§ 17. Модел на вискозна течност

17.1. Модел на вискозна течност. Закон на Навие-Нютон. Еластичното тяло, въведено в § 14.1, е „твърдо“ в този смисъл, че запазва формата си почти неизменна, стига действащите върху него сили да не са достатъчно големи. Но повече от очевидно е, че в непосредственото ни обкръжение съществува и друг клас деформируеми тела, които нямат определена характерна форма. Те се деформират (по-образно, „протичат“) при най малкото натоварване. Това са добре познатите ни *течности* и *газове* (или *флуиди*). Математическият им модел представлява отново частен случай на общото съотношение (14.4). Но за разлика от еластичното тяло, напреженията тук са пропорционални не на деформацията ε, а на *скоростта на деформацията* $\dot{\varepsilon}$:

$$\sigma = \mu\dot{\varepsilon}\,, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}\,, \tag{17.1}$$

в най-простия възможен случай, разбира се.

Тяло, подчиняващо се на закона на деформиране (17.1) се нарича *вискозна* или *нютонова* течност[4]. Самият закон (17.1) е известен като *закон на Навие-Нютон*, а коефициентът μ е *вискозитетът* на течността — единственият материален параметър на модела, родствен с модула на Юнг на еластичното тяло. Размерността на вискозитета е

$$[\mu] = \frac{[\sigma]}{[\dot{\varepsilon}]} = \left(ML^{-1}T^{-2}\right) \Big/ \, T^{-1} = ML^{-1}T^{-1}\,,$$

вж. (14.2).

Ще се опитаме сега да поясним модела на вискозната течност и да „обосновем“ уравнението на състоянието (17.1).

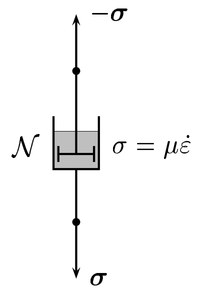
Ще започнем с въведеното в (17.1) понятие скорост на деформация $\dot{\varepsilon}$. Нека дължината на цилиндричен образец от разглежданото тяло, по една или друга причина, се изменя във времето, т. е. $\ell = \ell(t)$. (За еластично тяло това ще се случи, например, ако опънната сила е променлива.) Съгласно (14.3), деформацията на образеца е също променлива

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \frac{\ell(t) - \ell_0}{\ell_0}\,. \tag{17.2}$$

[4]При *ненютоновите* течности, линейният закон (17.1) се заменя с нелинейната зависимост $\sigma = f(\dot{\varepsilon})$ между напрежението и скоростта на деформиране.

Следователно,

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\ell_0}\,\frac{\mathrm{d}\ell(t)}{\mathrm{d}t}\,. \tag{17.3}$$



Фиг. 17.1. „Буталце“ на Навие-Нютон

Формулата (17.3) позволява да дадем проста интерпретация на скоростта на деформация $\dot{\varepsilon}$. Именно, да си представим, че единият край на образеца е неподвижен. Другият му край ще се движи тогава със скорост $v = \mathrm{d}\ell(t)/\mathrm{d}t$ което, по силата на (17.3), дава

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\ell_0}\,v\,, \tag{17.4}$$

т. е. скоростта на деформация на разглеждания образец е пропорционална на скоростта на движението v на подвижния му край.

Да въведем сега втория, след хуковата пружина, основен механичен елемент. Това е *вискозният елемент* или *буталото на Навие-Нютон*, което илюстрира и онагледява поведението на флуидите. То е показано на фиг. 17.1: в кръговоцилиндричен съд, пълен с течност, се движи бутало под действието на двойката опънни сили $\boldsymbol{T}$ и $-\boldsymbol{T}$. Лицето на буталото е S, така че съответните напрежения, отнесени към единица от това лице, са $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{T}/S$ и $-\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{T}/S$. Ще означаваме вискозния елемент с $\mathcal{N}$, в чест едновременно на Нютон и Навие.

Нека $\ell = \ell(t)$ е височината на стълба течност под буталото в текущия момент от време t. В началния момент $\ell = \ell_0$, като в системата от мерни единици, с която работим, избираме $\ell_0 = 1$. Деформацията на този стълб се определя от (17.2), а скоростта му на деформация $\dot{\varepsilon}$ е пропорционална на скоростта на движение v на горния му подвижен край, вж. (17.4). Тази скорост съвпада със скоростта на движението на буталото. (Разглежданата течност, да подчертаем, е „вискозна“, т. е. тя „прилепва“ към потопените в нея тела.) Но всяко тяло, включително и разглежданото бутало, потопено във флуид, изпитва съпротивление при движението си. По-точно, за поддържането на скоростта v на буталото във флуида е необходимо да се приложи силата T. При това е ясно, че v и T са пропорционални в смисъл, че колкото е по-голяма силата, толкова по-голяма е и скоростта, т. е. $T = T(v)$, където $T(v)$ е монотонно растяща функция на аргумента v. Естествено е да предположим в първо приближение, че $T(v)$ е линейна

