§ 28. „Наследственост“ на телата. Принцип на суперпозицията на Болцман

28.1. Интегрална формулировка на закона на деформирането на стандартно линейно тяло. Да разгледаме по-подробно закона на деформирането на стандартното линейно тяло

$$\dot{\sigma} + \lambda\sigma = E(\dot{\varepsilon} + \eta\varepsilon)\,, \tag{28.1}$$

вж. (27.13). Целта ни тук е да преобразуваме (28.1) в еквивалентен вид, в който обаче производните са заменени с подходящи интегрални оператори. Това ще позволи да илюстрираме и да изясним, върху примера на стандартното линейно тяло, най-характерната особеност на вискозоеластичните модели и тела. Това е наличието на *наследственост* в тях: предисторията на напрежението (съответно на деформацията) определя деформацията (съответно напрежението) в даден момент от времето.

Да предположим, че ни е известна „историята“ на деформацията на образеца, т. е. функцията $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $t \in \mathcal{R}$, като естествено предполагаме, че $\varepsilon(-\infty) = 0$. От (28.1) следва уравнението

$$\dot{\sigma} + \lambda\sigma = f(t)\,, \quad f(t) = E(\dot{\varepsilon} + \eta\varepsilon)\,, \tag{28.2}$$

за „историята“ на напрежението $\sigma = \sigma(t)$, $t \in \mathcal{R}$; дясната страна $f(t)$ тук е известна функция, щом $\varepsilon(t)$ е зададено.

Уравнението (28.2) е линейно нехомогенно обикновено диференциално уравнение. Общото решение на хомогенното уравнение е $C\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$, $C = \mathrm{const}$. Търсим частното решение на (28.2) по метода на неопределените множители на Лагранж, т. е. във вида

$$\sigma(t) = C(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,, \tag{28.3}$$

с неизвестна функция $C(t)$. Заместването на (28.3) в (28.2) води, след прости пресмятания, до следното уравнение за $C(t)$:

$$\dot{C}\,\mathrm{e}^{-\lambda t} = f(t), \quad C(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{e}^{\lambda\tau}\,\mathrm{d}\tau + C_1\,.$$

Следователно общото решение на нехомогенното уравнение (28.2) е

$$\sigma(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-\lambda t} + \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\,f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{28.4}$$

Тъй като $\sigma(t)$ трябва да остава ограничено за всички t, в частност и при $t \to -\infty$, то $C_1 = 0$. Заместваме сега израза за $f(t)$, вж. (28.2), в дясната страна на (28.4) и интегрираме първото събираемо по части:

$$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\, \dot{\varepsilon}(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\varepsilon(\tau)\, \Big|_{-\infty}^{t} - \lambda \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\, \varepsilon(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Оттук

$$\sigma(t) = E\left(\varepsilon(t) - (\lambda - \eta)\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\, \varepsilon(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right) \tag{28.5}$$

(използвахме, че по предположение $\varepsilon(-\infty) = 0$). В символичен вид (28.5) се записва като

$$\sigma = E\,(\mathbf{1} - (\lambda - \eta)\mathcal{E}_\lambda)\,\varepsilon\,. \tag{28.6}$$

Тук с $\mathbf{1}$ е означен единичният (тъждествен) оператор в пространството от функции $\varepsilon(t)$, т. е. операторът, който съпоставя на всяка функция $\varepsilon(t)$, дефинирана върху реалната ос $\mathcal{R}$, *същата* функция $\varepsilon(t)$. На свой ред, $\mathcal{E}_\lambda$ е интегрален оператор в споменатото пространство, който преобразува функцията $\varepsilon(t)$ по следния закон:

$$\mathcal{E}_\lambda\,[\varepsilon]\,(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\, \varepsilon(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \quad t \in \mathcal{R}\,. \tag{28.7}$$

Да отбележим, че $\mathcal{E}_\lambda$ е частен случай на т. нар. *интегрален оператор на Волтера*

$$\mathcal{K}\,[\varepsilon]\,(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\, \varepsilon(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \quad t \in \mathcal{R}\,, \tag{28.8}$$

при специален (експоненциален) избор на ядрото $K(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Аналогични са разсъжденията и в случая, когато е зададена „историята“ на напрежението, т. е. функцията $\sigma(t)$, $t \in \mathcal{R}$, като $\sigma(-\infty) = 0$. Тогава (28.2) е линейно нехомогенно обикновено диференциално уравнение спрямо функцията $\varepsilon(t)$. Вместо (28.5) сега намираме

