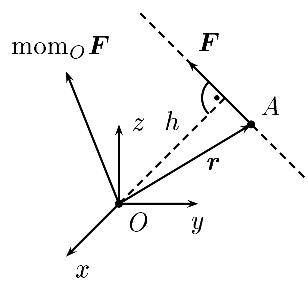
§ 11. Теория на двоиците

§ 11.1. Момент на сила. Разглеждаме сила $\boldsymbol{F}$ с приложна точка A, вж. фиг. 11.1. Фиксираме точката O (т. нар. *полюс*). По определение векторното произведение

$$\mathrm{mom}_O \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{11.1}$$



Фиг. 11.1

се нарича *момент на силата* $\boldsymbol{F}$ *спрямо точката* O. Уславяме се да свързваме вектора-момент с точката O. Това е естествено, доколкото $\mathrm{mom}_O\boldsymbol{F}$ очевидно зависи от избора на полюса O.

Както е известно, векторното произведение $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ е вектор, насочено перпендикулярно на векторите $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{F}$ (т. е. перпендикулярно на равнината, определена от $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{F}$), така че векторите $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ да образуват дясна тройка. Това означава, да напомним, че той е насочен така, че от върха му „завъртането gk на $\boldsymbol{r}$ към $\boldsymbol{F}$ е положително, т. е. обратно на часовниковата стрелка. По големина векторът $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ е равен на лицето на успоредника, построен върху векторите $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{F}$, т. е.

$$|\mathrm{mom}_O\boldsymbol{F}| = Fh\,, \tag{11.2}$$

където h е дължината на перпендикуляра, спуснат от O към директрисата на $\boldsymbol{F}$, вж. фиг. 11.1; h се нарича *рамо* на силата $\boldsymbol{F}$ спрямо полюса O.

Нестрого казано, моментът $\mathrm{mom}_O\boldsymbol{F}$ на силата $\boldsymbol{F}$ представлява характеристика на „въртеливия ефект“, който има $\boldsymbol{F}$ спрямо точката O. За да поясним това, да си представим, че векторът $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OA}$ е прът, към края A на който прилагаме силата $\boldsymbol{F}$, за да го завъртим около неподвижния му край O. Тогава „въртеливият ефект“ спрямо O ще бъде, образно казано, толкова „по-голям“ колкото са по-големи приложената сила $\boldsymbol{F}$ и рамото ѝ h. Ако $h = 0$, то силата минава през O и въртелив ефект изобщо няма. Поради това е естествено да характеризираме споменатия ефект с произведението Fh, вж. (11.2). На свой ред „въртеливият ефект“ трябва да бъде векторна величина, за да може да се определи равнината, в която се осъществява въртенето. Векторът (11.1) е точно такава величина — въртенето е в равнината, която минава през точката O и е перпендикулярна на този вектор.

Да напомним, че спрямо декартова координатна система $Oxyz$ с начало O, вж. фиг. 11.1, за вектора-момент $\mathrm{mom}_O \boldsymbol{F}$ е в сила следното детерминантно представяне

$$\begin{aligned} \mathrm{mom}_O \boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= (yF_z - zF_y)\,\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\,\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\,\boldsymbol{k}\,, \end{aligned} \tag{11.3}$$

където $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ са трите орта (единичните вектори) на осите Ox, Oy и Oz, съответно, x, y и z са компонентите на $\boldsymbol{r}$, а F_x, F_y и F_z — компонентите на силата $\boldsymbol{F}$ по координатните оси. По-долу ще използваме многократно и формулата за разлагане на двойното векторно произведение[20]

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,. \tag{11.4}$$

§ 11.2. Момент на двоица. Нека $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ е *двоица*, т. е. система от две равни и антиуспоредни сили (§ 10.5). Равнината, определена от силите $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, се нарича *равнина на двоицата*, а разстоянието h между техните директриси — *рамо на двоицата*, вж. фиг. 11.2.

