§ 9. Група на симетрия на тензор. Изотропни тензори

9.1. Група на симетрия на тензор. Нека $\boldsymbol{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_n)$ и $\boldsymbol{T} \in \underset{p}{\otimes} \mathcal{E}_n$, като

$$\boldsymbol{T} = t^{i_1 \ldots i_p} \boldsymbol{a}_{i_1} \ldots \boldsymbol{a}_{i_p}$$

в даден полиаден базис. Разглеждаме тензора

$$\boldsymbol{U}^p(\boldsymbol{T}) = t^{i_1 \ldots i_p} \, (\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{a}_{i_1}) \cdots (\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{a}_{i_p}) \tag{9.1}$$

— това е тензор със *същите* компоненти като $\boldsymbol{T}$ но в полиадния базис, породен от векторите $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{a}_i$, които са „завъртяни“ с помощта на ортогоналното преобразование $\boldsymbol{U}$.

Операцията

$$\boldsymbol{T} \longrightarrow \boldsymbol{U}^p(\boldsymbol{T}) \tag{9.2}$$

е линейно преобразование в пространството от p-валентни тензори, което се нарича *подобие*. Причината е, че при $p = 2$ това е добре познатото от линейната алгебра подобие на матрици. Наистина

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}^2(\boldsymbol{T}) &= t^{ij} \, (\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{a}_i)(\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{a}_j) = t^{ij} \, (\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{a}_i)(\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{U}^*) \\ &= \boldsymbol{U} \cdot \Big(t^{ij} \, \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j \Big) \cdot \boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{U}^{-1}. \end{aligned}$$

За даден тензор $\boldsymbol{T} \in \underset{p}{\otimes} \mathcal{E}_n$ въвеждаме съвкупността от ортогонални преобразования

$$G_T = \Big\{ \boldsymbol{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_n) \,\Big|\, \boldsymbol{U}^p(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T} \Big\} \tag{9.3}$$

— това е очевидно група (тъй като винаги единичният тензор $\boldsymbol{I} \in G_T$, а също, ако $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \in G_T$, то и $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{V} \in G_T$; проверете!). G_T се нарича *група на симетрия* на тензора $\boldsymbol{T}$. Ако имаме два базиса, които се получава един от друг с помощта на ортогоналното преобразование $\boldsymbol{U} \in G_T$, то тензорът $\boldsymbol{T}$ има *едни и същи* компоненти и в двата базиса.

Нека $\boldsymbol{T} \in \underset{2k}{\otimes} \mathcal{E}_n$ е тензор от четна валентност. Да разгледаме инверсията $-\boldsymbol{I} : \boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}$. Очевидно

$$\begin{aligned} (-\boldsymbol{I})^{2k}(\boldsymbol{T}) &= t^{i_1 \ldots i_{2k}} (-\boldsymbol{a}_{i_1}) \cdots (-\boldsymbol{a}_{i_{2k}}) \\ &= t^{i_1 \ldots i_{2k}} \boldsymbol{a}_{i_1} \cdots \boldsymbol{a}_{i_{2k}} = \boldsymbol{T} \, . \end{aligned} \tag{9.4}$$

Това означава, че инверсията *винаги* е елемент на симетрия на тензор от четна валентност:

$$-\boldsymbol{I} \in G_T\,, \quad \forall\, \boldsymbol{T} \in \underset{2k}{\otimes}\mathcal{E}_n\,. \tag{9.5}$$

Нека сега $\boldsymbol{T} \in \underset{2k+1}{\otimes}\mathcal{E}_n$ е тензор от нечетна валентност. Аналогично на (9.4) имаме

$$\begin{aligned}(-\boldsymbol{I})^{2k+1}(\boldsymbol{T}) &= t^{i_1\ldots i_{2k+1}}(-\boldsymbol{a}_{i_1})\cdots(-\boldsymbol{a}_{i_{2k+1}})\\ &= -\,t^{i_1\ldots i_{2k+1}}\boldsymbol{a}_{i_1}\cdots\boldsymbol{a}_{i_{2k+1}} = -\boldsymbol{T}\,.\end{aligned} \tag{9.6}$$

