§ 8. Поливалентни тензори

8.1. Безкоординатна дефиниция на поливалентен тензор. Поливалентните тензори се въвеждат по начин, напълно аналогичен на двувалентните (§ 3): грубо казано, трябва просто да се замени „дву“ с „поли“, „диада“ с „полиада“, „билинейно“ с „полилинейно“ и т. н. Единствената „неприятност“ е усложняването на съответните формули, но смисълът и логиката зад тях остават непроменени.

За да се убедим в това, ще започнем отново с формалната дефиниция, обобщаваща по очевиден начин дефиниция 3.1 на пространството от двувалентни тензори.

Дефиниция 8.1. *Нека p е цяло, $p \geq 2$, и $\mathcal{E}_n$ е векторно пространство с размерност n, $\dim \mathcal{E}_n = n$. Пространството от p-валентни тензори*

$$\underbrace{\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_n}_{p} = \bigotimes_p \mathcal{E}_n$$

е векторно пространство със следните свойства:

1) $\dim \bigotimes_p \mathcal{E}_n = n^p$*;*

2) Съществува изображение

$$\underbrace{\mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n \times \cdots \times \mathcal{E}_n}_{p} \longrightarrow \bigotimes_p \mathcal{E}_n \,,$$

което съпоставя на всеки p вектора $\overset{(1)}{\boldsymbol{a}}, \overset{(2)}{\boldsymbol{a}}, \ldots, \overset{(p)}{\boldsymbol{a}}$ тяхното полиадно *(или* тензорно*) произведение*

$$\overset{(1)}{\boldsymbol{a}}, \overset{(2)}{\boldsymbol{a}}, \ldots, \overset{(p)}{\boldsymbol{a}} \longrightarrow \overset{(1)}{\boldsymbol{a}} \otimes \overset{(2)}{\boldsymbol{a}} \otimes \cdots \otimes \overset{(p)}{\boldsymbol{a}} \,.$$

Това изображение е полилинейно, *т. е. линейно по всеки от аргументите си например*

$$\Bigl(\lambda \overset{(1)}{\boldsymbol{b}} + \mu \overset{(1)}{\boldsymbol{c}}\Bigr) \otimes \overset{(2)}{\boldsymbol{a}} \otimes \cdots \otimes \overset{(p)}{\boldsymbol{a}} = \lambda \overset{(1)}{\boldsymbol{b}} \otimes \overset{(2)}{\boldsymbol{a}} \otimes \cdots \otimes \overset{(p)}{\boldsymbol{a}}$$

$$+ \mu \overset{(1)}{\boldsymbol{c}} \otimes \overset{(2)}{\boldsymbol{a}} \otimes \cdots \otimes \overset{(p)}{\boldsymbol{a}} \,, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \Re \,, \quad \overset{(1)}{\boldsymbol{b}}, \overset{(1)}{\boldsymbol{c}} \in \mathcal{E}_n \,.$$

Елементите $\overset{(1)}{\boldsymbol{a}} \otimes \overset{(2)}{\boldsymbol{a}} \otimes \cdots \otimes \overset{(p)}{\boldsymbol{a}} \in \bigotimes_p \mathcal{E}_n$ се наричат полиади*;*

3) Пространството $\underset{p}{\otimes}\mathcal{E}_n$ *се поражда от полиадите в смисъл, че произволен негов елемент може да се представи като линейна комбинация на полиади.*

Както и в случая на двувалентни тензори, дефиниция 8.1 определя пространството $\underset{p}{\otimes}\mathcal{E}_n$ „еднозначно" — с точност до един естествен изоморфизъм (линейно и взаимно еднозначно съответствие), *независещ* от избора на базиса в $\mathcal{E}_n$, а само от конкретната интерпретация на полиадното умножение. Съответното разсъждение повтаря дословно това от § 3.1, където се разглеждаше пространството от двувалентни тензори.

Видно е, че горната дефиниция е наистина аналогична на Дефиниция 3.1, с която се въведе пространството от двувалентни тензори. (Нещо повече, при $p = 2$ тя съвпада с нея.) Дефиницията 8.1 отново звучи твърде абстрактно на пръв поглед. Зад нея стои обаче нещо просто: именно фактът, че пространството от p-валентни тензори не е нищо друго освен съвкупността от полилинейни (по-точно, p-линейни) форми над $\mathcal{E}_n$.

Да напомним, че в двувалентния случай тензорите $\boldsymbol{T} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ можеха да се интерпретират не само като билинейни форми над $\mathcal{E}_n$, но и като линейни преобразования на $\mathcal{E}_n$ (§ 3.2). В поливалентния случай подобна интерпретация също е възможна, но тя вече *не е единствена*. Както ще видим по-нататък (§ 8.6), пространството от p-валентни тензори може да се отъждестви с това на линейните преобразования $\underset{r}{\otimes}\mathcal{E}_n \longrightarrow \underset{s}{\otimes}\mathcal{E}_n$ за *всички* целочислени двойки r, s, $r, s \geq 1$, такива че $r + s = p$. (При $p = 2$ има само една такава двойка $r = s = 1$.) В частния случай на тривалентни тензори тази интерпретация е предмет на обсъждане в упражнения 8.2 и 8.3 (§ 8.3).

8.2. Поливалентните тензори като полилинейни форми над $\mathcal{E}_n$. Нека $\boldsymbol{T}$ е *полилинейна* (по-точно, *p-линейна*) *форма* над $\mathcal{E}_n$, т. е. изображение

$$\boldsymbol{T} \;:\; \underbrace{\mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n \times \cdots \times \mathcal{E}_n}_{p} \;\longrightarrow\; \Re\,,$$

което на всеки p вектора $\overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \overset{(2)}{\boldsymbol{x}}, \ldots, \overset{(p)}{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{E}_n$ съпоставя числото

$$\boldsymbol{T}\left(\overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \overset{(2)}{\boldsymbol{x}}, \ldots, \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right)\,,$$

зависещо линейно от всеки един от аргументите $\overset{(k)}{\boldsymbol{x}}$, $k = 1, 2, \ldots, p$.