Въвеждаме вектора-момент (или просто момента) $\mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ на двоицата $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ по следния начин:

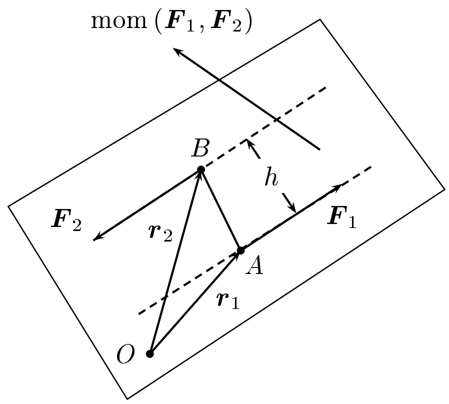
1) векторът $\mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ е свободен и е перпендикулярен на равнината на двоицата, като е насочен в посока, от която въртенето, определено от двоицата, е положително (т. е. обратно на часовниковата стрелка);

2) големината на момента е произведението от големината на силата $\boldsymbol{F}_1$ (или $\boldsymbol{F}_2$) и рамото, т. е.

$$|\mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)| = F_1 h\,. \tag{11.5}$$

Интуитивно, моментът $\mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ може да се интерпретира, подобно на момента на сила (§ 11.1), като характеристика на „въртеливия ефект“ на дадената двоица. Този ефект ще бъде толкова „по-голям“ колкото е по-голяма силата $F_1 = F_2$ и рамото h. Естествена характеристика на споменатия ефект тогава е произведението Fh, вж. (11.5). С посоката

[20] Да напомним мнемоничното правило $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \text{БАЦ} - \text{ЦАБ}$.



Фиг. 11.2. Момент на двоица

си векторът $\mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ определя на свой ред равнината на двоицата, с точност до произволна транслация. Но при такава транслация (без изменение на големината на силата и на рамото на двоицата) действието ѝ не се мени, както ще видим по-долу в Лема 11.2. Това обяснява защо именно $\mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ се въвежда като свободен вектор.

Основната цел на този параграф е да покажем, че векторът-момент представлява основната характеристика на една двоица. По-специално, ще покажем, че двоиците се събират като се събират техните моменти. Нещо повече, съвпадението на векторите-моменти на две двоици гарантира тяхната еквивалентност.

Преди да се заемем с доказателствата на тези два централни резултата на геометричната статика е необходимо да се спрем на няколко прости свойства на момента на двоица.

§ 11.3. Свойства на вектора-момент на двоица.

1) *Двоицата се „анулира“ (т. е. еквивалентна е на нула) тогава и само тогава, когато нейният вектор-момент е нулев:*

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) \sim (0) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) = 0\,. \tag{11.6}$$

Действително, ако $\mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) = 0$, то $F_1 h = 0$ и затова или $F_1 = F_2 = 0$, в който случай системата $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ е просто нулева, или $h = 0$. Във втория случай силите F_1 и F_2 имат обща директриса, т. е. те са равни и срещуположно насочени и съгласно Аксиома 9.2 образуват система, еквивалентна на нула.

Обратно, ако $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) \sim (0)$ то, съгласно същата Аксиома 9.2, силите $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ имат обща директриса. Това означава, че рамото $h = 0$ и, следователно, $F_1 h = 0$, т. е. $\mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) = 0$.

2) *Моментът на двоицата е равен на момента на всяка една от силите ѝ спрямо приложната точка на другата сила.*

Действително, от определението на момента на сила (11.1) веднага се проверява, че

$$\mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) = \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{F}_2 = \overrightarrow{BA} \times \boldsymbol{F}_1 \,. \tag{11.7}$$

3) *Моментът на двоицата е равен на сумата от моментите на силите ѝ спрямо произволен полюс O.*

Действително, нека O е произволен полюс. Тогава $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ (фиг. 11.2) и с помощта на (11.7) намираме

$$\mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) = \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{F}_2 = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_2 \,. \tag{11.8}$$

Да обърнем внимание, че в тази формула, както и в (11.7), моментите на силите се третират като свободни вектори, доколкото те се свързват с момента на двоица — свободен вектор по дефиниция. При такова третиране на момента на сила $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1$ което, внесено в (11.8), дава

$$\mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \,. \tag{11.9}$$

С това свойство 4) е доказано.

§ 11.4. Теорема за събиране на двоици.