Следователно инверсията *не може* да бъде елемент на симетрия на никой ненулев тензор от нечетна валентност. С други думи

$$-\boldsymbol{I} \in G_T \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{T} = 0\,, \quad \text{ако } \boldsymbol{T} \in \underset{2k+1}{\otimes}\mathcal{E}_n\,. \tag{9.7}$$

9.2. Изотропни тензори. По-нататък за простота и нагледност ще разглеждаме единствено тензорите над тримерното пространство $\mathcal{E}_3$.

Дефиниция 9.1. *Тензорът* $\boldsymbol{T} \in \mathcal{T}(\mathcal{E}_3)$ *се нарича* изотропен, *ако*

$$G_T = \mathcal{O}^+\left(\mathcal{E}_3\right)\,. \tag{9.8}$$

(Напомняме, че $\mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3)$ е собствено-ортогоналната група на пространството $\mathcal{E}_3$, включваща „чистите“ ротации, вж. § 4.11.)

От дефиницията (9.3) на групата на симетрия е ясно, че изотропният тензор има едни и същи компоненти във всички декартови координатни системи. Това обяснява важността на понятието изотропност и „оправдава“ разглежданията, които ще проведем по-нататък в този параграф. Основната причина се състои в това, че изотропността се появява по естествен начин в механиката на непрекъснатите среди. Именно, ако знаем, че свойствата на средата са едни и същи във всички направления (не зависят от ориентацията на образеца, „изрязан“ от средата), то тензорите, характеризиращи поведението на средата (тензор на еластичните модули, „вискозният“ тензор и т. н.), трябва също да не зависят от ориентацията, т. е. те трябва да бъдат изотропни. Както ще видим това драстично опростява структурата им и броя на материалните постоянни, характеризиращи средата.

Тривиален пример на изотропен тензор е единичният тензор $\boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{I}\,, \quad \forall\, \boldsymbol{U} \in \mathcal{O}\left(\mathcal{E}_3\right)\,,$$

просто по дефиниция на ортогоналния тензор, вж. (4.54). Очевидно е също, че сферичните тензори $\boldsymbol{T} = \lambda \boldsymbol{I}$ са също изотропни. По-долу в § 9.3 ще покажем, че с тях се изчерпват всички изотропни двувалентни тензори.

Ясно е, че ако изотропният тензор $\boldsymbol{T}$ е от четна валентност, то

$$G_T = \mathcal{O}\left(\mathcal{E}_3\right), \quad \boldsymbol{T} \in \bigotimes_{2k} \left(\mathcal{E}_3\right). \tag{9.9}$$

тъй като $-\boldsymbol{I} \in G_T$, вж. (9.5). Ако обаче $\boldsymbol{T}$ е от нечетна валентност, то дефиницията (9.9) е неприемлива — в този случай $-\boldsymbol{I} \in G_T$, което е възможно единствено ако тензорът $\boldsymbol{T}$ е нулев, съгласно (9.7). Това обяснява защо в дефиницията (9.8) намесихме собствено-ортогоналната група $\mathcal{O}^+\left(\mathcal{E}_3\right)$, а не пълната ортогонална група $\mathcal{O}\left(\mathcal{E}_3\right)$.

Нека $\boldsymbol{T} \in \bigotimes_{3} \mathcal{E}_n$ е изотропен тензор. Да разгледаме полилинейната му форма

$$\boldsymbol{T}\left(\overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \dots, \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right) = t^{i_1 i_2 \dots i_p} \left(\boldsymbol{a}_{i_1} \cdot \overset{(1)}{\boldsymbol{x}}\right) \cdots \left(\boldsymbol{a}_{i_p} \cdot \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right),$$