В този пункт ще покажем, че съвкупността от p-валентни тензори $\underset{p}{\otimes}\mathcal{E}_n$ може да се интерпретира като пространството от p-линейни форми над $\mathcal{E}_n$. За тази цел първо дефинираме полиадите като p-линейни форми по следния начин

$$\begin{aligned} &\left(\overset{(1)}{\boldsymbol{a}} \otimes \overset{(2)}{\boldsymbol{a}} \otimes \cdots \otimes \overset{(p)}{\boldsymbol{a}}\right)\left(\overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \overset{(2)}{\boldsymbol{x}}, \ldots, \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right) \\ &\overset{\text{def}}{=} \left(\overset{(1)}{\boldsymbol{a}} \cdot \overset{(1)}{\boldsymbol{x}}\right)\left(\overset{(2)}{\boldsymbol{a}} \cdot \overset{(2)}{\boldsymbol{x}}\right) \cdots \left(\overset{(p)}{\boldsymbol{a}} \cdot \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right), \quad \forall \overset{(k)}{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{E}_n\,, \end{aligned} \tag{8.1}$$

$k = 1, 2, \ldots, p$.

Нека $\{\boldsymbol{a}_i\}$ е базис в $\mathcal{E}_n$, а $\boldsymbol{T}$ е произволна p-линейна форма. За всеки p вектора $\overset{(k)}{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{E}_n$ имаме

$$\overset{(k)}{\boldsymbol{x}} = x_{i_k}\boldsymbol{a}^{i_k}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, p\,,$$

и затова

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}\left(\overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \overset{(2)}{\boldsymbol{x}}, \ldots, \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right) &= \boldsymbol{T}\left(x_{i_1}\boldsymbol{a}^{i_1}, x_{i_2}\boldsymbol{a}^{i_2}, \ldots, x_{i_p}\boldsymbol{a}^{i_p}\right) \\ &= \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{a}^{i_1}, \boldsymbol{a}^{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}^{i_p}\right)\left(\boldsymbol{a}_{i_1} \cdot \overset{(1)}{\boldsymbol{x}}\right)\left(\boldsymbol{a}_{i_2} \cdot \overset{(2)}{\boldsymbol{x}}\right) \cdots \left(\boldsymbol{a}_{i_p} \cdot \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right) \\ &= \left(t^{i_1 i_2 \ldots i_p}\, \boldsymbol{a}_{i_1} \otimes \boldsymbol{a}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{a}_{i_p}\right)\left(\overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \overset{(2)}{\boldsymbol{x}}, \ldots, \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right), \end{aligned} \tag{8.2}$$

където

$$t^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{a}^{i_1}, \boldsymbol{a}^{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}^{i_p}\right), \quad i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, \ldots, n\,. \tag{8.3}$$

В (8.2) използвахме полилинейността на $\boldsymbol{T}$, формулата (2.7) и дефиницията (8.1) на полиадата като p-линейна форма. Следователно

$$\boldsymbol{T} = t^{i_1 i_2 \ldots i_p}\, \boldsymbol{a}_{i_1} \otimes \boldsymbol{a}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{a}_{i_p}\,. \tag{8.4}$$

Но това означава, че произволна p-линейна форма се представя като линейна комбинация на елементите на *полиадния базис*

$$\boldsymbol{a}_{i_1} \otimes \boldsymbol{a}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{a}_{i_p}\,.$$

(Линейната независимост на $\boldsymbol{a}_{i_1} \otimes \boldsymbol{a}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{a}_{i_p}$ се установява съвсем просто — проверете!) На свой ред полилинейната форма, определяща тензора $\boldsymbol{T}$, се записва във вида

$$\boldsymbol{T}\left(\overset{(1)}{\boldsymbol{x}}, \overset{(2)}{\boldsymbol{x}}, \ldots, \overset{(p)}{\boldsymbol{x}}\right) = t^{i_1 i_2 \ldots i_p}\, x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_p}\,, \tag{8.5}$$

както се вижда от (8.2).

8.3. Координатна дефиниция на p-валентен тензор. Контравариантни и ковариантни компоненти. Както и в при разглеждането на векторите в § § 2.7 и 2.8, да разгледаме, освен базиса $\{\mathbf{a}_i\}$, и друг („нов“) базис $\{\mathbf{a}_{i'}\}$ в $\mathcal{E}_n$. Базисите се преобразуват отново по закона (2.15).

Тензорът $\boldsymbol{T}$ може да разложи и по стария $\boldsymbol{a}_{i_1} \otimes \boldsymbol{a}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{a}_{i_p}$, и по новия полиаден базис $\boldsymbol{a}_{i_{1'}} \otimes \boldsymbol{a}_{i_{2'}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{a}_{i_{p'}}$

$$\boldsymbol{T} = t^{i_1 i_2 \ldots i_p}\, \boldsymbol{a}_{i_1} \boldsymbol{a}_{i_2} \cdots \boldsymbol{a}_{i_p} = t^{i_{1'} i_{2'} \ldots i_{p'}}\, \boldsymbol{a}_{i_{1'}} \boldsymbol{a}_{i_{2'}} \cdots \boldsymbol{a}_{i_{p'}} .$$

