ако годишната лихва е 5%, пресметнете отношението $Q_n/\widetilde{Q}_n$ след 5 и след 10 години.* Отговор: 1,006; 1,012.

„Финансова“ интерпретация на модела на Малтус (3.7) при отрицателен коефициент на възпроизводство е свързан, например, с намаляването $\mathrm{d}Q$ на реалната стойност на дадена сума Q в следствие на инфлация

$$\mathrm{d}Q = -\mu Q\,\mathrm{d}t\,, \quad \mu = \frac{|\mathrm{d}Q/Q|}{\mathrm{d}t}\,.$$

С други думи, μ показва каква част от сумата се „изяжда“ от инфлацията за единица време, ср. с (3.3). (Да напомним, че μ, както и лихвата, се мери в проценти така че, например, $\mu = 0,05$ съответства на пет процентова инфлация.)

В едно инфлационно обкръжение инфлацията действа непрекъснато и затова, съгласно (3.7)

$$Q = Q_0\,\mathrm{e}^{-\mu t}\,. \tag{3.13}$$

Това означава, че инфлацията „стопява“ експоненциално всеки капитал, *независимо* от нейния процент.

При инфлация държавата се стреми да компенсира доходите като увеличава заплатите на „дискретни“ порции (всеки шест месеца или в края на годината). Ако Q_0 е доходът в началото на периода, то реалната му стойност в края ще бъде $Q_0 \exp(-\mu)$, вж. (3.13), а след индексацията е $Q_0(1+\mu)\exp(-\mu)$, ако последната е равна на процента на инфлация (което е обичайната практика). Но

$$Q_0(1+\mu)\mathrm{e}^{-\mu} < Q_0\,, \tag{3.14}$$

съгласно неравенството на Бернули, вж. (3.12). Изводът, който можем да направим от (3.14) се състои в това, че в инфлационно обкръжение индексация на дохода, равна на процента на инфлация, не ни спасява от реално обедняване. (То, обаче, е незначително, ако инфлацията не е голяма, вж. Упражнение 3.3 по-долу.)

Упражнение 3.3. *С колко намалява реалния доход при годишна инфлация от* 10 %*, ако индексацията в края на годината е също* 10 %*? А ако инфлацията е* 100 %*?* Отговор: 0,5 %; 26,2 %.

Упражнение 3.4. *Колко процента трябва да е индексацията в края на годината за пълна компенсация на дохода, ако годишната инфлация е* 10 %*. А ако инфлацията е* 100 %*?* Отговор: 10,5 %; 171 %.

§ 3.3. Радиационен разпад. Друга интересна интерпретация на уравнението (3.7) е свързана с разпадането на радиоактивни субстанции.

Да напомним, че радиоактивното разпадане представлява химическа реакция, при която даденото вещество се превръща в две или повече вече нерадиоактивни субстанции. От това се вижда, че колкото е по-голяма масата $M = M(t)$ на веществото, толкова по-голяма е скоростта му на разпадане

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\mu M\,, \quad \text{т. е.} \quad M = M(t) = M_0\,\mathrm{e}^{-\mu t}\,, \tag{3.15}$$

което е напълно аналогично на (3.7). Времето T, за което масата намалява два пъти, се нарича *време на полуразпад*. Връзката между T и параметъра μ се дава от съотношението (3.8).

Упражнение 3.5. *Времето на полуразпад на радий-266 е 1620 год. За колко време дадена маса от това вещество ще намалее с 1/4?*
Отговор: ≈ 672 год.

Моделът (3.15) играе важна роля в археологическите изследвания. С негова помощ се определя възрастта на растителни останки и дървесина, а чрез това и на човешки кости и предмети, намиращи се в същия археологически слой. В основата на метода е фактът, че някои дървета и растения по време на жизнения си цикъл акумулират $\mathtt{Ca}^{14}$ (въглерод-14, радиоактивен изотоп на въглерода). След загиването на дървото или растението този изотоп започва да се разпада. Тъй като времето на полуразпад на $\mathtt{Ca}^{14}$ е голямо (приблизително 5 568 год.), то остатъчното му количество може да се определи достатъчно точно след десетки хиляди години. С подходящи лабораторни измервания може да се определи също и началното количество M_0 на изотопа, а чрез него и отношението $M(t)/M_0$. На свой ред формулата (3.15) позволява да определим t, т. е. възрастта на находката, знаейки това отношение. Напомняме, че константата μ се определя по известното време T на полуразпад на $\mathtt{Ca}^{14}$, вж. по-горе, с помощта на (3.8).) Съвременната измерителна техника позволява подобна радиовъглеродна датировка на археологически останки, чиято възраст достига 100 000 год.[11] (Любопитно е, че количеството $\mathtt{Ca}^{14}$ след този период е само $4 \cdot 10^{-6}$ от началното!)

Упражнение 3.6. *В дървесни остатъци е измерено количество* $\mathtt{Ca}^{14}$*, което е* 20 % *от първоначалното. Определете възрастта им.*
Отговор: $\approx 12\,930$ год.

