§ 4. Двувалентни тензори — основни свойства и операции с тях

Както ще видим по-нататък, основните и най-често срещани тензори в механиката на непрекъснатите среди са двувалентни. (По-точно, това са преди всичко тензорите на напрежение, на деформация и на скоростта на деформация.) Поради това нека ги изучим тук по-подробно, заедно с основните операции, които ще се налага да извършваме върху тях.

4.1. Единичен тензор. Да започнем с един прост и полезен факт, касаещ двувалентните тензори. Нека $\boldsymbol{a}_i$ е базис в $\mathcal{E}_n$ и нека $\boldsymbol{A}$ е линейно преобразование (двувалентен тензор), който превръща векторите $\boldsymbol{a}_i$ в $\boldsymbol{b}_i$, т. е.

$$\boldsymbol{a}_i \longrightarrow \boldsymbol{b}_i\,, \quad i = 1, \dots, n\,.$$

Тогава

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{b}_k\, \boldsymbol{a}^k\,. \tag{4.1}$$

Доказателството на диадното представяне (4.1) следва директно от дефиницията на диадата (3.3):

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}_k \boldsymbol{a}^k \cdot \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}_k\, \delta_i^k = \boldsymbol{a}_i\,,$$

съгласно свойството (2.3) на векторите от дуалния базис $\boldsymbol{a}^k$.

Нека $\boldsymbol{I}$ е *единичният двувалентен тензор* (*тъждественото преобразование* на $\mathcal{E}_n$), който оставя всеки вектор неизменен:

$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\,, \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{E}_n\,. \tag{4.2}$$

В частност, $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_i$, $i = 1, \dots, n$, за *всеки* базис $\boldsymbol{a}_i \in \mathcal{E}_n$. Съгласно (4.1), това означава, че диадното представяне на $\boldsymbol{I}$ е

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}^i\,. \tag{4.3}$$

От формулите (2.11) следва

$$\boldsymbol{I} = g_{ij}\, \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j = g^{ij}\, \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j\,, \tag{4.4}$$

т. е. метричните коефициенти g_{ij} и g^{ij} в даден базис представляват компонентите (ковариантните и контравариантните) на единичния тензор $\boldsymbol{I}$

в съответните диадни разлагания. В ортонормиран базис матрицата на единичния тензор е разбира се единичната — $g^{ij} = g_{ij} = \delta_{ij}$.

Да отбележим, че билинейната форма на единичния тензор е скаларното произведение

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \,, \quad \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E} \,. \tag{4.5}$$

Поради това единичният тензор се нарича още и *метрически* — чрез билинейната си форма той определя „метриката“ върху даденото векторно пространство $\mathcal{E}_n$ (по-точно, скаларното произведение, което именно превръща едно линейно пространство в евклидово).

Използването на координатните разлагания (2.2) и (2.6) в (4.5), заедно с (4.4), дава

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = g^{ij}\, x_i y_j = g_{ij} x^i\, y^j = x_\alpha\, y^\alpha = x^\alpha y_\alpha \,, \tag{4.6}$$

т. е. скаларното произведение в произволен базис се изразява чрез съответните метрически коефициенти.

За ортонормиран базис разликата между ко- и контравариантните компоненти отпада. Матриците $\|g^{ij}\|$ и $\|g_{ij}\|$ са единичните и това води до добре познатия израз

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha y_\alpha \,, \quad \boldsymbol{x} = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \,, \quad \boldsymbol{y} = \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \,,$$

за скаларното произведение на два вектора чрез декартовите им компоненти, вж. (2.9) и (4.6).

Тензори, пропорционални на единичния:

$$\boldsymbol{T} = \lambda\, \boldsymbol{I} \,, \tag{4.7}$$

се наричат *сферични* (този термин се обяснява от факта, че тензорният елипсоид, съответстващ на тензорите от вида (4.7) (при $\lambda > 0$), се изражда в сфера, вж. § 6.3). Те играят специална роля в механиката на деформируемите среди. Например, както ще видим в § .., ако $\boldsymbol{T}$ е тензорът на напрежението, то $\boldsymbol{T} = -p\,\boldsymbol{I}$ описва т. нар. хидростатично напрегнато състояние. Тук p е налягането, действащо върху произволна площадка в средата. Ако $\boldsymbol{T}$ е тензорът на деформацията, то $\boldsymbol{T} = \lambda\,\boldsymbol{I}$ описва равномерно разширение или свиване в зависимост от знака на λ (наречено още чиста дилатация). При тази деформация куб с единична страна, изрязан от средата, се превръща отново в куб, но със страна $1 + \lambda$. Изменението на обема на куба (т. е. обемната деформация или дилатацията), тогава е $(1+\lambda)^3 - 1 \approx 3\lambda$, при предположението, че деформацията е малка ($|\lambda| \ll 1$), вж. § 15.5.