(Както и при записа на двувалентните тензори, ще изпускаме вече за краткост знака '$\otimes$' за тензорното произведение при записа на полиадите.) Връзката между компонентите $t^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ и $t^{i_{1'} i_{2'} \ldots i_{p'}}$ следва от (3.10) и (8.3):

$$\begin{aligned} t^{i_{1'} i_{2'} \ldots i_{p'}} &= \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{a}^{i_{1'}}, \boldsymbol{a}^{i_{2'}}, \ldots, \boldsymbol{a}^{i_{p'}}\right) \\ &= \boldsymbol{T}\left(A^{i_{1'}}_{i_1}\, \boldsymbol{a}^{i_1}, A^{i_{2'}}_{i_2}\, \boldsymbol{a}^{i_2}, \ldots, A^{i_{p'}}_{i_p}\, \boldsymbol{a}^{i_p}\right) \\ &= A^{i_{1'}}_{i_1}\, A^{i_{2'}}_{i_2} \ldots A^{i_{p'}}_{i_p}\, \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{a}^{i_1}, \boldsymbol{a}^{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}^{i_p}\right) , \end{aligned}$$

т. е.

$$t^{i_{1'} i_{2'} \ldots i_{p'}} = A^{i_{1'}}_{i_1}\, A^{i_{2'}}_{i_2} \ldots A^{i_{p'}}_{i_p}\, t^{i_1 i_2 \ldots i_p} . \tag{8.6}$$

Това и *тензорният закон* за преобразуване на компонентите на p-валентния тензор $\boldsymbol{T} \in \underset{p}{\otimes} \mathcal{E}_n$. Той позволява да дефинираме координатно тензора по следния начин (забележете — *напълно аналогичен* както на на координатната дефиниция 2.1 на вектора, така и на координатната дефиниция 3.1 на двувалентния тензор !).

Дефиниция 8.2. *Тензорът от валентност p е наредена двойка*

$$\left\{\boldsymbol{a}_i, t^{i_1 i_2 \ldots i_p}\right\} ,$$

състояща се от базис $\{\boldsymbol{a}_i\}$ *и числата* $\{t^{i_1 i_2 \ldots i_p}\}$, *наречени (контравариантни) компоненти на тензора в този базис. При смяна на базиса по закона* (2.15), *компонентите* $t^{i_1 i_2 \ldots, i_p}$ *се сменят по тензорния закон* (8.6).

Забелязваме, че компонентите $t^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ се преобразуват с помощта на матрицата $\|A^{i'}_i\|$, *обратна* на тази, преобразуваща базиса. Поради това компонентите $t^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ се наричат *контравариантни*, аналогично на съответните компоненти на вектора (§ 2.8) и на двувалентния тензор (§ 3.5).

Координатната дефиниция на p-валентния тензор може да се онагледи графично по същия начин както и тези за вектор (§ 2.8) и за двувалентен тензор (§ 3.5). Именно

$$\boldsymbol{T} = t^{\underset{\curvearrowleft}{i_1}\underset{\curvearrowleft}{i_2}\dots\underset{\curvearrowleft}{i_p}}\, \boldsymbol{a}_{\underset{\curvearrowright}{i_1}} \boldsymbol{a}_{\underset{\curvearrowright}{i_2}} \dots \boldsymbol{a}_{\underset{\curvearrowright}{i_p}} \, . \tag{8.7}$$

Напомняме (вж. края на § 2.8), че знакът $\curvearrowright$ говори за „завъртане" с помощта на матрицата $A = \|A^i_{i'}\|$, а знакът $\curvearrowleft$ — за обратното „завъртане" с помощта на матрицата $A^{-1} = \|A^{i'}_i\|$, вж. (2.15). Интерпретацията на (8.7) повтаря дословно тази на (2.20) и (3.22) и затова тук ще я пропуснем.

Ясно е също, че полиаден базис може да се образува и с привличането на векторите $\boldsymbol{a}^i$ от дуалния базис. Например, можем да разгледаме, вместо (8.4), представянето на тензора $\boldsymbol{T}$ във вида

$$\boldsymbol{T} = t_{i_1 i_2 \dots i_p}\, \boldsymbol{a}^{i_1} \otimes \boldsymbol{a}^{i_2} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{a}^{i_p} \, ,$$

с помощта на *чисто ковариантните* му компоненти $t_{i_1 i_2 \dots i_p}$. При това

$$t_{i_1 i_2 \dots i_p} = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_p}\right) \, , \quad i_1, i_2, \dots, i_p = 1, \dots, n \, ,$$

вж. (8.3). При смяна на базиса те се преобразуват по закона

$$t_{i_{1'} i_{2'} \dots i_{p'}} = A^{i_1}_{i_{1'}}\, A^{i_2}_{i_{2'}} \dots A^{i_p}_{i_{p'}} t_{i_1 i_2 \dots i_p} \, ,$$

т. е. „ковариантно" — с помощта на *същата* матрица $\|A^i_{i'}\|$, която сменя базиса, вж. (2.15).

