Глава 1

ПРЕДМЕТ НА МАТЕМАТИЧЕСКОТО МОДЕЛИРАНЕ. АНАЛИЗ НА РАЗМЕРНОСТИТЕ

§ 1. Предмет и основни идеи на математическото моделиране

§ 1.1. Понятие за математически модел. Физическите системи се наблюдават и изучават с оглед разбиране (доколкото това е възможно) на вътрешната им структура и на поведението им. За целта често е необходимо провеждането на подходящи експерименти, което в много случаи е нетривиално и изисква изобретателност и значителни средства.

Да отбележим веднага, че физическата система се наблюдава в интервали от време $[t_1, t_2] \in \Re$ и в област Ω на тримерното пространство. Интервалът от време (t_1, t_2) и областта Ω могат да бъдат, по принцип, и неограничени. Навсякъде в този курс времето и пространството се разбират и третират в класическия нютонов смисъл. Времето е абсолютно и тече навсякъде по един и същи начин, независимо от движението на телата. Пространството също е абсолютно, то е „вместилище“ и „арена“ на движещата се материя. Свойствата му са едни и същи във всички точки и не зависят от количеството присъстваща там материя. Съгласно айнщайновата теория на относителността това разбиране е само приближение, което е напълно приемливо за движения със скорости, много по-малки от скоростта на светлината.

След събирането на експерименталните данни, изучаването преминава на стадия на интерпретацията и предсказването на поведението на системата. За тази цел именно се строят математическите модели.

Най-общо, предназначението на всеки математически модел е да изясни:

1. *най-важните величини, определящи състоянието и поведението на една система и*

2. *количествените закономерности, т. е. математическите закони, на които се подчинява изменението на тези величини.*

По-специално, построяването на всеки конкретен модел включва два основни етапа:

A. *Идентифициране на* параметрите на състоянието $q_1, q_2, \dots, q_n$, *които характеризират състоянието на системата с приемлива за нашите цели точност.*

Що е това състояние зависи от конкретния контекст на моделирането и преследваните от нас цели. В най-простия пример, свързан с моделирането на движението на материална точка M под действието на външна сила, съответният параметър на състоянието е просто положението на точката, определено, например, с радиус-векторът ѝ спрямо фиксирана точка в пространството. Този пример ще разгледаме по-подробно в § 1.3, предвид принципната роля на появяващия се там фундаментален нютонов закон на динамиката, на който се подчинява движението на точката.

За биологична популация — параметрите q_i са количеството индивиди $N_1, N_2, \dots, N_k$ от определен вид.

За нагрято тяло основният параметър на състоянието е температурата, както и вектора на топлинния поток, вж. § 15.1.

За идеален газ параметрите на състоянието са налягането, обема и температурата,

В общия случай параметрите на състоянието са функции на основните независими променливи: времето t и пространствените координати

$$q_i = q_i(t, x_1, x_2, x_3)\,, \quad i = 1, 2, \dots, n\,. \tag{1.1}$$

Поради това q_i се наричат също и *зависими променливи*. Конкретният вид на зависимостите (1.1) се намира в рамките на даден модел след като се реши съответната моделна математическа задача.

B. *Идентифициране на* параметрите на системата, *т. е. на физическите величини, които характеризират свойствата на моделираната система, както и влиянието на обкръжението ѝ.*

Например, при моделирането на движението на за материална точка параметрите са нейната маса и действащата върху нея сила. Тук масата характеризира свойствата на моделираната система (точката), а силата — влиянието на обкръжението ѝ, т. е. отразява взаимодействието на точката с други тела. Параметрите на биологична популация са т. нар. коефициенти на прираст и на междувидово взаимодействие.

За всеки конкретен случай параметрите на системата се определят или чрез директно измерване върху изследваните обекти, или чрез сравнение между поведението на реалната система и предсказанията на модела.

Сега сме в състояние да дадем една достатъчно обща, макар и твърде формална, дефиниция на понятието математически модел, именно,

Дефиниция 1.1. ([16]) *Математическият модел е уравнение (или система от уравнения), което свързва параметрите на състоянието и техните производни (спрямо времето или спрямо пространствените координати). Уравнението, което дефинира модела, се нарича често* уравнение на състоянието.

Най-общо, уравнението на състоянието има следния схематичен вид

$$f(t, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots) = 0\,. \tag{1.2}$$

Многоточието след q_n може да включва производни на q_i, интегрални оператори, приложени върху тях или върху техни комбинации и т. н. Лявата страна на (1.2) включва, естествено, и параметрите на системата.