4.2. Транспониран тензор. Нека $\boldsymbol{T} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ е двувалентен тензор, като

$$\boldsymbol{T} = t^{ij}\,\boldsymbol{a}_i\,\boldsymbol{a}_j \tag{4.8}$$

е разлагането му в даден диаден базис. Въвеждаме тензора

$$\boldsymbol{T}^* = t^{ij}\,\underbracket{\boldsymbol{a}_i\,\boldsymbol{a}_j} = t^{ij}\,\boldsymbol{a}_j\,\boldsymbol{a}_i\,. \tag{4.9}$$

Знакът ‘$\sqcup$’ в диадата $\boldsymbol{a}_i\,\boldsymbol{a}_j$ означава, че сме разменили местата на диадните множители, т. е.

$$\underbracket{\boldsymbol{a}_i\,\boldsymbol{a}_j} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{a}_j\,\boldsymbol{a}_i\,. \tag{4.10}$$

Индексите ‘i’ и в ‘j’ в (4.9) са неми. Да ги преименуваме — ‘i’ да го прекръстим на ‘j’, а ‘j’ на ‘i’. Тогава

$$\boldsymbol{T}^* = t^{ji}\,\boldsymbol{a}_i\,\boldsymbol{a}_j\,. \tag{4.11}$$

Сравняването на (4.11) с (4.8) показва, че в диадния базис $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j$ матрицата на тензора $\boldsymbol{T}^*$ е транспонираната матрица $\|t^{ji}\|$. Поради тази причина тензорът, дефиниран в (4.9) или (4.11), се нарича *транспониран* или (*спрегнат*) на $\boldsymbol{T}$ (използва се и означението $\boldsymbol{T}^\top$). В диадната терминология операцията транспониране съответства на смяна на местата на диадните множители; координатно, това е просто пермутация на индексите i, j.

Да припомним (§ 3.2), че диадата $\boldsymbol{ab}$ може да се прилага към вектора $\boldsymbol{x}$ както отляво, така и отдясно. Смяната на мястото (ляво или дясно) е еквивалентно на смяната на местата на диадните множители, вж. (3.4), т. е. на операцията (4.10). Това показва, че транспонираният тензор може да се дефинира и чрез равенството

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T}^*\,, \quad \forall\,\boldsymbol{x} \in \mathcal{E}_n\,. \tag{4.12}$$

Както ще видим по-долу (§ 8.5), транспонирането на двувалентните тензори е частен случай на една по-обща операция — съставянето на *изомери* на поливалентни тензори. За такива тензори броят на диадните множители е по-голям, съответно индексите са повече, и ние можем да правим различни пермутации на диадните (в този случай ще говорим за полиадни) множители или, в съответните координатни представяния, на индексите. За двувалентен тензор очевидно има единствена нетривиална пермутация $(i, j) \to (j, i)$, пораждаща и единствения нетривиален изомер на $\boldsymbol{T}$ — транспонирания тензор $\boldsymbol{T}^*$.

4.3. Симетрични и кососиметрични тензори. Двувалентният тензор $\boldsymbol{T}$ се нарича *симетричен*, ако

$$\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{T}\,, \tag{4.13}$$

и *антисиметричен* (или *кососиметричен*), ако

$$\boldsymbol{T}^* = -\boldsymbol{T}\,. \tag{4.14}$$

Означаваме с $\mathcal{E}_n \underset{s}{\otimes} \mathcal{E}_n$ пространството от симетрични двувалентни тензори. Очевидно то е линейно пространство с размерност

$$\dim \mathcal{E}_n \underset{s}{\otimes} \mathcal{E}_n = \tfrac{1}{2}\, n(n+1)\,. \tag{4.15}$$

Аналогично, нека $\mathcal{E}_n \underset{a}{\otimes} \mathcal{E}_n$ е пространството от двувалентни антисиметрични тензори; размерността му е

$$\dim \mathcal{E}_n \underset{a}{\otimes} \mathcal{E}_n = \tfrac{1}{2}\, n(n-1)\,. \tag{4.16}$$

Да отбележим, че съществува *единствена* размерност n на изходното пространство $\mathcal{E}_n$, за която

$$\dim \mathcal{E}_n \underset{a}{\otimes} \mathcal{E}_n = \dim \mathcal{E}_n\,, \quad \text{т. е.} \quad \tfrac{1}{2}\, n(n-1) = n\,,$$

и това е $n = 3$. Следователно в тримерното (и само в тримерното) пространство кососиметричните тензори могат, по подходящ и еднозначен начин, да се отъждествят с вектори. Следствие от това е съществуването в тримерното пространство на операцията векторно произведение (§ 7).[1]

Всеки двувалентен тензор може да се представи като сума от симетричен и кососиметричен:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^s + \boldsymbol{T}^a\,,\\ \boldsymbol{T}^s = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^*)\,, \quad \boldsymbol{T}^a = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^*)\,.\end{gathered} \tag{4.17}$$

[1] Тук фактически е единственото място в цялата тази глава, където разглеждането на n-мерния случай наистина е оправдано. Навсякъде другаде, започвайки от самото начало, можем да се ограничим само със случая $n = 3$, имайки предвид, че телата в класическата механика се движат и деформират в тримерното пространства.

4.4. Следа на тензор. Да вземем произволна диада $\boldsymbol{ab}$ и да заменим тензорното умножение в нея със скаларно:

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} \;\longrightarrow\; \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}\,. \tag{4.18}$$

Това превръща двувалентният тензор $\boldsymbol{ab}$ в скалар, т. е. намалява валентността му с две.