вж. (8.2). Нека $\boldsymbol{U} \in \mathcal{O}^+\left(\mathcal{E}_3\right)$. Да „завъртим“ векторите $\overset{(k)}{\boldsymbol{x}}$, $k = 1, 2, \dots, p$, с помощта на тензора $\boldsymbol{U}$

$$\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{U} \cdot \overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \dots, \boldsymbol{U} \cdot \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right) = t^{i_1 i_2 \dots i_p} \left(\boldsymbol{a}_{i_1} \cdot \left(\boldsymbol{U} \cdot \overset{(1)}{\boldsymbol{x}}\right)\right) \cdots \left(\boldsymbol{a}_{i_p} \cdot \left(\boldsymbol{U} \cdot \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right)\right).$$

Но

$$\boldsymbol{a}_{i_k} \cdot \left(\boldsymbol{U} \cdot \overset{(k)}{\boldsymbol{x}}\right) = \left(\boldsymbol{U}^* \cdot \boldsymbol{a}_{i_k}\right) \cdot \overset{(k)}{\boldsymbol{x}}, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

и затова

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{U} \cdot \overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \dots, \boldsymbol{U} \cdot \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right) \\ &= t^{i_1 i_2 \dots i_p} \left(\left(\boldsymbol{U}^* \cdot \boldsymbol{a}_{i_1}\right) \cdot \overset{(1)}{\boldsymbol{x}}\right) \cdots \left(\left(\boldsymbol{U}^* \cdot \boldsymbol{a}_{i_p}\right) \cdot \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right) \\ &= U^{*p}(\boldsymbol{T}) \left(\overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \dots, \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right). \end{aligned}$$

Но щом $\boldsymbol{T}$ е изотропен, то $U^{*p}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T}$, $\forall\, \boldsymbol{U}^* \in \mathcal{O}^+\left(\mathcal{E}_3\right)$, което означава, че

$$\boldsymbol{T}\left(\overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \dots, \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right) = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{U} \cdot \overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \dots, \boldsymbol{U} \cdot \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right), \quad \forall\, \boldsymbol{U} \in \mathcal{O}^+\left(\mathcal{E}_3\right). \tag{9.10}$$

С други думи полилинейната форма на тензора $\boldsymbol{T}$ е *инвариант* на системата от векторите-аргументи $\left(\overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \dots, \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right)$ — тя остава неизменна, както и да „въртим“ тази система с помощта на произволен ортогонален тензор $\boldsymbol{U} \in \mathcal{O}^{+}(\mathcal{E}_3)$.

Провеждайки в обратен ред горните разсъждения се убеждаваме, че инвариантността (9.10) на полилинейната форма на тензора $\boldsymbol{T}$ влече (9.8). Това означава, че (9.10) може да се използва като дефиниция на изотропността на тензора $\boldsymbol{T}$, еквивалентна на (9.8).

На свой ред от (9.10) следва, че p-линейната форма $\boldsymbol{T}\left(\overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \ldots, \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right)$ зависи само от p-едъра $\left(\overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \ldots, \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right)$, а не от неговата ориентация, т. е. представлява функция единствено на дължините на векторите $\overset{(k)}{\boldsymbol{x}}$, определени чрез скаларните произведения $\overset{(k)}{\boldsymbol{x}} \cdot \overset{(k)}{\boldsymbol{x}}$, и от ъглите между тях, зададени (при вече известни дължини на тези вектори) от скаларните произведения $\overset{(r)}{\boldsymbol{x}} \cdot \overset{(s)}{\boldsymbol{x}}$, $k, r, s = 1, \ldots, p$, $r \neq s$, или

$$\boldsymbol{T}\left(\overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \ldots, \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right) = \boldsymbol{T}\left(\overset{(i)}{\boldsymbol{x}} \cdot \overset{(j)}{\boldsymbol{x}}\right), \quad i, j = 1, \ldots, p, \tag{9.11}$$

в случая на тензор от четна валентност (Забележете, че дясната страна на (9.11) е инвариантна спрямо пълната ортогонална група $\mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$, което е невъзможно за ненулев тензор от нечетна валентност.)