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}\left(\sigma(t) - (\eta - \lambda)\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\eta(t-\tau)}\, \sigma(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right), \tag{28.9}$$

или, използвайки означението (28.7),

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\,(\mathbf{1} - (\eta - \lambda)\mathcal{E}_\eta)\,\sigma\,. \tag{28.10}$$

Забелязваме попътно, че операторите, участващи в (28.6) и (28.10), са взаимно-обратни:

$$\Big[\,E\,(\mathbf{1} - (\lambda - \eta)\mathcal{E}_\lambda)\,\Big]^{-1} = \frac{1}{E}\Big[\,\mathbf{1} - (\eta - \lambda)\mathcal{E}_\eta\,\Big],$$

т. е.

$$\Big[\mathbf{1} - (\lambda-\eta)\mathcal{E}_\lambda\Big]\Big[\mathbf{1} - (\eta-\lambda)\mathcal{E}_\eta\Big] = \mathbf{1}\,.$$

Оттук следва простата и любопитна формула за умножение на два волтерови оператора с експоненциални ядра:

$$\mathcal{E}_\lambda\,\mathcal{E}_\eta = \frac{\mathcal{E}_\lambda - \mathcal{E}_\eta}{\eta-\lambda}\,. \tag{28.11}$$

Да поясним, че под произведение на два оператора разбираме тяхната суперпозиция:

$$\left(\mathcal{E}_\lambda\,\mathcal{E}_\eta\right)\,[\sigma]\,(t) = \mathcal{E}_\lambda\,[\varepsilon]\,(t), \quad \varepsilon(t) = \mathcal{E}_\eta\,[\sigma]\,(t)\,.$$

28.2. „Наследственост“ на телата.Законът за деформиране на стандартното линейно тяло в интегралния му вид (28.5) (или (28.9)) е еквивалентен на диференциалния запис (28.1). Интегралният вид е обаче много по-удобен за изясняване на спецификата на механичното поведение на разглежданите материали.

Да представим (28.5) във вида

$$\begin{gathered}\sigma(t) = \sigma^{\mathrm{e}}(t) + \sigma^{\mathrm{h}}(t),\\ \sigma^{\mathrm{e}}(t) = E\,\varepsilon(t)\,, \quad \sigma^{\mathrm{h}}(t) = -\,E(\lambda-\eta)\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.\end{gathered} \tag{28.12}$$

Тук очевидно $\sigma^{\mathrm{e}}(t)$ е напрежението, което би се появило в тялото в момент t в резултат на деформацията $\varepsilon(t)$, ако то беше идеално еластично. Вторият член, $\sigma^{\mathrm{h}}(t)$, е резултат на вискозо-еластичните ефекти. Интегралната форма на този член показва, че съответното напрежение $\sigma^{\mathrm{h}}(t)$ зависи не само от деформацията в същия момент от време, но и от цялата ѝ „предистория“ $\varepsilon(\tau)$, $\tau \in (-\infty, t)$. В това именно се състои и ефектът на *наследственост* на разглежданите тела: деформацията $\varepsilon(\tau)$, приложена в интервала $(\tau, \tau+\mathrm{d}\tau)$, влияе върху стойността на напрежението във *всички* бъдещи моменти от време. Това влияние, съгласно (28.12), поражда в момента t напрежение

$$-E(\lambda-\eta)\mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{28.13}$$

което очевидно е пропорционално на големината на деформацията $\varepsilon(\tau)$ и на дължината $\mathrm{d}\tau$ на интервала, в който тя действа. Коефициентът на пропорционалност (т. нар. *функция на влияние*) зависи от $t-\tau$ (интервала от време между момента τ на приложената деформация и момента

t, в който отчитаме влиянието ѝ). Ясно е, че това влияние трябва да затихва при $t - \tau \to \infty$. За стандартното линейно тяло, както се вижда от (28.13), затихването е експоненциално.

28.3. Принцип на суперпозицията на Болцман. Обобщението на казаното в § 28.2 е очевидно. Нека $\sigma(t)$ е напрежението в момент t, възникнало в тялото в резултат на зададена „предистория“ на деформацията $\varepsilon(\tau)$, $\tau \in (-\infty, t)$. Тогава отново

$$\sigma(t) = \sigma^{\mathrm{e}}(t) + \sigma^{\mathrm{h}}(t)\,, \tag{28.14}$$

където $\sigma^{\mathrm{e}}(t) = E\varepsilon(t)$ е чисто еластичното напрежение вследствие на деформацията в същия момент от време t.

