

$$\text{Отг.: } u_r = -\frac{Pb}{3\lambda + 2\mu} r.$$

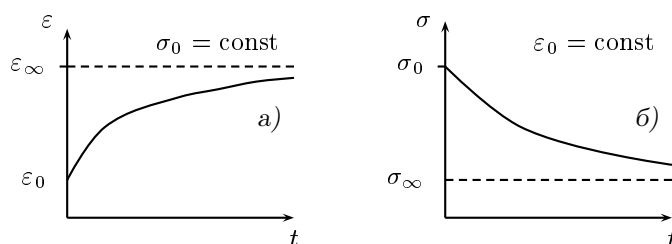
§ 27. Понятие за вискозо-еластични модели. Тела на Максвел, Фойхт и Келвин

27.1. Пълзене и релаксация. Експериментите, проведени през 19-ти век, показват, че редица тела притежават едновременно и еластични, и вискозни свойства. Такъв феномен е описан за пръв път от Вебер (1839), който решава да определи експериментално модула на Юнг на копринена нишка. За целта той използва най-простия и естествен начин — прилага опънна сила F_0 и решава да измери съответната деформация на нишката. В момента на прилагането на силата се появява мигновена деформация ε_0 , което е естествено за всяко еластично тяло. Тази деформация обаче не остава постоянна. За изумление на Вебер и съвременниците му нишката започва да „тече“, в смисъл че при същата опънна сила F_0 деформацията започва да расте с времето, приближавайки се асимптотично към стойност $\varepsilon_\infty > \varepsilon_0$, вж. фиг. 27.1 а). Изменението на деформацията при неизменно натоварване, което днес обикновено се нарича *пълзене*,³ е характерно за редица тела, така че копринената нишка се оказва *вискозо-еластична среда* — тяло, проявяващо едновременно и еластични, и вискозни свойства. Типичната зависимост $\varepsilon = \varepsilon(t)$ за такава среда при постоянна опънна сила F_0 , т.е. при постоянно опънно напрежение $\sigma_0 = \text{const}$, е показана на фиг. 27.1 а). Това е т. нар. *крива на пълзене*.

Родствено на пълзенето е и явлението *релаксация*. При него ни интересува напрежението σ , възникващо в опънат прът, чиято деформация ε_0 се поддържа постоянна. Ако тялото е еластично, то $\sigma \equiv \sigma_0 = E\varepsilon_0$. Ефектът на вискозо-еластичност тук се проявява в намаляването на напрежението с течение на времето, като типичната зависимост $\sigma = \sigma(t)$ (*крива на релаксация*) е показана на фиг. 27.1 б).

Причината за вискозо-еластичното поведение става ясна едва през първата половина на 20-ти век. Това е специфичният строеж на някои тела, преди всичко на полимерите, които са съставени от макромолекули. Последните представляват много дълги вериги от молекули, които в равновесното си състояние (т.е. оставени сами на себе си) се стремят да

³В българската литература се използва и терминът *крип* (от англ. „creep“ — пълзя).



Фиг. 27.1. Типични криви на пълзене (а) и на релаксация (б) за полимерни материали

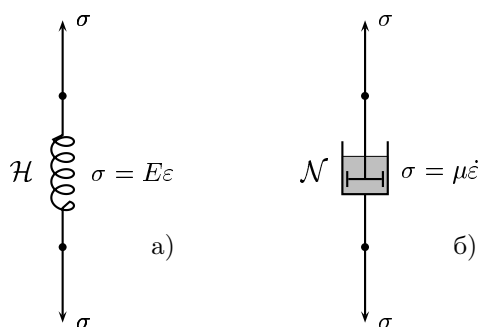
се свият в кълбо. При прилагане на разтягащо напрежение първо се появява еластична (мигновена) деформация ε_0 . След това макромолекулите започват постепенно да се „развиват“, което обяснява пълзенето. Тъй като макромолекулите са много, в един момент те започват да си „пречат“ взаимно и затова деформацията постепенно затихва, като се стреми към една постоянна стойност ε_∞ . Това е т. нар. *дълготрайна* (или *равновесна*) деформация, която се реализира в образеца при $t \rightarrow \infty$, т. е. при продължително време на пълзене. В резултат се наблюдава типичната крива на пълзене на полимерните материали, показана на фиг. 27.1 а).