Теорема 11.1. *Нека $(\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2)$ и $(\boldsymbol{F}''_1, \boldsymbol{F}''_2)$ са две двоици. Тогава тяхната сума е еквивалентна на една двоица $(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2)$, т. е.*

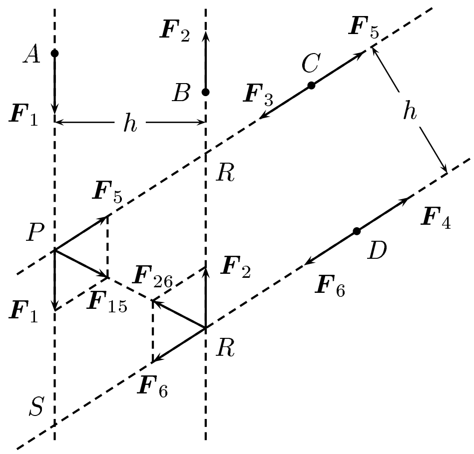
$$\left(\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2, \boldsymbol{F}''_1, \boldsymbol{F}''_2\right) \sim (\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) \ ,$$

чийто вектор-момент е векторната сума от векторите-моменти на двете изходни двоици,

$$\mathrm{mom}\,(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) = \mathrm{mom}\left(\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2\right) + \mathrm{mom}\left(\boldsymbol{F}''_1, \boldsymbol{F}''_2\right) \ . \tag{11.10}$$

Доказателството на тази теорема е просто следствие на следните три леми.

Лема 11.1. *Действието на двоицата не се изменя, ако я преместим по произволен начин в нейната равнина (без да изменяме силите и рамото на двоицата).*



Фиг. 11.3

Доказателство. Нека $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ е двоица с рамо h и приложни точки на $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ съответно A и B . Построяваме в равнината ѝ две успоредни прави, разстоянието между които е също h; в две произволни точки C и D на тези прави прилагаме по две сили $\boldsymbol{F}_3 = -\boldsymbol{F}_5$ и $\boldsymbol{F}_4 = -\boldsymbol{F}_6$, равни по големина на силите от двоицата (фиг. 11.3). Съгласно Аксиома 9.3 можем да добавим към дадената двоица четирите сили $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_4$, $\boldsymbol{F}_5$ и $\boldsymbol{F}_6$ без да изменим действието ѝ

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) \sim (\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4, \boldsymbol{F}_5, \boldsymbol{F}_6) \ . \tag{11.11}$$

Групираме шестте сили $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_6$ по следния начин. Хлъзгаме силата $\boldsymbol{F}_1$, по нейната директриса, докато приложната ѝ точка съвпадне с пресечната точка P на директрисата ѝ с тази на $\boldsymbol{F}_5$. Аналогично хлъзгаме $\boldsymbol{F}_5$ до точката P, вж. фиг. 11.3. По същия начин хлъзгаме $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_6$ по техните директриси до точката R. (Това е възможно, тъй като силата е хлъзгащ вектор, вж. Лема 3.1). Силите $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_5$, както и $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_6$, заменяме с техните равнодействащи

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_5) \sim \boldsymbol{F}_{15} \, , \quad (\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_6) \sim \boldsymbol{F}_{26} \, .$$

Системата от шест сили в (11.11) се свежда по този начин до четири

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) \sim (\boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4, \boldsymbol{F}_{15}, \boldsymbol{F}_{26}) \ . \tag{11.12}$$

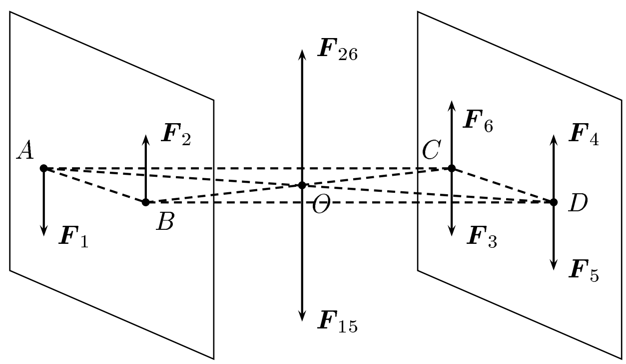
Но четириъгълникът $PQRS$ на фиг. 11.3 е очевидно ромб и затова $\boldsymbol{F}_{15}$ и $\boldsymbol{F}_{15}$ имат като обща директриса диагонала PR; те са равни по големина и противоположно насочени. По Аксиома 9.2, $(\boldsymbol{F}_{15}, \boldsymbol{F}_{15}) \sim (0)$ и прилагайки още един път Аксиома 9.3, от (11.12) намираме

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) \sim (\boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4) \ .$$

Остава да забележим, че $(\boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4)$ представлява изходната двоица $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$, хлъзната и завъртяна по произволен начин в равнината ѝ, при фиксирана големина на силата и на рамото. (Построената двойка успоредни прави е произволна, стига разстоянието между тях да е h. Произволен е също изборът на точките C и D върху тези прави.) С това лемата е доказана.

