

§ 6. Пример — тензор на инерцията на Ойлер

В този момент нека прекъснем формалното изложение на тензорната алгебра за да обсъдим по-подробно два класически примера на двувалентни тензори — тензорите на инерция на Ойлер (в този параграф) и тензора на напрежението на Коши (в следващия).

6.1. Тензор на инерцията. Разглеждаме движение на абсолютно твърдо тяло с една неподвижна точка O . Нека

$$\mathbf{G}_O = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, dm, \quad (6.1)$$

е кинетичният момент (моментът на количеството движение) спрямо точката O ; тук $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ е радиус-векторът на точката M от тялото спрямо фиксиран полюс O , $dm = \rho \, dV$ е масата на елементарния обем dV , а ρ е плътността му.

Съгласно теоремата на Ойлер-Даламбер (§ 4.12) всяко движение на разглежданото тяло може да се представи като ротация около ос, минаваща естествено през O (това е т. нар. ос на крайното въртене). Представяме движението като безкрайна редица (суперпозиция) от безкрайно малки движения. Всяко такова движение на свой ред е безкрайно малка ротация около т. нар. *моментна ос на въртене*⁵, също минаваща през O (още един път използваме теоремата на Ойлер-Даламбер). Векторът на моментната ъглова скорост на безкрайно малките ротации означаваме с $\boldsymbol{\omega}$, а кинетичният момент — с \mathbf{G}_O^ω . Тъй като по време на движението посоката и големината на $\boldsymbol{\omega}$ се *менят*, нас ни интересува зависимостта на \mathbf{G}_O^ω от $\boldsymbol{\omega}$, т. е. векторната функция

$$\boldsymbol{\omega} \longrightarrow \mathbf{G}_O^\omega. \quad (6.2)$$

За пресмятане на \mathbf{G}_O^ω припомним формулата на Ойлер

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (6.3)$$

която ни дава скоростта \mathbf{v} на произволна точка M от тялото при ротацията с вектор на ъгловата скорост $\boldsymbol{\omega}$.

⁵ Да припомним, че геометричното място на тези оси образува конус с връх в точката O , наречен *аксоид на движението*.

Внасяме (6.3) в (6.1) и разкриваме двойното векторно произведение, използвайки добре познатата формула

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{v} &= \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = r^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ &= \boldsymbol{\omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} r^2 - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}),\end{aligned}$$

вж. (9.36). Тогава

$$\mathbf{G}_O^\omega = \int_V (r^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})) \, dm. \quad (6.4)$$

Въвеждаме двувалентният тензор

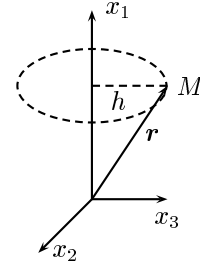
$$\mathbf{J} = \int_V (r^2 \mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \, dm, \quad (6.5)$$

наречен *тензор на инерцията*. Дефиницията (3.3) на диадата като линейно преобразование позволява тогава да препишем (6.4) във вида

$$\mathbf{G}_O^\omega = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (6.6)$$

Следователно векторната функция (6.2) е *линейна*, а тензорът на инерцията на тяло е линейното преобразование, което преобразува даденият вектор на моментната ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}$ в кинетичния момент \mathbf{G}_O^ω на тялото, съответстващ на движението му с тази ъглова скорост.

Нека $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ е ортонормиран базис в \mathcal{E}_3 , определящ декартовата система $Ox_1x_2x_3$. Компонентите на тензора \mathbf{J} в този базис, съгласно (6.5), са



Фиг. 6.1

$$\begin{aligned}J_{11} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_1 = \int_V (r^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1)^2) \, dm \\ &= \int_V (r^2 - x_1^2) \, dm = \int_V (x_2^2 + x_3^2) \, dm = \int_V h^2 \, dm, \\ J_{22} &= \int_V (x_3^2 + x_1^2) \, dm, \quad J_{33} = \int_V (x_1^2 + x_2^2) \, dm, \\ J_{ij} &= - \int_V x_i x_j \, dm, \quad i \neq j.\end{aligned} \quad (6.7)$$

Припомняме, че диагоналните елементи J_{11}, J_{22}, J_{33} на тензора \mathbf{J} са т. нар. *екваториални моменти на инерция* (това са моментите на инерция спрямо трите координатни оси $Ox_i, i = 1, 2, 3$). Интерпретацията им е проста: за да намерим J_{11} , например, трябва да „сумираме“ (т. е. да интегрираме) $h^2 dm$ по всички точки (елементарни обеми) на тялото, където $h = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ е разстоянието на точката M до оста Ox_1 , вж. фиг. 6.1.