Уравнението (1.2) може да бъде също векторно или тензорно. Проектирането му върху съответните координатни оси в ще доведе до система от скаларни уравнения спрямо параметрите на състоянието. Към тях по правило се прибавят начални и гранични условия, които позволяват еднозначното определение на търсените параметри на състоянието във всяка конкретна задача. Решението на съответната система с подходящи начални и гранични условия конкретизира зависимостите (1.1), вж. примера в § 1.3 по-долу.

Горната дефиниция (1.2) касае, разбира се, *динамични модели*, в които времето t и скоростите $\dot{q}_i$ на изменение на параметрите на състоянието са от съществено значение за адекватното описание на изучаваната система. Следвайки Нютон, тук и навсякъде по-нататък означаваме диференцирането спрямо времето с точка над съответната функция, така че $\dot{q}_i = \mathrm{d}q_i/\mathrm{d}t$.

В *стационарните модели* времето и производните спрямо него, в частност, скоростите $\dot{q}_i$, не участват явно в уравнението на състоянието

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots) = 0 \tag{1.3}$$

и то се превръща във функционално съотношение между параметрите q_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Времето може да участва, обаче, неявно в (1.3), например, ако скоростта е един от параметрите q_i. Ако физическите закони, с които евентуално се комбинира (1.3), заедно с параметрите q_i, не съдържат явно или неявно времето, то моделът се нарича *статичен*. С такъв модел ще се сблъскаме в Гл. 3, при разглеждане на геометричната статика — условията за равновесие на система сили, приложени към абсолютно твърдо тяло.

Да отбележим специално, че често под модел се разбира единствено окончателната форма на уравнението (1.2), описващо разглежданото физично явление, например вълновото уравнение (за трептенията на прът или струна, вж. § 8) или уравнението на топлопроводността (за температурното поле в тяло, вж. § 15). Подобна гледна точка, разбира се, е оправдана в случаите, когато моделите имат чисто феноменологичен характер. Класически пример на подобни модели предлага популационната динамика, на която е посветена Глава 4 на настоящата книга. В тези модели скоростите на изменение $\dot{N}_i$ на броя на индивидите от всеки вид се свързват с броя $N_1, N_2, \ldots, N_k$ на всички индивиди в популацията на базата на чисто емпирични[1] и правдоподобни разсъждения, като зад тях не стоят фундаментални закономерности от типа на закона на Нютон. Подобен подход, разбира се, е полезен и оправдан, доколкото е в състояние да опише и прогнозира адекватно реалностите на популационната динамика.

В рамките на този курс ще предпочетем, където това е възможно, един „по-физичен“ подход към моделирането който, по мнение на автора, спомага за по-дълбокото осмисляне на съответните модели. Именно, под уравнение на модела (1.2) ще разбираме преди всичко съвкупността от връзките между параметрите на състоянието на системата, а не само окончателните уравнения за тези параметри. Например, за еластично тяло централен за нас ще бъде законът на Хук, свързващ напрежението и деформацията (§ 8); за топлопроводящо тяло подобна централна роля ще играе законът на Фурие, свързващ топлинния поток и градиента на температурата (§ 15). На свой ред тези уравнения се комбинират по подходящ начин с един или друг основен закон на физиката. Например, законът на Хук, комбиниран с втория закон на Нютон, води до уравнението на движението на еластично тяло, разгледано тук (§ 9) само в едномерния случай. Законът на Фурие, комбиниран със закона за топлопоглъщането[2] води до уравнението на топлопроводността, на което се подчинява полето на температурата в тялото (§ 15).

Да подчертаем, че като правило уравнение на състоянието е само

[1] В основата на популационната динамика е емпиричният факт, че една популация расте толкова по-бързо, колкото повече са индивидите в нея.

[2] Количеството топлина, погълнато от обем от тялото, е пропорционално на изменението на температурата на този обем.