9.3. Изотропни двувалентни тензори. Нека $\boldsymbol{T} \in \mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3$ е изотропен, $G_T = \mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$. Както отбелязахме в § 4.9 всеки двувалентен тензор над тримерното пространство има поне един собствен вектор

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a}.$$

Използваме изотропността на $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{U}^* \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a},$$

или

$$\boldsymbol{T} \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{a}) = \lambda (\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{a}), \quad \forall \boldsymbol{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_3),$$

вж. (4.54). Последното равенство означава, че освен вектора $\boldsymbol{a}$, *всички* вектори $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{a}$, $\forall \boldsymbol{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$, са собствени за тензора $\boldsymbol{T}$, съответстващи при това на едно и съща собствена стойност λ. Но при фиксирано $\boldsymbol{a}$ краят на вектора $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{a}$ „замита“ цялата сфера с радиус $|\boldsymbol{a}|$, когато $\boldsymbol{U}$ „пробягва“ цялата ортогонална група $\mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$. Оттук

$$\boldsymbol{T} = \lambda \boldsymbol{I} \quad \text{или} \quad t_{ij} = \lambda \delta_{ij} \tag{9.12}$$

в декартова система. Следователно *единствените изотропни двувалентни тензори са сферичните*, чиято матрица е пропорционална на единичната във всяка декартова система. С други думи, ако $\boldsymbol{T} \in \mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3$, то

$$G_T = \mathcal{O}\,(\mathcal{E}_3) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{T} = \lambda \boldsymbol{I}\,. \tag{9.13}$$

Ще се спрем сега на още едно доказателство на (9.13). То има това важно качество, че се обобщава лесно за поливалентния случай (§ 9.7), а освен това не използва тримерността на изходното пространство.

Нека отново $\boldsymbol{T}$ е изотропен двувалентен тензор. Разглеждаме билинейната му форма $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{y}$. Предвид казаното в § 9.2, тя е инвариант на двойката вектори $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$, т. е.

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,,\quad \forall\,\boldsymbol{U}\in\mathcal{O}\,(\mathcal{E}_3)\;,\;\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{E}3\,,$$

и затова

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\,, \tag{9.14}$$

вж. (9.11). Но $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ зависи линейно от $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Този факт изключва зависимостта на $\boldsymbol{T}$ от $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}$ в (9.14), като оставя само скаларното произведение $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{y} = \lambda\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \lambda\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{y}\,,\quad \forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{E}_n\,,$$

т. е. $\boldsymbol{T} = \lambda\boldsymbol{I}$.

9.4. Изотропни тензори от четна валентност. Проведеното току-що доказателство за общия вид на двувалентния изотропен тензор се обобщава лесно и за тензори от произволна *четна* валентност.

За нагледност ще разгледаме първо четиривалентния случай, когато тензорът $\boldsymbol{H} \in \underset{4}{\otimes}\mathcal{E}_3$ е изотропен. Съгласно (9.10) 4-линейната му форма $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})$ е изотропна и поради това зависи само от скаларните произведения

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}\,,\quad \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}\,,\quad \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{z}\,,\quad \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}\,,\quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\,,\\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}\,,\quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w}\,,\quad \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}\,,\quad \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{w}\,,\quad \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{w}\,,\end{gathered}$$

вж. (9.11). Полилинейността на $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})$ изключва зависимостта от дължините на векторите $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{w}$ и оставя само събираеми, съдържащи скаларните произведения на различните аргументи, в които всеки един от тях влиза само по веднъж

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) &= \lambda_1\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\,(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{w})\\ &\quad + \lambda_2\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})\,(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{w}) + \lambda_3\,(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{w})\,(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z})\,.\end{aligned} \tag{9.15}$$

Но това е 4-формата на тензора, който в декартова система има компоненти

$$H_{ijpq} = \lambda_1\, \delta_{ij}\delta_{pq} + \lambda_2\, \delta_{ip}\delta_{jq} + \lambda_3\, \delta_{iq}\delta_{jp}\,, \tag{9.16}$$

а това очевидно е линейна комбинация на изомерите на тензора $\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}$, чийто компоненти са $\delta_{ij}\delta_{pq}$.