Аналогично може да се използват и координатни представяния на $\boldsymbol{T}$ с помощта на смесените компоненти (r-пъти контравариантни и (p-r)-пъти ковариантни):

$$\boldsymbol{T} = t^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i_{r+1} \dots i_p}\, \boldsymbol{a}_{i_1} \otimes \boldsymbol{a}_{i_2} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{a}_{i_r} \otimes \boldsymbol{a}^{i_{r+1}} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{a}^{i_p} \, . \tag{8.8}$$

В случая

$$t^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i_{r+1} \dots i_p} = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{a}^{i_1}, \boldsymbol{a}^{i_2}, \dots, \boldsymbol{a}^{i_r}, \boldsymbol{a}_{i_{r+1}}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_r}\right) \, . \tag{8.9}$$

Упражнение 8.1. *Напишете закона за преобразуването на смесените компоненти* $t^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i_{r+1} \dots i_p}$ *на p-валентния тензор $\boldsymbol{T}$ при смяна на базиса.*

Пример 8.1. Поучително е да „проиграете" изложената схема в случая $p = 3$, т. е. да разгледате подробно въвеждането и интерпретацията на тривалентните тензори. Тук полиадите са *триади*, които се интерпретират като *трилинейни форми* над $\mathcal{E}_n$:

$$(\boldsymbol{abc})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{y})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{z})\,. \tag{8.10}$$

Координатното представяне (8.4) в случая има вида:

$$\boldsymbol{T} = t^{ijk}\,\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{a}_k \tag{8.11}$$

— това е разлагане по *триадния базис* $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{a}_k$ и т. н.

Упражнение 8.2. *Триадата* $\boldsymbol{abc}$ *може да се интерпретира и като линейно преобразование от* $\mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n$ *в* $\mathcal{E}_n$. *За тази цел върху диадите тя се дефинира, например, така*

$$\boldsymbol{abc}\ :\ \boldsymbol{xy}\ \longrightarrow\ \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{y})\in\mathcal{E}_n\,,\quad \forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{E}_n\,, \tag{8.12}$$

а след това се „разпространява“ по естествен начин върху цялото $\mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n$ *(тъй като произволен тривалентен тензор е линейна комбинация на триади). Покажете, че при тази интерпретация на триадите пространството от тривалентни тензори се отъждествява с пространството от всички линейни преобразования на* $\mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n$ *в* $\mathcal{E}_n$.

Упражнение 8.3. *Аналогично на упражнение 8.2 покажете, че пространството от тривалентни тензори може да се отъждестви също и с пространството от всички линейни преобразования на* $\mathcal{E}_n$ *в* $\mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n$. *(Съобразете първо как следва да се дефинира триадата при тази интерпретация.)*

Да споменем в заключение на този пункт, че „жонглирането“ с индекси, обсъдено за вектори в § 2.5 и за двувалентни тензори в § 3.6, се обобщава по очевиден начин и в поливалентния случай.

Например, от (8.3) и (2.11) имаме

$$t^{i_1i_2\ldots i_p} = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{a}^{i_1},\boldsymbol{a}^{i_2},\ldots,\boldsymbol{a}^{i_p}\right)$$

$$= \boldsymbol{T}\left(g^{i_1j_1}\boldsymbol{a}_{j_1},\boldsymbol{a}^{i_2},\ldots,\boldsymbol{a}^{i_p}\right) = g^{i_1j_1}\boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{a}_{j_1},\boldsymbol{a}^{i_2},\ldots,\boldsymbol{a}^{i_p}\right)\,,$$

т. е.

$$t^{i_1i_2\ldots i_p} = g^{i_1j_1}t_{j_1}^{\ i_2\ldots i_p}\,. \tag{8.13}$$

вж. (8.9). Обобщенията са очевидни. Ясно е, че както и в двувалентния случай (§ 3.6), g^{ij} и g_{ij} позволяват да „подхвърляме“ индексите от „долу“ „горе“ и обратно. Всяко „подхвърляне“ се „заплаща“ с появата на една от матриците на метрическите коефициенти, ср. (8.13) и (3.23).

Упражнение 8.4. *Напишете връзката между чисто ковариантните и чисто контравариантните компоненти на p-валентен тензор*[9].

8.4. Тензори над $\mathcal{E}_n$. Да разгледаме „стълбичката“ от всички тензорни „степени“ на пространството $\mathcal{E}_n$:

$$\Re\,,\ \mathcal{E}_n\,,\ \mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n\,,\ \mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n\,,\ \ldots,\ \underset{p}{\otimes}\mathcal{E}_n\,,\ \ldots\,. \tag{8.14}$$

Числата (реалната права $\Re$) тук се интерпретират като тензори от нулева, а векторите естествено като тензори от първа валентност. При тази интерпретация можем да запишем обединението на тензорните „степени“ (8.14) във вида

$$\mathcal{T}\,(\mathcal{E}_n) = \bigcup_{p=0}^{\infty} \underset{p}{\otimes}\mathcal{E}_n\,. \tag{8.15}$$

Елементите от $\mathcal{T}\,(\mathcal{E}_n)$ се наричат (*евклидови*) *тензори*.

8.5. „Инвариантни“ тензорни операции. Това са операциите над тензорите, които *не зависят* от избора на координатната система. Те са четири.

1) *Съставяне на линейни комбинации*. Подчертаваме, че тази операция е смислена, ако в нея участват тензори *от една и съща валентност*. (Ясно е, че не може да се състави, например, сума от вектор и от двувалентен тензор.)

2) *Съставяне на изомери*. Нека $\boldsymbol{T}\in\underset{p}{\otimes}\mathcal{E}_n$ и (8.4) е полиадното му разлагане. Нека $\sigma\in\mathcal{S}_p$ е елемент на симетричната група $\mathcal{S}_p$, т. е. пермутация

$$\{1,2,\ldots,p\} \ \xrightarrow{\sigma}\ \{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(p)\}\,.$$

Дефинираме тензора

$$\boldsymbol{T}^{\sigma} \overset{\text{def}}{=} t^{i_1 i_2\ldots i_p}\,\boldsymbol{a}_{i_{\sigma(1)}}\boldsymbol{a}_{i_{\sigma(2)}}\cdots\boldsymbol{a}_{i_{\sigma(p)}}\,, \tag{8.16}$$

който се нарича σ-*изомер* (или просто *изомер*) на $\boldsymbol{T}$.