Да отбележим за пълнота, че не само кинетичния момент, но и кинетичната енергия

$$T = \frac{1}{2} \int_V v^2 dm \quad (6.8)$$

се изразява просто и удобно чрез тензора на инерцията. За да се убедим в това, да забележим първо, че⁶

$$v^2 = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2 = r^2 \omega^2 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})^2, \quad (6.9)$$

вж. (6.3). От друга страна квадратичната форма на тензора \mathbf{J} се записва като

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = \int_V (r^2 \omega^2 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})^2) dm, \quad (6.10)$$

както се вижда от дефиницията (6.5) на \mathbf{J} . Използването на (6.9) в (6.10) и сравняването на резултата с (6.8) дава

$$T = \frac{1}{2} \int_V v^2 dm = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (6.11)$$

— кинетичната енергия на разглежданото тяло е половината от квадратичната форма на тензора на инерция. Оттук следва, че тензорът на инерция \mathbf{J} е не само симетричен, но и (строго) положително дефинитен, т. е. $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \geq 0$, тъй като кинетичната енергия е винаги положителна за движещо се тяло.

6.2. Главни инерчни моменти на тяло. Тензорът на инерцията, дефиниран в (6.5), е очевидно симетричен. Да означим следвайки историческа традиция още от времето на Ойлер собствените му стойности

⁶Използваната тук формула

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

е известна като *формула на Лагранж*. Тя следва по очевиден начин от дефинициите на скаларното и векторното произведение в тримерното пространство.

с A , B и C , и нека \mathbf{i}' , \mathbf{j}' , \mathbf{k}' е съответният им ортонормиран базис от собствени вектори. Тогава

$$\mathbf{J} = A \mathbf{i}' \mathbf{i}' + B \mathbf{j}' \mathbf{j}' + C \mathbf{k}' \mathbf{k}'. \quad (6.12)$$

В диадния базис, породен от собствените си вектори тензора \mathbf{J} , матрицата му е диагонална:

$$\|J_{ij}\| = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Собствените стойности A , B и C на тензора \mathbf{J} се наричат *главни инерчни моменти* на тялото. Традиционно те се избират така, че $A \geq B \geq C$. Освен това, главните моменти на инерция на тялото са винаги положителни $A \geq B \geq C > 0$, щом тензорът \mathbf{J} е положително дефинитен (вж. § 6.1). Осите $Ox_{1'}$, $Ox_{2'}$, $Ox_{3'}$ определени, съответно, от собствените вектори \mathbf{i}' , \mathbf{j}' , \mathbf{k}' на \mathbf{J} се наричат *главни оси на инерция*.

6.3. Динамични уравнения на Ойлер. Въвеждането на тензора на инерцията и на главните му оси са първият и централен момент в извода на знаменитите Ойлерови уравнения на движение на абсолютно твърдо тяло с една неподвижна точка. За пълнота ще припомним основните идеи на този извод.

Нека p , q и r са компонентите на $\boldsymbol{\omega}$ в системата от главни оси на инерция, т. е.

$$\boldsymbol{\omega} = p \mathbf{i}' + q \mathbf{j}' + r \mathbf{k}'. \quad (6.14)$$

От (6.12) следва, че

$$\mathbf{G}_O^\omega = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = Ap \mathbf{i}' + Bq \mathbf{j}' + Cr \mathbf{k}'. \quad (6.15)$$

Прилагаме „теоремата“ за кинетичния момент

$$\frac{d}{dt} \mathbf{G}_O^\omega = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}, \quad (6.16)$$

вж. § 20.2, където $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ е главният момент на външните сили спрямо точката O . Разглеждаме подвижната координатна система $Ox_{1'}x_{2'}x_{3'}$ на главни оси на инерция, която се движи „залепена“ за тялото. Внасяме (6.15) в (6.16):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{G}_O^\omega &= A \frac{dp}{dt} \mathbf{i}' + B \frac{dq}{dt} \mathbf{j}' + C \frac{dr}{dt} \mathbf{k}' \\ &+ \underbrace{Ap \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + Bq \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + Cr \frac{d\mathbf{k}'}{dt}}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Но

$$\frac{di'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times i', \quad \frac{dj'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times j', \quad \frac{dk'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times k'$$

— използваме формулата на Ойлер (6.3), като забелязваме, че ортите i' , j' и k' са неподвижно свързани с тялото и поради това си движат със същата (като тази на тялото) ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}$ във всеки момент от време. Следователно, подчертаните членове в (6.17) се преобразуват като

$$\boldsymbol{\omega} \times (Ap i' + Bq j' + Cr k') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}_O^\omega,$$

