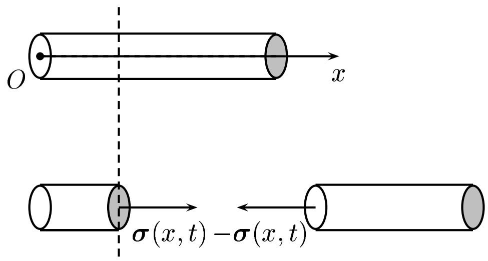
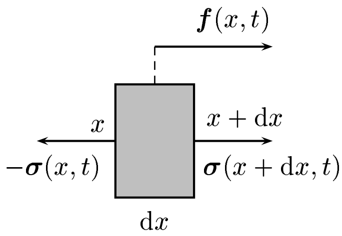
§ 16. Надлъжни трептения на еластичен прът — вълново уравнение. Решение на Даламбер

Целта ни в този параграф е да покажем по какъв начин законът на Хук, комбиниран с идеята за вътрешните напрежения и втория закон на Нютон, позволява да опишем надлъжните трептения на еластичен прът. Това е проста и поучителна илюстрация как на базата на прости базисни модели (от типа на този на Хук) можем да опишем и изучим математически по-сложни процеси в изучаваните тела или, по-общо, обекти.



Фиг. 16.1



Фиг. 16.2

16.1. Надлъжни трептения на еластичен прът. Да разгледаме прав еластичен прът с постоянно напречно сечение с лице S. Оста на пръта означаваме с Ox, вж. фиг. 16.1. Предполагаме, например, че единият край на пръта, е закачен неподвижно, а другият край в резултат на приложена сила, е получил дадено преместване. След това прътът е освободен от силата и оставен свободно да трепти. Впрочем, за по-голяма нагледност, вместо еластичен прът можем да си представим пружина, закачена неподвижно в единия си край. Пружината е разтегнат разтегната надлъжно, прилагайки сила в другия ѝ край, след което е освободена от силата.

В резултат на всичко това в пръта се появяват вътрешни напрежения, които зависят вече и от двете независими променливи x и t: $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x,t)$ с директриса, съвпадаща с оста Ox. Аналогично на натоварената нишка (§ 13.1), те се проявяват само ако разрежем мислено пръта — по двата бряга на разреза ще се появят тогава напреженията $-\boldsymbol{\sigma}(x,t)$ (на левия) и $\boldsymbol{\sigma}(x,t)$ (на десния бряг), вж. фиг. 16.1.

Както и в задачата за верижката, да изрежем мислено от пръта елемент с дължина $\mathrm{d}x$, на разстояние x от началото му, вж. фиг. 16.2. Върху двете стени на този елемент ще действат силите $-\boldsymbol{\sigma}(x,t)\,S$ и $\boldsymbol{\sigma}(x+\mathrm{d}x,t)\,S$. (Да напомним, че σ е напрежение, т. е. силата, действаща върху единица лице от напречното сечение, вж. (14.1).) Следователно, главният вектор на силите, приложени върху разглежданото парче от пръта, е

$$\boldsymbol{F}(x,t) = [\,\boldsymbol{\sigma}(x+\mathrm{d}x,t) - \boldsymbol{\sigma}(x,t)\,]\,S\,. \tag{16.1}$$

Тъй като парчето е безкрайно-тънко, можем да го разглеждаме като материална точка с маса $\rho\,\mathrm{d}V = \rho S\,\mathrm{d}x$ и да приложим към него втория закон на Нютон (1.4):

$$\rho S\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}(x,t)}{\partial t^2} = \boldsymbol{F}(x,t)\,, \tag{16.2}$$

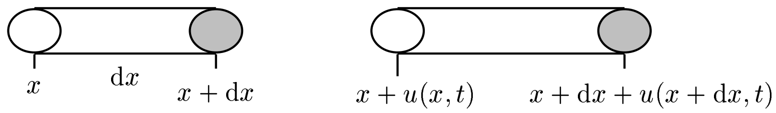
където $\boldsymbol{u}(x,t)$ е преместването на точката от пръта с координата x. Тук ρ е плътността на пръта, така че масата на изрязаното парче е $\rho\,\mathrm{d}xS$. Прътът при това се предполага хомогенен, т. е. $\rho = \mathrm{const}$. Обърнете внимание, че частната производна в лявата страна на уравнението (16.2) е следствие от факта, че пресмятаме ускорението във *фиксирана* точка от пръта, т. е. диференцираме (двукратно) функцията $\boldsymbol{u}(x,t)$спрямо времето t при *фиксирано* x.

Внасяме в (16.2) израза (16.1) за $\boldsymbol{F}(x,t)$. Тъй като всички вектори в случая имат обща директриса (оста Ox), то след съкращаване на S и разделяне двете части на получения резултат с $\mathrm{d}x$ намираме

$$\rho\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x}\,. \tag{16.3}$$

Това е уравнението на движението на пръта при надлъжното му трептене. Обърнете внимание, че в статичния случай, когато зависимост от времето няма, (16.3) съвпада по същество с уравнението на равновесието на нишката (13.3). Частната производна $\partial\sigma(x,t)/\partial x$ в (16.3) се появява поради факта, че нарастването на функцията $\sigma(x,t)$ в (16.1) се изчислява при фиксирано време t.

Уравнението (16.3) е в сила при надлъжно трептене за произволен прът, *независимо* от неговите механични свойства. В случая на нишката (13.3) ние добавихме към подобното на (16.3) уравнение (13.3) условието за неразтегливост (13.12) за да получим диференциалните уравнения на равновесното положение на нишката. Сега ще добавим към (16.3) условието за еластичност (което до момента не е използвано изобщо), за да достигнем до диференциалното уравнение, описващо хоризонталното преместване $u(x,t)$ на точките от пръта.



