

§ 26. Задача на Ламе

26.1. Задача на Ламе за кръговоцилиндрична тръба. Разглеждаме куха кръговоцилиндрична тръба с радиуси a и b , неограничена по оста z , при отсъствие на външни сили. Върху вътрешната и външната стени са приложени съответно наляганията p_a и p_b , вж. фиг. 26.1 където е показано едно от напречните сечения на тръбата. Материалът на тръбата е линейно еластичен. Търсим напреженията и деформациите в тръбата.

„Геометрията“ на задачата прави естествено използването на цилиндрични координати $\{r, \varphi, z\}$. Задачата е осесиметрична — зависимост на търсените напрежения от φ няма. Няма и зависимост от координатата z предвид неограничеността на тръбата по оста z . Това подсказва да търсим полето на преместването във вида

$$\mathbf{u} = u_r(r)\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \nabla r \quad (26.1)$$

— под действието на вътрешното и външното налягане тръбата ще се разшири (или свие) *единствено* в радиално направление.

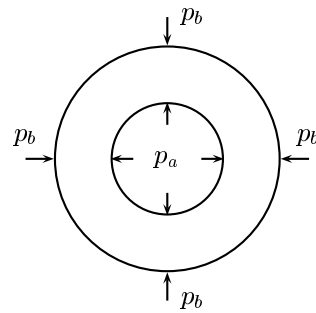
Тензорът на деформацията в случая ще има вида

$$\mathbf{T}_e = e_{rr} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + e_{\varphi\varphi} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (26.2)$$

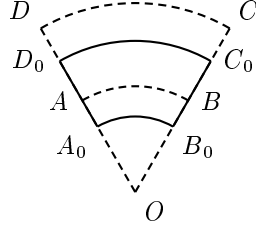
— интуитивно е ясно, че срязващи деформации в тръбата отсъстват. Да поясним: елементарният четириъгълник $A_0B_0C_0D_0$ в началното състояние се преобразува в четириъгълника $ABCD$ след деформацията на тръбата, вж. фиг. 26.2. Вижда се, че тези четириъгълници се различават единствено с размерите си, а правите ъгли в тях *не се скосяват*: например правият ъгъл $\angle B_0A_0D_0$ след деформацията се превръща в ъгъла $\angle BAD$, който също е прав.

Компонентите e_{rr} и $e_{\varphi\varphi}$ на тензора \mathbf{T}_e в случая се изразяват елементарно чрез полето $u_r(r)$ без да се налага привличането на символите на Кристофел. Именно, деформацията в радиалната посока r може да се разглежда като едномерна и затова

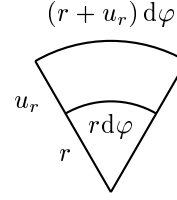
$$e_{rr} = u_r' . \quad (26.3)$$



Фиг. 26.1



Фиг. 26.2



Фиг. 26.3

За пресмятане на $e_{\varphi\varphi}$ припомняме интерпретацията на диагоналните компоненти на тензора на деформацията (§ 15.4), вж. (15.20) — това е относителното удължение в резултат на деформацията на материалната нишка в направление на φ -координатната линия. В началното състояние $ds_{\varphi}^0 = r d\varphi$, а след деформирането тази дължина е вече $ds = (r + u_r) d\varphi$ поради преместването на точката M_0 в радиална посока с u_r , вж. фиг. 26.3. Следователно

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{(r + u_r) d\varphi - r d\varphi}{r d\varphi} = \frac{u_r}{r}. \quad (26.4)$$

За определяне на радиалното преместване използваме уравненията на Ламе (25.9):

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (26.5)$$

— задачата е статическа (зависимост от времето няма), няма и външни сили. За пресмятане на лапласиана $\Delta \mathbf{u}$ забелязваме, че полето \mathbf{u} , вж. (26.1), в случая е потенциално

$$\mathbf{u} = \nabla f(r), \quad f'(r) = u_r(r), \quad (26.6)$$

вж. пример 11.4. Следователно

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \Delta \nabla f = \nabla \Delta f, \quad \theta = \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla f = \Delta f, \\ \Delta f &= \frac{1}{r} (r f')' = \frac{1}{r} (r u_r)' = u_r' + \frac{u_r}{r}, \end{aligned} \quad (26.7)$$

където $\theta = \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{tr } \mathbf{T}_e$ е обемното разширение на тръбата, вж. (15.30); използвахме и формулата (12.20) за лапласиана в полярни координати за ососиметрична функция. Уравнението на Ламе, с отчитането на (26.7), се опростява:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = (\lambda + 2\mu) \nabla \Delta f = 0.$$

