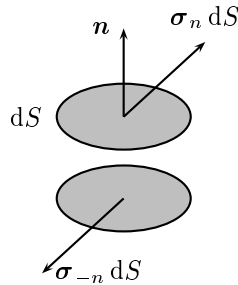


§ 7. Пример — тензор на напрежението на Коши

7.1. Тензор на напрежението. Под действието на външните сили телата се деформират — променя се формата им и взаимното разположение на частиците. Това е свързано с появата на вътрешни напрежения в тялото, за изследването на които прилагаме *метода на мислените сечения*.

Напомним, че този метод се появява в решението на Я. Бернули на класическата задача, поставена от Галилей: да се определи равновесната форма на тежка (неразтеглива) верига, закачена неподвижно в двата си края. За тази цел Бернули разрязва мислено веригата в дадена точка; за да останат двете парчета в равновесие след разрязването, към двата края на разреза следва да се приложат равни и срещуположно насочени сили. Това са именно *вътрешните напрежения*, които се появяват като резултат на външните сили, действащи върху веригата. Тази идея, комбинирана с добре познатите уравнения на статиката позволява лесно да се намери уравнението на „верижката“.



Фиг. 7.1. Двата „бряга“ на разреза

В случая на деформируемо тяло в тримерното пространство обаче сеченията в дадена точка могат да се извършват по площи с различна ориентация. Всяка площка с център в дадена точка M характеризираме с единичния вектор на нормалата \mathbf{n} , вж. фиг. 7.1; предполагаме, че тя е безкрайно малка с лице dS и нормала \mathbf{n} . Ако разрежем тялото по тази площка и отделим двете части, то вътрешното усилие, което трябва да се приложи към нея за да остане тялото в равновесие и след разрязването е $\sigma_n dS$. На другия бряг на разреза трябва очевидно да се приложи силата $-\sigma_n dS$, фиг. 7.1.

Следователно, за да характеризираме напрегнатото състояние в точка на деформируемо тяло следва да знаем векторната функция

$$\mathbf{n} \longrightarrow \boldsymbol{\sigma}_n, \quad \forall \mathbf{n} \in \mathcal{E}_3, \quad |\mathbf{n}| = 1. \quad (7.1)$$

Очевидно е впрочем че функцията (7.1) притежава свойството

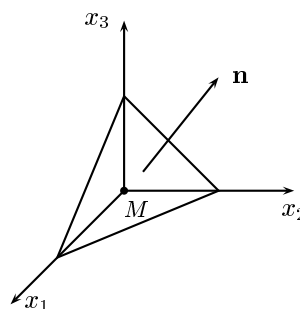
$$\sigma_{-n} = -\sigma_n. \quad (7.2)$$

Оказва се, че функцията (7.1) е линейна и поради това се задава с помощта на един двувалентен тензор. Този важен факт е установен от Коши, който използва за доказателството си следното класическо разсъждение.

Нека $Mx_1x_2x_3$ е декартова система с център в точката M , с единични вектори на осите e_i , $i = 1, 2, 3$. Изрязваме тетраедъра, показан на фиг. 7.2, и го свиваме мислено в точката M , без да променяме формата му. Така полученият безкрайно-малък тетраедър се нарича *тетраедър на Коши*.

Записваме вторият закон на Нютон за този тетраедър:

$$\mathbf{a} \, dm = \mathbf{S} + \mathbf{F}. \quad (7.3)$$



Фиг. 7.2. Тетраедър на Коши

(Предвид това, че той е безкрайно малък, може да го третираме като материална точка.) В (7.3), $dm = \rho \, dV$, ρ е плътността на средата в точката M , dV е обемът на тетраедъра, \mathbf{a} както обикновено е ускорението, а \mathbf{F} е векторът на масовите сили

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \, dm = \rho \mathbf{f} \, dV, \quad (7.4)$$

където \mathbf{f} е плътността им. На свой ред \mathbf{S} е главният вектор на вътрешните напрежения, които се появяват върху четирите стени на тетраедъра като следствие от изрязването му от тялото:

$$\mathbf{S} = \sigma_{-e_1} \, dS_1 + \sigma_{-e_2} \, dS_2 + \sigma_{-e_3} \, dS_3 + \sigma_n \, dS. \quad (7.5)$$

Тук dS_k е лицето на стената с нормала e_k , а \mathbf{n} е нормалата към наклонената стена.

