§ 5. Функция на тензор. Полярно разлагане

5.1. Функция на тензор. Нека $\boldsymbol{T} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$. Заедно с $\boldsymbol{T}$ можем да разглеждаме полускаларните му „степени“:

$$\boldsymbol{I}\,,\ \boldsymbol{T}\,,\ \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\,,\ \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\,,\ \dots \tag{5.1}$$

— добавяме тук и единичния тензор $\boldsymbol{I}$ за пълнота, преполагайки, че той представлява нулевата степен на всеки тензор $\boldsymbol{T} \neq 0$ (аналогично на реалните числа, при които $a^0 = 1$ за всяко $a \neq 0$).

Нека $f(x)$ е реална аналитична функция

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\,, \tag{5.2}$$

с област на сходимост $|x| \leq R$. Операцията полускаларно умножение позволява да въведем по естествен начин функцията $f(\boldsymbol{T})$ на двувалентния тензор $\boldsymbol{T}$, по следния естествен начин:

$$f(\boldsymbol{T}) = a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T} + a_3\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T} + \cdots\,, \tag{5.3}$$

който ще е сходящ, ако $|\boldsymbol{T}| \leq R$, вж. дефиницията на нормата (4.35) и свойството ѝ (4.37).

По този начин добре известните елементарни функции от анализа могат да се дефинират и в пространството от двувалентни тензори. Например,

$$\begin{aligned}
\exp\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{T} + \tfrac{1}{2!}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T} + \tfrac{1}{3!}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T} + \cdots\,,\\
\sin\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{T} - \tfrac{1}{3!}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T} + \cdots\,,\\
\ln(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}) &= \boldsymbol{T} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T} + \tfrac{1}{3}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T} - \cdots\,,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

и т. н.

Обръщаме внимание, че елементарните функции от типа на (5.4) наследяват някои от свойствата на скаларните си „родители“, но далеч не всички. Например можем да твърдим, че

$$\exp(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S}) = \exp\boldsymbol{T}\cdot\exp\boldsymbol{S}$$

единствено, ако $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{S}$ комутират, т. е. ако $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}$.

Упражнение 5.1. *Като използвате дефиницията (4.54) покажете, че*

$$\exp \boldsymbol{K} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_n)\,, \quad \text{ако} \quad \boldsymbol{K} \in \mathcal{E}_n \underset{a}{\otimes} \mathcal{E}_n\,,$$

т. е. експонентата на кососиметричен тензор е ортогонално преобразование.

От дефиницията (5.3) и от (4.32) е ясно, че

$$(f(\boldsymbol{T}))^* = f(\boldsymbol{T}^*)\,. \tag{5.5}$$

В случая на симетричен тензор $\boldsymbol{T}$ функцията $f(\boldsymbol{T})$ може да се определи по-просто и по-общо, без да се изисква аналитичността на $f(x)$. За тази цел използваме представянето (4.49) на $\boldsymbol{T}$ в диадния базис, породен от собствените вектори $\boldsymbol{e}_i$ на $\boldsymbol{T}$. Забелязваме, че

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T} = \left(\sum_i^n \lambda_i\, \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i\right)\cdot\left(\sum_j^n \lambda_j\, \boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j\right) = \sum_k^n \lambda_k^2\, \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k\,,$$

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T} = \sum_k^n \lambda_k^3\, \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k \quad \text{и т. н.}$$

Тук използвахме дефиницията (4.29) на полускаларното умножение и факта, че векторите $\boldsymbol{e}_i$ образуват ортонормиран базис. Следователно

$$f(\boldsymbol{T}) = \sum_{k=1}^n \left(a_0 + a_1\lambda_k + a_2\lambda_k^2 + \cdots\right)\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k)\,\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k\,.$$

Това подсказва, че за симетричен тензор $\boldsymbol{T}$ може да дефинираме $f(\boldsymbol{T})$ по следния начин:

$$f(\boldsymbol{T}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n f(\lambda_k)\,\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k\,, \tag{5.6}$$

като тук вече *не е необходимо* да предполагаме аналитичността на $f(x)$. Единственото ограничение е $f(x)$ да бъде дефинирана в интервала, в който лежат собствените стойности на разглежданите тензори.