$$T = kv\,, \quad k > 0\,. \tag{17.5}$$

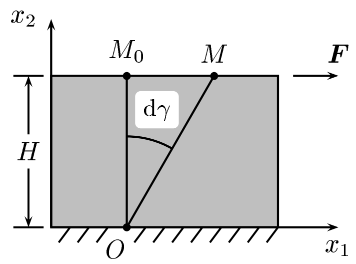
Но $T = \sigma S$, където S, да припомним, е лицето на буталото, а σ е действащото върху него напрежение. От друга страна, $v = \dot{\varepsilon}$, вж. (17.4). Внасянето на последните два израза в (17.5) дава

$$\sigma = \mu\dot{\varepsilon}\,, \quad \mu = k/S\,, \tag{17.6}$$

което очевидно съвпада с уравнението на състоянието (17.1) на вискозната течност. (Напомняме, че $\ell_0 = 1$.)

Да подчертаем изрично, че горната „обосновка“ на модела (17.1) на флуид претендира единствено за нагледност. Стандартното, макар и също така евристично, въвеждане на този модел се базира на следния мислен експеримент на Нютон.

Разглеждаме пластина, която се движи със скорост $\boldsymbol{v}$ по повърхността на флуиден слой с дълбочина H под действието на сила $\boldsymbol{F}$, вж. фиг. 17.2, като избираме $H = 1$ в системата от мерни единици, с която работим. Предполагаме, че размерите на пластината са много по-големи от дълбочината H.



Фиг. 17.2

Пластината „прилепва“ към флуида и увлича най-горния слой $x_2 = H$ със себе си. На дъното ($x_2 = 0$) скоростта на флуида е нулева, така че тази скорост се изменя от 0 до v линейно с увеличаване на x_2.

При движението на пластината във флуидния слой се осъществява чисто срязване — деформацията, разгледана в § 14.2, вж. фиг. 14.3.

Да разгледаме частица от флуида, която в началния момент от време $t = 0$ е прилепнала в точката M_0 на пластината. След инфинитезимално време $\mathrm{d}t$ флуидната частица се е преместила, заедно с пластината, от M_0 в точката M, а първоначално правия ъгъл $\angle x_1 O M_0$ се е променил с $\mathrm{d}\gamma = \angle M_0 O M$, вж. фиг. 17.2, т. е. появила се е ъглова (срязваща) деформация. Големината на тази деформация намираме от съотношението

$$\mathrm{tg}\,(\mathrm{d}\gamma) \approx \mathrm{d}\gamma = v\,\mathrm{d}t\,.$$

тъй като $|M_0M| = v\,\mathrm{d}t$. (Напомняме, че $H = 1$.) Следователно, скоростта на изменението на срязващата деформация при движението на разглеждания флуиден слой съвпада със скоростта на движението на пластината

$$\dot{\gamma} = v\,, \tag{17.7}$$

т. е. със скоростта на най-горния флуиден слой.

Интуитивно е ясно, че скоростта на движението на пластината зависи от големината на приложената сила F, по-точно от големината на срязващото напрежение $\tau = F/S$, където S е лицето на пластината, вж. отново § 14.2. С други думи,

$$\tau = F(v)\,, \quad \text{т. е.} \quad \tau = F(\dot{\gamma})\,,$$

предвид (17.7). В приближението на Навие-Нютон функцията F в последното съотношение се приема за линейна

$$\tau = \mu\dot{\gamma}\,, \tag{17.8}$$

където μ е вече познатият ни вискозитет на флуида.

Любопитно е, впрочем, сравнението между (14.6) и (17.8). То показва, че вискозитетът е „флуидният“ аналог на модула на срязване на еластичното тяло. При последното, обаче, в закона на Хук участва срязващата деформация γ, докато при флуида тя е заместена от скоростта ѝ на изменение $\dot{\gamma}$.

Проведените разсъждения поясняват защо буталцето на Навие-Нютон (фиг. 17.1) е адекватен модел на поведението на вискозната течност. Причината, да подчертаем, е пропорционалността между напрежението и скоростта на деформацията в закона на деформирането му, вж. (17.6), аналогично на закона на Навие-Нютон (17.1) или (17.8). Дали тази деформация е опънна или срязваща, за нашите (илюстративни преди всичко) цели е несъществено.

Да отбележим в заключение, че адекватните математически модели на еластичното тяло и на вискозния флуид се въвеждат в рамките на механиката на непрекъснатите среди. Това обаче изисква използването на апарата на тензорното смятане който, в рамките на този уводен курс, не се разглежда.