крайният резултат на моделирането или, образно казано, „върхът на айсберга“. За да се достигне до него следва попътно да се изясни общата структура на изучаваните класове обекти, с цел класификация и свеждане до възможно най-простите (в определен смисъл). Трябва да се изяснят и осмислят и приетите, явно или неявно, предположения, довели до формулировката на уравненията на модела (1.2). Ако това не се направи предварително, съществува опасност моделът да се прилага към проблеми и явления, за които той по принцип е неприложим и това, рано или късно, доведе до нереалистични и даже абсурдни резултати. По-долу в Глава 2 ще илюстрираме това върху елементарната геометрична статика. За да стигнем до уравненията на равновесие на система от сили, действащи върху абсолютно твърдо тяло, първо ще се наложи да я сведем до най-проста такава. В други случаи е необходимо да се разработи специфичен математически апарат за успешното моделиране на кръг явления. С такава необходимост ще се сблъскаме в Глава 5 при изучаването на топлинните процеси в неравномерно нагрети тела. Нужният апарат[3] там е векторният анализ и набла-смятането на Хамилтън, които са изложени в § 14. Едва след това ще сме в състояние да се заемем по-детайлно с класическия модел на топлопроводността на Фурие. Всичко това представлява нетривиалната част на моделирането или, образно казано, „подводната част на айсберга“ която, както е известно, е много по-обширна и „дълбока“ (в прекия и преносен смисъл) от „върха“ му (в нашия контекст, от формалното само по себе си уравнение на състоянието (1.2).

§ 1.2. Обща схема на математическото моделиране. Основните и типични стъпки при моделирането на дадено явление са отбелязани в Схема 1.1, по-голямата част от която е заимствана от книгата [16, стр. 24]. Те едва ли се нуждаят от по-подробен допълнителен коментар, освен от няколко забележки.

Симулацията на физическата система е резултат от решаване на съответната моделна математическа задача с помощта на подходящи математически методи. Нека специално отбележим, че много от най-красивите методи в чистата математика са се появили точно при решаването на класическите задачи на динамиката, балистиката, трептенията на струна, топлопроводността и пр.

При верификацията се прави сравнение на предсказаните резултати

[3] Да отбележим, че моделирането на поведението на непрекъснатите (деформируемите) среди, което тук няма да бъде засегнато, изисква предварително въвеждането и усвояването на тензорната алгебра и тензорния анализ.