5.2. Теорема на Хамилтън-Кейли. Нека отново $\boldsymbol{T}$ е симетричен тензор и $f_{\mathrm{T}}(\lambda)$ е характеристичният му полином (4.45). Разглеждаме функцията $f_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T})$ — съгласно (5.6)

$$f_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}) = \sum_{k=1}^n f_{\mathrm{T}}(\lambda_k)\,\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k = 0\,, \tag{5.7}$$

тъй като собствените стойности λ_k са корени на $f_{\mathrm{T}}(\lambda)$, вж. § 4.9. Следователно, *всеки тензор* $\boldsymbol{T}$ *анулира характеристичния си полином.* В това именно се състои *теоремата на Хамилтън-Кейли*, доказана тук за простота само за симетрични тензори.

Упражнение 5.2. *Покажете, че за симетричен тензор* $\boldsymbol{T}$ *над тримерно пространство е в сила равенството*

$$\det \boldsymbol{T} = \tfrac{1}{3}\left[\operatorname{tr}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}) - \tfrac{1}{3}\,(\operatorname{tr}\boldsymbol{T})\,(\operatorname{tr}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}) + \tfrac{1}{2}\,(\operatorname{tr}\boldsymbol{T})^3\right]. \tag{5.8}$$

В частност, ако $\boldsymbol{T}$ *е девиатор,* $\operatorname{tr}\boldsymbol{T} = 0$, *то*

$$\det \boldsymbol{T} = \tfrac{1}{3}\operatorname{tr}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}),$$

Упътване: Може, разбира се, да проверите (5.8), преминавайки към главните оси на тензора $\boldsymbol{T}$, когато матрицата му е диагонална, вж. (4.50). Другият по-нетривиален начин е да запишете теоремата на Хамилтън-Кейли в тримерния случай:

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T} - I_1\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T} + I_2\boldsymbol{T} - I_3\boldsymbol{I} = 0,$$

да вземете следата от двете страни и да използвате формулата (4.52) за квадратичния инвариант I_2.

5.3. „Корен“ от тензор. Нека собствените стойности на симетричния тензор $\boldsymbol{T}$ са неотрицателни, $\lambda_k \geq 0$. Тогава можем да определим *корен* от тензора $\boldsymbol{T}$ по следния начин

$$\sqrt{\boldsymbol{T}} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k}\,\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k\,. \tag{5.9}$$

Тензорът-корен $\sqrt{\boldsymbol{T}}$ има очевидното свойство

$$\sqrt{\boldsymbol{T}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T}, \tag{5.10}$$

което именно го прави естествено обобщение на понятието корен на реално (неотрицателно) число.

Да отбележим, че съществува прост критерий за проверка дали собствените числа на тензор $\boldsymbol{T}$ са неотрицателни, без да е необходимо те да се изчисляват явно. За тази цел разглеждаме т. нар. *квадратична форма*, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{x}$, на тензора $\boldsymbol{T}$. Тензорът се нарича *положително дефинитен*, ако

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{x} \geq 0\,, \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{E}_n\,, \tag{5.11}$$

и *строго положително дефинитен*, ако $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ само при $\boldsymbol{x} = 0$.

Ще покажем, че ако $\boldsymbol{T}$ е положително дефинитен, то собствените му числа са неотрицателни. Но щом $\boldsymbol{T}$ е симетричен, съществува ортонормиран базис от собствени вектори $\boldsymbol{e}_i$, съответстващ на собствените числа λ_i. Внасяме $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$ в (5.11). Тогава

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_i = \lambda_i \, \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i = \lambda_i \geq 0 \,,$$

$i = 1, \ldots, n$, т. е. собствените числа λ_i наистина са неотрицателни.

Лесно се проверява и обратното твърдение: ако $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, то $\boldsymbol{T}$ е положително дефинитен:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_k \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j \right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geq 0 \,,$$

вж. (4.49).