Следвайки Болцман, да разбием $(-\infty, t)$ на части с помощта на точките τ_k:

$$-\infty < \ldots < \tau_{k-1} < \tau_k < \tau_{k+1} < \ldots < t\,,$$

и да представим предисторията $\varepsilon(\tau)$ като суперпозиция на отделни части (импулси), действащи във всеки един от интервалите (τ_k, τ_{k+1}):

$$\varepsilon(\tau) = \sum_k \varepsilon^{(k)}(\tau)\,, \quad \varepsilon^{(k)}(\tau) = \begin{cases} \varepsilon(\tau)\,, & \tau \in (\tau_k, \tau_{k+1})\,, \\ 0\,, & \tau \notin (\tau_k, \tau_{k+1})\,. \end{cases}$$

Един от тези импулси е защрихован на фиг. 28.1. Функцията $\varepsilon^{(k)}(\tau)$ ще предизвика в бъдещия момент от време t напрежение $\triangle\sigma^{(k)}$, пропорционално на дължината $\triangle\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ на интервала на действието си и на големината $\varepsilon(\xi_k)$ на деформацията в средната точка ξ_k на интервала (τ_k, τ_{k+1}):

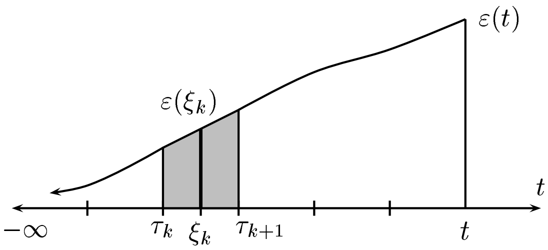
$$\triangle\sigma^{(k)} \approx EK(t - \xi_k)\,\varepsilon(\xi_k)\,\triangle\tau_k\,, \tag{28.15}$$

с точност до малки от по-висок ред спрямо $\triangle\tau_k$.

Напрежението в момент t, породено от всички предишни импулси $\varepsilon^{(k)}(\tau)$ на деформацията, ще се представи като *сума* от съответните напрежения (28.15):

$$\sigma^{\mathrm{h}}(t) \approx E\sum_k K(t - \xi_k)\,\varepsilon(\xi_k)\,\triangle\tau_k\,. \tag{28.16}$$

В това именно се състои принципът на *суперпозицията на Болцман*. Подчертаваме специално, че сумирането на ефектите от различните импулси в (28.16) е съществено и нетривиално предположение, свързано с характера на деформирането на тялото, а *не е* универсално свойство.



Фиг. 28.1. Принцип на суперпозицията на Болцман

По ред причини, обусловени от спецификата на деформацията на конкретните материали, принципът на Болцман е в сила за полимери, ако напреженията не са много големи (не превишават, да речем, половината от стойността на разрушаващите). За метали принципът на суперпозицията се оказва неприложим.

Дясната страна на (28.16) очевидно е риманова сума на един определен интеграл — при $\triangle\tau_k \to 0$ тя се стреми към

$$E\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\,\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Следователно законът за деформирането на тяло, подчиняващо се на принципа на суперпозиция на Болцман, има вида

$$\sigma(t) = E\left(\varepsilon(t) + \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\,\varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right). \tag{28.17}$$

Такова тяло се нарича *линейно наследствено.*

Аналогични са разсъжденията и в случая, когато представим деформацията в момент t във вида

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^{\mathrm{e}}(t) + \varepsilon^{\mathrm{h}}(t)\,,$$

срв. (28.14). Тук $\varepsilon^{\mathrm{e}}(t) = \sigma(t)/E$ е чисто еластичната деформация, причинена от напрежението $\sigma(t)$, действащо в същия момент от време t; $\varepsilon^{\mathrm{h}}(t)$ е „наследство“ от предисторията $\sigma(\tau)$, $\tau \in (-\infty, t)$, на напрежението. Като приложим отново принципа на суперпозицията на Болцман, стигаме до аналогично на (28.17) интегрално представяне на деформацията:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}\left(\sigma(t) + \int_{-\infty}^{t} \Gamma(t-\tau)\,\sigma(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\,, \tag{28.18}$$

но с друго ядро $\Gamma(t)$.