Упражнение 11.1. *В проведеното току-що доказателство двоицата при хлъзгането си се завърта така, че директрисите на* $(\boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4)$ *и на* $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ *не са успоредни. Проведете доказателството в случая, когато тези директриси са успоредни.*

Лема 11.2. *Действието на двоицата не се изменя, ако пренасем равнината на действието ѝ успоредно на себе си.*



Фиг. 11.4

Доказателство. Да пренесем мислено двоицата $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$ заедно с равнината ѝ на действие успоредно на себе си. Нека приложните точки A и B на силите $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ да заемат, съответно, положения C и D, вж. фиг. 11.4. Ясно е, че четириъгълникът $ABCD$ е успоредник. В точките C и D прилагаме по две равни и противоположно насочени сили $\boldsymbol{F}_3 = -\boldsymbol{F}_6$ и $\boldsymbol{F}_4 = -\boldsymbol{F}_5$ (фиг. 11.4), равни по големина на силите от изходната двоица и успоредни на тях. Прилагаме практически дословно разсъжденията от доказателство на Лема 11.1. Очевидно,

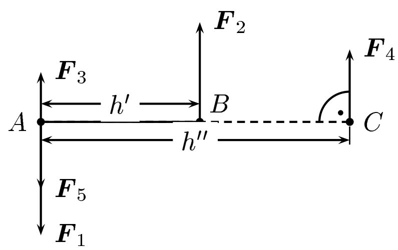
$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) \sim (\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4, \boldsymbol{F}_5, \boldsymbol{F}_6) \ . \tag{11.13}$$

Силите $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_5$ са успоредни и равни. Съгласно § 9.3, те имат равнодействаща $\boldsymbol{F}_{15}$, приложена в средата O на диагонала AD на успоредника $ABCD$, и равна по големина на $2F_1$. Аналогично, $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_6$ имат равнодействаща $\boldsymbol{F}_{26}$, приложена в средата на диагонала BC (т. е. в *същата* точка O, където е приложена $\boldsymbol{F}_{15}$), която по големина е равна на $2F_1$ и спрямо $\boldsymbol{F}_{15}$ е противоположно насочена. Следователно $\boldsymbol{F}_{15} = -\boldsymbol{F}_{26}$, т. е. $(\boldsymbol{F}_{15}, \boldsymbol{F}_{26}) \sim (0)$ и от (11.13) намираме

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) \sim (\boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4, \boldsymbol{F}_{15}, \boldsymbol{F}_{26}) \sim (\boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4) \ .$$

Доколкото изборът на успоредната равнина, в която пренасяме $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$, както и на точките C и D в нея (стига $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB}$ да са успоредни и равни), са произволни, лемата е доказана.

Лема 11.3. *Действието на двоицата не се изменя ако, при дадената посока на въртене на двоицата, изменим силите и рамото ѝ така, че тяхното произведение да остане постоянно.*



Фиг. 11.5

Доказателство. Хлъзгаме силите $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ по техните директриси, прилагайки ги, съответно, в точките A и B, така че $\overrightarrow{AB} \perp \boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$. Използваме правилото за редукция на успоредни сили (§ 9.3). Представяме $\boldsymbol{F}_2$ като равнодействаща на две успоредни сили $\boldsymbol{F}_3$ и $\boldsymbol{F}_4$ приложени, съответно, в точките A и C:

$$\boldsymbol{F}_2 \sim (\boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4) \ ,$$

вж. фиг. 11.5. Тогава

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) \sim (\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4) \ .$$