Тъй като всеки тензор е линейна комбинация на диади, то операцията (4.18) може да се разпространи върху цялото пространство $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ по очевиден начин

$$\boldsymbol{T} = t^i_j\, \boldsymbol{a}^j \boldsymbol{a}_i \longrightarrow t^i_j\, \boldsymbol{a}^j \cdot \boldsymbol{a}_i \tag{4.19}$$

— във всяка от базисните диади $\boldsymbol{a}^j \boldsymbol{a}_i$ сме заменили тензорното произведение със скаларно. От дефиницията на дуалния базис (2.3) следва, че

$$t^i_j\, \boldsymbol{a}^j \cdot \boldsymbol{a}_i = t^\alpha_\alpha$$

— полученото число е сумата t^α_α от диагоналните елементи на матрицата на тензора $\|t^i_j\|$, т. е. следата на тази матрица. Поради това наричаме тази сума *следа* на тензора $\boldsymbol{T}$ и използваме означението

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{T} = t^\alpha_\alpha\,. \tag{4.20}$$

Видно е, че операцията (4.19) при координатно представяне съответства на следното: в матрицата $\|t^i_j\|$ на тензора $\boldsymbol{T}$ вземаме горният и долният индекс равни, $i = j = \alpha$, и сумираме по вече повтарящия се индекс α.

Ако $\boldsymbol{T}$ е зададен с ко- или контравариантните си компоненти, то следата му се изразява с помощта на метрическите коефициенти g_{ij} или g^{ij}:

$$\begin{aligned} &\text{ако} \quad \boldsymbol{T} = t^{ij}\, \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j\,, \quad \text{то} \quad \operatorname{tr} \boldsymbol{T} = t^{ij}\, \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = t^{ij}\, g_{ij}\,, \\ &\text{ако} \quad \boldsymbol{T} = t_{ij}\, \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j\,, \quad \text{то} \quad \operatorname{tr} \boldsymbol{T} = t_{ij}\, \boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}^j = t_{ij}\, g^{ij}\,, \end{aligned} \tag{4.21}$$

вж. (4.19) и (2.12).

Да подчертаем специално, че следата, макар и дефинирана в (4.20) или (4.21) чрез компонентите на $\boldsymbol{T}$, представлява *инвариант* на тензора $\boldsymbol{T}$, т. е. величина, която *не зависи* от избора на базиса, а единствено от самия тензор. Това се вижда ясно от съотношенията (4.18) или (4.19) — при определянето на $\operatorname{tr} \boldsymbol{T}$ тензорното произведение се заменя със скаларно. Това е очевидно инвариантна операция, независима от избора на конкретен базис.

В инвариантността на следата можем, разбира се, да се убедим и директно, използвайки формулата (3.21) за преобразуване на смесените компоненти на двувалентен тензор при смяна на базиса:

$$t_{\alpha'}^{\alpha'} = A_p^{\alpha'}\, A_{\alpha'}^{q}\, t_q^p = \delta_p^q\, t_q^p = t_\alpha^\alpha \,,$$

вж. (2.16), т. е. $\operatorname{tr}\boldsymbol{T}$ наистина е инвариант на тензора $\boldsymbol{T}$.

Отбелязваме и очевидното равенство

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{T} = \operatorname{tr}\boldsymbol{T}^* \tag{4.22}$$

— следите на тензора и на спрегнатия му съвпадат.

Да забележим, че операцията (4.18) е частен случай на т. нар. контракция при поливалентни тензори (§ 8.5). При тези тензори диадните множители в базиса са повече (по-точно, базисът не е вече от диади, а от полиади). Във всяка двойка диадни множители в полиадата можем да заменим тензорното произведение със скаларно. Това ще намали валентността на тензора с две. Ако в една двойка диадни множители в полиадния базис единият от векторите е от базиса $\boldsymbol{a}_i$, а другият от дуалният базис $\boldsymbol{a}^i$, координатно контракцията ще се извърши по начина, споменат по-горе. Именно вземаме съответната (на разглежданите диадни множители) двойка индекси (един горен и един долен) равни и сумираме. В поливалентния случай можем естествено да извършим няколко разнообразни контракции. За двувалентния тензор $\boldsymbol{T}$ възможната контракция е само една и резултатът от извършването ѝ е следата $\operatorname{tr}\boldsymbol{T}$.

Следите на основните тензори, с които ще се сблъскаме по-нататък, имат проста и важна интерпретация. Например, следата на тензора на деформация съвпада с обемното разширение на елемент от средата. Следата на тензора на напрежението е хидростатичното налягане в тази точка. Поради това тензори, чиято следа е нула, играят специална роля в механиката на деформируемите среди; те се наричат *девиатори*.