Аналогично е и качественото обяснение на типичната крива на релаксация на полимерите. В този случай фиксираната деформация ε_0 , приложена в момент $t = 0$, се съпровожда от появата на еластично (мигновено) напрежение σ_0 съгласно закона на Хук. След това макромолекулите започват постепенно да се „развиват“, при което напрежението намалява, като се стреми към една постоянна стойност σ_∞ . Това е т. нар. *дълготрайно* (или *равновесно*) напрежение, което се реализира в образеца при достатъчно голяма продължителност на релаксацията. В резултат се наблюдава типичната крива на релаксация на полимерните материали, показана на фиг. 27.1 б).

27.2. Базисни модели — „пружинка“ на Хук и „буталце“ на Нютон-Навие. Причината за наблюдаваните вискозо-еластични свойства на някои материали, например на споменатата копринена нишка⁴, през 19-ти век все още не е ясна. Поради това големите учени на епохата — Максвел, Фойхт, Келвин и др. — предлагат чисто механично описание на явлението като строят *механични* модели (верни на царувания тогава „механистичен“ дух). В основата са два базисни модела.

Първият от тях е *тялото на Хук* изобразявано като пружинка, вж.

⁴Копринената нишка е полимер от естествен произход.

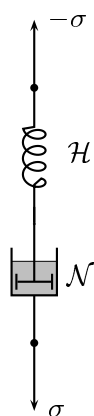


Фиг. 27.2. Най-прости модели: а) тяло на Хук;
б) вискозна течност на Навие

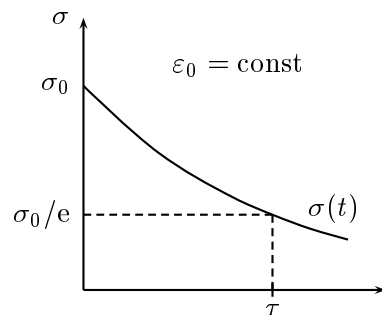
фиг. 27.2 а)). Законът на деформирането му е $\sigma = E\varepsilon$ — законът на Хук при едноосен опън. Вторият модел е *тялото на Навие* или *на Нютон* — то представлява бутало, което се движи в течност и моделира вискозното поведение, вж. фиг. 27.2 б)). Законът на деформирането му е $\sigma = \mu\dot{\varepsilon}$ и това е очевиден едномерен аналог на закона на Навие-Стокс за вискозна течност. (По-късно впрочем се появява още един базисен елемент — т. нар. *тяло на Сен-Венан*, което моделира пластичното поведение. Тук то няма да се разглежда. Читателят може да намери едно по-подробно изложение на вискозоеластичните модели в книгите [9] или [16].

За построяване на по-сложни модели, проявяващи *едновременно* и еластични и вискозни свойства, двата базисни елемента се свързват или последователно, или успоредно. Последователното свързване се означава с ‘—’, а успоредното с ‘||’. Най-простите възможни комбинации, т. нар. тела на Максвел и на Фойхт, ще изследваме подробно съответно в §§ 27.3 и 27.4. В тези най-прости модели, както и в произволно усложнените чрез добавяне на все нови и нови пружинки и буталца, основната задача е да се конкретизира уравнението на състоянието на модела, т. е. връзката между напреженията и деформациите (и техните производни по времето, които, както ще видим, ще се появят по естествен начин).

Да отбележим, че уравненията на състоянието на деформируеми тела с по-сложно поведение (например вискозо-еластично) се наричат също и *реологични*. Тяхното изучаване в началото на 20-ти век се е концентрирало в *реологията* (от гръцкото „рео“ — тека, и „логос“ — знание) — най-общо казано, наука за деформацията и течението на телата. Първоначално реологията се е специализирала в изучаването на по-сложни



27.3. Модел на Максвел



27.4. Релаксация в тялото на Максвел

модели, съставени от базисните.⁵ Днес подобни модели не представляват практически интерес и се използват, както и в настоящата книга, само за илюстрация на вискозо-еластичното (и по-общо, на нееластичното) поведение на телата. Реологията като общотеоретична дисциплина е престанала да има самостоятелен интерес и се е превърнала в част от механиката на непрекъснатите (деформируемите) среди. В последната се строят, вече систематично и с привличане на основните принципи на термодинамиката, законите на деформирането и течението на телата (вж. например двутомната монография на Седов [12]).