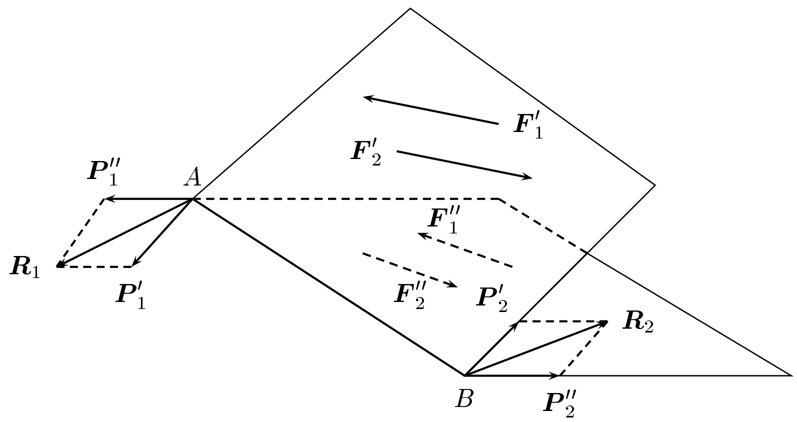
Силите $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_3$ имат равнодействаща $\boldsymbol{F}_5 = \boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_3$, с големина $F_5 = F_1 - F_3$.

Но $F_2 = F_3 + F_4$ по построение, т. е. $F_4 = F_1 - F_3$ (тъй като $F_1 = F_2$) и следователно силите F_4 и F_5 са равни и антиуспоредни, т. е. образуват двоица, която е еквивалентна на изходната

$$(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2) \sim (\boldsymbol{F}_4, \boldsymbol{F}_5) \ .$$

Съгласно „правилото на лоста“ (10.10)

$$\frac{F_4}{|AB|} = \frac{F_2}{|AC|} \ .$$



Фиг. 11.6

Но $|AB| = h'$ е рамото на двоицата $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2)$, а $|AC| = h''$ е рамото на еквивалентната двоица $(\boldsymbol{F}_4, \boldsymbol{F}_5)$, вж. фиг. 11.5. (Да напомним, че отсечката AC е перпендикулярна на директрисите на силите $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$.) Следователно $F_1 h' = F_4 h''$ и лемата е доказана.

Доказателство на теоремата за събиране на двоици. Ще разгледаме общия случай, когато равнините на двете двоици не са успоредни. Фиксираме отсечка AB върху пресечницата на равнините на двете двоици (фиг. 11.6). С помощта на Лема 11.1 и Лема 11.3 заменяме двоицата $(\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2)$ с еквивалентна двоица $(\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2)$ с рамо AB; аналогично, заменяме $(\boldsymbol{F}''_1, \boldsymbol{F}''_2)$ с еквивалентната двоица $(\boldsymbol{P}''_1, \boldsymbol{P}''_2)$ със същото рамо AB. (С други думи, привеждаме дадените двоици към общо рамо AB, хлъзгайки ги в техните равнини и изменяйки големината на силите за сметка на дължината на рамото.) По такъв начин

$$(\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2, \boldsymbol{F}''_1, \boldsymbol{F}''_2) \sim (\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \boldsymbol{P}''_1, \boldsymbol{P}''_2) \ . \tag{11.14}$$

При това, очевидно,

$$\begin{aligned} \operatorname{mom}(\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2) &= \operatorname{mom}(\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2) \ , \\ \operatorname{mom}(\boldsymbol{F}''_1, \boldsymbol{F}''_2) &= \operatorname{mom}(\boldsymbol{P}''_1, \boldsymbol{P}''_2) \ , \end{aligned} \tag{11.15}$$

тъй като при операциите, описани в Леми 11.1 и 11.3, векторите-моменти на съответните двоици не се изменят.

Силите $\boldsymbol{P}'_1$ и $\boldsymbol{P}''_1$ са приложени в точката A и затова имат равнодействаща $\boldsymbol{R}_1$. Аналогично, $\boldsymbol{P}'_2$ и $\boldsymbol{P}''_2$, като приложени в точката B, имат равнодействаща $\boldsymbol{R}_2$, т. е.

$$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{P}'_1 + \boldsymbol{P}''_1\,, \quad \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{P}'_2 + \boldsymbol{P}''_2\,. \tag{11.16}$$

Очевидно $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ са равни и антиуспоредни, т. е. образуват двоица, еквивалентна на сумата от двете дадени двоици

$$(\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2, \boldsymbol{F}''_1, \boldsymbol{F}''_2) \sim (\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2, \boldsymbol{P}''_1, \boldsymbol{P}''_2) \sim (\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2)\ ,$$

вж. (11.14).