Да отбележим, че всеки тензор $\boldsymbol{T} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ може да се представи като сума на сферичен тензор и на девиатор:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= \tfrac{1}{n}\,\boldsymbol{I}\operatorname{tr}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{D}\,, \\ \boldsymbol{D} &= \boldsymbol{T} - \tfrac{1}{n}\,\boldsymbol{I}\operatorname{tr}\boldsymbol{T}\,, \quad \operatorname{tr}\boldsymbol{D} = 0\,, \end{aligned} \tag{4.23}$$

тъй като $\operatorname{tr}\boldsymbol{I} = n$ в n-мерния случай.

4.5. Детерминанта на тензор. Освен следата, можем да определим още един важен инвариант на двувалентен тензор $\boldsymbol{T}$ — неговата *детерминанта*.

Нека $\boldsymbol{T} = t_i^j\, \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}_j$ е разлагането на $\boldsymbol{T}$ с помощта на смесените му компоненти t_i^j в даден диаден базис. По дефиниция

$$\det \boldsymbol{T} \stackrel{\text{def}}{=} \det\left(t_i^j\right), \tag{4.24}$$

т. е. това е детерминантата на матрицата $\|t_i^j\|$. Макар и въведена в (4.24) координатно, $\det \boldsymbol{T}$ *не зависи* от избора на базиса, т. е. представлява *инвариант* на тензора $\boldsymbol{T}$. Наистина, ако $t_{i'}^{j'}$ са съответните компоненти на $\boldsymbol{T}$ в друг базис, то

$$\begin{aligned} \det\left(t_{i'}^{j'}\right) &= \det\left(A_{i'}^i A_j^{j'} t_i^j\right) \\ &= \det\left(A_{i'}^i\right) \det\left(A_j^{j'}\right) \det\left(t_i^j\right) = \det\left(t_i^j\right), \end{aligned}$$

съгласно добре познатите свойства на детерминантата на матрици (детерминантата на произведение от матрици е произведение на детерминантите на матриците множители). Използвана е също формулата (3.21) за преобразуване на компонентите t_i^j при смяна на базиса, както и фактът, че $A_{i'}^i$ и $A_i^{i'}$ са взаимнообратни и затова

$$\det\left(A_{i'}^i\right) \det\left(A_j^{j'}\right) = 1,$$

вж. (2.16). Ще отбележим за пълнота и формулата

$$\det \boldsymbol{T} = \det \boldsymbol{T}^*, \tag{4.25}$$

която следва от дефиницията (4.24) и от добре известно свойство на детерминантата на матрица.

4.6. „Полускаларно“ умножение на тензори.[2] Ще определим тази операция първо върху диадите.

Нека $\boldsymbol{ab}$ и $\boldsymbol{cd}$ са две диади. Въвеждаме *полускаларното* им произведение по следния начин:

$$(\boldsymbol{ab}) \cdot (\boldsymbol{cd}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{ad}\,. \tag{4.26}$$

Тук използваме знака '$\cdot$' както и при скаларното произведение $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ на векторите $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y} \in \mathcal{E}_n$. При последните обаче $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ е число, докато при диадите операцията (4.26) води отново до диада. Това обяснява, впрочем, защо наричаме (4.26) полускаларно произведение.

[2] „semi-dot product“ в английската литература

Веднага ще отбележим, че полускаларното произведение (за разлика от скаларното) *не е комутативно.* Наистина

$$(\boldsymbol{cd})\cdot(\boldsymbol{ab}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{cb} \tag{4.27}$$

и, очевидно,

$$(\boldsymbol{cd})\cdot(\boldsymbol{ab}) \neq (\boldsymbol{ab})\cdot(\boldsymbol{cd})\,, \tag{4.28}$$

както показва сравнението между (4.26) и (4.27) (освен при специален избор на векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ — какъв ?).

Операцията (4.26) се разпространява по естествен начин от съвкупността на диадите върху цялото пространство $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$. За тази цел припомняме, че всеки двувалентен тензор е линейна комбинация на диади, вж. дефиниция 3.1. Именно нека $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{S} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ и

$$\boldsymbol{T} = t^i_p\, \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}^p\,, \quad \boldsymbol{S} = s^q_j\, \boldsymbol{a}_q\boldsymbol{a}^j\,,$$

за даден базис $\boldsymbol{a}_i \in \mathcal{E}_n$. Тогава

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S} = \left(t^i_p\, \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}^p\right)\cdot\left(s^q_j\, \boldsymbol{a}_q\boldsymbol{a}^j\right)$$

$$= t^i_p s^q_j \boldsymbol{a}_i\left(\boldsymbol{a}^p\cdot\boldsymbol{a}_q\right)\boldsymbol{a}^j = t^i_p s^q_j\, \delta^q_p\, \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}^j = t^i_\alpha s^\alpha_j\, \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}^j\,,$$

т. е.

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S} \stackrel{\text{def}}{=} t^i_\alpha s^\alpha_j\, \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}^j\,. \tag{4.29}$$

Следователно матрицата (от смесените компоненти) на тензора $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}$ е произведение на съответните матрици на тензорите $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{S}$

$$(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S})^i_j = t^i_\alpha s^\alpha_j\,. \tag{4.30}$$

От (4.29) се вижда, че полускаларното произведение на тензорите има проста интерпретация. Именно, ако третираме $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{S} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ като линейни преобразования на $\mathcal{E}_n$, то $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}$ е тяхната суперпозиция

$$(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S})\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\cdot(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{y}\,, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x}\,, \quad \forall\boldsymbol{x}\in\mathcal{E}_n\,, \tag{4.31}$$

— прилагаме $\boldsymbol{S}$ към вектора $\boldsymbol{x}$, резултатът е векторът $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{x}$, към който прилагаме на свой ред тензора $\boldsymbol{T}$.