Забелязваме преди всичко, че \mathbf{S} е безкрайно малка от ред a^2 , където a е характерният линеен размер на тетраедъра, докато dm и \mathbf{F} са безкрайно малки от ред a^3 (\mathbf{S} е пропорционално на повърхнината, а dm и \mathbf{F} — на обема на тетраедъра). Следователно dm и \mathbf{F} могат да

се пренебрегнат при свиването на тетраедъра в точка по сравнение с \mathbf{S} . Уравнението на Нютон (7.3) тогава се свежда просто до анулирането на главния вектор на вътрешните напрежения \mathbf{S} , записан в (7.5), т. е. $\mathbf{S} = 0$.

С използването на (7.2), преписваме последното уравнение във вида

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sum_{k=1}^3 \boldsymbol{\sigma}_k \frac{dS_k}{dS}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{-e_k} = -\boldsymbol{\sigma}_k, \quad \boldsymbol{\sigma}_k = \boldsymbol{\sigma}_{e_k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (7.6)$$

Но лицето dS_k е проекция на лицето dS на наклонената стена върху координатната равнина с нормала \mathbf{e}_k . Поради това

$$\frac{dS_k}{dS} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_k, \mathbf{n}}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_k$$

и (7.6) може да се напише като

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{n} \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \boldsymbol{\sigma}_k \right). \quad (7.7)$$

Въвеждаме двувалентният тензор

$$\mathbf{T}_\sigma = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \boldsymbol{\sigma}_k. \quad (7.8)$$

Дефиницията на диадата (3.3) тогава ни позволява да запишем (7.7) във вида

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_\sigma. \quad (7.9)$$

Формулата (7.9) се нарича *формула на Коши*, а тензорът \mathbf{T}_σ , дефиниран в (7.8) — *тензор на напрежението на Коши*. От (7.9) се вижда, че векторната функция (7.1) наистина е линейна и поради това се характеризира с двувалентния тензор на Коши \mathbf{T}_σ .

7.2. Локални и нелокални среди. Обърнете внимание, че в § 7.1, при въвеждането на тензора на напрежението, е направено едно много силно и неочевидно предположение. Именно, прието е неявно, че взаимодействието между двата бряга на разреза S има *локален* характер в смисъл, че то може да се представи само с помощта на повърхнинни сили, разпределени по самия разрез. По принцип обаче взаимодействието на двете разрязани части може да породи и обемни сили, когато материалните точки от вътрешността на едната част взаимодействат с точки от вътрешността на другата. Това са т. нар. *нелокални взаимодействия*.

В класическата механика на непрекъснатите среди те се пренебрегват изцяло като се предполага, че взаимодействието се осъществява от сили с „нулев радиус“ на действие, действащи само по повърхнината на разреза S .