Фиг. 16.3

За тази цел е необходимо първо да изразим деформацията $\varepsilon(x,t)$ в пръта чрез на преместването $u(x,t)$.

Разглеждаме отново елемента с дължина $\ell_0 = \mathrm{d}x$, намиращ се на разстояние x от началото на пръта, вж. фиг. 16.3. Преместването на левия бряг на елемента е $u(x,t)$, а на десния — $u(x+\mathrm{d}x,t)$. Началната дължина на елемента $\ell_0 = \mathrm{d}x$ се изменя и става

$$\begin{aligned}\ell &= x + \mathrm{d}x + u(x+\mathrm{d}x,t) - (x + u(x,t)) \\ &= \mathrm{d}x + u(x+\mathrm{d}x,t) - u(x,t)\,,\end{aligned}$$

и деформацията на разглеждания елемент е

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\ell-\ell_0}{\ell_0} = \frac{u(x+\mathrm{d}x,t)-u(x,t)}{\mathrm{d}x}\,, \tag{16.4}$$

т. е.

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,. \tag{16.5}$$

Производната е частна спрямо x, доколкото изменението на функцията $u(x,t)$ в (16.4) се изчислява при изменението на x при фиксирано време t.

Съгласно (16.5) и закона на Хук (14.5)

$$\sigma(x,t) = E\varepsilon(x,t) = E\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,.$$

С това уравнението на движението на пръта (16.3) приема вида

$$\rho\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,,$$

или

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0\,. \tag{16.6}$$

Тук сме въвели материалния параметър

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,, \tag{16.7}$$

предполагайки за простота, че прътът е хомогенен и по отношение на еластичните си свойства, т. е. $E = \text{const}$. Параметърът a има, очевидно, размерност на скорост — $[a] = L/T$. Неговата интерпретация, свързана със скоростта на разпространение на надлъжните вълни в пръта, ще бъде дадена в следващия § 16.2.

Уравнението (16.6) е търсеното диференциално уравнение на надлъжните трептения на еластичен прът. Забележете, че това е *частно диференциално уравнение* (ЧДУ) в смисъл, че то включва частните производни на неизвестното поле на преместването $u(x,t)$.

Уравнение (16.6) е най-простият (едномерен) пример на т. нар. *вълново уравнение*. Уравнения от този вид описват, например, напречните трептения на струна или прът и, по-общо, широки класове от „трептеливи“ или вълнови процеси в деформируеми среди. Подробното им изследване е предмет на теорията на частните диференциални уравнения. Тук ще се ограничим само с намирането на едно знаменито общо решение на уравнението (16.6), което ще изясни както използваното наименование вълново, така и смисъла на параметъра a, който се появи в това уравнение, вж. (16.7).

16.2. Решение на Даламбер. Следвайки Даламбер, да въведем вместо x и t новите независими променливи

$$\xi = x - at\,, \quad \eta = x + at\,. \tag{16.8}$$

Тогава $u(x,t) = \widetilde{u}(\xi,\eta)$. По правилото за диференциране на сложна функция е лесно да проверим, че

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4a^2 \, \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi \, \partial \eta}\,. \tag{16.9}$$

Уравнението (16.6) спрямо новите променливи ξ и η, придобива вида

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0\,,$$

вж. (16.9), и общото му решение, очевидно, е

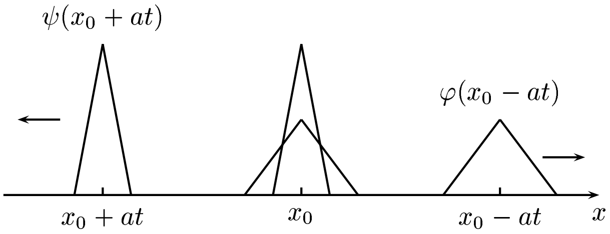
$$\widetilde{u}(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)\,,$$

т. е.

$$u(x,t) = \varphi(x-at) + \psi(x+at)\,. \tag{16.10}$$

Тук φ и ψ са произволни (двукратно диференцируеми) функции на една скаларна променлива. Изразът (16.10) представлява *общото решение на Даламбер* на хомогенното вълново уравнение (16.6)[3].

Решението на Даламбер има проста физическа интерпретация (вж., например, [4, § 14]).



Фиг. 16.4. Интерпретация на решението на Даламбер (16.10)

Функцията $\varphi(x_0-at)$ представлява „смущение“, която в момент $t=0$ е локализирано в точката $x = x_0$, вж. фиг. 16.4. В момент t същото смущение е локализирано вече в точката $x_0 = at$. Това означава, че $\varphi(x_0-at)$ може да се третира като *вълна*, чиято форма се определя от функцията $\varphi(x)$, движеща се надясно по оста x със скорост a.

Аналогично, $\psi(x_0+at)$ представлява *вълна*, движеща се вляво по оста x със същата скорост a, чиято форма се определя от функцията $\psi(x)$.

Следователно, решението на Даламбер (16.10) означава, че общото решение на хомогенното уравнение (16.6) е суперпозиция на две вълни с неизменни форми, движещи се в противоположни посоки по оста x

[3]Впрочем, директно се проверява, че $\varphi(x-at)$ е решение на хомогенното вълново уравнение. Наистина,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \varphi''\,, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\varphi''\,, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - a^2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0\,,$$

и аналогично за $\psi(x+at)$.

с една и съща скорост a. Тази интерпретация обяснява използваният термин вълново за уравнението (16.6), като едновременно прояснява и физическия смисъл на материалния параметър a, дефиниран в (16.7): това е скоростта на разпространението на споменатите две вълни.