Преди да преминем към обобщението на горното разсъждение за произволни тензори от четна валентност, да припомним (§ 8.6), че четиривалентният тензор $\boldsymbol{H}$ определя линейно преобразование в пространството от двувалентни чрез контракцията си $\boldsymbol{H} : \boldsymbol{T}$ по две двойки индекси. Ако тензорът $\boldsymbol{H}$ освен това е и изотропен, то

$$s_{ij} = H_{ijpq}t_{qp} = \lambda_1\, \delta_{ij}t_{\alpha\alpha} + \lambda_2\, t_{ij} + \lambda_3\, t_{ji} \qquad \left(\textstyle\sum_{p,q,\alpha}\right)\,,$$

както следва от (9.16), или

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{H} : \boldsymbol{T} = \lambda_1\, \boldsymbol{I}\, \mathrm{tr}\, \boldsymbol{T} + \lambda_2\, \boldsymbol{T} + \lambda_3\, \boldsymbol{T}^*\,. \tag{9.17}$$

В частност, ако тензорът $\boldsymbol{T}$ е симетричен, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^*$, то образът му $\boldsymbol{S}$ също е симетричен и

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{H} : \boldsymbol{T} = \lambda_1\, \boldsymbol{I}\, \mathrm{tr}\, \boldsymbol{T} + 2\mu\, \boldsymbol{T}\,, \tag{9.18}$$

където сме положили $\lambda = \lambda_1$, $2\mu = \lambda_2 + \lambda_3$.

Както ще видим по-нататък при подходяща механична интерпретация на тензорите $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{T}$, съотношението (9.18) ще се сведе до закона на Хук за деформирането на линейно еластично и изотропно тяло или до закона на Навие-Стокс за течението на вискозна течност.

Да отбележим също, че предположението за изотропност на тензора драстично опростява структурата му и броят на параметрите, които го характеризират. Например, броят на компонентите на двувалентния тензор (над $\mathcal{E}_3$) е $3^2 = 9$, но ако той е изотропен, за задаването му е необходима само една константа, вж. (9.13). Аналогично, четиривалентният тензор се задава с $3^4 = 81$ компоненти в общия случай, но ако той е изотропен, само три константи са нужни за определянето му, вж. (9.17).

Нека сега $\boldsymbol{T} \in \bigotimes_{2p} \mathcal{E}_3$ е изотропен тензор от четна валентност. Аналогично на четиривалентния случай, билинейната му форма $\boldsymbol{T}\left(\overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \ldots, \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right)$ е линейна комбинация на

$$\left(\overset{(1)}{\boldsymbol{x}} \cdot \overset{(2)}{\boldsymbol{x}}\right) \left(\overset{(3)}{\boldsymbol{x}} \cdot \overset{(4)}{\boldsymbol{x}}\right) \cdots \left(\overset{(2p-1)}{\boldsymbol{x}} \cdot \overset{(2p)}{\boldsymbol{x}}\right) \tag{9.19}$$

и на аналогични скаларни произведения, получени от (9.19) чрез произволни пермутации на индексите. Това означава, че $\boldsymbol{T}$ е линейна комбинация на изомерите на тензора

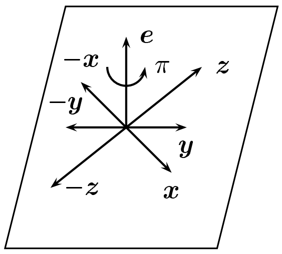
$$\underbrace{\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{I}}_{p}\,, \tag{9.20}$$

тъй като $2p$-линейната форма на последния съвпада с (9.19). В декартова система тензорът (9.20) има компоненти

$$\delta_{i_1 i_2}\delta_{i_3 i_4}\ldots\delta_{i_{2p-1}i_{2p}}\,, \tag{9.21}$$

което означава, че декартовите компоненти на произволен изотропен тензор от четна валентност са линейни комбинации на изомерите на (9.21).

Частните случаи на това твърдение за двувалентен и за четиривалентен тензори бяха вече установени по-горе, вж. (9.12) и (9.16).