Упражнение 8.5. *Покажете, че съставянето на изомери, макар и дефинирано в* (8.16) *координатно (чрез съответното полиадно разлагане на $\boldsymbol{T}$), е инвариантна тензорна операция.*

[9] Целта на това упражнение е да се „насладите“ какви сложни на пръв поглед (макар и с много малко съдържание сами по себе си) многоиндексни формули вече можете да пишете.

Да преименуваме в (8.16) немите индекси $\sigma(k)$ на k, $k = 1, 2, \ldots, p$, т. е. да привлечем обратната пермутация $\eta = \sigma^{-1}$:

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(p)\} \xrightarrow{\sigma^{-1}} \{1, 2, \ldots, p\} .$$

В резултат на това „прекръстване“ изомерът (8.16) се записва във вида

$$\boldsymbol{T}^{\sigma} = t^{i_{\eta(1)} i_{\eta(2)} \ldots i_{\eta(p)}} \boldsymbol{a}_{i_1} \boldsymbol{a}_{i_2} \cdots \boldsymbol{a}_{i_p} . \tag{8.17}$$

Това означава, че изомерът може да се дефинира и чрез съответната пермутация на индексите на неговите компоненти.

За двувалентен тензор $\boldsymbol{T}$ единствената нетривиална пермутация е $\sigma : \{1, 2\} \to \{2, 1\}$. Тя поражда и единствения нетривиален изомер на $\boldsymbol{T}$ — транспонирания тензор $\boldsymbol{T}^*$, вж. § 4.3. (В случая $\sigma = \sigma^{-1}$ и при дефиницията на $\boldsymbol{T}^*$ е без значение дали пермутираме векторите на диадния базис или индексите на компонентите.)

Аналогът на симетричния двувалентен тензор в p-валентния случай е т. нар. *напълно симетричен тензор*, за който

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{\sigma} , \quad \forall\, \sigma \in \mathcal{S}_p .$$

На свой ред, аналогът на симетричната част $\boldsymbol{T}^s$ на двувалентния тензор $\boldsymbol{T}$, вж. (4.17), е *симетризираният тензор*

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{sym}} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \boldsymbol{T}^{\sigma} , \quad \boldsymbol{T} \in \bigotimes_p \mathcal{E}_n .$$

(Напомняме, че броят на всички пермутации на p елемента е $p!$.)

3) *Тензорно произведение на тензори.* Нека $\boldsymbol{T} \in \bigotimes_p \mathcal{E}_n$ и $\boldsymbol{S} \in \bigotimes_q \mathcal{E}_n$ са два тензора над $\mathcal{E}_n$ като

$$\boldsymbol{T} = t^{i_1 i_2 \ldots i_p} \boldsymbol{a}_{i_1} \boldsymbol{a}_{i_2} \cdots \boldsymbol{a}_{i_p} , \quad \boldsymbol{S} = s^{j_1 j_2 \ldots j_q} \boldsymbol{a}_{j_1} \boldsymbol{a}_{j_2} \cdots \boldsymbol{a}_{j_q} ,$$

в даден полиаден базис. Въвеждаме *тензорното произведение* на $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{S}$ с равенството

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S} &= \left(t^{i_1 i_2 \ldots i_p} \boldsymbol{a}_{i_1} \boldsymbol{a}_{i_2} \cdots \boldsymbol{a}_{i_p} \right) \otimes s^{j_1 j_2 \ldots j_q} \boldsymbol{a}_{j_1} \boldsymbol{a}_{j_2} \cdots \boldsymbol{a}_{j_q} \\ &= \left(t^{i_1 i_2 \ldots i_p} \boldsymbol{a}_{i_1} \boldsymbol{a}_{i_2} \cdots \boldsymbol{a}_{i_p} \right) \otimes \left(s^{i_{p+1} i_{p+2} \ldots i_{p+q}} \boldsymbol{a}_{i_{p+1}} \boldsymbol{a}_{i_{p+2}} \cdots \boldsymbol{a}_{i_{p+q}} \right) \\ &\stackrel{\mathrm{def}}{=} t^{i_1 i_2 \ldots i_p} s^{i_{p+1} i_{p+2} \ldots i_{p+q}} \boldsymbol{a}_{i_1} \boldsymbol{a}_{i_2} \cdots \boldsymbol{a}_{i_p} \boldsymbol{a}_{i_{p+1}} \boldsymbol{a}_{i_{p+2}} \cdots \boldsymbol{a}_{i_{p+q}} . \end{aligned} \tag{8.18}$$

(„Прекръстихме“ попътно немите индекси j_1 до j_q на i_{p+1} до i_{p+q} съответно.)

Очевидно $\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S} \in \underset{p+q}{\otimes} \mathcal{E}_n$, т. е. при тензорното умножение валентностите на множителите се сумират.

Упражнение 8.6. *Покажете, че тензорното произведение, макар и дефинирано в* (8.18) *координатно (чрез съответните полиадни разлагания на тензорните множители* $\boldsymbol{T}$ *и* $\boldsymbol{S}$*), е инвариантна тензорна операция.*

В частния случай $p = q = 1$ тензорното произведение на два вектора

$$\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} = \left(x^i \boldsymbol{a}_i\right) \otimes \left(y^j \boldsymbol{a}_j\right) = x^i y^j \, \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j$$

е диадното им произведение. Проверката е почти тавтологична:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{u} &= \left(x^i y^j \, \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j\right) \cdot \left(u_k \boldsymbol{a}^k\right) \\ &= \left(x^i \boldsymbol{a}_i\right) \left(y^j u_k \, \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}^k\right) = \boldsymbol{x} \, \left(y^\alpha u_\alpha\right) = \boldsymbol{x} \, (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{u}) \,,\end{aligned}$$

$\forall \ \boldsymbol{u} \in \mathcal{E}_n$, вж. (3.3) и (2.3). Това ни позволява да заключим, че един път дефинирано за вектори, диадното произведение се разпространява по естествен начин, вж. (8.18), и за тензори от произволна валентност (доколкото всеки тензор е линейна комбинация на полиади).