Лесно е да се покаже, че операцията (4.29) е асоциативна (като следствие от факта, че произведението на матриците е асоциативно). Това означава, да споменем, че полускаларното произведение превръща пространството от двувалентни тензори в линейна некомутативна алгебра.

Да отбележим очевидните равенства

$$(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S})^* = \boldsymbol{S}^*\cdot\boldsymbol{T}^*\,, \quad \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\,, \quad \forall\,\boldsymbol{T}\in\mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n\,, \tag{4.32}$$

както и формулата

$$\det(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}) = (\det\boldsymbol{T})\ (\det\boldsymbol{S})\ , \tag{4.33}$$

която отново следва от дефиницията (4.24), от (4.30) и от добре известно свойство на детерминантата на матрица.

4.7. „Дължина“ на тензор. С помощта на полускаларното умножение (4.29) можем да въведем по естествен начин скаларно произведение в пространството от двувалентни тензори. Именно, нека $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{S}\in\mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n$. Полагаме

$$(\boldsymbol{T},\boldsymbol{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}^*) = t^{ij}s_{ij}\,. \tag{4.34}$$

Упражнение 4.1. *С помощта на тензорния закон* (3.21) *проверете, че* $(\boldsymbol{T},\boldsymbol{S})$ *е инвариант, т.е. зависи единствено от тензорите* $\boldsymbol{T}$ *и* $\boldsymbol{S}$*, но не и от избора на базиса в* $\mathcal{E}_n$*.*

Функцията $(\boldsymbol{T},\boldsymbol{S})$ е очевидно билинейна — линейно зависи от всеки от аргументите си $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{S}$. Тя е и симетрична:

$$(\boldsymbol{T},\boldsymbol{S}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}^*) = \operatorname{tr}\,((\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}^*)^*) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T}^*) = (\boldsymbol{S},\boldsymbol{T})\,,$$

вж. (4.22) и (4.32). Освен това

$$(\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^*) = t^{ij}t_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}^2 \geq 0\,,$$

избирайки ортонормиран базис. От последното равенство се вижда, че

$$(\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{T} = 0\,.$$

Всичко това означава, че билинейната форма $(\boldsymbol{T},\boldsymbol{S})$, дефинирана в (4.34), представлява скаларно произведение в $\mathcal{E}_n\otimes\mathcal{E}_n$, превръщайки последното в евклидово пространство.

Дължината (или *нормата*) на тензора $\boldsymbol{T}$ се дефинира стандартно чрез скаларното произведение:

$$|\boldsymbol{T}| = \sqrt{(\boldsymbol{T},\boldsymbol{T})} = \sqrt{\operatorname{tr}\,(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^*)} = \sqrt{t^{ij}\,t_{ij}}\,, \tag{4.35}$$

или

$$|\boldsymbol{T}| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}^2}\,, \tag{4.36}$$

ако базисът е ортонормиран.

Напомняме, че (4.36) е една от познатите норми на матрица, използвани в курсовете по линейна алгебра и числени методи. Да подчертаем още веднъж, че тя е инвариант на тензора $\boldsymbol{T}$, т.е. зависи *само* от $\boldsymbol{T}$, но не и от избора на конкретното му координатно представяне.

Ще отбележим също и неравенството

$$|\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}| \le |\boldsymbol{T}|\,|\boldsymbol{S}|\,, \tag{4.37}$$

което е просто следствие на класическото неравенство на Шварц.

4.8. Обратен тензор. Тензорът $\boldsymbol{B}$ със свойството $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ се нарича *обратен* на $\boldsymbol{A}$ с се означава с $\boldsymbol{A}^{-1}$, т.е.

$$\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}\,. \tag{4.38}$$

За съществуването на $\boldsymbol{A}^{-1}$ е необходимо и достатъчно тензорът $\boldsymbol{A}$ да осъществява взаимноеднозначно преобразование на пространството $\mathcal{E}_n$, т.е. да е изпълнено условието

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\,. \tag{4.39}$$

Условието (4.39), предвид линейността на $\boldsymbol{A}$, е еквивалентно на

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0 \tag{4.40}$$

— единствено образът на нулевия вектор може да бъде нулев, ако съществува $\boldsymbol{A}^{-1}$ (и обратно).

От (4.38) и от свойството на детерминантата следва, впрочем, че

$$\det\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}\right) = (\det\boldsymbol{A})\det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \det\,\boldsymbol{I} = 1\,,$$

т.е.

$$\det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\,. \tag{4.41}$$

Следователно ако $\boldsymbol{A}^{-1}$ съществува, то $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. Верно е и обратното твърдение.[3] Това означава, че

$$\exists\ \boldsymbol{A}^{-1} \Leftrightarrow \det \boldsymbol{A} \neq 0\,. \tag{4.42}$$

За пълнота ще споменем и очевидната формула

$$(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S})^{-1} = \boldsymbol{S}^{-1}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}\,, \tag{4.43}$$

която е в сила, ако и двата тензора $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{S}$ са обратими.