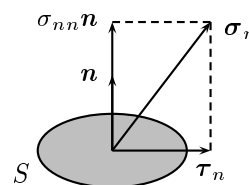
В редица случаи на реални среди с по-сложна вътрешна структура се оказва разумно да се предположи, че силите на взаимодействие, макар и локални, не са достатъчни за пълното описание на вътрешните усилия. Налага се въвеждането и на вътрешни моменти, също съсредоточени по повърхнината S . Това води до появата, освен на тензора \mathbf{T}_σ , и на т. нар. *тензор на моментните напрежения* \mathbf{T}_μ . Неговото въвеждане е отправната точка при построяването на *моментните теории* на деформирането и течението на непрекъснати среди. (Най-известната от тях е теорията на Косера, наречена още моментна теория на еластичността.) Подобни теории тук няма да се разглеждат. Ще споменем само, че те представляват примамлив избор при моделирането на механичното поведение на тела с по-сложен строеж, например, гранулирани материали (по-конкретно пясъка) или течни суспензии, в които множество твърди частици се движат във флуид. Елементарният обем в такива случаи съдържа гранули (песъчинки) или твърди частици от суспензията, които по време на деформирането и течението на средата не само се преместват, но и се завъртат (*независимо* от преместването си). Това именно завъртане може да породи вътрешните моменти.

7.3. Нормални и тангенциални напрежения. Да разложим вектора на напрежението σ_n във вида

$$\sigma_n = \sigma_{nn}\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_n, \quad \boldsymbol{\tau}_n \perp \mathbf{n}, \quad (7.10)$$

т. е. на компоненти по нормалата \mathbf{n} и перпендикулярно на нея, вж. фиг. 7.3. Компонентата $\boldsymbol{\tau}_n$ в равнината на сечението S се нарича *тангенциално* (или *срязващо*), а $\sigma_{nn}\mathbf{n}$ — *нормално* напрежение. Нормалното напрежение на свой ред е *опън* или *натиск*, в зависимост от това дали σ_{nn} е, съответно, положително или отрицателно.

Ако $\boldsymbol{\tau}_n = 0$, то площадката S се нарича *главна* — върху нея действат само нормални напрежения. Ако $\sigma_{nn} = 0$, то напрегнатото състояние е т. нар. *чисто срязване* — действат единствено тангенциални напрежения, които се стремят да „приплъзнат“ единия бряг на разреза спрямо другия.



Фиг. 7.3

Да припомним, че всеки тензор в \mathcal{E}_3 има поне един собствен вектор \mathbf{n} , за който $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ е колинеарно с \mathbf{n} , вж. § 4.9. Приложен към тензора на напрежението \mathbf{T}_σ , този факт означава, че каквото и да е напрегнатото състояние в точка на тялото, винаги съществува поне една главна площадка с нормала \mathbf{n} , за която $\mathbf{n} \parallel \boldsymbol{\sigma}_n$, $\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_\sigma$. Върху тази площадка, очевидно, не действат срязващи напрежения, а само нормални (опънни или натискови, в зависимост от знака на σ_{nn}).

7.4. Симетричност на тензора на напрежението — елементарен извод. Симетричността на тензора е сред централните факти в класическата механика на непрекъснатите среди.⁷ Тя е следствие на една от основните аксиоми на Ойлер за движението на материален обем, която ще обсъдим по-подробно в § 20.4.

Симетричността на \mathbf{T}_σ може да се демонстрира и с помощта на прости и нагледни механични съображения, които сега ще изложим. Това ще ни даде и кратък „отдых“ от диадите преди да преминем към полиадния формализъм, свързан с тензорите от произволна вече валентност.

За простота и по-голяма нагледност да разгледаме равнинния случай, като си представим тънка пластина, която се деформира от сили, лежащи в нейната равнина. Да отрежем от пластината елементарно правоъгълно парче с център в точката M , с размери dx_1 и dx_2 по декартовите оси Mx_1 и Mx_2 , съответно, вж. фиг. 7.4.