Фиг. 9.1

9.5. Изотропни тривалентни тензори. Отбелязваме преди всичко, че съществува поне един изотропен тривалентен тензор и той е алтерниращият. Това следва от формулата (8.29), съгласно която трилинейната форма $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ на $\boldsymbol{E}$ е пропорционална на ориентирания обема на паралелепипеда $V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$, построен върху векторите $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$. Но този обем е инвариантен спрямо произволни ротации

$$V(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{x},\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{y},\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{z}) = V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\,,$$

$\forall\boldsymbol{U} \in \mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3)$ и следователно същото свойство притежава и трилинейната форма $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$. Съгласно § 9.2 оттук следва изотропността на алтерниращия тензор $\boldsymbol{E}$, вж. (9.10).

Нека сега $\boldsymbol{T} \in \mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3$ е произволен тривалентен изотропен тензор. Ще покажем, че той е пропорционален на алтерниращия.

Разглеждаме трилинейната форма $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ на тензора $\boldsymbol{T}$. Забелязваме че тя се анулира, ако аргументите ѝ са компланарни. За да се убедим в това, разглеждаме ротацията $\boldsymbol{U}^{\mathrm{e}}$ на ъгъл π около вектора $\boldsymbol{e}$, перпендикулярен на равнината, в която лежат векторите $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$, вж. фиг. 9.1. Очевидно $\boldsymbol{U}^{\mathrm{e}} \in \mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3)$ е собствено ортогонално преобразование и

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}\,,\quad \boldsymbol{U}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y}\,,\quad \boldsymbol{U}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{z}\,.$$

Затова

$$\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{U}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{U}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{y},\, \boldsymbol{U}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{z}\right) = -\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\,. \tag{9.22}$$

От изотропността на $\boldsymbol{T}$ следва обаче, че

$$\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{U}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{U}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{y},\, \boldsymbol{U}^{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{z}\right) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \tag{9.23}$$

Сравнението на (9.22) и (9.23) показва, че

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0\,, \quad \text{ако } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \text{ са компланарни}\,. \tag{9.24}$$

Нека $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ е ортонормиран базис. Полагаме

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = -\lambda \tag{9.25}$$

Паралелепипедът, определен от векторите $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$, е очевидно единичният куб, чийто обем е единица, $V(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$. Поради това (9.25) може да се препише като

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = -\lambda V(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\,. \tag{9.26}$$

Оттук

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = -\lambda V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\,, \\ &\boldsymbol{x} = \mu_1 \boldsymbol{e}_1\,, \quad \boldsymbol{y} = \mu_2 \boldsymbol{e}_2\,, \quad \boldsymbol{z} = \mu_3 \boldsymbol{e}_3\,, \end{aligned} \tag{9.27}$$

което означава, че стойността $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ на трилинейната форма на тензора $\boldsymbol{T}$ е пропорционална на обема на правоъгълния паралелепипед, построен върху взаимно-перпендикулярните вектори $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$.

Остана да покажем, че (9.27) е в сила за произволна тройка вектори $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$, а не само за взаимно-перпендикулярните. За целта да „скосим“ правоъгълния паралелепипед, като прибавим, например, към $\boldsymbol{z} = \mu_3 \boldsymbol{e}_3$ вектора $\chi_1 \boldsymbol{e}_1 + \chi_2 \boldsymbol{e}_2$. Височината на паралелепипеда (по оста x_3) няма да се измени, както и обемът му

$$V\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} + \chi_1 \boldsymbol{e}_1 + \chi_2 \boldsymbol{e}_2\right) = V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\,, \quad \forall\, \chi_1,\, \chi_2 \in \Re\,.$$

Но и трилинейната форма на разглеждания тензор $\boldsymbol{T}$ също няма да се измени

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} + \chi_1 \boldsymbol{e}_1 + \chi_2 \boldsymbol{e}_2\right) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \\ &+ \underline{\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \chi_1 \boldsymbol{e}_1 + \chi_2 \boldsymbol{e}_2\right)} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\,, \quad \forall\, \chi_1,\, \chi_2 \in \Re\,, \end{aligned}$$

тъй като векторите $\boldsymbol{x} = \mu_1 \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{y} = \mu_2 \boldsymbol{e}_2$ и $\chi_1 \boldsymbol{e}_1 + \chi_2 \boldsymbol{e}_2$ са компланарни и подчертаният член, съгласно (9.24), се анулира.