Оттук

$$\Delta f = \frac{1}{r} (ru_r)' = 2A, \quad A = \text{const}. \quad (26.8)$$

Общото решение на това диференциално уравнение очевидно е

$$u_r = Ar + \frac{B}{r}. \quad (26.9)$$

Интеграционните константи A и B ще определим от граничните условия на задачата — налягането върху вътрешната и външните стени на тръбата:

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=a} = -p_a, \quad \sigma_{rr} \Big|_{r=b} = -p_b. \quad (26.10)$$

С помощта на закона на Хук (25.6) и съотношенията (26.3) и (26.6) определяме радиалното напрежение:

$$\sigma_{rr} = \lambda\theta + 2\mu_{rr} = 2\lambda A + 2\mu u_r',$$

т. е.

$$\sigma_{rr} = 2(\lambda + \mu)A - \frac{2\mu B}{r^2}, \quad (26.11)$$

след използването на (26.9).

Граничните условия (26.10), заедно с току що намерения израз (26.9) за радиалното напрежение, водят до системата

$$\begin{aligned} 2(\lambda + \mu)A - \frac{2\mu B}{a^2} &= -p_a, \\ 2(\lambda + \mu)A - \frac{2\mu B}{b^2} &= -p_b \end{aligned}$$

за определяне на интеграционните константи A и B . Решението на тази система е

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{2(\lambda + \mu)(b^2 - a^2)}, \\ B &= \frac{(p_a - p_b)a^2 b^2}{2\mu(b^2 - a^2)}. \end{aligned} \quad (26.12)$$

Формулите (26.1), (26.3), (26.4), и (26.12) определят преместванията и деформациите в тръбата в явен вид.

Упражнение 26.1. Намерете полето на преместването u_r при дадено външно налягане p_b , ако тръбата е плътна ($a = 0$).

$$\text{Отг.: } u_r = -\frac{p_b}{2(\lambda + \mu)} r.$$

26.2. Анализ на напрегнатото състояние в тръбата. Заместването на (26.12) в (26.11) позволява да определим явно радиалното напрежение в тръбата:

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right). \quad (26.13)$$

По аналогичен начин с помощта на закона на Хук (25.6) намираме и напречните напрежения

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right), \quad (26.14)$$

а също и надлъжните

$$\sigma_{zz} = \lambda\theta = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} \quad (26.15)$$

Обърнете внимание, че макар и да няма надлъжна деформация ($u_z = e_{zz} = 0$) в тръбата се появяват надлъжни напрежения σ_{zz} единствено в резултат на налягането по двете стени $r = a$ и $r = b$. Този неочевиден факт е следствие от присъствието в закона на Хук на члена $\lambda\theta \mathbf{I}$, вж. (25.6). Напрежения σ_{zz} ще се анулират единствено в случая $\lambda = 0$, който съответства на среда с нулев коефициент на Поасон, $\nu = 0$, вж. (25.25) и (26.16).

Ако $p_a, p_b > 0$, то $\sigma_{rr} < 0$, т.е. радиалните напрежения са винаги натискови (както и трябва да се очаква). Знаците на останалите две напрежения, $\sigma_{\varphi\varphi}$ и σ_{zz} , зависят обаче от размерите на тръбата и от двете налягания p_a и p_b (по-точно от безразмерните отношения b/a и p_a/p_b).

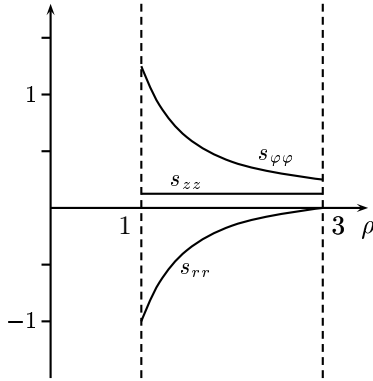
Да разгледаме за нагледност по-простия случай, когато външно налягане няма, $p_b = 0$. Тогава

$$\begin{aligned} s_{rr} &= \frac{\sigma_{rr}}{p_a} = \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(1 - \frac{\beta^2}{\rho^2}\right), \\ s_{\varphi\varphi} &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{p_a} = \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2}\right), \\ s_{zz} &= \frac{\sigma_{zz}}{p_a} = \frac{2\nu}{\beta^2 - 1}, \end{aligned} \quad (26.16)$$

където са въведени безразмерните напрежения $s_{rr}, s_{\varphi\varphi}, s_{zz}$, както и безразмерните дължини

$$\beta = \frac{b}{a}, \quad \rho = \frac{r}{a}; \quad \beta > 1, \quad \rho \in (1, \beta).$$

а ν е коефициентът на Поасон, вж. (25.25).