вж. (6.15). Заедно с (6.14) и (6.15), последното съотношение позволява да опростим (6.17):

$$\frac{d}{dt} \mathbf{G}_O^\omega = A \frac{dp}{dt} i' + B \frac{dq}{dt} j' + C \frac{dr}{dt} k' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}_O^\omega = \mathbf{M}_O^{\text{ext}},$$

или

$$A \frac{dp}{dt} i' + B \frac{dq}{dt} j' + C \frac{dr}{dt} k' + \begin{vmatrix} i' & j' & k' \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}.$$

Проектираме двете части на това равенство върху осите на подвижната система, т. е. по ортите i' , j' , k' на главните оси на инерция:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} - (B - C)qr &= M_{1i'}^{\text{ext}}, \\ B \frac{dq}{dt} - (C - A)rp &= M_{2j'}^{\text{ext}}, \\ C \frac{dr}{dt} - (A - B)pq &= M_{3k'}^{\text{ext}}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

където $M_{i'}^{\text{ext}}$ са проекциите на главния момент на външните сили върху съответните главни оси на инерция на тялото. Съотношенията (6.18) представляват класическите динамични уравнения на Ойлер.

6.4. Елипсоид на инерцията. За простота да разгледаме първо вектор \mathbf{a} . Нека отново O е фиксиран полюс в пространството и $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ е радиус-векторът на точка M спрямо с O .

Векторното уравнение

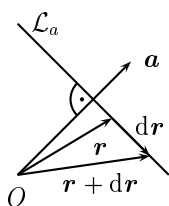
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = 1 \quad (6.19)$$

определя, очевидно, равнина \mathcal{L}_a . Тя е перпендикулярна на вектора \mathbf{a} и е на разстояние $1/a$ от началото, $a = |\mathbf{a}|$. Проверката на тези факти е елементарна, като основната идея е илюстрирана геометрично на фиг. 6.2. (Как?)

В декартова координатна система уравнението (6.19) на равнината \mathcal{L}_a има вида

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 1.$$

Следователно, дължината на отсечката, „отрязана“ от \mathcal{L}_a върху координатната ос Ox_i е $1/a_i$. Това означава, че равнината \mathcal{L}_a определя еднозначно вектора \mathbf{a} : за всяка декартова система реципрочните отрязъци по координатните оси, „отсечени“ от \mathcal{L}_a , задават съответните координати на \mathbf{a} в тази система.



Фиг. 6.2

В случая на симетричен двувалентен тензор \mathbf{J} е естествено да се разгледа квадратичната му форма $\mathbf{r} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{r}$ вместо линейната форма $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$. Тогава аналогът на равнината \mathcal{L}_a , породена от вектора \mathbf{a} , е повърхнината \mathcal{L}_J , зададена с уравнението

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{r} = 1. \quad (6.20)$$

Разсъжденията тук и по-нататък ще проведем за нагледност върху примера на тензора на инерцията \mathbf{J} , макар че на негово място може да стои всеки симетричен и положително дефинитен тензор \mathbf{T} .

В произволна декартова система $Ox_1x_2x_3$ уравнението (6.20) има вида

$$\sum_{i,j=1}^3 J_{ij} x_i x_j = 1,$$

или

$$J_{11} x_1^2 + J_{22} x_2^2 + J_{33} x_3^2 + 2J_{12} x_1 x_2 + 2J_{23} x_2 x_3 + 2J_{31} x_3 x_1 = 1, \quad (6.21)$$

което определя повърхнина от втори ред в тримерното пространство. Спрямо главните оси на инерция уравнението (6.21) се „канонизира“

$$Ax_{1'}^2 + Bx_{2'}^2 + Cx_{3'}^2 = 1. \quad (6.22)$$

Това очевидно е уравнението на елипсоид с полуоси

$$a = 1/\sqrt{A}, \quad b = 1/\sqrt{B}, \quad c = 1/\sqrt{C}, \quad (6.23)$$

наречен *елипсоид на инерцията*. (За произволен положително дефинитен и симетричен тензор \mathbf{T} повърхнината $\mathbf{r} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{r} = 1$ е т. нар. *тензорен елипсоид*.)

Задаването на елипсоида на инерция \mathcal{L}_J еднозначно определя тензора \mathbf{J} . Именно чрез посоките на осите си \mathcal{L}_J задава собствените вектори, а чрез големините на полуосите си определя собствените стойности, вж. (6.23). По такъв начин множеството от симетрични и положително дефинитни тензори над \mathcal{E}_3 се отъждествява с множеството от всевъзможни елипсоиди с център O , като на всеки такъв тензор се съпостави тензорният му елипсоид:

$$\mathbf{J} \Leftrightarrow \mathcal{L}_J. \quad (6.24)$$

Съответствието (6.24) е взаимно-еднозначно.