Скосявайки паралелепипеда по аналогичен начин и в останалите две координатни равнини се убеждаваме, че (9.27) е в сила за произволна тройка вектори $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$, а не само за взаимно перпендикулярни. Привличаме още един път формулата (8.29)

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = -\lambda V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \lambda \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}), \quad \forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in \mathcal{E}_3 .$$

Но това означава, че ако $\boldsymbol{T} \in \mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3$, то

$$G_T = \mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{T} = \lambda \boldsymbol{E} \tag{9.28}$$

— *единствените тривалентни изотропни тензори са пропорционални на алтернирация*. В този смисъл алтерниращият символ ε_{ijk} е тривалентният аналог на кронекеровата делта δ_{ij}, вж. § 9.3.

9.6. Примери.

а) Да разгледаме първо двувалентния тензор $\boldsymbol{E} : \boldsymbol{E}$ с компоненти $(\boldsymbol{E} : \boldsymbol{E})_{ij} = \varepsilon_{i\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha j}$, където $\boldsymbol{E}$ е алтерниращият тензор, дефиниран в (8.25). Тъй като $\boldsymbol{E}$ е изотропен, вж. § 9.5, то двувалентният тензор $\boldsymbol{E} : \boldsymbol{E}$ е също изотропен. Съгласно (9.9)

$$\boldsymbol{E} : \boldsymbol{E} = \lambda \boldsymbol{I} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{i\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha j} = \lambda\delta_{ij} \quad \Big(\textstyle\sum_{\alpha,\beta}\Big) . \tag{9.29}$$

За определяне на λ извършваме контракция в двете страни на (9.29) по индексите i, j, полагайки $i = j = \gamma$ и сумирайки по γ

$$3\lambda = \lambda\delta_{\gamma\gamma} = \varepsilon_{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \quad \Big(\textstyle\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\Big)$$

или

$$3\lambda = -\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} \varepsilon^2_{\gamma\alpha\beta} ,$$

тъй като $\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} = -\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}$ — извършихме три пермутации за да превърнем $(\gamma\alpha\beta)$ в $(\beta\alpha\gamma)$. Но $\varepsilon^2_{\gamma\alpha\beta} = 1$, а броят на ненулевите компоненти $\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}$ на тензора $\boldsymbol{E}$ е шест, вж. дефиницията му (8.25). Следователно $3\lambda = -6$, $\lambda = -2$, и от (9.29) следва

$$\boldsymbol{E} : \boldsymbol{E} = -2\boldsymbol{I} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{i\alpha\beta}\,\varepsilon_{\beta\alpha j} = -2\delta_{ij} \quad \Big(\textstyle\sum_{\alpha,\beta}\Big) \tag{9.30}$$

в декартова система. Последната формула очевидно повтаря съотношенията (8.36) и (8.37), които по такъв начин наистина се оказват следствие на изотропността на алтерниращия тензор.

б) Да разгледаме четиривалентния тензор $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}$ с компоненти

$$H_{ijk\ell} = (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E})_{ijk\ell} = \varepsilon_{ij\beta}\varepsilon_{\beta k\ell} \qquad \left(\sum\nolimits_\beta\right)$$

в декартова система. Той е изотропен и следователно има вида (9.16)

$$\varepsilon_{ij\beta}\varepsilon_{\beta k\ell} = \lambda_1\delta_{ij}\delta_{k\ell} + \lambda_2\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \lambda_3\delta_{i\ell}\delta_{jk} \qquad \left(\sum\nolimits_\beta\right) .$$