Гореказаното ни позволява да заключим, че за положително дефинитните симетрични тензори $\boldsymbol{T}$ (и само за тях) съществува техният корен $\sqrt{\boldsymbol{T}}$. Нещо повече, ако поискаме допълнително коренът $\sqrt{\boldsymbol{T}}$ да бъде също положително дефинитен, то той се определя *еднозначно*. С други думи, в класа на положително дефинитните и симетрични тензори $\boldsymbol{T}$ съществува *единствен* тензор-корен, за който е в сила (5.10).

Упражнение 5.3. *Покажете, че тензорът е кососиметричен тогава и само тогава, когато квадратичната му форма се анулира тъждествено. (Това означава, че квадратичната форма на произволен тензор* $\boldsymbol{T}$ *съвпада с тази на симетричната му част* $\boldsymbol{T}^s$*, вж.* (4.17).*)*

5.4. Изометрични тензори. Два тензора $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ се наричат *изометрични*, ако

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{y}) \;, \quad \forall \, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}_n \,, \tag{5.12}$$

т. е. ако скаларните произведения на образите на всеки два вектора от $\mathcal{E}_n$ под действието и на $\boldsymbol{A}$, и на $\boldsymbol{B}$ са едни и същи.

Очевидно, при $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ условието (5.12) се превръща в дефиницията (4.53) на ортогоналното преобразование. С други думи, тензорите, изометрични на единичния, са просто ортогоналните преобразования.

Да предположим, че $\boldsymbol{B}$ е обратим и да изберем в (5.12)

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{u} \,, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{v} \,, \tag{5.13}$$

където $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ са произволни вектори в $\mathcal{E}_n$. Тогава

$$\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{u}\right)\cdot\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{v}\right)=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\,,\quad \forall\,\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v}\in\mathcal{E}_n\,. \tag{5.14}$$

Но това означава, че тензорът $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{U}$ е ортогонален. Следователно, ако $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ са изометрични, то съществува $\boldsymbol{U}\in\mathcal{O}(\mathcal{E})$, така че

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{B}\,. \tag{5.15}$$

Вместо (5.13) можем да изберем

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{u}\,,\quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{v}\,,$$

за да се убедим този път, че тензорът $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{V}$ е ортогонален, т. е.

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A}\,,\quad \boldsymbol{V}\in\mathcal{O}(\mathcal{E})\,. \tag{5.16}$$

От (5.15) и (5.16) се вижда веднага, че ортогоналните тензори $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ са взаимно-обратни.

5.5. Полярно разлагане. Нека $\boldsymbol{A}\in\mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n$ е двувалентен тензор. Разглеждаме тензорите

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^*\,,\quad \boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{A}\,. \tag{5.17}$$

И двата, очевидно, са симетрични. Нещо повече, те са и положително дефинитни, т. е. квадратичните им форми са неотрицателни, вж. § 5.3. Наистина

$$\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}|^2\geq 0\,,$$

и аналогично за квадратичната форма на тензора $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^*$.

Съгласно § 5.3 щом симетричните тензори (5.17) са положително дефинитни, то съществуват корените им

$$\boldsymbol{H}_1=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^*}\,,\quad \boldsymbol{H}_2=\sqrt{\boldsymbol{A}^*\cdot\boldsymbol{A}}\,, \tag{5.18}$$

които също са симетрични.

Теорема 5.1 (полярно разлагане). *Всеки тензор $\boldsymbol{A}\in\mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n$ може да се представи във вида*

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{U}\,,\quad \boldsymbol{U}\in\mathcal{O}(\mathcal{E})\,, \tag{5.19}$$

т. е. като суперпозиция на ортогонален и на положително дефинитен симетричен тензор. Тензорите в (5.19) *се определят еднозначно от* $\boldsymbol{A}$, *като* $\boldsymbol{H}_1$ *и* $\boldsymbol{H}_2$ *са дадени в* (5.18).

Доказателство. Показваме, че тензорите $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{H}_2$ са изометрични, използвайки дефиницията (5.12):

$$\left(\sqrt{\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{x}\right) \cdot \left(\sqrt{\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{y}\right) = \boldsymbol{x} \cdot \sqrt{\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{A}} \cdot \sqrt{\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{y}$$

$$= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y}) \,, \quad \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}_n \,.$$

Съгласно показаното в § 5.4, вж. (5.15), съществува $\boldsymbol{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ така че

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{H}_2 \,. \tag{5.20}$$

С това първото от представянията (5.19) е доказано.