Фиг. 26.4

Разпределението на безразмерните напрежения s_{rr} , $s_{\varphi\varphi}$ и s_{zz} в радиалната посока на тръбата r са показани на фиг. 26.4 при стойности на параметрите $\beta = 3$ и $\nu = 0.5$.

От (26.16) се вижда, че напречното напрежение $\sigma_{\varphi\varphi}$ е винаги положително и достига максималната си стойност върху вътрешната стена на тръбата $r = a$. При това

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{\max} = p_a \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2 - 1}. \quad (26.17)$$

С „изтъняването“ на тръбата, когато $\beta = b/a \rightarrow 1$ при фиксирано a , напрежението $\sigma_{\varphi\varphi}^{\max}$ расте неограничено:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{\max} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} +\infty.$$

Това обяснява надлъжното „сцепване“ на тръбите при голямо вътрешно налягане (резултат например от мощен поток вода или пара) и недостатъчна дебелина — материалът не е в състояние да издържи напречното напрежение $\sigma_{\varphi\varphi}^{\max}$, появяват се пукнатини по посока на оста Oz , които и водят до споменатото разцепване (добре познато от всекидневния опит). Най-простата „рецепта“ за избягване на подобно разцепване е разбира се увеличаване на дебелината на тръбата. Това изисква обаче съществено увеличаване на нейната маса а освен това не е особено ефективно: както се вижда от (26.17) зависимостта на $\sigma_{\varphi\varphi}^{\max}$ от β се характеризира с бързо „насищане“ в смисъл, че $\sigma_{\varphi\varphi}^{\max}$ бързо се приближава до граничната си стойност p_a при ръста на β , така че по-нататъшното увеличаване на дебелината става безпредметно.

От израза (26.14) за напречното напрежение $\sigma_{\varphi\varphi}$ се вижда обаче, че то може да се намали чрез прилагане на налягане p_b върху външната стена. Това подсказва да „облечем“ тръбата с тънък външен слой $b < r < c$ като се опитаме да реализираме свиващи напрежения по границата $r = b$. Технологически това може да се реализира например по следния начин. Тънкостенна куха тръба с вътрешен радиус малко по-малък от b се нагрява, така че да се разшири достатъчно и в нея да влезе тръбата

с външен радиус b . След охлаждането получаваме двуслойна тръба в която действат необходимите ни свиващи напрежения при $r = b$. По-подробен анализ на деформираното и напрегнато състояние в такава тръба може да се намери в [Седов, т. 2, стр. 338].

26.3. Задача на Ламе за куха кълбо. Разглеждаме кухо кълбо съответно с вътрешен и външен радиуси a и b при отсъствие на външни сили. Във вътрешността е приложено налягането p_a , а от външната страна налягането p_b . Материалът на кълбото е линейно еластичен. Търсим напреженията и деформациите в него.

Поставената задача е очевидно сферически симетрическият аналог на задачата на Ламе за кухата тръба, разгледана по-горе. За решаването ѝ използваме сферически координати $\{r, \varphi, \theta\}$. Полето на преместването зависи само от радиалната координата, вж. (26.1), а тензорът на деформацията има вида

$$\mathbf{T}_e = e_{rr} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + e_{\varphi\varphi} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + e_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta,$$

където $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta$ е ортонормираният локален базис на сферическата система. Отсъствието на срязващи деформации тук може да се поясни по същия начин както и ососиметричния случай, вж. § 26.1 и фиг. 26.2. Аналогични са и изразите за компонентите на тензора \mathbf{T}_e :

$$e_{rr} = u_r', \quad e_{\varphi\varphi} = e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r},$$

вж. отново § 26.1 и фиг. 26.3.

Разсъжденията и пресмятанятията от § 26.1 се пренасят дословно и тук с единствената разлика, че трябва да използваме формулата (11.20) за лапласиана в сферични координати. На мястото на (26.8) тогава получаваме:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)' = 3A, \quad A = \text{const}.$$

Общото решение на това диференциално уравнение очевидно е

$$u_r = Ar + \frac{B}{r^2}. \quad (26.18)$$

Интеграционните константи A и B определяме от граничните условия (26.10) — вътрешното и външното налягане върху кълбото. Намирането на окончателните изрази за напреженията в кълбото оставяме на читателя в качеството на просто упражнение.

Упражнение 26.2. Намерете полето на преместването u_r при дадено външно налягане p_b , ако кълбото е плътно ($a = 0$).