4.9. Собствени вектори. Доколкото всеки двувалентен тензор може да се интерпретира като линейно преобразование над $\mathcal{E}$, припомняме едно основно понятие от линейната алгебра. Векторът $\boldsymbol{a} \neq 0$ се нарича *собствен вектор* на $\boldsymbol{T}$, съответстващ на собствената стойност λ, ако

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a} = \lambda\,\boldsymbol{a}\,. \tag{4.44}$$

От (4.44) следва, че

$$(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{a} = 0\,, \quad \boldsymbol{a} \neq 0\,.$$

Съгласно (4.40), тензорът $\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I}$ не е обратим и поради това детерминантата му е нула:

$$f_{\mathrm{T}}(\lambda) = \det(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0\,, \tag{4.45}$$

вж. (4.42).

Функцията $f_{\mathrm{T}}(\lambda)$ е очевидно полином от степен n, наречен *характеристичен* за тензора $\boldsymbol{T}$. От проведените разсъждения е ясно, че реалните корени на този полином изчерпват собствените стойности на $\boldsymbol{T}$. (Да напомним, че навсякъде тук работим с векторни пространства над реалната ос $\Re$ и затова ни интересуват само реалните корени на полинома $f_{\mathrm{T}}(\lambda)$.)

Развиваме характеристичния полином $f_{\mathrm{T}}(\lambda)$ по степените на λ

$$f_{\mathrm{T}}(\lambda) = \lambda^n - I_1\lambda^{n-1} + \cdots (-1)^{n-1} I_{n-1}\lambda + (-1)^n I_n\,. \tag{4.46}$$

[3]Използваме условието за обратимост (4.40) на тензора $\boldsymbol{A}$. Уравнението $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = 0$ в даден базис има вида

$$A_i^{\alpha}\,x_{\alpha} = 0\,, \quad i = 1,\ldots,n\,,$$

където $\|A_i^{\alpha}\|$ е съответната матрица на $\boldsymbol{A}$. Това е система от линейни уравнения спрямо компонентите x_α на вектора $\boldsymbol{x}$. По правилото на Крамер решението на тази хомогенна система е единствено нулевото, ако $\det(A_i^{\alpha}) = \det \boldsymbol{A} \neq 0$.

Полиномът $f_{\mathrm{T}}(\lambda)$ е дефиниран в (4.45) безкоординатно. Поради това и коефициентите I_1, I_2, …, I_n в разлагането (4.46) притежават същото свойство. Това са т. нар. *скаларни инварианти* на тензора $\boldsymbol{T}$. (Инварианти, доколкото зависят само от тензора $\boldsymbol{T}$, но не и от конкретния избор на базиса и от съответната матрица на $\boldsymbol{T}$ в този базис.) Впрочем, полагайки $\lambda = 0$ в (4.46) и сравнявайки резултата с (4.45) намираме

$$(-1)^n I_n = \det \boldsymbol{T}\,, \tag{4.47}$$

което е несъмнено инвариант на $\boldsymbol{T}$ (вж. § 4.5). Изразите за останалите инварианти ще обсъдим по-долу.

Ако пространството е тримерно, то характеристичният полином е от трета степен. Уравнението (4.45) в този случай винаги има поне един реален корен. Това означава, че всеки тензор в тримерното пространство има поне един собствен вектор. Еквивалентно,

$$\forall \boldsymbol{T} \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \quad \exists\, \boldsymbol{a} \in \mathcal{E}\,,\ \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{a}\,, \quad \boldsymbol{a} \neq 0\,, \tag{4.48}$$

ако $\dim \mathcal{E} = 3$ (и, по-общо, ако $\dim \mathcal{E}$ е нечетно). С думи, за всеки тензор $\boldsymbol{T}$ над тримерното пространство ще се намери поне един вектор $\boldsymbol{a} \neq 0$, така че $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}$ са колинеарни.

Нека $\boldsymbol{T}$ е симетричен тензор. Съгласно класически резултат на линейната алгебра всички негови собствени стойности λ_i, общо n на брой, са реални, а съответните им собствени вектори $\boldsymbol{e}_i$ образуват ортонормиран базис в $\mathcal{E}_n$ (предполагаме, че $|\boldsymbol{e}_i| = 1$). В диадния базис $\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$ матрицата на тензора $\boldsymbol{T}$ е диагонална

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i\,, \quad \text{т. е.} \quad t_{ij} = \lambda_i\, \delta_{ij} \quad \left(\not\sum_i\right)\,, \tag{4.49}$$

или

$$\|t_{ij}\| = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad . \tag{4.50}$$

Стандартната формулировка на този резултат от курса по линейна алгебра гласи, че всяка симетрична матрица може да се приведе в диагоналния вид с помощта на подходящо преобразование на координатната система.[4] Напомняме също, че ако собствените стойности са различни,

[4] Ще отбележим, че представянето (4.49) е крайномерният прототип на спектралното разлагане на самоспрегнатите оператори, изучавано подробно в безкрайномерния случай вече във функционалния анализ.