Да пресметнем момента на двоицата $(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2)$. Съгласно (11.7), (11.15) и (11.16),

$$\begin{aligned} \mathrm{mom}\,(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) &= \overrightarrow{BA} \times \boldsymbol{R}_1 = \overrightarrow{BA} \times (\boldsymbol{P}'_1 + \boldsymbol{P}''_1) \\ &= \overrightarrow{BA} \times \boldsymbol{P}'_1 + \overrightarrow{BA} \times \boldsymbol{P}''_1 = \mathrm{mom}\,(\boldsymbol{P}'_1, \boldsymbol{P}'_2) + \mathrm{mom}\,(\boldsymbol{P}''_1, \boldsymbol{P}''_2) \\ &= \mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2) + \mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}''_1, \boldsymbol{F}''_2)\ , \end{aligned}$$

с което теоремата за събиране на двоици е доказана.

Упражнение 11.2. *Проведете доказателството на теоремата за събиране на двоици в случая, когато равнините на двете двоици са успоредни.*

§ 11.5. Условие за еквивалентност на двоици. За пълнота на изложението ще покажем, в заключение на този параграф, че моментът представлява определяща характеристика на една двоица по смисъла на следната теорема.

Теорема 11.2 (теорема за еквивалентност на двоици). *Ако векторите-моменти на две двоици са равни (като свободни вектори), то двоиците са еквивалентни.*

Доказателство. Доказателството отново е просто следствие на трите леми, доказани в § 11.4.

Нека $(\mathcal{S}') = (\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2)$ и $(\mathcal{S}'') = (\boldsymbol{F}''_1, \boldsymbol{F}''_2)$ са две двоици и нека

$$\mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2) = \mathrm{mom}\,(\boldsymbol{F}''_1, \boldsymbol{F}''_2)\ . \tag{11.17}$$

Първо, щом векторите-моменти съвпадат, то двете двоици, в частност, действат в успоредни равнини. Съгласно Лема 11.2 тогава можем да пренесем едната двоица заедно с равнината ѝ, да речем $(\mathcal{S}'')$, така че $(\mathcal{S}')$ и $(\mathcal{S}'')$ да действат в една и съща равнина $\mathcal{P}$ — равнината на $(\mathcal{S}')$.

Второ, използвайки Лема 11.1 „хлъзгаме“ една от двоиците, да речем пренесената вече $(\mathcal{S}'')$, в равнината $\mathcal{P}$ така че рамото ѝ да „легне“ върху това на $(\mathcal{S}')$, а силите $\boldsymbol{F}_1'$ и $\boldsymbol{F}_1''$ да имат обща директриса и посока.

Трето, използвайки Лема 11.3, заменяме двоицата $(\mathcal{S}'')$ с еквивалентна двоица $(\mathcal{T}) = (\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2)$, чието рамо h съвпада с рамото h' на $(\mathcal{S}')$, $h = h'$. Силите на новата двоица $(\mathcal{T})$ ще имат големина $T_1 = T_2$, така че

$$F_1'' h'' = T_1 h' \,, \tag{11.18}$$

съгласно същата лема. Но по условие

$$F_1' h' = F_1'' h'' \,, \tag{11.19}$$

тъй като векторите-моменти на $(\mathcal{S}')$ и $(\mathcal{S}'')$ съвпадат по условие не само по посока, но и по големина, вж. (11.17). От (11.18) и (11.19) сега следва

$$F_1' h' = T_1 h' \,, \quad \text{т. е.} \quad F_1' = T_1 \,.$$

Това означава, че двоицата $(\mathcal{T})$, „лягайки“ върху двоицата $(\mathcal{S}')$ след направените операции, *съвпада* с последната. Но $(\mathcal{T}) \sim (\mathcal{S}'')$ по построение и, следователно, $(\mathcal{S}') \sim (\mathcal{S}'')$. С това теоремата е доказана.