Върху разглеждания елемент действат следните сили:

- 1) силата на инерцията на Даламбер

$$\mathbf{J} = -\mathbf{a} dm = -\mathbf{a}\rho dS, \quad (7.11)$$

където \mathbf{a} е ускорението на центъра M , $dm = \rho dS$ е масата на елемента, ρ е плътността му, а $dS = dx_1 dx_2$ е лицето;

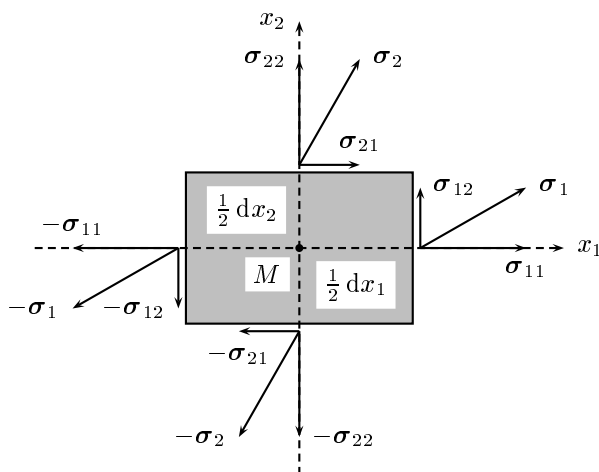
- 2) Масовите (обемни) сили,

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{f} dS, \quad (7.12)$$

където \mathbf{f} е плътността им (в случая силата, действаща върху елемента от пластината с лице dS ;

- 3) Силите на вътрешните напрежения $\boldsymbol{\sigma}_1 dx_2$ и $\boldsymbol{\sigma}_2 dx_1$ върху страните на правоъгълника. Разлагаме тези напрежения на техните нормални

⁷Класическа, доколкото навсякъде в този курс постулираме локалния характер на вътрешните напрежения и отсъствие на вътрешни (концентрирани) моменти вж. § 7.2. Вътрешните моменти водят, в частност, до несиметричност на тензора на напрежение, както ще стане ясно от разсъжденията по-долу.



Фиг. 7.4. Равновесие на елементарен правоъгълник от пластината

и тангенциални компоненти

$$\sigma_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22} + \sigma_{21}, \quad (7.13)$$

както е показано на фиг. 7.4.

Съгласно принципа на Даламбер разглежданият елемент на средата е в равновесие под действието на силата на инерция и на приложените към него сили, вж. (7.12) и (7.13). Това означава, че главният вектор и главният момент на системата се анулират спрямо произволен полюс. (Анулирането на главния вектор на подобна система беше използвано по-горе при разглеждането на тетраедъра на Коши, вж. § 7.1 и (7.3).)

За да покажем симетричността на тензора \mathbf{T}_σ е достатъчно да използваме анулирането само на главния момент. За полюс е естествено да изберем центъра на елемента M . Спрямо M моментите и на силата на инерция, и на масовите сили очевидно се анулират. Анулират се и моментите на нормалните напрежения σ_1 и σ_2 (директрисите им минават през M). Остават само моментите на тангенциалните напрежения:

$$\begin{aligned} & +\sigma_{12}(x_1 + \frac{1}{2}dx_1, x_2) dx_2 \cdot \frac{1}{2}dx_1 + \sigma_{12}(x_1 - \frac{1}{2}dx_1, x_2) dx_2 \cdot \frac{1}{2}dx_1 \\ & -\sigma_{21}(x_1, x_2 + \frac{1}{2}dx_2) dx_1 \cdot \frac{1}{2}dx_2 - \sigma_{21}(x_1, x_2 - \frac{1}{2}dx_2) dx_1 \cdot \frac{1}{2}dx_2 = 0; \end{aligned} \quad (7.14)$$

тук отчитаме, че напреженията σ_{12} и σ_{21} се пресмятат върху различните страни на елемента, върху които съответните координати се различават

с dx_1 или dx_2 . Разлагаме в (7.14) функциите σ_{12} и σ_{21} в ред на Тейлър в околността на точката $M(x_1, x_2)$. С точност до безкрайно малки от ред $o(dx_1 dx_2)$ тогава намираме $-2\sigma_{12} + 2\sigma_{21} = 0$ или

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad (7.15)$$

което именно и означава, че тензорът на напрежението в разглеждания случай е симетричен.