4) *Контракция на тензори.* Нека $\boldsymbol{T} \in \underset{p}{\otimes} \mathcal{E}_n$ и

$$\boldsymbol{T} = t^{i_2 i_2 \ldots i_p}_{i_1} \underline{\boldsymbol{a}^{i_1} \boldsymbol{a}_{i_2}} \, \boldsymbol{a}_{i_3} \cdots \boldsymbol{a}_{i_p} \,. \tag{8.19}$$

Както и в двувалентния случай (§ 4.4) да заменим тензорното произведение със скаларно в подчертаната двойка полиадни множители:

$$\boldsymbol{a}^{i_1} \otimes \boldsymbol{a}_{i_2} \ \to \ \boldsymbol{a}^{i_1} \cdot \boldsymbol{a}_{i_2} \,,$$

ср. с (4.18). Тогава

$$\begin{aligned} & t^{i_2 i_2 \ldots i_p}_{i_1} \left(\boldsymbol{a}^{i_1} \cdot \boldsymbol{a}_{i_2}\right) \boldsymbol{a}_{i_3} \cdots \boldsymbol{a}_{i_p} \\ &= t^{i_2 i_2 \ldots i_p}_{i_1} \delta^{i_1}_{i_2} \, \boldsymbol{a}_{i_3} \ \cdots \boldsymbol{a}_{i_p} = t^{\alpha i_3 \ldots i_p}_{\alpha} \, \boldsymbol{a}_{i_3} \cdots \boldsymbol{a}_{i_p} \in \underset{p\text{-}2}{\otimes} \mathcal{E}_n \,. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Проведената току-що операция, при която заменихме тензорното произведение със скаларно в една двойка полиадни множители, се нарича *контракция*. В резултат валентността на тензора се намалява с две. Ако тензорът $\boldsymbol{T}$ е двувалентен, то контракцията поражда скалара $\operatorname{tr}\boldsymbol{T}$ — следата на $\boldsymbol{T}$, вж. § 4.4.

Както и при пресмятането на следата, операцията (8.20) при координатно представяне съответства на следното: в съвкупността от компонентите $t_{i_1}^{i_2 i_2 \ldots i_p}$ на тензора $\boldsymbol{T}$ вземаме един горен и един долен индекс равни, $i_1 = i_2 = \alpha$, и сумираме по вече повтарящия се индекс α. В случая обаче, когато контракцията се извършва, грубо казано, по два долни или по два горни индекса, в резултата се появяват метричните коефициенти g_{ij} или g^{ij}. За да илюстрираме това, да извършим още една контракция в тензора (8.20), например, по индексите i_3 и i_4:

$$t_{\alpha}^{\alpha i_3 i_4 \ldots i_p}\,(\boldsymbol{a}_{i_3}\cdot\boldsymbol{a}_{i_4})\,\boldsymbol{a}_{i_5}\cdots\boldsymbol{a}_{i_p} = g_{\beta\gamma}\,t_{\alpha}^{\alpha\beta\gamma i_5\ldots i_p}\boldsymbol{a}_{i_5}\cdots\boldsymbol{a}_{i_p} \in \underset{p\text{-}4}{\otimes}\mathcal{E}_n\,,$$

с което валентността на тензора се намалява с още две. Ясно е, че в p-валентния тензор може да се извършват няколко контракции. (Колко ?) Само за двувалентния тензор контракцията е единствена и резултатът ѝ представлява неговата следа (§ 4.4).

8.6. Четиривалентните тензори като линейни преобразования в пространството от двувалентни тензори. Ще започнем с един по-прост пример. Нека $\boldsymbol{T} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ и $\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}_n$. Съставяме тензорното им произведение

$$\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{x} = \Big(t^{ij}\,\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j\Big)\otimes\Big(x_k\boldsymbol{a}^k\Big) = t^{ij}x_k\,\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{a}^k\,,$$

вж. (8.18), и правим контракция в него по последната двойка индекси

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{x} = t^{ij}x_k\,\boldsymbol{a}_i\Big(\boldsymbol{a}_j\cdot\boldsymbol{a}^k\Big) = \Big(t^{i\alpha}x_\alpha\Big)\,\boldsymbol{a}_i\,. \tag{8.21}$$

(Формално, полагаме $j = k = \alpha$ и сумираме по α.) Така намереният вектор $\boldsymbol{y}$ е образът на $\boldsymbol{x}$ под действието на двувалентния тензор $\boldsymbol{T}$, вж. § 3.2 и (3.8). Това именно съвпадение и оправдава използването на знака '$\cdot$' за контракцията, осъществена в (8.21) спрямо тензора $\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{x}$.

Да проведем сега същите по дух разсъждения, но като се „вдигнем“ малко по-нагоре по тензорната „стълбичка“ (8.14).