§ 3.4. Стационарни състояния, тяхната устойчивост и неустойчивост. Ще завършим този параграф с една важна забележка, ка-

[11] Методът е разработен от американския химик У. Либи (1908 – 1980) през 50-те години на миналия век. Заради този метод авторът получава нобеловата награда по химия за 1960 г.

саеща качественото поведение на решенията на диференциалните уравнения, описващи разглежданите в тази глава елементарните модели. Тези модели се формулират математически с помощта на (автономното) обикновено диференциално уравнение

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = f(N)\,. \tag{3.16}$$

С такъв най-прост модел, в който функцията $f(N)$ е линейна, вече се сблъскахме по-горе (§ 3.1), вж. (3.2) и (3.7). (*Автономност* (означава, да напомним, че дясната страна на уравнението (3.16) не зависи явно от времето.)

Специален интерес за нас ще представляват т. нар. *стационарни решения* (или *стационарни състояния*) на модела (3.16), за които

$$N(t) \equiv \overline{N}\,, \quad \overline{N} = \mathrm{const}\,. \tag{3.17}$$

Стационарните решения се наричат също и *равновесни*, доколкото те са резултат на равновесието (баланса) на разнообразните въздействия, на които е подложена системата.

Внасянето на (3.17) в (3.16) показва, че такива състояния съществуват само ако $\overline{N}$ е корен на уравнението

$$f(\overline{N}) = 0\,. \tag{3.18}$$

В частност, в модела на Малтус $f(N) = \varepsilon N$, вж. (3.2), и единственото стационарно решение е нулевото, $\overline{N} \equiv 0$.

Ако началното условие е $N_0 = \overline{N}$, то очевидно решението на (3.16) съвпада със стационарното, $N(t) \equiv \overline{N}$, $\forall\, t \in (0, \infty)$. Интересува ни какво ще стане, ако $N_0 \neq \overline{N}$, т. е. ако системата, по една или друга причина, е *смутена*, т. е. отклонена от стационарното си състояние. Възможностите тук са две: или системата ще остане близо до това състояние, възвръщайки се постепенно към него, или отклонението от него ще започне да нараства. В първия случай говорим за *устойчивост*, а във втория за *неустойчивост* на стационарното състояние $N_0 = \overline{N}$.

Отговор на това, дали едно решение е устойчиво или не, може да получим веднага от аналитичното решение на задачата на Коши за уравнението (3.16) при началното условие $N(0) = N_0$. Например, решенията (3.5) и (3.7) показват, съответно, че стационарното решение $\overline{N} = 0$ в модела на Малтус е неустойчиво при $\varepsilon > 0$ и устойчиво при $\varepsilon < 0$.

В общия случай, когато $f(N)$ е по-сложна функция, аналитичното решение на съответната задача на Коши, като правило, е невъзможно.

Оказва се, обаче, че полезна информация за устойчивостта или неустойчивостта на стационарното решение може да се получи на базата на прост качествен анализ, без знанието на решението на уравнението (3.16).

Наистина, да предположим, че началното условие N_0 е леко смутено, т.е. малко се отличава от стационарната стойност $\overline{N}$, $|\overline{N} - N_0| \ll 1$. Търсим решението на уравнението (3.16) във вида

$$N(t) = \overline{N} + n(t)\,, \tag{3.19}$$

предполагайки, че смущението $n(t)$ също е малко $|n(t)| \ll 1$. Внасяме (3.19) в (3.16)

$$\frac{\mathrm{d}(\overline{N}+n)}{\mathrm{d}t} = f(\overline{N}+n)$$

и разлагаме дясната страна в ред на Тейлър в околността на $\overline{N}$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = f(\overline{N}) + f'(\overline{N})n + o(n)\,. \tag{3.20}$$

Но $f(\overline{N}) = 0$, вж. (3.18), и за смущението $n(t)$ получаваме

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = An\,, \quad A = f'(\overline{N})\,, \tag{3.21}$$

с точност до безкрайно-малки от по-висок ред спрямо $|n(t)|$. С други думи, ние „линеаризирахме“ диференциалното уравнение (3.16) в околността на стационарното му решение $N(t) \equiv \overline{N}$ като го заменихме с линейното диференциално уравнение (3.21) с постоянния коефициент A.

Решението на уравнението (3.21), при началното условие $n(0) = N_0 - \overline{N}$, е очевидно

$$n(t) = (N_0 - \overline{N})\,\mathrm{e}^{At}\,, \quad A = f'(\overline{N})\,. \tag{3.22}$$

Поведението му се определя от знака на A. Ако $A > 0$ то смущението $n(t)$ нараства експоненциално при $t \to \infty$, което означава, че стационарното решение е неустойчиво. Ако $A < 0$, то $n(t)$ клони експоненциално към нула, което говори за устойчивост на разглежданото решение. Ще отбележим, че ако $A = 0$, не можем да направим никакви заключения за устойчивост или неустойчивост в рамките на проведената линеаризация (3.20) на функцията $f(N)$ в околността на точката $\overline{N}$. В този случай следва да привлечем в анализа на устойчивостта и членовете от по-висок ред в тейлъровото разлагане (3.20).