$\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, то собствените вектори се определят *еднозначно*, с точност до посоката си — ако $\boldsymbol{e}_i$ е собствен вектор на $\boldsymbol{T}$, то и $-\boldsymbol{e}_i$ е такъв. Ако някои от собствените стойности съвпадат например $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_i$, $i = 3, \dots, n$, то всеки вектор в равнината $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ е собствен за $\boldsymbol{T}$.

Съгласно формулите на Виет, коефициентите $I_1, \dots, I_n$ на характеристичния полином $f_{\mathrm{T}}(\lambda)$, вж. (4.46), се изразяват чрез корените му по следния начин:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n \,,$$
$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots \lambda_{n-1}\lambda_n \,,$$
$$\dots \quad , I_n = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n \,.$$

Оттук, в частност, се вижда, че

$$I_1 = \operatorname{tr} \boldsymbol{T} \,, \quad I_n = (-1)^n \det \boldsymbol{T} \,, \tag{4.51}$$

ср. с (4.47). В тримерния случай

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\Big[(\operatorname{tr} \boldsymbol{T})^2 - \operatorname{tr}\,(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T})\Big] \,. \tag{4.52}$$

(Проверете!)

4.10. Ортогонални тензори. Тензорът $\boldsymbol{U} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ се нарича *ортогонален*, ако той запазва скаларното произведение:

$$(\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \,, \quad \forall\, \boldsymbol{x} \,,\ \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}_n \,. \tag{4.53}$$

С помощта на (4.12) преобразуваме (4.53)

$$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{U}^*) \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \,,$$

или

$$\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{U}^* \cdot \boldsymbol{U}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{y} \,, \quad \forall\, \boldsymbol{x} \,,\ \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}_n \,.$$

Това означава, че

$$\boldsymbol{U}^* \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{I} \quad \text{т.е.} \quad \boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{U}^{-1} \tag{4.54}$$

— свойство, което ще използваме по-нататък за характеризирането на ортогоналните тензори.

Означаваме с $\mathcal{O}(\mathcal{E}_n)$ съвкупността от всички ортогонални преобразования на $\mathcal{E}_n$. Това очевидно е група спрямо полускаларното умножение, наречена *ортогонална* (или *унитарна*) *група* на пространството $\mathcal{E}_n$ (ако $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_n)$, то и $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{V} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_n)$ — проверете, например, формално с помощта на (4.54), макар че това е ясно и от самата дефиниция (4.53).) Единичният елемент на групата $\mathcal{O}(\mathcal{E}_n)$ е тъждественото преобразование (единичният тензор) $\boldsymbol{I}$. В частност, ако $\boldsymbol{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_n)$, то и $\boldsymbol{U}^{-1} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_n)$. Обратимостта на ортогоналните тензори е видна впрочем и от факта, че те запазват дължината на векторите, така че $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ е възможно само ако $\boldsymbol{x} = 0$, вж. (4.40).

Щом ортогоналните тензори са обратими, детерминантата им е ненулева. Нещо повече, нейният модул е винаги единица. Това следва от (4.54), (4.25) и (4.33):

$$\det(\boldsymbol{U}^* \cdot \boldsymbol{U}) = (\det \boldsymbol{U})^2 = \det \boldsymbol{I} = 1\,,$$

т. е.

$$\det \boldsymbol{U} = \pm 1\,. \tag{4.55}$$

4.11. Ортогонални тензори в тримерния случай. Ортогоналните тензори над тримерно пространство представляват специален интерес. Една от основните за нас причини е тясната им връзка с движенията на абсолютно твърдите тела в тримерното пространство, в което ще се убедим в следващия пункт § 4.12.

Както е известно от линейната алгебра, матрицата на всяко ортогонално преобразование $\boldsymbol{U}$ в тримерното пространство $\mathcal{E}_3$ може да се приведе, при подходящ избор на декартовата система $Ox_1x_2x_3$, във вида

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{4.56}$$

т. е.

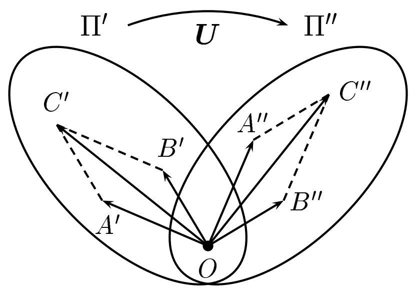
$$\boldsymbol{U} = \pm\, \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3) + \sin\varphi\,(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2)\ , \tag{4.57}$$

където $\boldsymbol{e}_i$ са единичните вектори (ортите) на координатните оси Ox_i, $i = 1, 2, 3$.

Упражнение 4.2. *С помощта на* (4.29) *проверете директно равенството* $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{I}$*, гарантиращо ортогоналността на тензора* $\boldsymbol{U}$*, зададен в* (4.57).