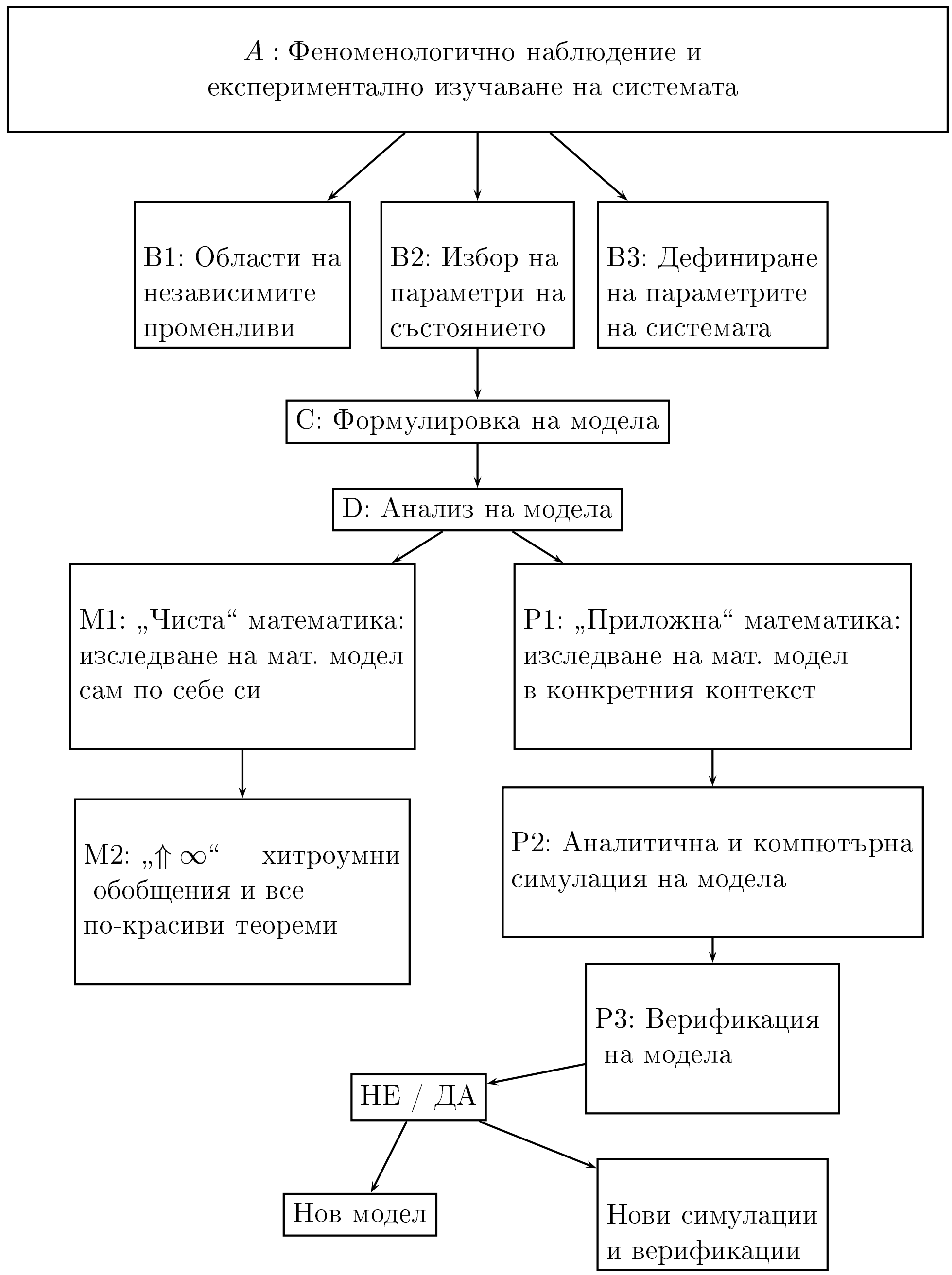

A : Феноменологично наблюдение и експериментално изучаване на системата
B1: Области на независимите променливи
B2: Избор на параметри на състоянието
B3: Дефиниране на параметрите на системата
C: Формулировка на модела
D: Анализ на модела
M1: „Чиста“ математика: изследване на мат. модел сам по себе си
P1: „Приложна“ математика: изследване на мат. модел в конкретния контекст
M2: „⇑ ∞“ — хитроумни обобщения и все по-красиви теореми
P2: Аналитична и компютърна симулация на модела
P3: Верификация на модела
НЕ / ДА
Нов модел
Нови симулации и верификации

Схема 1.1

с наблюденията и експерименталните данни. Ако има съвпадения между предсказанията и експеримента, моделът се потвърждава. Ако съвпадение няма, изследователят се връща към изходните предпоставки и съотношения, за да ги осмисли, ревизира и уточни. Доколкото универсални модели не съществуват[4], рано или късно верификациите ще покажат съществуването на ситуации, в които моделът е неприложим. Това далеч не винаги е причина, обаче, той да се отхвърли категорично или да се усложнява и обобщава. Верификациите по-скоро позволяват да се очертаят границите на приложимост на модела. При това на практика е удобно да се работи с няколко по-прости модела, всеки от които има ясни и добре проверени области на приложимост, отколкото с един по-общ, но за сметка на това по-сложен модел.

Специално ще обърнем внимание на момента след формулировката на модела (вж. „правоъгълничето“ D в Схема 1.1), където става разделянето на „чистата“ от „приложната“ математика. Чистият математик игнорира, „забравя“ произхода на проблема, и се концентрира *единствено и изцяло* върху математическия проблем сам по себе си. Приложният математик през цялото време се съобразява с *конкретния физически контекст* и възможното *прилагане* на своите резултати. При това той често привлича качествени, приближени и далеч не винаги строги методи,[5] стига те да са ефективни и да водят до реалистични и смислени резултати.

Да отбележим в заключение на този пункт, че математическото моделиране не е единственият начин за изучаване на конкретни физически системи. В последните години, в резултат на взривообразното увеличаване на процесорната мощ, паметта и бързодействието на съвременните изчислителни комплекси, все по-често се използва и т. нар. *директно компютърно моделиране*. Но колкото и любопитни да са получените по този път резултати, цялостното им осмисляне е невъзможно извън рамките на един адекватен математически модел.

§ 1.3. Пример — динамика на материална точка. Да илюстрираме изложената в § 1.1 обща схема посредством класическия пример на движение на материална точка M (тяло с пренебрежимо малки размери) под действието на приложена към нея сила $\boldsymbol{F}$, вж. фиг. 1.1. *Стъпка* A — параметърът на състоянието, в случая положението на точката, се задава с радиус-вектора ѝ $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ спрямо неподвижен полюс O.

Нека подчертаем, че тук и навсякъде по-нататък ще означаваме векторите с „получерните“ букви $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{F}$ и т. н. Дължините на съответните вектори ще означаваме със същата буква, но изписана с курсив, напри-

[4]Това твърдение може да се разглежда като единственият „универсален“ закон при моделирането на природните явления.