При извода на уравнението на състоянието за конкретни модели се използват две основни правила:

- При последователно свързване *напрежението е едно и също* във всички елементи, а деформациите им се сумират;
- При успоредно свързване *деформацията е една и съща* във всички елементи, а напреженията се сумират.

Ще илюстрираме тези два принципа върху двата най-прости модела — на Максвел и на Фойхт.

27.3. Модел на Максвел. *Тялото на Максвел* представлява елемент на Хук, т. е. пружинка, свързана последователно с буталце — вискозен елемент на Навие:

$$\mathcal{M} = \mathcal{H} - \mathcal{N},$$

⁵„Рекордът“ в това отношение е моделът на тесто за хляб, построен явно през 30-те години на миналия век и включващ повече от 30 пружинки и буталца.

вж. фиг. 27.3. Нека σ_H , ε_H и σ_N , ε_N са напреженията и деформациите съответно в пружинката и буталцето. Тогава

$$\begin{aligned}\sigma_H &= \sigma_N = \sigma, & \varepsilon_H + \varepsilon_N &= \varepsilon, \\ \sigma_H &= E \varepsilon_H, & \sigma_N &= \mu \dot{\varepsilon}_N,\end{aligned}\tag{27.1}$$

където E е модулът на Юнг на пружинката, а μ — вискозитетът на течността в буталцето.

За да изключим ε_H и ε_N от (27.1), диференцираме формулата за пълната деформация на модела:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_H + \dot{\varepsilon}_N = \frac{\dot{\sigma}_H}{E} + \frac{\sigma_H}{\mu},\tag{27.2}$$

използвайки основните реологични съотношения за пружинката и буталцето. Но $\sigma_H = \sigma_N = \sigma$, вж. отново (27.1), и затова

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu},\tag{27.3}$$

което и представлява търсения реологичен закон за деформирането на тялото на Максвел.

Да разгледаме пълзенето и релаксацията в тялото на Максвел.

Прилагаме първо постоянно напрежение $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$. Тогава $\dot{\sigma} = 0$ и от (27.3) имаме $\dot{\varepsilon} = \sigma/\mu$, т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \frac{\sigma t}{\mu}.$$

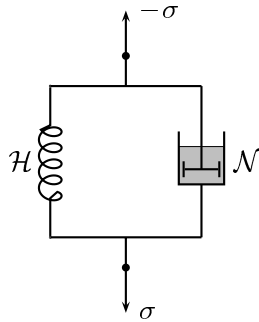
Това показва, че кривата на пълзенето на модела е линейна по времето (при постоянно σ „тече“ само вискозният елемент, вж. фиг. 27.2). По този начин при тялото на Максвел не се наблюдава характерната за полимерните материали крива на пълзене, вж. фиг. 27.1 а), притежаваща хоризонтална асимптота.

Да разгледаме сега релаксацията в тялото на Максвел. Нека $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$. Тогава $\dot{\varepsilon} = 0$ и от (27.3) следва

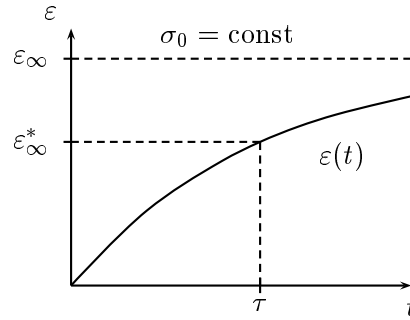
$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu} = 0, \quad \sigma \Big|_{t=0} = \sigma_0.\tag{27.4}$$

Решението на задачата на Коши (27.4) е

$$\sigma = \sigma_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{\mu}{E},\tag{27.5}$$



27.5. Модел на Фойхт



27.6. Пълзене в тялото на Фойхт

т. е. напрежението релаксира по експоненциален закон, като $\sigma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Константата τ в (27.5) има размерност време и се нарича *време на релаксация*. Интерпретацията ѝ е очевидна — тя характеризира скоростта на релаксация в тялото, в смисъл че за време τ напрежението намалява от началната си стойност σ_0 до $\sigma_0/e \approx \sigma_0/3$, т. е. приблизително три пъти, вж. фиг. 27.4.