Сега ще покажем единствеността на тензорните „множители“ $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{H}_2$ в (5.20). Да допуснем, че има и друго представяне от същия вид

$$\boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{U}} \cdot \overline{\boldsymbol{H}}_2 \,, \tag{5.21}$$

където $\overline{\boldsymbol{U}} \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$, а $\overline{\boldsymbol{H}}_2$ е симетричен и положително дефинитен тензор. Тогава

$$\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{A} = \overline{\boldsymbol{H}}_2 \cdot \overline{\boldsymbol{U}}^* \cdot \overline{\boldsymbol{U}} \cdot \overline{\boldsymbol{H}}_2 = \overline{\boldsymbol{H}}_2 \cdot \overline{\boldsymbol{H}}_2 \,.$$

Следователно, $\overline{\boldsymbol{H}}_2 = \sqrt{\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{A}}$. Но положително дефинитният корен на симетричен, също положително дефинитен тензор, се определя еднозначно, вж. края на § 5.3. На свой ред и ортогоналният „множител“

$$\overline{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_2^{-1}$$

също се определя еднозначно.

Аналогично се показва, че $\boldsymbol{H}_1 = \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^*}$ е изометричен с $\boldsymbol{A}^*$ и затова

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{V}^* \cdot \boldsymbol{H}_1 \,, \quad \boldsymbol{V}^* \in \mathcal{O}(\mathcal{E}) \,,$$

с еднозначно определени тензори $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{H}_1$. Оттук

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{V} \,. \tag{5.22}$$

Остана да покажем, че ортогоналните тензори $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$ в (5.20) и (5.22), съответно, съвпадат, $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}$.

За тази цел преписваме (5.22) във вида

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V}^* \cdot \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V} \cdot (\boldsymbol{V}^* \cdot \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{V}) \,, \tag{5.23}$$

вж. (4.54), и сравняваме (5.23) и (5.20). Но $\boldsymbol{V}$ е ортогонален, а $\boldsymbol{V}^*\cdot\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{V}$ е симетричен и положително дефинитен. (Проверете!) Тъй като тензорите $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{H}_2$ в представянето (5.20) се определят еднозначно от $\boldsymbol{A}$, то

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\,, \quad \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{U}^* \cdot \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{U}\,,$$

с което теоремата е доказана. □

Упражнение 5.4. *Полярното представяне* (5.19) *може да се докаже и без да се привлича понятието изометричност на тензори. Достатъчно е да се забележи, че тензорът* $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{H}_2^{-1}$ *е ортогонален. Проверете!*

В заключение на този параграф ще направим две забележки.

Първата е свързана с термина полярно разлагане, използван за формулата (5.19). Произходът му се корени в известното представяне $z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$ на комплексното число z. При умножение с z в комплексната равнина $\mathbb{C}$, модулите на числата първо се умножават с r — това е хомотетия, представляваща чиста деформация (раздуване или свиване) на $\mathbb{C}$, което именно е прототипът на симетричния тензор $\boldsymbol{H}_1$ (или $\boldsymbol{H}_2$) в (5.19). На свой ред умножението с $\mathrm{e}^{i\varphi}$ е ротация в $\mathbb{C}$, и това е прототипът на ортогоналния тензор $\boldsymbol{U}$ в полярното представяне (5.19).

Втората забележка е свързана с важната интерпретация на полярното разлагане, която ще се появи по-нататък при изучаване на локалната деформация на тяло (§ ...). В този случай $\boldsymbol{A}$, както ще видим, е т. нар. тензор на дисторсията, определящ локално деформацията на частица от средата. В този контекст представянето (5.19) означава, че разглежданата деформация локално представлява суперпозиция на едно движение на частицата като абсолютно твърдо тяло (определено от тензора $\boldsymbol{U}$) и от „чистата“ деформация, описвана от тензорите $\boldsymbol{H}_1$ или $\boldsymbol{H}_2$, при която вече се изменя взаимното разположение на точките в движещата се частица.