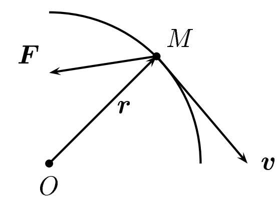
[5]От много от тези методи чистият математик може да се „ужаси“, при това с пълно, от негова гледна точка, право.

мер,

$$r = |\boldsymbol{r}|\,, \quad a = |\boldsymbol{a}|\,, \quad F = |\boldsymbol{F}| \quad \text{и т. н.}$$

Радиус-векторът в случая е функция само на времето t:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)\,.$$



Фиг. 1.1. Движение на точка

Стъпка C — параметрите на системата са масата на точката m, която е мярка за нейната инертност и приложената сила $\boldsymbol{F}$, която е мярка за взаимодействието на точката с обкръжаващите я тела. Да отбележим, че силата, най-общо казано, е променлива не само във времето. Тя може да зависи и от положението на точката (такава е, например, силата на привличането, пружинната сила и др.). Така наречените съпротивителни сили, възникващи при движение на тяло в течност или в газ, зависят съществено от скоростта на движението. Това означава, че в общия случай

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\,.$$

където

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

е векторът–скорост на точката.

И сега идва финалният момент — формулирането на математическия модел. В случая това е вторият закон на Нютон, изразяващ уравнението на „състоянието“ на точката

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}\,. \tag{1.4}$$

В декартова координатна система $Ox_1x_2x_3$ и при постоянна маса на точката векторното уравнение (1.4) води, след проектиране върху координатните оси, до системата от три обикновени диференциални уравнения

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1\left(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3\right)\,, \\ m\ddot{x}_2 &= F_2\left(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3\right)\,, \\ m\ddot{x}_3 &= F_3\left(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3\right)\,, \end{aligned} \tag{1.5}$$

която следва да се решава при съответните начални условия

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x_{10}\,, \quad x_2 = x_{20}\,, \quad x_3 = x_{30}\,, \\
&\dot{x}_1 = \dot{x}_{10}\,, \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_{20}\,, \quad \dot{x}_3 = \dot{x}_{30}\,, \quad \text{при} \quad t = t_0\,,
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

т. е. при зададено начално положение $\boldsymbol{r}_0$ и начална скорост $\boldsymbol{v}_0$ в момент $t = t_0$. Да напомним, че системата уравнения (1.5) заедно с началните условия (1.6) представлява т. нар. *задача на Коши*.

След поставянето на задачата на Коши (1.5), (1.6) изследователят може да тръгне, както вече споменахме[6], по двата пътя след „правоъгълничето“ D в Схема 1.1. Първият е чисто математическият — търсене на условия за локално и/или глобално съществуване на решението на задачата на Коши (1.5), (1.6) (спомнете си теоремите на Пикар или на Пеано), качествено изследване на решението, търсене на периодични решения, и пр. и пр. Всичко това е предмет на съвременната теория на обикновените диференциални уравнения.

Вторият път е приложният. Тук задачата (1.5), (1.6) се решава за конкретни сили и конкретни механични проблеми (едномерно движение, осцилации, движение на планета в нютоново поле и пр. и пр.) Всичко това е предмет на класическата нютонова механика.

Идеалът, разбира се, е в комбинацията и съчетаването на споменатите два пътя на разсъждения и изследвания. Това е по силите на блестящият математик–формалист, притежаващ в същото време дълбоко разбиране, интуиция и афинитет към приложните задачи. Такива са били класиците Нютон, Лайбниц, Хюйгенс, Якоб, Йоан и Даниил Бернули, Ойлер, Фурие, Коши, Стокс, Максуел, а и редица други, с чиито идеи, модели и резултати ще се сблъскваме многократно по-нататък.

[6]Въпросът кой от тях е по-добър или за предпочитане е безсъдържателен, тъй като отговорът му зависи от поставените цели, наклонностите и от личния вкус. А за вкусовете, както е известно, не се спори. Още повече, че „хубавата“ математика рано или късно намира нетривиални и дълбоки приложения. Да споменем само един класически пример — 20 века след като Аполоний в древна Гърция въвежда и изследва коничните сечения, воден единствено от любопитството си на „чист“ математик, Нютон показва, че тези сечения представляват траекториите на планетите в нютоновото поле на привличане на Слънцето. Обратно твърдение е също вярно — както показва историческият опит интересният и съдържателен модел поражда и стимулира развитието на „хубавата“ математика. (Да си припомним само, че класическият анализ в голяма степен е плод на предизвикателствата, поставени от класическата и небесната механика.)