Аналогично е разсъждението в тримерния случай — там следва да се разгледа елементарен паралелепипед с център в дадената точка и със страни dx_1 , dx_2 и dx_3 . Горните разсъждения се повтарят тогава практически дословно. (Как?)

Обърнете внимание, че тангенциалните напрежения върху две съседни страни с общ връх не само са равни по големина, вж. (7.15), но и винаги са насочени или „едно към друго“ или „едно от друго“ (по-точно, или и двете към общия връх или и двете в посоки обратни на тези към общия връх). Това е т. нар. *правило* (или *закон*) за *взаимността* на тангенциалните напрежения.

Щом тензорът \mathbf{T}_σ е симетричен той притежава три взаимно перпендикулярни (единични) собствени вектора \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 , съответстващи на собствените стойности σ_1 , σ_2 и σ_3 . В диадния базис от собствени вектори

$$\mathbf{T}_\sigma = \sigma_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \sigma_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad (7.16)$$

а матрицата му е диагонална. Собствените стойности σ_1 , σ_2 и σ_3 се наричат *главни напрежения*. Прието е те да се номерират така, че $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Площадките, перпендикулярни на собствените вектори, се наричат *площадки на главните напрежения* или *главни площадки*. Следователно произволно напрегнато състояние в точка но деформируема среда може да се реализира като суперпозиция на три чисто опънни (или натискови) напрежения в три взаимно перпендикулярни направления.

7.5. Уравнение на движението на непрекъснатата среда — елементарен извод. Разглеждането на елементарния правоъгълник в § 7.4 позволява да изведем, в частния случай на декартова система, още едно от основните уравнения на механиката на непрекъснатите среди — именно уравнението на движението. Това ще послужи като илюстрация и подготовка за извода в общия случай на това основно уравнение, който ще отложим за § 19.4.

В § 7.4 анулирането на главния момент на системата от сили (7.11) — (7.13), действащи върху елементарния правоъгълник, вж. фиг. 7.4, ни

позволи да се убедим в симетричността на тензора на напрежението. Но тази система е в равновесие и затова главният ѝ вектор също трябва да се анулира. Оттук именно и следва споменатото уравнение на движение на средата.

Проектираме главният вектор на системата (7.11) – (7.13) върху осите Mx_1 и Mx_2 :

$$\begin{aligned} & \sigma_{11}(x_1 + \frac{1}{2}dx_1, x_2) dx_2 - \sigma_{11}(x_1 - \frac{1}{2}dx_1, x_2) dx_2 \\ & + \sigma_{12}(x_1, x_2 + \frac{1}{2}dx_2) dx_1 - \sigma_{12}(x_1, x_2 - \frac{1}{2}dx_2) dx_1 \\ & + \rho f_1 dx_1 dx_2 - \rho a_1 dx_1 dx_2 = 0, \\ & \sigma_{12}(x_1 + \frac{1}{2}dx_1, x_2) dx_2 - \sigma_{12}(x_1 - \frac{1}{2}dx_1, x_2) dx_2 \\ & + \sigma_{22}(x_1, x_2 + \frac{1}{2}dx_2) dx_1 - \sigma_{22}(x_1, x_2 - \frac{1}{2}dx_2) dx_1 \\ & + \rho F_2 dx_1 dx_2 - \rho a_2 dx_1 dx_2 = 0, \end{aligned} \quad (7.17)$$

като използваме симетричността на тензора на напрежението, вж. (7.15). Отново е взето предвид, че напреженията σ_{12} и σ_{21} се пресмятат върху различните страни на елемента, върху които съответните координати се различават с dx_1 или dx_2 . Разлагаме в (7.17) функциите σ_{12} и σ_{21} в ред на Тейлър в околността на точката $M(x_1, x_2)$. С точност до безкрайно малки от ред $o(dx_1 dx_2)$ тогава намираме

$$\begin{aligned} \rho a_1 &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho f_1, \\ \rho a_2 &= \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho f_2. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Това са уравненията на движението на непрекъснатата среда (в равнинния случай). Видът им в тримерния случай е аналогичен:

$$\rho a_k = \frac{\partial \sigma_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{k2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial x_3} + \rho f_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (7.19)$$