Нека $\boldsymbol{H} \in \underset{4}{\otimes}\mathcal{E}_n$ и $\boldsymbol{T} \in \mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n$. Съставяме тензорното им произведение

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{T} &= \Big(H^{ijkl}\,\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{a}_l\Big)\otimes\left(t_{pq}\,\boldsymbol{a}^p\boldsymbol{a}^q\right)\\ &= H^{ijkl}t_{pq}\,\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{a}_k\underline{\boldsymbol{a}_l\boldsymbol{a}^p}\boldsymbol{a}^q \in \underset{6}{\otimes}\mathcal{E}_n\,,\end{aligned}$$

вж. (8.18), и правим контракция в него в подчертаната двойка полиадни множители

$$\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{T} = H^{ijk\alpha}t_{\alpha q}\,\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j\underline{\boldsymbol{a}^k\boldsymbol{a}^q} \in \bigotimes_4 \mathcal{E}_n\,. \tag{8.22}$$

като отново използваме знака '$\cdot$' за контракцията. (Както вече подчертахме в § 8.5, в поливалентния случай контракциите, които могат да се извършат, са повече от една и затова винаги трябва да е ясно от текста (или от контекста) коя именно се има предвид. Точката '$\cdot$', използвана в (8.21) и (8.22) както и навсякъде по-нататък, говори, че контракцията е спрямо последния индекс на първия тензор и първия индекс на втория.)

В тензора (8.22) да извършим още една контракция в подчертаната двойка полиадни множители, което води до появата на още една „точка" в съответното означение[10]:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{H} : \boldsymbol{T} = H^{ij\beta\alpha}\,t_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j \in \mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n\,, \tag{8.23}$$

т. е. компонентите на тензора $\boldsymbol{S}$ са

$$s^{ij} = H^{ij\beta\alpha}\,t_{\alpha\beta}\,,\quad \boldsymbol{S} = s^{ij}\,\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j\,. \tag{8.24}$$

Формулите (8.23) и (8.24) показват, че всеки четиривалентен тензор $\boldsymbol{H}$ дефинира чрез контракция по две двойки индекси линейно преобразование в пространството от двувалентни тензори:

$$\boldsymbol{H}\ :\ \boldsymbol{T}\ \longrightarrow \boldsymbol{H} : \boldsymbol{T}\,,\quad \forall\,\boldsymbol{T}\in\mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n\,.$$

Подчертаваме, че тази интерпретация е важна за механиката на непрекъснатите среди. Причината е в спецификата на въвеждането на класическите модели на еластично тяло и на вискозна течност. В тези модели се предполага, че тензорът на напрежението линейна функция, съответно, на тензора на деформацията или на тензора на скоростта на деформацията, вж. § § 24, 25.

Упражнение 8.7. *Покажете, че всяко линейно преобразование на пространството от двувалентни тензори може да се запише във вида* (8.23), *т. е. може да се отъждестви с четиривалентен тензор. Как следва да се интерпретира тогава тетрадата (полиадното произведение на четири вектора)* $\boldsymbol{abcd}$ *? (Сравнете с упражнения 8.2 и 8.3 и формулата* (8.12).*)*

Упражнение 8.8. *Проверете, че полускаларното произведение на два двувалентни тензора* $\boldsymbol{T}$ *и* $\boldsymbol{S}$*, дефинирано в* (4.29) *(§ 4.6), е контракцията по една двойка индекси на тензорното им произведение* $\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}$.

[10]Понякога се използва и означението $\boldsymbol{H}\cdot\cdot\boldsymbol{T}$.

(Този факт обяснява защо използваме един и същ символ '$\cdot$' и за контракция и за полускаларно произведение, ср. с формулите (8.21), (8.22) *и* (4.29), *които се отнасят за тривалентни тензори и интерпретацията им като линейни преобразования на съответните векторни пространства.)*

Упражнение 8.9. *Нека* $\boldsymbol{T}$ *и* $\boldsymbol{S}$ *са двувалентни тензора. Проверете, че*

$$\boldsymbol{T} : \boldsymbol{S} = \mathrm{tr}\ (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S}^*)\ .$$

8.7. Алтерниращ тензор. Въвеждаме т. нар. *алтерниращ символ* (или *символ на Леви-Чевита*). Това е тривалентният тензор $\boldsymbol{E}$ над $\mathcal{E}_3$, чийто компоненти (в ортонормиран базис) се дефинират така

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \pm 1, & \text{ако } i \neq j \neq k \neq i\ , \\ 0, & \text{в противния случай}\ , \end{cases} \tag{8.25}$$

като $\varepsilon_{ijk} = +1$, ако (i,j,k) е четна пермутация на $(1,2,3)$ и -1, ако е нечетна.

Алтерниращият тензор $\boldsymbol{E}$ има редица интересни и полезни свойства, които го правят удобен инструмент в много случаи. Това е, преди всичко, тясната му връзка с векторното произведение на векторите в $\mathcal{E}_3$. (Подчертаваме, че навсякъде в този пункт работим в тримерно пространство.)

При зададени вектори $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ да въведем вектора

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{E}\ :\ (\boldsymbol{ba})\ , \tag{8.26}$$

чийто компоненти в декартова координатна система $x_1x_2x_3$ са

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk}\, b_k a_j \quad \left(\textstyle\sum_{j,k}\right)\ . \tag{8.27}$$

(Двоеточието да напомним означава контракция по две двойки индекси, вж. § 8.6.) Например,

$$\omega_1 = \varepsilon_{123}\, b_3 a_2 + \varepsilon_{132}\, b_2 a_3 = a_2 b_3 - a_3 b_2\ ,$$

и аналогично за ω_2 и ω_3 с циклична смяна на индексите $(1,2,3)$. (Фиксирайки $i = 1$, само $\varepsilon_{123} = 1$ и $\varepsilon_{132} = -1$ са ненулеви, съгласно (8.25)). Но така намерените ω_1, ω_2 и ω_3 са декартовите компоненти на векторното произведение, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, което се пресмята в случая, да напомним, с помощта на детерминантата

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\ .$$

Тук $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ са ортите на координатните оси на използваната декартова система. Следователно

$$\boldsymbol{E} : (\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{8.28}$$

— векторното произведение на векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ съвпада с (двойната) контракция на алтерниращия тензор $\boldsymbol{E}$ с диадата $\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$.