27.4. Модел на Фойхт. *Тялото на Фойхт* представлява елемент на Хук — пружинка, свързана този път успоредно с буталце:

$$\mathcal{M} = \mathcal{H} \parallel \mathcal{N},$$

вж. фиг. 27.5. Нека отново σ_H, ε_H и σ_N, ε_N са напреженията и деформациите съответно в пружинката и буталцето. Тогава

$$\begin{aligned} \varepsilon_H = \varepsilon_N = \varepsilon, \quad \sigma_H + \sigma_N = \sigma, \\ \sigma_H = E \varepsilon_H, \quad \sigma_N = \mu \dot{\varepsilon}_N. \end{aligned} \quad (27.6)$$

Оттук веднага намираме

$$\sigma = E \varepsilon + \mu \dot{\varepsilon}, \quad (27.7)$$

което представлява закона за деформирането на тялото на Фойхт.

Да разгледаме, подобно на тялото на Максвел, пълзенето и релаксацията в модела на Фойхт.

При пълзене напрежението $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$. Тогава, съгласно (27.7), функцията $\varepsilon(t)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$E \varepsilon + \mu \dot{\varepsilon} = \sigma_0, \quad (27.8)$$

чието решение е

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \tau = \frac{\mu}{E}. \quad (27.9)$$

Уравнението (27.9) е решено при естественото начално условие

$$\varepsilon(t) \Big|_{t=0} = 0.$$

(Да напомним, че деформацията при успоредното свързване е една и съща и в двата елемента; но деформацията във вискозния елемент при $t = 0$ е нулева. Този елемент не може да се деформира мигновено за разлика от еластичния; деформацията в него винаги се развива постепенно, започвайки от нулата.) Деформацията при пълзенето тук расте по експоненциален закон, като клони асимптотично към дълготрайната си стойност

$$\varepsilon_\infty = \frac{\sigma_0}{E}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (27.10)$$

Забележете, че ε_∞ е деформацията на еластичния елемент под действието на напрежението σ_0 , ако буталцето изобщо отсъства. Това е естествено предвид (27.9): с течение на времето скоростта на деформацията намалява, $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$, напрежението във вискозния елемент $\sigma_N = \mu\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$ и цялото напрежение се „поема“ от пружинката при $t \rightarrow \infty$, вж. фиг. 27.5.

Параметърът τ , дефиниран в (27.9), е характерното време за разглежданото тяло на Фойхт. То се нарича време на *ретардация* (закъснение). Интерпретацията му е следната. Както се вижда от (27.9), при прилагане на напрежението σ_0 деформацията се стреми асимптотично към дълготрайната си (равновесна) стойност $\varepsilon_\infty = \sigma_0/E$. В момента $t = \tau$

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon_\infty \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \varepsilon_\infty \frac{e-1}{e} \approx \frac{2}{3}\varepsilon_\infty,$$

т. е. деформацията е приблизително $2/3$ от пълната деформация ε_∞ , вж. фиг. 27.6. Следователно τ характеризира „закъснението“, с което се натрупва пълната деформация вследствие на вискозо-еластичността на тялото.

27.5. Модел на Келвин (стандартно линейно тяло). Както видяхме, моделът на Максвел описва донякъде правдоподобно само релаксацията, а този на Фойхт — само пълзенето на материали от полимерен тип. За едно по-адекватно описание на поведението на такива материали и, в частност, за получаване на по-реалистични криви на

пълъзене и релаксация (от вида на показаните на фиг. 27.1) двата модела следва да се комбинират и усложнят.

Най-простата такава комбинация е т. нар. *тяло на Келвин* (известно още като *стандартно линейно тяло* или *тяло на Зинер*). Схематично, то се представя като

$$\mathcal{Z} = \mathcal{H}_1 - \mathcal{V} = \mathcal{H}_1 - (\mathcal{H}_2 \parallel \mathcal{N}), \quad (27.11)$$

както е изобразено на фиг. 27.7. (Пружинката \mathcal{H}_1 е свързана последователно с тялото на Фойхт \mathcal{V} .)