Но тензорът $\boldsymbol{H}$ е антисиметричен по двойките индекси (i, j) и (k, ℓ)

$$H_{ijk\ell} = -H_{jik\ell} , \quad H_{ijk\ell} = -H_{ij\ell k} ,$$

като следствие от дефиницията (8.25) на алтерниращия тензор. Оттук $\lambda_1 = 0$, тъй като δ_{ij} и $\delta_{k\ell}$ са симетрични по (i, j) и (k, ℓ), а $\lambda_2 = -\lambda_3 = \lambda$, т. е.

$$\varepsilon_{ij\beta}\varepsilon_{\beta k\ell} = \lambda\,(\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk}) \qquad \left(\sum\nolimits_\beta\right) . \tag{9.31}$$

Неизвестният множител λ ще намерим след контракцията $k = j = \alpha$ в (9.31)

$$\varepsilon_{i\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha\ell} = \lambda\,(\delta_{i\alpha}\delta_{\alpha\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{\alpha\alpha}) \qquad \left(\sum\nolimits_{\alpha,\beta}\right) .$$

Но

$$\delta_{i\alpha}\delta_{\alpha\ell} = \delta_{i\ell} , \quad \delta_{\alpha\alpha} = 3 \qquad \left(\sum\nolimits_\alpha\right) ,$$

и затова

$$\varepsilon_{i\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha\ell} = -2\lambda\delta_{i\ell} \qquad \left(\sum\nolimits_{\alpha,\beta}\right) .$$

Сравнението на последната формула с (9.30) показва, че $\lambda = 1$, т. е.

$$\varepsilon_{ij\beta}\varepsilon_{\beta k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk} \qquad \left(\sum\nolimits_\beta\right) . \tag{9.32}$$

Тази формула може да се разглежда като четиривалентно обобщение на (9.30), което отново е следствие на „богатата“ симетрия (по-точно, на изотропността) на алтерниращия тензор.

Да обърнем внимание, че формулата (9.32) може да се запише и с помощта на една детерминанта

$$\varepsilon_{ij\beta}\varepsilon_{\beta k\ell} = \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{i\ell} \\ \delta_{jk} & \delta_{j\ell} \end{vmatrix} . \tag{9.33}$$

Този запис ще се окаже удобен при обобщението на формулата (9.32) за шествалентния изотропен тензор $\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E}$ в § 16.1.

в) Току-що изведеното съотношение (9.32) има като просто следствие известната формула за разкриването на двойното векторно произведение.

Да разгледаме контракцията на четиривалентния тензор $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}$ с триадата $\boldsymbol{cba}$ по три двойки индекси. Резултатът е векторът $\boldsymbol{d}$ с компоненти

$$\begin{aligned} d_i &= \varepsilon_{ij\beta}\varepsilon_{\beta k\ell}\, c_\ell b_k a_j = \varepsilon_{ij\beta}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})_\beta a_j \\ &= \Big[\,\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\Big]_i \quad \Big(\textstyle\sum_{\beta,j,k,l}\Big) \end{aligned} \tag{9.34}$$

в декартова система.

От друга страна, използвайки (9.32), получаваме следният израз за компонентите d_i на вектора $\boldsymbol{d}$:

$$\begin{aligned} d_i &= (\delta_{ik}\delta_{j\ell}-\delta_{i\ell}\delta_{jk})\, c_\ell b_k a_j = \delta_{ik}\delta_{j\ell}c_\ell b_k a_j - \delta_{i\ell}\delta_{jk}c_\ell b_k a_j \\ &= b_i\,(a_j c_j) - c_i\,(a_j b_j) = b_i(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - c_i(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \quad \Big(\textstyle\sum_{k,j,\ell}\Big)\ . \end{aligned} \tag{9.35}$$

Сравнението между (9.35) и (9.35) дава

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{9.36}$$

— добре познатата формула за разкриването на двойното векторно произведение[11], зад която се крие, както се убедихме току-що, изотропността на алтерниращия тензор.

[11] Да напомним мнемоничното правило: $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ = БАЦ – ЦАБ.