Да въведем вектора Φ , чийто компоненти в дадената декартова система са

$$\Phi_k = \frac{\partial \sigma_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{k2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial x_3}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (7.20)$$

Както ще видим по-нататък (§.), векторът Φ е т. нар. *дивергенция* на полето на тензора на напрежението. С помощта на Φ уравнението (7.19) се записва безкоординатно като

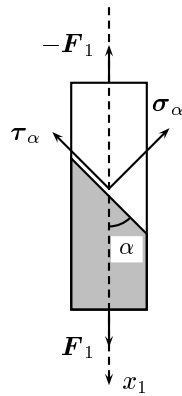
$$\rho \mathbf{a} = \Phi + \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \rho \mathbf{f}. \quad (7.21)$$

Съгласно втория закон на Нютон производението на масата и ускорението на материална частица от средата е равно на действащата върху нея сила. Ако частицата е абсолютно твърда, то единствената сила е масовата, т. е. \mathbf{F} , и законът на Нютон ще се запише като

$$\rho \mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (7.22)$$

Сравнението между (7.21) и (7.22) показва, че деформируемостта на частицата, пораждаща вътрешните напрежения, се проявява като една допълнителна сила Φ — дивергенцията на тензора на напрежението. В по-общ вид уравнението на движението (7.21) ще бъде изведено в § 19.4.

7.6. Напрежения на наклонените площадки при едноосен и двуосен опън. В заключение на този параграф нека разгледаме някои най-прости примери, свързани с напрегнатото състояние на телата. Това са по-същество упражнения, чиято цел от една страна е да илюстрираме някои от тензорните разглеждания на § 3 и § 4, а от друга да дадем по-ясна и пълна представа за тензора на напрежението — едно от основните понятия на механиката на непрекъснатите среди.



Фиг. 7.5. Едноосен опън

Ще започнем с разглеждането на най-простото напрегнато състояние — т. нар. *едноосен опън*. Правоъгълник, изрязан от тънка пластина, се разтяга от силите F_1 и $-F_1$, с директриса оста x_1 , вж. фиг. 7.5. (За определеност предполагаваме, че $F_1 > 0$, т. е. F_1 и x_1 имат еднаква посока, и наистина имаме опън. Ако $F_1 < 0$, т. е. F_1 и x_1 са с различни посоки, то ще реализира едноосен натиск.) Търсим големината на нормалното, σ_α , и тангенциалното, τ_α , напрежения, които действат на сеченията наклонени под ъгъл α спрямо x_1 , т. е. спрямо опънната сила. (Говорим за опънна сила само

за определеност предполагайки, че $\sigma_1 > 0$. При $\sigma_1 < 0$ силата ще бъде натискава, но това по никакъв начин няма да се отрази на разсъжденията.)

Нека L е ширината на правоъгълника. Опънното напрежение тогава

има вида⁸

$$\sigma_1 = F_1/L. \quad (7.23)$$

Разрязваме мислено ивицата под ъгъл α . Върху наклоненото сечение прилагаме търсените нормално, σ_α , и тангенциалното, τ_α , напрежения, вж. фиг. 7.5. Под действието на означените сили трапецът на същата фигура е в равновесие. Записваме условието за равновесие

$$L_\alpha \sigma_\alpha + L_\alpha \tau_\alpha + \mathbf{F}_1 = 0 \quad (7.24)$$

— анулирането на главния вектор; тук $L_\alpha = L/\sin \alpha$ е дължината на наклоненото сечение. (Главният момент се анулира автоматично. Защо?) Проектираме (7.24) върху оста x_1 и перпендикулярно на нея, използвайки (7.23):

$$\begin{aligned} \sigma_1 L - L_\alpha \tau_\alpha \cos \alpha - L_\alpha \sigma_\alpha \sin \alpha &= 0, \\ -L_\alpha \tau_\alpha \sin \alpha + L_\alpha \sigma_\alpha \cos \alpha &= 0, \end{aligned}$$