Забелязваме, че интегралните оператори в (28.17) и (28.18) са волтерови. Като ползваме означението за последните, въведено в (28.8), записваме закона за деформиране на наследственото тяло, подчиняващо се на принципа на Болцман, във вида

$$\sigma = E\,(\mathbf{1} + \mathcal{K})\,\varepsilon \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{1}{E}\,(\mathbf{1} + \mathcal{G})\,\sigma\,. \tag{28.19}$$

В частния случай на експоненциални ядра

$$K(t) = -(\lambda - \eta)\mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad \Gamma(t) = -(\eta - \lambda)\mathrm{e}^{-\eta t} \tag{28.20}$$

и съотношенията (28.19) възпроизвеждат вече познатите закони за деформирането (28.5) и (28.9) на стандартното линейно тяло.

28.4. Криви на релаксация и пълзене.Да предположим, че

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)\,, \quad H(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0\,, \\ 1\,, & t \geq 0\,. \end{cases} \tag{28.21}$$

Тук $H(t)$ е т. нар. *функция на Хевисайд* или *стъпаловидната* функция. Заместването на (28.21) в (28.17) ни дава закона за релаксация на напрежението в разглежданото тяло:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \left(1 + \int_0^t K(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \quad t \geq 0\,. \tag{28.22}$$

Формулата (28.22) показва, че ако е известна функцията на релаксация, например експериментално, $K(t)$ се намира веднага чрез диференциране. Поради това функцията $K(t)$ в закона (28.17) се нарича *ядро на релаксация* на модела.

Да предположим, аналогично на (28.21), че

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t).$$

От (28.18) тогава определяме кривата на пълзене на модела:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 + \int_0^t \Gamma(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \quad t \geq 0\,; \tag{28.23}$$

поради това $\Gamma(t)$ се нарича *ядро на пълзене*.

С помощта на (28.20), от (28.22) и (28.23) намираме, след елементарно интегриране, функциите на релаксация и пълзене за стандартното линейно тяло:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left[1 - \frac{\lambda - \eta}{\lambda}\,\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)\right], \quad \sigma_0 = E\varepsilon_0\,, \quad t \geq 0\,, \tag{28.24}$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{\lambda - \eta}{\lambda} \left(1 - \mathrm{e}^{-\eta t} \right) \right], \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}, \quad t \geq 0 . \tag{28.25}$$

Тъй като $\lambda > \eta$, вж. (27.13), напрежението $\sigma(t)$ съгласно (28.24) релаксира от моментната си стойност σ_0 (при $t = 0$) до „дълготрайната“ си стойност

$$\sigma_\infty = \sigma_0 \frac{\eta}{\lambda} = E_\infty \, \varepsilon_0$$

(при $t = \infty$) по експоненциален закон, вж. (28.24).

При пълзене деформацията се изменя от моментната си стойност $\varepsilon_0 = \sigma_0 / E$ (при $t = 0$) до „дълготрайната“

$$\varepsilon_\infty = \varepsilon_0 \frac{\lambda}{\eta} = \frac{\sigma_0}{E_\infty}$$

(при $t = \infty$) също по експоненциален закон.

След всичко казано дотук вече сме в състояние да отговорим на въпроса, поставен в края на § 18.6: какво е реологичното поведение на моделите, построени с помощта на N' пружинки и N'' буталца, когато $N', N'' \to \infty$? Ако N', N'' са крайни, кривите на пълзене представляват линейни комбинации на краен брой експоненциални функции с различни константи λ_k и η_k (т. е. с различни времена на релаксация и ретардация). От (28.22) и (28.23) тогава следва, че и ядрата $K(t)$ и $\varGamma(t)$ са линейни комбинации на същите експоненциални функции:

$$K(t) = \sum_{k=1}^{N_1} a_k \, \mathrm{e}^{-\lambda_k t}, \quad \varGamma(t) = \sum_{k=1}^{N_2} b_k \, \mathrm{e}^{-\eta_k t},$$

при това N_1 и N_2 се определят чрез N' и N'' (точната зависимост няма значение предвид качествения характер на разсъжденията). Когато N', $N'' \to \infty$, функциите $K(t)$ и $\varGamma(t)$ се превръщат в произволни, а моделът от пружинки и буталца на свой ред се превръща в наследствения интегрален модел (28.17) (или, еквивалентно, (28.18)) за деформиране на тяло, подчиняващо се на принципа на суперпозицията на Болцман.