Ако $\mathbf{J} = \lambda \mathbf{I}$, $\lambda > 0$, то елипсоидът \mathcal{L}_J на инерция се превръща в сферата $r^2 = 1/\lambda$. Това обяснява терминът сферичен тензор, въведен в § 4.1 за тензорите, пропорционални на единичния.

От уравнението (6.21) се вижда, че отсечката $|OX_1|$, „отрязана“ от елипсоида \mathcal{L}_J върху координатната ос Ox_1 е

$$|OX_1| = 1/\sqrt{J_{11}}. \quad (6.25)$$

Това ни позволява да онагледим графично елипсоида на инерция за дадено тяло по следния начин. Нека Ox_1 е произволна ос с начало в неподвижната точка O . Пресмятаме (екваториалния) момент на инерция J_{11} спрямо оста Ox_1 , съгласно (6.7). По посока на Ox_1 построяваме отсечката $|OX_1|$ с дължина $|OX_1| = 1/\sqrt{J_{11}}$. Тогава геометричното място на краищата на тези отсечки е елипсоидът на инерция, вж. (6.25).

Упражнение 6.1. Точката P лежи върху елипсоида на инерция \mathcal{L}_J , $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP}$. Нека $\mathbf{r}_2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_1$, вж. фиг. 6.3. Покажете:

а) \mathbf{r}_2 е перпендикулярно на допирателната равнина \mathcal{T}_P към \mathcal{L}_J , прекарана в точката P ;

б) ако $|ON|$ е разстоянието O до допирателната равнина \mathcal{T}_P , то

$$|\mathbf{r}_2| = |\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_1| = 1/|ON|. \quad (6.26)$$

Упътване. Разглеждаме, освен точката \mathbf{r}_P , безкрайно-близките ѝ точки $\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_1$, също принадлежащи на елипсоида \mathcal{L}_J :

$$(\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{J} \cdot (\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_1) = 1.$$

Разкриваме скобите в лявата страна, пренебрегвайки безкрайно малките от по-висок ред спрямо $|d\mathbf{r}_1|$

$$d\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_1) = d\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_1, \quad (6.27)$$

тъй като $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_1 = 1$ и тензорът \mathbf{J} е симетричен. Но векторите $d\mathbf{r}_1$ лежат върху допирателната равнина \mathcal{T}_P към \mathcal{L}_J , минаваща през точката P . Поради това $\mathbf{r}_2 \perp \mathcal{T}_P$, вж. (6.27).

За доказателството на б) преписваме равенството $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_1 = 1$ във вида $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 1$ или

$$|\mathbf{r}_2| |\mathbf{r}_1| \cos \alpha = |\mathbf{r}_2| |ON| = 1,$$

тъй като $|\mathbf{r}_1| \cos \alpha = |ON|$ (α е ъгълът между \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , вж. фиг. 6.3).

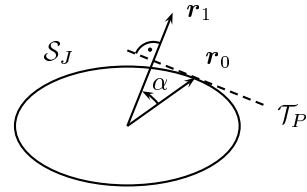
Упражнение 6.2. В какво се преобразува сферата $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 1$ под действието на (обратимия) тензор \mathbf{T} ?

Упътване. Нека $\mathbf{r}_1 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{r}$. Тогава $\mathbf{r} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{r}_1$ и

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{r}_1) = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{T}^{*-1} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{r}_1 = 1.$$

Но това е тензорният елипсоид за тензора $\mathbf{T}^{*-1} \cdot \mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^*)^{-1}$. (Този тензор, очевидно, е симетричен и положително дефинитен, вж. § 5.3).

В заключение на този параграф ще отбележим, че с помощта на елипсоида на инерция може, следвайки Поансо, да се онагледят и интерпретира по изящен геометричен начин движението на тяло с една неподвижна точка. Подробности могат да се намерят в курсовете по класическа механика.



Фиг. 6.3

Упражнение 6.3. Нека векторът $\boldsymbol{\omega}$ на моментната ъглова скорост „пробожда“ елипсоида на инерция в точката Ω . Покажете, че кинетичната енергия на тялото е

$$T = \frac{\omega^2}{2|O\Omega|^2}. \tag{6.28}$$

Упътване. Припомняме формулата $T = \frac{1}{2} J_{11} \omega^2$ за кинетичната енергия на тяло, въртящо се с ъглова скорост ω около оста Ox_1 , J_{11} е моментът на инерция на тялото спрямо същата ос. Но в случая $J_{11} = 1/|O\Omega|^2$, вж. (6.25).