Оттук

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \sin^2 \alpha, \\ \tau_\alpha &= \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Видно е, че при едноосен опън по оста x_1 се появяват и тангенциални напрежения върху наклонените площадки. Максималната им големина е

$$\tau_\alpha^{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_1| \quad (7.26)$$

и тя се достига при $\alpha = \pi/4$.

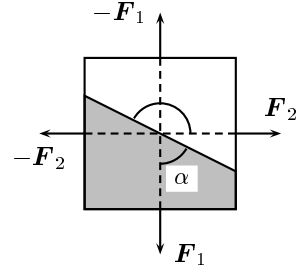
Да разгледаме двуосен опън: към правоъгълника със страни L_1 и L_2 са приложени съответно опънните сили F_1 и F_2 . Напрегатното състояние в случая е суперпозиция на два едноосни опъна. Върху сечение наклонено под ъгъл спрямо оста x_1 тогава ще действат напреженията

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \\ \tau_\alpha &= (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (7.27)$$

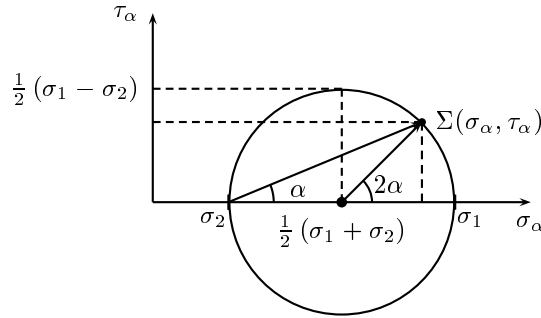
(Щом разглежданото сечение сключва ъгъл α с оста x_1 , то сключва ъгъл $\pi/2 + \alpha$ с оста x_2 , т. е. със силата F_2 .) Максималната големина на тангенциалното напрежение в случая е

$$\tau_\alpha^{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| \quad (7.28)$$

⁸Ако разгледаме по-реалистичния пример — цилиндричен прът с напречно сечение S под действието на осовата сила F_1 , то напрежението е $\sigma_1 = F_1/S$. (Припомняме, че напрежението е плътността на повърхнинните сили, т. е. силата действаща на единица лице от повърхнината. В равнинния случай това е силата действаща на единица дължина от пластината.)



Фиг. 7.6. Двуосен опън



Фиг. 7.7. Диаграма на Мор

и тя отново се достига при $\alpha = \pi/4$.

Ако $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, то $\sigma_\alpha \equiv \sigma$, $\tau_\alpha \equiv 0$ за всеки ъгъл α , вж. (7.27). Но това е напълно естествено, защото в случая тензорът на напрежението е сферичен, $\mathbf{T}_\sigma = \sigma \mathbf{I}$, и матрицата му е диагонална във всеки ортонормиран базис. Нормалното напрежение е едно и също върху всички площадки в тялото, а тангенциални напрежения няма.

7.7. Диаграма на Мор. Формулите (7.27) допускат проста и нагледна геометрична интерпретация. Да ги напишем във вида:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha,\end{aligned}\quad (7.29)$$

като предполагаме за определеност, че $\sigma_1 > \sigma_2$. (Използвахме тъждеството $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.) От (7.27) следва

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\right)^2. \quad (7.30)$$

Уравнението (7.30) определя очевидно окръжност в равнината $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$, параметрично зададена в (7.29). Тя се нарича *окръжност на Мор (Mohr)*. Тази окръжност е показана на фиг. 7.7 — центърът ѝ е в точката $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ на оста σ_α , а радиусът ѝ е $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$.