Тензорът $\boldsymbol{U}$, дефиниран в (4.57), представлява или ротация (на ъгъл φ) около оста Ox_1, определена от вектора $\boldsymbol{e}_1$, или ротация, комбинирана с инверсията

$$-\boldsymbol{I}\ :\ \boldsymbol{x} \longrightarrow -\boldsymbol{x}\,,$$



Фиг. 4.1. Движение на абсолютно твърдо тяло

в зависимост, съответно, от знака 'плюс' или 'минус' на диадата $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1$ (т. е. на първия елемент на матрицата (4.56)). Нещо повече, този знак съвпада със знака на $\det \boldsymbol{U}$, вж. (4.55). Този факт ни подсказва да въведем множеството

$$\mathcal{O}^{+}(\mathcal{E}_3) = \Big\{ \boldsymbol{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_3) \,|\, \det \boldsymbol{U} = 1 \Big\} \subset \mathcal{O}(\mathcal{E}_3)\,, \tag{4.58}$$

от т. нар. *собствено ортогонални преобразования* в тримерното пространство. Ясно е, че $\mathcal{O}^{+}(\mathcal{E}_3)$ е подгрупа в $\mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$ — суперпозицията (полускаларното произведение) на две собствено ортогонални преобразования е отново собствено ортогонално. Геометрично, елементите на $\mathcal{O}^{+}(\mathcal{E}_3)$ представляват „чисти" ротации на пространството $\mathcal{E}_3$.

Очевидно, произволен тензор $\boldsymbol{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$ е или собствено ортогонален, или може да се представи във вида $\boldsymbol{U} = (-\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{V} = -\boldsymbol{V}$, където $\boldsymbol{V}$ е собствено ортогонален (ако детерминантата на $\boldsymbol{U}$ е -1). В последния случай $\boldsymbol{U}$ представлява отново ротация, но този път съпроводена с инверсия на пространството.

4.12. Теорема на Ойлер-Даламбер. Ще отбележим първо, че собствено ортогоналните преобразования в $\mathcal{E}_3$ могат да се отъждествят с движенията на абсолютно твърдо тяло с една неподвижна точка.

За да се убедим в това, разглеждаме две положения, Π' и Π'', на тялото, вж. фиг. 4.1. Материалната частица, заемаща точката A' в положение Π' се премества в точката A'' при движението на тялото от Π' в Π''. Съответно, векторът $\overrightarrow{OA'}$ се преобразува в $\overrightarrow{OA''}$:

$$\boldsymbol{U} \,:\, \overrightarrow{OA'} \longrightarrow \overrightarrow{OA''} \tag{4.59}$$

при това движение, с което се определя преобразованието $\boldsymbol{U}$ на пространството $\mathcal{E}_3$. Това преобразование очевидно запазва дължините и ъглите между векторите, щом се разглежда движение на абсолютно твърдо тяло. Остава да покажем, че $\boldsymbol{U}$ освен това е и линейно.

Наистина нека
$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}\,.$$

При движението $\Pi' \longrightarrow \Pi''$ точките A', B' и C' „лягат“ в положенията A'', B'' и C'', съответно. Успоредникът $OA'C'B'$ при това движение само се завърта около полюса O, заемайки положението $OA''C''B''$, вж. фиг. 4.1, без са се деформира, т. като тялото е абсолютно твърдо. Но това означава, че
$$\overrightarrow{OC''} = \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OB''}\,,$$

т. е.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC''} &= \boldsymbol{U}\cdot\overrightarrow{OC'} = \boldsymbol{U}\cdot\left(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}\right)\\ &= \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OB''} = \boldsymbol{U}\cdot\overrightarrow{OA'} + \boldsymbol{U}\cdot\overrightarrow{OB'}\,,\end{aligned}$$

с което линейността на $\boldsymbol{U}$ е доказана.

Ортогоналността на преобразованието $\boldsymbol{U}$ следва вече от факта, че $\boldsymbol{U}$ запазва дължините: $|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}|$, $\forall\,\boldsymbol{a}\in\mathcal{E}_3$. Оттук, при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{U}\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2 &= \boldsymbol{U}\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{U}\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{y}|^2\\ &+ 2\,(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 + 2\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\,,\end{aligned}$$

и затова $(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ (тъй като $|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{y}|$). Но според дефиницията (4.53), това именно и означава, че $\boldsymbol{U}\in\mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$.

Съгласно § 4.11 ортогоналните преобразования в $\mathcal{E}_3$ са или ротации, или ротации съчетани с инверсия. Но абсолютно твърдо тяло, движейки се в тримерното пространство, *не може* да извърши инверсията $\boldsymbol{x}\to-\boldsymbol{x}$, оставайки по време на цялото си движение в тримерното пространство. Следователно преобразованието $\Pi'\to\Pi''$ дефинирано в (4.59) е собствено ортогонално и поради това то представлява ротация, вж. отново § 4.11. Но последното твърдение не е нищо друго освен съдържанието на известната *теорема на Ойлер-Даламбер* от кинематиката на абсолютно твърдо тяло с една неподвижна точка O: всяко движение на такова тяло може да се реализира като ротация около ос, минаваща през O. По такъв начин се оказва, че тази класическа теорема на кинематиката има чисто алгебричен характер, свързан със структурата на ортогоналните тензори в тримерното пространство.