Формулата (8.28) позволява да пресметнем трилинейната форма $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ на алтерниращия тензор, както и да я интерпретираме геометрично по начин, прост и важен за по-нататъшния анализ. За целта забелязваме, че в декартова система тази форма има вида

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \varepsilon_{ijk}\, x_i y_j z_k = -\left(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\right)_k\, z_k = -\left(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\right)\cdot\boldsymbol{z} \qquad \left(\textstyle\sum_{i,j,k}\right)$$

вж. (8.5) и (8.28), или

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = -V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\,, \quad V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z} \tag{8.29}$$

— тук $V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ е ориентираният обем на паралелепипеда, построен върху векторите $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$.

Да разгледаме по-общата контракция на $\boldsymbol{E}$ с произволен двувалентен тензор. Ако $\boldsymbol{T}$ е симетричен, то $\boldsymbol{E} : \boldsymbol{T} = 0$. (Проверете!). Поради това това можем да предположим, че $\boldsymbol{T}$ е антисиметричен, $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{E}_3 \underset{a}{\otimes} \mathcal{E}_3$.

По дадения тензор $\boldsymbol{\Omega}$ да построим вектора

$$\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{E} : \boldsymbol{\Omega}^* = -\tfrac{1}{2}\boldsymbol{E} : \boldsymbol{\Omega}\,. \tag{8.30}$$

Това очевидно поражда линейното преобразование

$$\boldsymbol{\Omega} \;\longrightarrow\; \boldsymbol{\omega}\,, \quad \omega_i = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{jk} \quad \left(\textstyle\sum_{k,j}\right)\,, \tag{8.31}$$

от пространството на двувалентните антисиметрични тензори $\mathcal{E}_3 \underset{a}{\otimes} \mathcal{E}_3$ в $\mathcal{E}_3$. Спрямо декартовите компоненти Ω_{ij} на $\boldsymbol{\Omega}$ и ω_i на $\boldsymbol{\omega}$ то се записва във вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} \\ \Omega_{12} \end{pmatrix}. \tag{8.32}$$

(Диагоналните компоненти Ω_{kk}, $k = 1, 2, 3$, на тензора $\boldsymbol{\Omega}$ се анулират предвид неговата кососиметричност.) Оттук се вижда, че преобразованието (8.31) е не само линейно, но и взаимно еднозначно. (Ако $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{E} : \boldsymbol{\Omega} = 0$, то $\Omega_{ij} = 0$, $\forall\, i, j$, вж. (8.32).) Впрочем съществуването на линейно и взаимно-еднозначно съответствие между $\mathcal{E}_3$ и пространството от двувалентни антисиметрични тензори не трябва да ни учудва, тъй като в тримерния (и само в тримерния) случай тези пространства имат еднаква размерност. (Този факт беше специално отбелязан в § 4.3.) По-съществено е, че споменатото съответствие се дава в инвариантната и удобна тензорна форма (8.30) чрез контракция с алтерниращия тензор $\boldsymbol{E}$.

За произволна двойка вектори $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{E}_3$ да съставим тензора

$$\boldsymbol{\Omega} = \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{ba} - \boldsymbol{ab}\right) . \tag{8.33}$$

Той очевидно е антисиметричен. Пресмятаме векторът $\boldsymbol{\omega}$, който му съответства при преобразованието (8.30)

$$\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{E} : \boldsymbol{\Omega} = \tfrac{1}{2}\Big(\boldsymbol{E} : (\boldsymbol{ba}) - \boldsymbol{E} : (\boldsymbol{ab})\Big) = \boldsymbol{E} : (\boldsymbol{ba}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \,,$$

т. е. резултатът е векторното произведение на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, съгласно (8.28). Това означава, че операцията (8.30) се свежда в тримерното пространство до векторното умножение, ако антисиметричния тензор $\boldsymbol{\Omega}$ има специалния вид (8.33).

Лесно е да си забележи, че преобразованието обратно на (8.31) също се задава чрез подходяща контракция с алтерниращия тензор $\boldsymbol{E}$. Наистина да съпоставим на всеки вектор $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{E}_3$ антисиметричния тензор $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{E}_3 \underset{a}{\otimes} \mathcal{E}_3$

$$\boldsymbol{\omega} \;\longrightarrow\; \boldsymbol{\Omega} \,, \quad \Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k \quad \left(\textstyle\sum_k\right) . \tag{8.34}$$

В декартова координатна система съответствието (8.34) има вида

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \;\longrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{8.35}$$

От координатните изрази (8.32) и (8.35) става ясно, че преобразованията (8.30) и (8.34) са взаимно обратни

$$-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{E} : (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \,, \quad \forall\, \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{E}_3 \,,$$

т. е.

$$\boldsymbol{E} : \boldsymbol{E} = -2\boldsymbol{I} \,, \tag{8.36}$$

или, в декартова система,

$$\varepsilon_{i\alpha\beta}\,\varepsilon_{\beta\alpha j} = \varepsilon_{i\alpha\beta}\,\varepsilon_{j\beta\alpha} = -2\delta_{ij} \quad \Big(\sum\nolimits_{\alpha,\beta}\Big)\,. \tag{8.37}$$

Както ще видим в следващия параграф (§ 9.8), формулите (8.36), (8.37) са следствие от „богатата“ симетрия на алтерниращия тензор, по точно на неговата *изотропност*. Тази симетрия ще ни позволи да изведем в § 9.8 и някои по-общи съотношения от типа на (8.37).