За да намерим нормалното и тангенциалното напрежения на площадката, наклонена под ъгъл α (спрямо по-голямото от главните направления, съответстващо на σ_1), прекарваме радиус в окръжността на Мор под същия ъгъл α спрямо оста σ , вж. фиг. 7.7. Пресечната му точка Σ с тази окръжност има като координати търсените напрежения σ_α и τ_α .

7.8. Определяне на главните площадки на напрежението.

Нека е зададена, отново в равнинния случай за простота и нагледност, матрицата

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

на тензора на напрежението в точката M спрямо декартовата система Mx_1x_2 . Главните напрежения, σ_1 и σ_2 , определяме от характеристичното уравнение на матрицата (7.31):

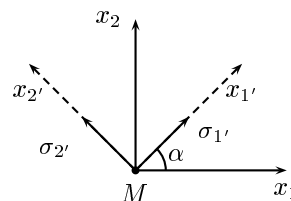
$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\sigma_{11} + \sigma_{22})\lambda + \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = 0,$$

т. е.

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{11} + \sigma_{22} \pm \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \right). \quad (7.32)$$

Нека главните оси са завъртяни под (неизвестния) ъгъл α спрямо дадената система Mx_1x_2 , вж. фиг. 7.8. Съгласно (7.27)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, \\ \sigma_{22} &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \\ \sigma_{12} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (7.33)$$



Фиг. 7.8

Тук например σ_{11} е нормалното напрежение върху площадката Mx_2 , която е наклонена под ъгъл $\pi/2 - \alpha$ спрямо оста $Mx_{1'}$ на главното напрежение σ_1 , ср. фиг. 7.6 и фиг. 7.8.

Съотношенията (7.33) представляват система от три уравнения спрямо трите неизвестни σ_1 , σ_2 и α (да напомним, че σ_{11} , σ_{12} и σ_{22} са зададени). Но главните напрежения σ_1 и σ_2 вече са известни от решението на характеристичното уравнение, вж. (7.32). От последното уравнение на (7.33) имаме

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1 - \sigma_2},$$

т. е.

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1 - \sigma_2}, \quad (7.34)$$

с което положението на главните оси е определено.

В заключение на този пункт да разгледаме за илюстрация матрицата на напреженията

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

— това е т. нар. *чисто срязване*, когато по две взаимноперпендикулярни оси Mx_1 и Mx_2 действат само срязващи напрежения, вж. фиг. 7.9. Търсят се главните площадки на напрежението.

Характеристичното уравнение в случая е

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \tau \\ \tau & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \tau^2 = 0,$$

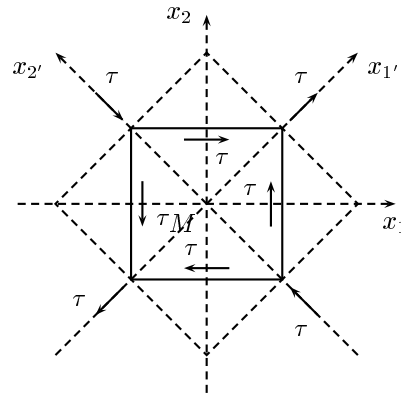
и главните напрежения очевидно са

$$\sigma_{1,2} = \pm\tau. \quad (7.36)$$

Ъгълът α определящ положението на главните оси търсим от (7.34):

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\tau}{\sigma_1 - \sigma_2} = \pi/4,$$

вж. (7.36). Следователно, *чисто срязване* (7.35) е еквивалентно на *чист опън* и *чист натиск* по две взаимноперпендикулярни оси $Mx_{1'}$ и $Mx_{2'}$, наклонени под ъгъл $\pi/4$ спрямо изходните оси Mx_1 и Mx_2 на срязването (7.35). При това, големините и на опъна, и на натиска, съвпадат с големината τ на срязващото напрежение, вж. отново фиг. 7.9.



Фиг. 7.9. Чисто срязване