Да означим с ε_1 , σ_1 и ε_V , σ_V деформациите и напреженията съответно в пружинката \mathcal{H}_1 и тялото на Фойхт \mathcal{V} . Тогава

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_V, \quad \sigma = \sigma_1 = \sigma_V. \quad (27.12)$$

Освен това

$$\sigma_V = E_2 \varepsilon_V + \mu \dot{\varepsilon}_V,$$

вж. (27.7). От (27.12) намираме $\varepsilon_V = \varepsilon - \varepsilon_1$, което замества в последното съотношение, отчитайки, че $\sigma = \sigma_1 = \sigma_V$:

$$\sigma = E_2 \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E_1} \right) + \mu \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_1} \right),$$

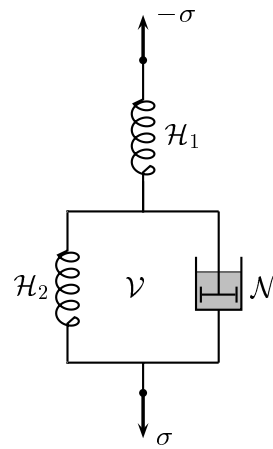
или

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} + \lambda \sigma &= E (\dot{\varepsilon} + \eta \varepsilon), \\ E = E_1, \quad \lambda &= \frac{E_1 + E_2}{\mu}, \quad \eta = \frac{E_2}{\mu}, \end{aligned} \quad (27.13)$$

което представлява закона за деформирането на тялото на Келвин.

27.6. Качествено изследване на тялото на Келвин. В заключение на този параграф ще изследваме качествено кривите на пълъзене и релаксация, съответстващи на модела на Келвин (27.13).

Да приложим постоянно напрежение σ_0 в момент $t = 0$ към това тяло. Тъй като напрежението се изменя скокообразно, то при $t = 0$ скоростите на изменение и на напрежението, $\dot{\sigma}$, и на деформацията, $\dot{\varepsilon}$, са



Фиг. 27.7. Модел на Келвин

много големи. Тогава σ и ε могат да се пренебрегнат съответно спрямо $\dot{\sigma}$ и $\dot{\varepsilon}$, което съгласно (27.13) води до

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \sigma = E\varepsilon.$$

Това означава, че при много бързи процеси тялото на Келвин се държи като еластично с модул на Юнг, съвпадащ с този на пружинката \mathcal{H}_1 , т.е. $E = E_1$. Модулът E се нарича *мигновен* или *моментен модул на Юнг*. (При много бързо натоварване реагира само пружинката \mathcal{H}_1 , а тялото на Фойхт \mathcal{V} , предвид наличието на вискозен елемент в него, не може да реагира мигновено.)

В другия краен случай на много бавно деформиране $\dot{\sigma}$ и $\dot{\varepsilon}$ са съответно пренебрежимо малки спрямо σ и ε . Оттук

$$\sigma = E_\infty \varepsilon, \quad E_\infty = E \frac{\eta}{\lambda},$$

вж. (27.13). Това означава, че и в този случай тялото на Келвин се държи като еластично, но с модул на еластичност E_∞ , наречен *дълготраен* или *равновесен модул на Юнг*.

От дефиницията на E , η и λ , вж. (27.13), следва впрочем, че

$$E_\infty < E. \quad (27.14)$$

При пълзене, след прилагане на напрежението σ_0 в момента $t = 0$, тялото се държи като еластично с модул на Юнг, равен на моментния модул E . Деформацията му тогава е $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$. С течение на времето скоростта на деформация намалява (в „играта“ се включва и тялото на Фойхт с вискозния елемент в него), стремейки се към нула. При $t \rightarrow \infty$ тялото отново се превръща в еластично, но с модул на Юнг E_∞ . Съответната деформация е

$$\varepsilon_\infty = \frac{\sigma_0}{E_\infty} > \varepsilon_0$$

предвид (27.14). Следователно кривата на пълзене на тялото на Келвин има типичния за полимерните материали вид, показан на фиг. 27.1 а). Аналогични разсъждения, свързани с прилагането на постоянна деформация $\varepsilon_0 = \text{const}$ в момент $t = 0$, показват, че съответните криви на релаксация намаляват монотонно от стойността $\sigma_0 = E\varepsilon_0$ при $t = 0$ до $\sigma_\infty = E_\infty \varepsilon_0 < \sigma_0$ при $t \rightarrow \infty$. По този начин се вижда, че кривата на релаксация в случая има типичния вид за полимерите, показан на фиг. 27.1 б).

Конкретните функционални изрази на самите криви на пълзене и релаксация зависят от специфичния модел. За тялото на Келвин тези криви се изразяват чрез експоненциални функции. Подробното им изследване ще проведем в следващия параграф. На базата на това изследване ще се опитаме да отговорим, в частност, и на въпроса какви са реологичните уравнения на моделите, които включват все по-голям брой пружинки и буталца, в граничния случай, когато този брой клони към безкрайност.